

MPRA

Munich Personal RePEc Archive

Estimating Ibovespa's Volatility

Souza-Sobrinho, Nelson

University of Sao Paulo

2001

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/15571/>
MPRA Paper No. 15571, posted 05 Jun 2009 13:26 UTC



Extração da volatilidade do Ibovespa

Nelson Ferreira Souza Sobrinho

Este artigo estima a volatilidade do Ibovespa, desde o início do Plano Real, utilizando dois métodos de extração de volatilidade: os tradicionais modelos da família GARCH e os modelos de volatilidade estocástica (SV). Os diversos critérios de desempenho e seleção apontam que ambas as metodologias são bastante satisfatórias, sobressaindo-se ligeiramente o modelo EGARCH (1,1), o que já foi demonstrado pela literatura. Ao mesmo tempo, uma aplicação prática dos modelos, como o cálculo de VAR, sugere que os dois métodos são equivalentes.

1. Introdução

O presente trabalho aplica dois métodos paramétricos de extração de volatilidade a uma série do Ibovespa durante a vigência do Plano Real. As duas metodologias – os modelos GARCH e os modelos de volatilidade estocástica (SV) – cumpriram seu objetivo com razoável robustez, tendo a primeira apresentado ligeira superioridade. Vale lembrar que os modelos GARCH são ferramentas simples do ponto de vista analítico e computacional, além de largamente difundidos no meio acadêmico e no mercado financeiro. Já a aplicação dos modelos SV se tornou factível há poucos anos, o que os transformou em alternativa aos modelos GARCH, conforme afirmam Valls Pereira *et alii* (1999).

Nos testes de ajuste aos dados e de capacidade preditiva, sobressaiu-se o tradicional modelo EGARCH. Esse resultado confirma as evidências empíricas encontradas por diversos estudos aplicados a ativos financeiros brasileiros e estrangeiros. No entanto, aplicações práticas dos modelos, como no cálculo de VAR, sugerem que essa suposta superioridade pode desaparecer. Talvez, a principal fragilidade do trabalho seja a utilização de um método *ad hoc* (variáveis *dummies*) para capturar os diferentes regimes de volatilidade do Ibovespa. Sofisticações dos modelos GARCH (SWARCH e SWGARCH), que não foram aqui utilizados, são as mais apropriadas para modelar tais fenômenos.

2. Os modelos de volatilidade

2.1. As duas classes de modelos

Neste trabalho, serão estimados apenas três modelos da família GARCH, considerados os que melhor representam as características das séries financeiras¹: GARCH simétrico (Bollerslev, 1986); GARCH-L (Glosten, Jaganathan e Runkle, 1989; Zakoian, 1990); e EGARCH (Nelson, 1991). A seguir, são dadas as formalizações de cada um deles.

GARCH (p, q)

$$y_t = X_t' \beta + \varepsilon_t \quad (1)$$

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} v_t \quad (2)$$

$$h_t = E[\varepsilon_t^2 / \Omega_{t-1}] = h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} \quad (3)$$

onde:

- $y_t = \ln(w_t/w_{t-1})$ é a taxa de retorno instantânea do ativo w_t ;
- X_t' é um vetor de dimensão $1 \times k$ de variáveis explicativas fracamente exógenas ou pertencentes ao conjunto de informação $Y_{t-1} = (y_{t-1}, \dots, y_1, y_0, \dots, y_{-k}, X_{t-1}', \dots, X_1', X_0', \dots, X_{-k}')$;
- β é um vetor de dimensão $k \times 1$ de parâmetros fixos;
- v_t é uma perturbação aleatória, tal que $\text{cov}(h_t, v_t) = 0$ e usualmente assumida $NID(0,1)$;
- Ω_{t-1} é o conjunto das observações passadas de $\varepsilon_t^2, \Omega_{t-1} = (\varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_1^2)$, sendo ε_t^2 os choques inesperados em $t-1$ ocorridos no período t ;
- $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, q, \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, p$ e $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$ são restrições paramétricas, que garantem que (i) a variância incondicional de ε_t (dada por σ_ε^2) seja finita e positiva e (ii) a variância condicional, h_t , seja positiva.

Portanto, pode-se ver que a distribuição incondicional e condicional de ε_t são, respectivamente:

$$\varepsilon_t \sim D(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (4)$$

$$\varepsilon_t / \Omega_{t-1} \sim D(0, h_t) \quad (5)$$

sendo a variância não condicional definida por:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p \beta_j} \quad (6)$$

Em geral, assume-se que $D(\cdot)$ seja uma distribuição paramétrica normal ou *t-Student*. Note que, uma vez satisfeitas as restrições paramétricas, o modelo GARCH não mostra os problemas do modelo EWMA, isto é, distribuição incondicional degenerada dos retornos, persistência unitária da volatilidade e não-reversão à média. Agora, tomando-se como exemplo o modelo GARCH (1, 1), se as restrições paramétricas não forem satisfeitas, de modo que $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, tem-se então um modelo IGARCH (1, 1) (*integrated GARCH*). Os modelos IGARCH foram apresentados por Engle e Bollerslev (1986). O modelo EWMA é um caso particular do modelo IGARCH: o IGARCH sem constante ($\alpha_0 = 0$), sendo $\alpha_1 = 1 - \lambda$ e $\beta_1 = \lambda$.

¹ As principais características das séries financeiras estão detalhadas na Seção 3.

GARCH-L (p, q)

Esse modelo captura os efeitos assimétricos de choques aleatórios sobre as séries financeiras, considerando o fato estilizado de que choques negativos, em geral, aumentam mais a volatilidade das taxas de retorno do que choques positivos (efeito assimetria). O modelo é dado por (1), (2) e por:

$$h_t = E[\varepsilon_t^2 / \Omega_{t-1}] = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} + \gamma d_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2 \tag{7}$$

onde d_{t-1} é uma variável *dummy*, tal que $d_{t-1} = 1$ se $\varepsilon_{t-1} \leq 0$ e $d_{t-1} = 0$ se $\varepsilon_{t-1} > 0$. Se $\gamma = 0$ não há *efeito assimetria* e se $\gamma > 0$ o *efeito assimetria* existe, sendo que $0 < \gamma < 1$. As restrições sobre os parâmetros são as mesmas do modelo GARCH (p, q).

EGARCH (p, q)

o objetivo desse modelo é o mesmo do anterior, ou seja, representar as diferentes respostas da taxa de retorno aos choques positivos e negativos, mas sem a necessidade de qualquer restrição paramétrica. O modelo é dado por (1), (2) e por:

$$\ln(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \gamma_i \frac{\varepsilon_{t-i}}{h_{t-i}} + \sum_{i=1}^q \alpha_i \left| \frac{\varepsilon_{t-i}}{h_{t-i}} \right| + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln(h_{t-j}) \tag{8}$$

Nesse caso, a assimetria é capturada pelos coeficientes γ_i . Se $\gamma_i < 0$, um choque negativo aumentará a volatilidade, ocorrendo o contrário com um choque positivo.

Na segunda classe de modelos, a informação não é uma variável observada. Os modelos de volatilidade estocástica (SV) univariados foram introduzidos por Taylor (1980), sendo a estimação pelo método da *quasi-máxima verossimilhança* (usando o filtro de Kalman) apresentado por Nelson (1988) e a extensão para o caso multivariado sugerida por Harvey (1994)². Tais modelos estão mais intimamente relacionados à moderna teoria das finanças, tendo em vista que são uma aproximação discreta de processos estocásticos contínuos em que se baseiam generalizações do modelo de Black & Scholes (Harvey, 1994, pg. 247).³ Esses autores reconhecem que a principal desvantagem dos modelos de volatilidade estocástica é a dificuldade de estimá-los via máxima verossimilhança.

Nos modelos de volatilidade estocástica, o conjunto de informações não é definido por Y_{t-1} (todas as observações passadas), mas por um processo estocástico não observado, h_t , que representa o fluxo de novas informações absorvido pelo mercado financeiro (componente estocástico da variância). A estrutura do modelo univariado é a seguinte:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t \tag{9}$$

$$h_t = \ln(\sigma_t^2) \tag{10}$$

onde y_t é novamente a taxa de retorno, que deve ser um ruído branco, σ_t^2 é a

² Para mais detalhes sobre os diversos modelos de volatilidade, ver Hamilton (1994), Issler (1999a) e Pereira (1999).

³ Issler (1999a) chama a atenção para o fato de que os modelos GARCH são criticados por não terem fundamento na teoria das finanças, embora Nelson (1990) tenha mostrado que podem ser pensados como uma ponte entre a econometria e a teoria das finanças.

variância da taxa de retorno e ε_t é um ruído branco gaussiano, $\varepsilon_t \sim \text{NID}(0,1)$. Uma formulação possível para h_t , e utilizada neste trabalho, é dada por um processo auto-regressivo de primeira ordem:

$$h_t = \gamma_1 h_{t-1} + \eta_t \quad (11)$$

onde $\eta_t \sim \text{NID}(0, \sigma_\eta^2)$ e $E(\varepsilon_t \eta_s) = 0$, para todo t, s . As hipóteses anteriores implicam a seguinte distribuição condicional dos retornos:

$$y_{iht} \sim N[0, \exp(h_t)] \quad (12)$$

e na seguinte distribuição de h_t :

$$h_t \sim N(0, \sigma_\eta^2 / (1 - \gamma_1^2)), \quad |\gamma_1| < 1 \quad (13)$$

Das hipóteses anteriores, segue-se que y_t é estritamente estacionário, dado que é o produto de dois processos estritamente estacionários. Além disso, pode-se mostrar que y_t apresenta excesso de curtose em relação à normal, fato condizente com as séries financeiras. Resolvendo-se (10) para σ_t e substituindo-se em (9) resulta em:

$$y_t = \sigma \varepsilon_t \exp(h_t/2) \quad (14)$$

onde σ foi adicionado simplesmente como um fator de escala. Para facilitar a aplicação do filtro de Kalman, lineariza-se (14) como segue:

$$\ln(y_t^2) = \kappa + h_t + \xi_t \quad (15)$$

onde $\kappa = \ln(\sigma^2) + E[\ln(\varepsilon_t^2)]$ é uma constante e $\xi_t = \ln(\varepsilon_t^2) - E[\ln(\varepsilon_t^2)]$ é o componente irregular. Uma vez que é possível obter taxas de retorno nulas ou negativas, a linearização por meio da aplicação do logaritmo fica inviabilizada. Nesse caso, recomenda-se a seguinte transformação da série, mediante a sugestão de Fuller, baseada em séries de Taylor, dada por:

$$\ln(\tilde{y}_t^2) = \ln(y_t^2 + c\tilde{\sigma}_y^2) - c\tilde{\sigma}_y^2 / (y_t^2 + c\tilde{\sigma}_y^2) \quad (16)$$

onde $\tilde{\sigma}_y^2$ é a estimativa da variância incondicional dos retornos e c é uma constante arbitrária a ser selecionada.

2.2. Estimação dos modelos de volatilidade

Os métodos geralmente empregados na estimação dos modelos GARCH são o de máxima verossimilhança (ML), sob a hipótese de a taxa de retorno ser distribuída conforme uma normal ou *t-Student*, e o da *quasi*-máxima verossimilhança (QML), que prescinde da exata especificação da função densidade da taxa do retorno. A distribuição condicional para a taxa de retorno utilizada neste trabalho é a normal, que, apesar de ser uma representação bastante simplificada do processo gerador de dados dos retornos condicionais, é amplamente utilizada na estimação dos modelos de volatilidade. A função log-verossimilhança, derivada da normal e condicional nas primeiras observações, é dada por:

$$L(\theta; y_t / Y_{t-1}, X_t) = \sum_{t=1}^T \log f(y_t / Y_{t-1}, X_t; \theta) = -\frac{T}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log(h_t) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \quad (17)$$

onde $Y_{t-1} = (y_{t-1}, \dots, y_1, y_0, \dots, y_{-k}, X_{t-1}', \dots, X_1', X_0', \dots, X_{-k}')$ e $\theta = (\beta', \delta')$ é o vetor de parâmetros que inclui os parâmetros da equação da média (β) e os parâmetros da equação da variância condicional (δ).

Mesmo que a perturbação v_t dada em (2) seja não-gaussiana, é possível obter estimadores consistentes de θ , maximizando a função dada em (17), desde que:

$$v_t / (Y_{t-1}, X_t') \sim (0, 1) \quad (18)$$

Segundo Hamilton (1994, pg. 663), sob certas condições de regularidade:

$$\sqrt{T}(\theta_T - \theta) \xrightarrow{L} N(0, D^{-1}SD^{-1}) \quad (19)$$

onde:

- $D^{-1}SD^{-1}$ é a matriz de covariância corrigida conforme Bollerslev e Wooldridge (1992), correção utilizada neste trabalho;
- θ_T é o estimador que maximiza (17) e θ é o verdadeiro estimador que caracteriza os modelos dados por (1), (2) e pela parametrização da variância condicional;
- $S = \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [s_t(\theta)][s_t(\theta)]'$, sendo $s_t(\theta)$ o vetor *score* encontrado na maximização de (17);
- $D = \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T -E[(\partial s_t(\theta) / \partial \theta') / Y_{t-1}, X_t']$.

Como mencionado, na estimação dos modelos de SV, supõe-se que o termo ξ_t em (15) seja NID(0, $\pi^2/2$), maximizando-se a correspondente função de *quasi*-máxima verossimilhança, cujo logaritmo é dado por:

$$L(\theta; y_t / Y_{t-1}, X_t') = \sum_{t=1}^T \log f(y_t / Y_{t-1}, X_t'; \theta) = -\frac{T}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log(f_t) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{v_t^2}{f_t} \quad (19)$$

onde v_t denota o erro de previsão um passo à frente e f_t representa sua variância.

2.3. Critérios de seleção para a qualidade do ajuste

Os indicadores para avaliar a qualidade do ajuste dos modelos estimados são os utilizados na metodologia de seleção de modelos de Box & Jenkins (1976):

- critérios de informação (AIC e BIC);
- estatística Q de Ljung-Box;
- erro-padrão da regressão;
- máximo da função de log-verossimilhança, $L(\cdot)$, encontrado na estimação;
- indicativo de persistência dos choques, dado por λ , sendo $\lambda = \alpha_1 + \beta_1$ no caso do modelo GARCH(1,1); $\lambda = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma$ no caso do modelo GARCH-L(1,1); e $\lambda = \beta_1$ no caso do modelo EGARCH(1,1) – um valor muito alto para a λ (próximo da unidade) significa que o modelo superestima a persistência dos choques;
- meia vida da série, definida por $HL = 1 - (\log 2) / (\log \lambda)$, que fornece uma idéia do tempo que a volatilidade leva para estabilizar-se após a ocorrência de um choque significativo;
- teste ARCH-LM (multiplicador de Lagrange), que indica se os resíduos exibem alguma estrutura ARCH adicional, o que implicaria especificação incorreta da equação da variância condicional.

2.4. Previsão

Neste trabalho, considerou-se apenas a previsão um-passo-à-frente para avaliar a acurácia preditiva dos modelos por meio de exercícios dentro e fora da amostra. No caso dos modelos GARCH, o valor previsto um-passo-à-frente da variância condicional, tomando-se como exemplo o GARCH (1,1), é dado por:

$$h_{T+1/T} = E_T(h_{T+1}) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_T^2 + \beta_1 h_T \quad (20)$$

Generalizando-se (20) L períodos à frente, obtém-se a previsão de h_{T+L} condicional ao conjunto de informações disponíveis em $T+L-1$:

$$h_{T+L/T+L-1} = E_{T+L-1}(h_{T+L}) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{T+L-1}^2 + \beta_1 h_{T+L-1} \quad (21)$$

Já nos modelos SV, a obtenção do valor previsto de σ_t é um pouco diferente. No caso da previsão dentro da amostra, primeiro é necessário conhecer as estimativas de h_t e do fator de escala σ . A estimativa de h_t considerada é o seu valor suavizado, $h_{t/T}$, e a estimativa de σ é aproximada pelo desvio-padrão da série original, y_t , ajustada para a heterocedasticidade, isto é:

$$\sigma = DP \left[y_t \exp \left(-\frac{h_{t/T}}{2} \right) \right] \quad (22)$$

Por fim, a volatilidade prevista um-passo-à-frente é dada por:

$$\sigma_{t/T} = \sigma \exp \left(\frac{h_{t/T}}{2} \right) \quad (23)$$

A avaliação da acurácia preditiva dos modelos de volatilidade é geralmente baseada em quatro funções de perda, as quais comparam os valores previstos de h_t (ou de σ_t^2) e ε_t^2 no contexto da previsão um-passo-à-frente, conforme proposto por Hamilton e Susmel (1994)⁴. São elas *mean squared error* (MSE), *mean absolute error* (MAE), *mean squared error in logs* (LE²) e *mean absolute error in logs* (LE|). As expressões para cada uma são as seguintes, no caso da previsão fora da amostra um-passo-à-frente:

$$MSE = \sum_{i=1}^L \frac{(\varepsilon_{T+i}^2 - h_{T/T+i-1})^2}{L} \quad (24)$$

$$MAE = \sum_{i=1}^L \left| \frac{\varepsilon_{T+i}^2 - h_{T/T+i-1}}{L} \right| \quad (25)$$

$$LE^2 = \sum_{i=1}^L \frac{[\ln(\varepsilon_{T+i}^2) - \ln(h_{T/T+i-1})]^2}{L} \quad (26)$$

$$LE| = \sum_{i=1}^L \left| \frac{[\ln(\varepsilon_{T+i}^2) - \ln(h_{T/T+i-1})]}{L} \right| \quad (27)$$

⁴ Para tornar comparáveis os diferentes modelos entre os exercícios de previsão (comentados a seguir), consideraram-se os resíduos padronizados nas funções de perda.

Naturalmente, um modelo com boa acurácia preditiva é aquele capaz de minimizar essas funções de perda. Para avaliar as funções de perda, foram realizados três exercícios de previsão, sendo o primeiro o usual exercício de previsão um-passo-à-frente dentro da amostra, utilizando todo o conjunto de observações disponível para estimação e previsão (Exercício I). O segundo (Exercício II) é o usual exercício de previsão um-passo-à-frente fora da amostra, o qual não considera as 100 últimas observações ($L = 100$). O terceiro (Exercício III), conforme Valls Pereira (1999), é parecido com o anterior, mas usa as 100 últimas observações de modo diferente: inicialmente, estima o modelo sem as últimas 100 observações e, então, faz a previsão dos 20 retornos seguintes à última observação contida na estimação; em seguida, descarta as 20 observações iniciais e incorpora as 20 primeiras observações do conjunto das 100 observações reservadas, reestima o modelo e faz a previsão das 20 observações seguintes, repetindo o procedimento até a utilização completa das 100 últimas observações. Embora mais trabalhoso (são feitas cinco estimações para cada modelo), o terceiro exercício possui as seguintes qualidades: manutenção do tamanho da amostra constante; atualização periódica das estimativas dos parâmetros, aproximando-se de uma estimação recursiva; e escolha de 20 observações não-casual, tendo em vista que esse número é aproximadamente o número de dias úteis em um mês ou a metade da maturidade de um opção.⁵

Além da avaliação das funções de perda, foi construído um intervalo de confiança de 95% para os exercícios dentro e fora da amostra, com o intuito de avaliar a frequência dos retornos que caem fora do intervalo, utilizando a média e a variância condicionais estimadas. Quanto mais próxima de 5% for a proporção de retornos observados fora do intervalo de confiança, maior a aderência da previsão ao intervalo, o qual é definido como segue, no caso da distribuição normal:

$$IC_t = \mu_t \pm 1,96\sqrt{h_t} \quad (28)$$

O chapéu significa que se trata dos parâmetros estimados. No modelo de volatilidade estocástica, o valor de 1,96 é multiplicado por σ_t . Esse procedimento é, em verdade, um teste de *stress* para cada modelo de volatilidade.

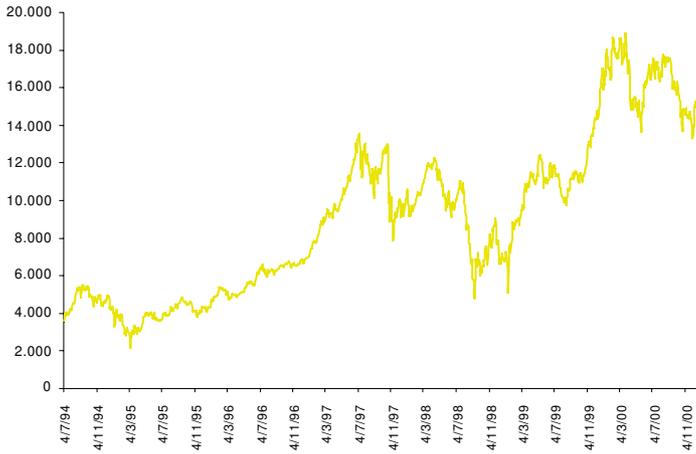
3. Os dados

A série financeira utilizada neste trabalho é a do Ibovespa a vista em reais, dados de fechamento diário (somente dias úteis), abrangendo o período de 4/7/1994 a 28/12/2000 – portanto, com 1.606 observações ao todo (Figura 1). Naturalmente, algumas observações serão perdidas na estimação, uma vez que a taxa de retorno será modelada por intermédio de filtro auto-regressivo.

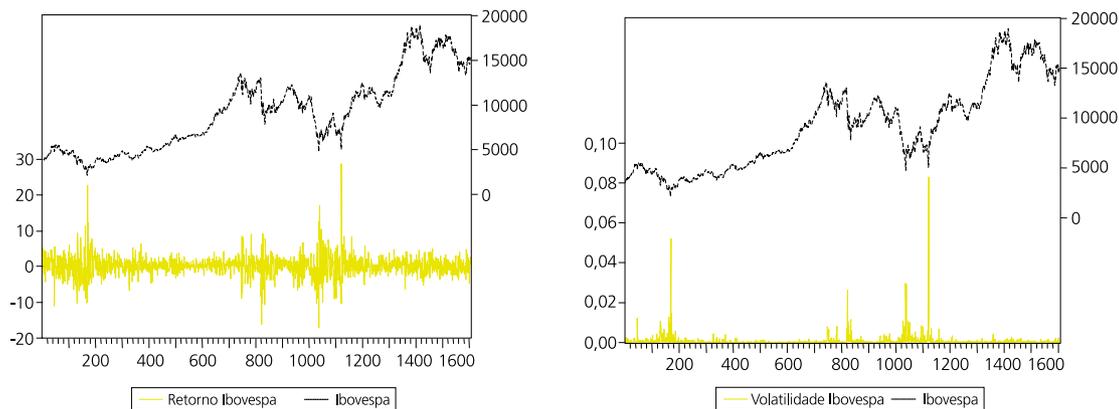
A análise da Figura 2 permite identificar a alternância de regimes de baixa e de alta volatilidades. Inicialmente, nota-se um regime de baixa no retorno e de volatilidade relativamente elevada, que vai do início da série, em 4/7/1994, a meados de 1995. Destaca-se que a alta volatilidade desse período está associada à crise do México (27/12/1994) e à mudança da banda de flutuação da taxa de câmbio brasileira (10/3/1995). Em seguida, observa-se um regime de baixa volatilidade e de ascensão quase permanente do valor do índice, que se estende de meados de 1995 a meados de 1997. Segue, então, novo período de elevada volatilidade e de ausência de tendência definida no nível do índice, coincidente com as crises financeiras internacionais (crise da Ásia,

⁵ Valls Pereira (1999), p. 96.

**Figura 1 – Evolução do Ibovespa
4/7/1994 a 28/12/2000**



**Figura 2 – Ibovespa × retorno instantâneo e
volatilidade instantânea**



iniciada em 27/10/1997, e moratória da Rússia, em 17/8/1998) e com a maxidesvalorização cambial brasileira (14/1/1999). Esse terceiro regime poderia ser estendido entre meados de 1997 e meados de 1999. Por fim, uma vez evidenciado o baixo coeficiente de *pass-through* da desvalorização cambial, parece emergir novo regime, caracterizado por redução da volatilidade e retornos ascendentes ao longo de 1999 e início de 2000, embora com reversão de parte dos ganhos no segundo semestre de 2000.

Grosso modo, pode-se dizer que, no primeiro ano do Plano Real, tem-se um regime de elevada volatilidade, acompanhado de um período de relativa, calma nos dois anos seguintes. Depois, retorna-se ao regime de alta volatilidade, com duração aproximada de dois anos, e, por fim, tem-se novamente um regime de baixa volatilidade, que já dura cerca de um ano e meio (início de 1999 ao final de 2000).

A Tabela 1 fornece uma idéia da alternância dos regimes, tomando como *proxy* o desvio-padrão da variância amostral. Note que a volatilidade anual, definida por $vol_{dia} \sqrt{252}$, é praticamente o dobro nos períodos de alta em relação aos períodos de baixa. Outra observação pertinente é a de que o

Ibovespa pode ser considerado um portfólio bastante volátil, tendo em vista que apresenta volatilidade anual da ordem de 45%, não obstante sua suposta diversificação.⁶ Uma maneira precisa de se estimar a volatilidade do Ibovespa sob diferentes regimes é por meio da aplicação dos modelos SWARCH e SWGARCH ou da incorporação de variáveis *dummies*. Ainda que seja uma solução *ad hoc*, utilizou-se a segunda alternativa neste trabalho.⁷

Tabela 1 – Indicadores amostrais dos diferentes regimes do Ibovespa

Período	Ibovespa médio	Retorno amostral médio diário (%)	Variância amostral diária do retorno	Volatilidade amostral diária (%)	Volatilidade amostral anual (%)
Jul/94–jun/95	4.135,18	0,00257	15,0836	3,8838	61,6534
Jul/95–jun/97	6.382,08	0,25339	2,6398	1,6248	25,7929
Jul/97–jun/99	9.952,79	-0,01572	14,0742	3,7515	59,5532
Jul/99–dez/00	14.843,52	0,07290	3,6723	1,9163	30,4203
Média	9.108,17	0,09032	8,2940	2,8799	45,7167

A análise da Figura 2, que mostra o Ibovespa ante o retorno nominal instantâneo, calculado como $100 \times \ln(I_t/I_{t-1})^8$, e a volatilidade instantânea, calculada como o retorno (não-multiplicado por 100) ao quadrado, bem como a análise das estatísticas descritivas relativas à taxa de retorno do índice (Tabela 2), permite identificar alguns fatos estilizados, comumente encontrados em séries financeiras:

Tabela 2 – Estatísticas descritivas da taxa de retorno e da volatilidade instantânea do Ibovespa

Estatísticas	Retorno		Volatilidade (retorno ao quadrado)		
	Valor	Estatísticas	Valor (<i>p-value</i>)	Estatísticas	Valor (<i>p-value</i>)
Média diária (%)	0,090317	ACF(1)*	0,054 (0,029)	ACF(1) ^{2*}	0,198 (0,000)
Mediana (%)	0,148773	ACF(2)	-0,025 (0,056)	ACF(2)	0,211 (0,000)
Máximo (%)	28,81763	ACF(3)	-0,045 (0,028)	ACF(3)	0,187 (0,000)
Mínimo (%)	-17,22924	ACF(4)	-0,057 (0,007)	ACF(4)	0,098 (0,000)
Desvio-padrão	2,879933	ACF(5)	-0,071 (0,000)	ACF(5)	0,087 (0,000)
Assimetria	0,640745	ACF(6)	-0,075 (0,000)	ACF(6) ²	0,132 (0,000)
Curtose	14,77366	ACF(12)	-0,024 (0,000)	ACF(12)	0,104 (0,000)
Jarque-Bera (JB)	9379,978	ACF(24)	0,018 (0,000)	ACF(24)	0,037 (0,000)
<i>P-value</i> JB	0,000000	ACF(36)	-0,041 (0,000)	ACF(36)	0,037 (0,000)
		$2/\sqrt{T}^{**}$	0,050	$2/\sqrt{T}^{**}$	0,050

(*) Os números entre parênteses referem-se à ordem de defasagem.

(**) Limite assintótico da função de autocorrelação (ACF).

⁶ Hull (2000, pg. 241) comenta que os valores típicos da volatilidade de uma ação se situam entre 20 e 40% ao ano.

⁷ Ver Valls Pereira e Almeida (2000) sobre a aplicação dos modelos SWARCH e SWGARCH ao Ibovespa no período de 4/7/1994 a 30/6/1998.

⁸ A taxa de retorno foi multiplicada por 100, para evitar problemas com valores muito pequenos.

- os retornos possuem média quase nula e não apresentam autocorrelação óbvia;
- os retornos ao quadrado, sim, apresentam autocorrelação, com lento declínio da função de autocorrelação;
- presença de *clusters* de volatilidade;
- presença do *leverage effect*, de modo que a volatilidade é maior quando os preços estão em queda do que quando estão subindo (conforme mostra a segunda parte da Figura 2);
- presença de assimetria relativamente pequena na distribuição do retorno incondicional e de curtose muito alta, sugerindo uma distribuição com caudas bastante pesadas, bem diferente da distribuição normal, hipótese rejeitada pelo teste de Jarque-Bera.

A série do Ibovespa aqui considerada confirma todos os fatos estilizados, exceto aquele que prevê a não-autocorrelação dos retornos, uma vez que a autocorrelação de ordem um é significativa, o que levaria a rejeitar a hipótese de o retorno ser distribuído como um ruído branco, conforme requerido pela expressão (4). De qualquer forma, os valores absolutos dos coeficientes de correlação são muito pequenos, levantando dúvidas quanto à possibilidade de previsão sistemática do retorno. A este respeito Issler (1999a, pg. 27) comenta: “if returns were predictable, there would be arbitrage opportunities for the average investor. Since anyone can be an average investor, there can be no autocorrelation for the return”. Um modelo de volatilidade adequado é aquele capaz de reproduzir os principais fatos estilizados das séries financeiras, que são sinteticamente os seguintes: efeito assimetria, presença de conglomerados de volatilidade, leptocurtose das taxas de retorno e autocorrelação significativa para as taxas de retorno ao quadrado.

4. Inferência, seleção e previsão

4.1. Estimação, seleção e previsão para os modelos GARCH

Inicialmente, foram estimados três modelos bastante parcimoniosos (básicos), com as seguintes especificações:

$$\text{Média: } y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (29)$$

$$\text{GARCH (1, 1): } h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \quad (30)$$

$$\text{GARCH-L (1, 1): } h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} + \gamma d_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2 \quad (31)$$

$$\text{EGARCH (1, 1): } h_t = \alpha_0 + \alpha_1 |\varepsilon_{t-1}| / h_{t-1} + \gamma_1 \varepsilon_{t-1} / h_{t-1} + \beta_1 \ln(h_{t-1}) \quad (32)$$

Na Tabela 3, observa-se que todos os parâmetros estimados são significantes ao nível de 5%, com exceção da constante da média dos modelos GARCH-L e EGARCH, que são significantes ao nível de 10%, bem como o parâmetro de ε_{t-1}^2 do modelo GARCH-L, cujo *p-value* relacionado é de 11,5%. Além disso, as restrições paramétricas são satisfeitas tanto no GARCH como no GARCH-L. É conveniente lembrar que, embora a estimativa de ϕ_1 seja estatisticamente diferente de zero, seu valor absoluto é diminuto, o que remete à afirmativa anterior de Issler (1999).

Mais importante, o efeito assimetria de fato está presente no Ibovespa, tendo em vista que o coeficiente da variável *dummy* no modelo GARCH-L é positivo e significativo, e que o coeficiente de $\varepsilon_{t-1} / h_{t-1}$ no modelo EGARCH também é significativo e negativo. Esses resultados empíricos comprovam, portanto, que a volatilidade condicional do Ibovespa apresenta diferentes respostas aos choques positivos e negativos.

Por outro lado, a Tabela 3 também mostra que o melhor modelo básico é o EGARCH (1, 1), pelos critérios do máximo de $L(\cdot)$, do erro-padrão e das estatísticas de informação. As estatísticas $Q(\cdot)$ de Ljung-Box não apontam autocorrelação residual, mostrando que os modelos estimados são uma razoável aproximação para o processo gerador de dados dos retornos do

Tabela 3 – Estimativas e indicadores da qualidade do ajuste para os modelos básicos

Parâmetros	Estimativas			Indicadores	Qualidade do ajuste		
	GARCH (1,1)	GARCH-L (1,1)	EGARCH (1,1)		GARCH (1,1)	GARCH-L (1,1)	EGARCH (1,1)
Média				$L(.)$	-3622,103	-3592,025	-3590,943*
• C	0,201 (0,049)	0,102 (0,054)	0,093 (0,052)	Erro-padrão	2,882*	2,883	2,882*
• AR(1)	0,072 (0,032)	0,096 (0,029)	0,088 (0,027)	AIC	4,522	4,486	4,484*
Variância				BIC	4,539	4,506	4,505*
• C	0,209 (0,050)	0,328 (0,066)	-0,128 (0,030)	Persistência	0,981	0,951	0,943*
• ε_{t-1}^2	0,191 (0,038)	0,028 (0,018)	—	Meia-vida	37,13	14,80	12,40*
• h_{t-1}	0,790 (0,029)	0,794 (0,028)	—	ARCH-LM (1)	0,852*	0,365	0,431
• $d_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2$	—	0,258 (0,052)	—	Q(6) (resíduos)	0,248	0,261	0,277
• $ \varepsilon_{t-1} /h_{t-1}$	—	—	0,280 (0,050)	Q(12) (resíduos)	0,158	0,224	0,165
• $\varepsilon_{t-1}/h_{t-1}$	—	—	-0,148 (0,030)	Q(24) (resíduos)	0,225	0,247	0,200
• $\ln(h_{t-1})$	—	—	0,943 (0,011)	Q(36) (resíduos)	0,317	0,390	0,328
				Q(6) (resíduos ²)	0,358	0,506	0,396
				Q(12) (resíduos ²)	0,566	0,538	0,505
				Q(24) (resíduos ²)	0,521	0,667	0,587
				Q(36) (resíduos ²)	0,522	0,740	0,631

Desvios-padrão entre parênteses; os valores de ARCH-LM, $Q(.)$ e $Q(.)^2$ referem-se aos p -values; os asteriscos denotam o melhor modelo.

lbovespa. Note, ainda, que o comportamento das estatísticas $Q(.)$ dos resíduos ao quadrado evidenciam a existência de estrutura não-linear nos retornos. Tanto as estatísticas $Q(.)$ como o teste ARCH-LM indicam que ambas as equações (média e variância) foram corretamente especificadas. Foram realizados testes de normalidade em ambos os modelos (não reportados na tabela) e todos rejeitaram a hipótese nula de que os resíduos sejam gaussianos, resultado esperado, pois os retornos não apresentam distribuição normal.

Observa-se, ainda na Tabela 3, que a persistência é bastante elevada, principalmente no GARCH simétrico, fato relacionado aos diferentes regimes de volatilidade, conforme comentado na Seção 2. Um aspecto que pode aumentar a persistência é a própria forma de estimação do *software Eviews* (usado na estimação), que, segundo observado por Valls Pereira (1999), utiliza uma rotina de otimização sem considerar as restrições paramétricas impostas aos modelos GARCH e GARCH-L. Note que a meia-vida da série no modelo GARCH é quase três vezes maior do que nos demais modelos, uma vez que apresenta persistência mais elevada. Na tentativa de se obterem persistências mais condizentes com a realidade,⁹ utilizou-se um procedimento *ad hoc*, ou seja, a introdução de três variáveis *dummies* na equação da variância dos modelos GARCH e GARCH-L, as quais assumem os seguintes valores:

$$d_1 = 1 \text{ entre as observações 1 e 250 e } d_1 = 0 \text{ caso contrário;}$$

$$d_2 = 1 \text{ entre as observações 251 e 750 e } d_2 = 0 \text{ caso contrário;}$$

$$d_3 = 1 \text{ entre as observações 751 e 1.250 e } d_3 = 0 \text{ caso contrário.}$$

Assim, os modelos básicos para a variância passam a ser definidos por (1), (2) e por:

$$\text{GARCH (1, 1): } h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_1 h_{t-1} + \gamma_{11} d_1 + \gamma_{12} d_2 + \gamma_{13} d_3 \quad (33)$$

$$\text{GARCH-L (1, 1): } h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_1 h_{t-1} + \gamma d_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_{21} d_1 + \gamma_{22} d_2 + \gamma_{23} d_3 \quad (34)$$

⁹ Valls Pereira e Almeida (2000) encontraram persistência em torno de 0,8, por meio dos modelos SWARCH e SWGARCH, para o Ibovespa no período julho/94 a junho/98. Considerando-se que esses modelos estimam a persistência com maior precisão, então a meia-vida do Ibovespa seria em torno de uma semana.

É importante ressaltar que foram estimados modelos com as *dummies* também na equação da média, mas seus coeficientes se mostraram insignificantes. Na Tabela 5, observa-se que a introdução das variáveis *dummies* alterou sensivelmente o valor dos coeficientes da variância, principalmente no modelo GARCH. O fato mais importante é o de que as variáveis de intervenção conseguiram reduzir a persistência e a meia vida dos modelos. Como seria de esperar, a redução mais sensível ocorreu no modelo GARCH, em que a meia-vida diminuiu em dois terços, situando-se em bases mais realistas, em torno de duas semanas. Os testes do multiplicador de Lagrange e de Ljung-Box continuam indicando que as especificações da média e da variância são robustas. Note que os coeficientes de todas as variáveis *dummies* são significantes ao nível de 10%, exceto os coeficientes de d_2 e d_3 no modelo GARCH-L. Foram também estimados modelos com variáveis *dummies* representando cinco observações extremas (*outliers*) do retorno (Tabela 4), identificadas pela inspeção visual da Figura 2.

Tabela 4 – Observações extremas do retorno do Ibovespa

Obs.	Data	Retorno	Evento relacionado
170 ^a	10/3/1095	22,81%	Mudança da banda de flutuação da taxa de câmbio no Brasil.
822 ^a	27/10/1997	-16,22%	Início do ataque especulativo na Ásia.
1.037 ^a	10/9/1998	-17,23%	Forte incerteza quanto à política cambial brasileira.
1.040 ^a	15/9/1998	17,13%	Anúncio do FMI e G-7 de ajuda financeira à América Latina, para conter o alastramento da crise financeira, acirrada com a moratória russa em agosto de 1998.
1.122 ^a	15/1/1999	28,82%	Maxidesvalorização cambial brasileira.

Tabela 5 – Estimativas e indicadores da qualidade do ajuste para os modelos com intervenções

Parâmetros	GARCH (1,1)-d	GARCH-L (1,1)-d	EGARCH (1,1)-d	Indicadores	GARCH (1,1)-d	GARCH-L (1,1)-d	EGARCH (1,1)-d
Média				$L(.)$	-3612,696	-3581,102	-3563,56*
• C	0,204 (0,054)	0,099 (0,054)	0,103 (0,053)	Erro-padrão	2,885*	2,885	2,625*
• $AR(1)$	0,066 (0,025)	0,088 (0,027)	0,101 (0,026)	AIC	4,514	4,476	4,457*
• d_{170}	—	—	25,37 (3,536)	BIC	4,541	4,506	4,493*
• d_{822}	—	—	-18,24 (2,549)	Persistência	0,940	0,917*	0,953
• d_{1037}	—	—	-20,84 (4,960)	Meia-vida (dias)	12,20	9,00*	15,40
• d_{1040}	—	—	18,08 (2,091)	Teste ARCH-LM(1)	0,955*	0,544	0,842
• d_{1122}	—	—	29,23 (1,128)	$Q(6)$ (resíduos)	0,165	0,195	0,233
Variância				$Q(12)$ (resíduos)	0,139	0,161	0,332
• C	0,364 (0,084)	0,433 (0,123)	-0,117 (0,025)	$Q(24)$ (resíduos)	0,256	0,195	0,226
• ε^2_{t-1}	0,187 (0,017)	0,014 (0,017)	—	$Q(36)$ (resíduos)	0,318	0,319	0,324
• h_{t-1}	0,753 (0,024)	0,772 (0,038)	—	$Q(6)$ (resíduos ²)	0,684	0,640	0,384
• $d_{t-1}\varepsilon^2_{t-1}$	—	0,263 (0,059)	—	$Q(12)$ (resíduos ²)	0,732	0,575	0,531
• $ \varepsilon_{t-1} /h_{t-1}$	—	—	0,240 (0,038)	$Q(24)$ (resíduos ²)	0,581	0,718	0,595
• $\varepsilon_{t-1}/h_{t-1}$	—	—	-0,110 (0,023)	$Q(36)$ (resíduos ²)	0,521	0,791	0,724
• $\ln(h_{t-1})$	—	—	0,953 (0,009)				
• d_1	0,527 (0,182)	0,519 (0,286)	—				
• d_2	-0,125 (0,066)	-0,100 (0,094)	—				
• d_3	0,205 (0,095)	0,136 (0,138)	—				

Desvios-padrão entre parênteses; os asteriscos denotam o melhor modelo.

Entre todos os modelos estimados (inclusive *dummies* tanto na média como na variância), sobressaiu-se o modelo EGARCH(1,1)-d, cuja equação da média foi definida por:

$$\text{Média: } y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \delta_1 d_{170} + \delta_2 d_{822} + \delta_3 d_{1037} + \delta_4 d_{1040} + \delta_5 d_{1122} + \varepsilon_t \quad (35)$$

Verifica-se que todos os coeficientes são bastante diferentes dos encontrados no modelo não controlado, o que sugere influência não-desprezível das observações extremas. Além disso, o EGARCH-d apresenta melhores indicadores de ajuste, com exceção da persistência e da meia-vida, agora maiores (Tabela 5).

Como dito anteriormente, a consideração de variáveis *dummies* nos modelos acima é um procedimento estritamente *ad hoc* e apresenta as seguintes fragilidades:¹⁰

- i) não foi realizado nenhum teste formal para se determinar com exatidão a vigência de cada regime, nem para se detectarem as observações extremas;
- ii) uma vez que se suspeita da existência de quatro regimes de volatilidade na série, o procedimento mais adequado seria estimar um modelo de diferentes regimes ou que considere diretamente as mudanças estruturais ocorridas no Ibovespa, como fazem os modelos SWARCH/SWGARCH;
- iii) as variáveis *dummies* podem fazer passar nos testes de especificação um modelo mal especificado, recurso que acaba por forçá-lo a representar o processo gerador dos dados de maneira espúria. Este, porém, não parece ser o caso, dado que as estatísticas *Q(.)* e ARCH-LM indicaram que as especificações são robustas, mesmo antes da introdução das *dummies*.

Os resultados das Tabelas 3 e 5 elegem os modelos EGARCH(1,1) e EGARCH(1,1)-d como os melhores para representar os fatos estilizados do Ibovespa. Como seria de esperar, os modelos assimétricos apresentaram melhor desempenho em relação à qualidade do ajuste. As funções de perda e as freqüências fora do intervalo de confiança para os dois modelos selecionados, bem como para o GARCH-L-d, considerado para fins comparativos, são reportadas na Tabela 6.

Tabela 6 – Funções de perda e freqüência de OBS fora do IC para os melhores modelos

Modelos	MSE	MAE	LE ²		Freqüência (%)
			Exercício I	LE	
GARCH-L (1,1)-d	6,4046 × 10 ⁻⁶	2,5241 × 10 ⁻³	5,3029 × 10 ⁻⁷	6,24148 × 10 ⁻⁴	4,86*
EGARCH (1,1)	5,6622 × 10 ^{-6*}	2,3711 × 10 ^{-3*}	5,2144 × 10 ^{-7*}	5,9243 × 10 ^{-4*}	4,49
EGARCH (1,1)-d	5,1386 × 10 ⁻¹	3,3320 × 10 ⁻²	4,5480 × 10 ⁻⁴	1,5490 × 10 ⁻³	4,86*
Exercício II					
GARCH-L (1,1)-d	7,5596 × 10 ⁻⁶	2,7271 × 10 ⁻³	4,7263 × 10 ⁻⁷	6,5883 × 10 ⁻⁴	3,00*
EGARCH (1,1)	6,7472 × 10 ⁻⁶	2,5734 × 10 ⁻³	3,3766 × 10 ^{-7*}	5,4879 × 10 ^{-4*}	2,00
EGARCH (1,1)-d	6,3685 × 10 ^{-6*}	2,5019 × 10 ^{-3*}	3,4539 × 10 ⁻⁷	6,6084 × 10 ⁻⁴	3,00*
Exercício III					
GARCH-L (1,1)-d	7,2695 × 10 ⁻⁶	2,6693 × 10 ⁻³	4,8295 × 10 ⁻⁷	6,6245 × 10 ⁻⁴	3,00*
EGARCH (1,1)	6,4146 × 10 ^{-6*}	2,5034 × 10 ^{-3*}	3,4244 × 10 ^{-7*}	5,5041 × 10 ^{-4*}	2,00
EGARCH (1,1)-d	7,0000 × 10 ⁻⁶	2,6220 × 10 ⁻³	3,8266 × 10 ⁻⁷	5,9137 × 10 ⁻⁴	3,00*

Os asteriscos denotam o melhor modelo.

¹⁰ Ver Issler (1999b).

No Exercício I, o modelo EGARCH não controlado pelos *outliers* é o melhor em relação às funções de perda. Observa-se que os maiores valores dessas estatísticas são apresentados justamente pelo EGARCH controlado.

A explicação para esse fato é a de que as *dummies* reduzem a zero o resíduo nas observações controladas, implicando maiores valores das funções de perda nessas observações.¹¹ Assim, o ganho em termos de qualidade do ajuste controlando os *outliers* tem relacionado o custo de aumentar os desvios de h_t em relação a ε_t . Pelo critério de aderência ao intervalo de confiança, destacam-se os modelos GARCH-L-d e EGARCH-d. No Exercício II, os modelos EGARCH são os que apresentam menores funções de perda. Agora, o controle dos *outliers* não afeta as funções de perda do EGARCH-d, uma vez que não se considerou nenhuma observação extrema no conjunto das 100 últimas. Já no Exercício III, o EGARCH é eleito o melhor modelo em todas as funções de perda. Contudo, pelo critério da aderência ao intervalo de confiança, os melhores modelos ainda são os outros dois.

Comparando-se as funções de perda entre os exercícios, nota-se que os menores valores de MSE e MAE ocorrem no Exercício I (modelo EGARCH) e que os menores valores de LE^2 e $|LE|$ ocorrem no Exercício II (também no modelo EGARCH). A comparação dos exercícios II e III mostra que as menores funções de perda estão todas no Exercício II (novamente, no modelo EGARCH). Esses resultados revelam duas coisas, sendo a primeira relacionada ao bom desempenho do modelo EGARCH nas previsões dentro e fora da amostra, e a segunda relacionada ao fato de que a atualização contínua do conjunto de informações (Exercício III) não implicou incremento da acurácia preditiva em relação ao uso de um conjunto de informações menos rico (Exercício II), para se fazer a previsão fora da amostra.

Segundo Issler (1999a), quanto maior a frequência de *outliers* na série melhor é o desempenho preditivo do EGARCH, uma vez que esse modelo superestima a previsão da variância quando os erros são muito pequenos. Parece ser o presente caso, já que a frequência de *outliers* nos retornos do Ibovespa não é pequena. O desempenho inferior do EGARCH-d em relação ao EGARCH nos exercícios de previsão comprova esse fato, já que o controle dos *outliers* limita a sua característica. Já o desempenho ruim do EGARCH, no critério de aderência ao intervalo de previsão, também foi encontrado por Valls Pereira *et alii* (1999) na modelagem de Telebrás. Os autores chamam à atenção para o fato de que o poder desse teste nas previsões fora da amostra é pequeno. Eles também indicaram o EGARCH (controlando os *outliers* de 10/3/1995 e 27/10/1997) como o melhor modelo para representar o processo gerador de dados dos retornos de Telebrás.

Portanto, em termos gerais, considerando-se tanto o ajuste como a acurácia preditiva, os modelos EGARCH, sobressaindo-se o EGARCH sem intervenção, foram os que apresentaram melhor desempenho, mesmo comparados ao GARCH assimétrico com intervenções, resultado também encontrado por diversos autores.¹²

¹¹ Apesar de o erro de previsão nas observações controladas ser zero, pode ocorrer (como ocorreu) que os desvios da variância condicional estimada em relação ao erro de previsão um-passo-à-frente aumentam nessas observações, tendo em vista que a variância prevista para a observação extrema utiliza as informações da observação imediatamente anterior, mas é comparada com o erro contemporâneo. Isso pode resultar (e resultou) em maiores MSE e MAE.

¹² Ver Issler (1999a), pg. 48. O próprio Issler (1999b) relembra uma frase lapidar de Hendry, utilizando-a para criticar os modelos econométricos com *dummies*: “A lousy model can win a forecasting competition.” No presente caso, o parcimonioso EGARCH sem *dummies* conseguiu vencer a “competição desleal” dos modelos com *dummies*.

4.2. Estimação, seleção e previsão para os modelos de volatilidade estocástica (SV)

Na estimação dos modelos GARCH, a consideração de um filtro AR(1) foi suficiente para remover a parte sistemática do retorno. Entretanto, para estimar os modelos SV, foi necessário aplicar um filtro de ordem maior, como sugeriu o correlograma dos retornos (não-apresentado no trabalho). A aplicação de um filtro ARMA(6,6) foi capaz de pré-branquear a série, de modo a satisfazer a hipótese requerida pela expressão (9). As expressões da forma univariada dos modelos SV são (9) e

$$\hat{\omega}_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad (36)$$

$$\ln(\hat{\omega}_t^2) = \kappa + h_t + \xi_t \quad (37)$$

onde $\hat{\omega}_t$ representa a estimativa do ruído branco resultante do pré-branqueamento da série. Ressalta-se, ainda, que o tamanho da amostra utilizada para fazer inferências sobre os modelos SV fica agora reduzido em seis observações, em vez de apenas uma, como nos modelos GARCH básicos. Foram estimados três modelos distintos de volatilidade estocástica, a saber:

- Modelo 1 – AR(1) simples para h_t ;
- Modelo 2 – inclui as *dummies* d_1 , d_2 e d_3 controlando os diferentes regimes;
- Modelo 3 – inclui as *dummies* d_{170} , d_{822} , d_{1037} , d_{1040} e d_{1122} controlando as observações extremas.

A Tabela 7 contém os resultados encontrados para cada modelo. São consideradas algumas estatísticas adicionais para a análise da qualidade do ajuste, como o teste convencional para heterocedasticidade dos resíduos (teste H de Breusch-Pagan). Convém lembrar que a persistência nos modelos SV é aproximada pelo coeficiente do processo auto-regressivo, γ_1 .

O modelo 1, por ser o mais parcimonioso nos parâmetros, apresenta menor valor do critério de Schwarz, bem como o maior *p-value* para o teste de heterocedasticidade. Todavia, sua persistência é bastante elevada, implicando meia-vida de 40 dias úteis ou dois meses. Embora a hipótese de não-autocorrelação dos resíduos seja aceita em todas as defasagens, a rejeição dessa mesma hipótese para os resíduos ao quadrado demonstra que o modelo não foi capaz de filtrar toda a não-linearidade de $\hat{\omega}_t$. Já a maior virtude do modelo 2 refere-se à persistência, que foi razoavelmente reduzida via variáveis *dummies* para os regimes. Estas apresentaram pequena significância estatística pois nenhum dos coeficientes estimados são aceitos ao nível de 5% ou mesmo 10%. Além disso, permanece a inadequação à não-linearidade da série. No entanto, este é o modelo que apresenta os maiores *p-values* para o teste de não-autocorrelação dos resíduos.

Por fim, o modelo 3 é aquele que apresenta maior número de estatísticas favoráveis: $L(\cdot)$, erro-padrão e critério de Akaike. O controle das cinco observações extremas foi capaz de reduzir não apenas a persistência em relação ao modelo mais simples, mas também minimizou um pouco a autocorrelação dos resíduos ao quadrado. O fato de as *dummies* controlando os *outliers* conseguirem aumentar o ajuste do modelo 3 em relação ao modelo 2 mostra a grande influência dos cinco *outliers* sobre a persistência da série e sobre os dois regimes de maior volatilidade, identificados na Seção 3. Convém lembrar que o teste de normalidade de Jarque-Bera rejeitou a hipótese nula de que os resíduos sejam distribuídos normalmente em todos os modelos, resultado que não poderia ser diferente, tendo em vista as estatísticas da Tabela 7 e o fato de os modelos SV serem log-normais.

Tabela 7 – Estimativas e indicadores da qualidade do ajuste para os modelos SV

Modelo	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
$L(.)$	-843,133	-844,593	-839,367 ⁺
Erro-padrão	2,862	2,849	2,827 ⁺
AIC	1,0555	1,0544	1,0493 ⁺
BIC	1,0656 ⁺	1,0746	1,0762
Meia-vida (dias)	40,95	21,04 ⁺	26,95
Teste H – <i>p-value</i>	0,6185 ⁺	0,5961	0,6153 ⁺
$Q(6)$ (resíduos)	0,602	0,604	0,488
$Q(12)$ (resíduos)	0,608	0,610	0,487
$Q(24)$ (resíduos)	0,317	0,331	0,287
$Q(36)$ (resíduos)	0,448	0,471	0,433
$Q(6)$ (resíduos ²)	0,000 ^{**}	0,000 ^{**}	0,005 ^{**}
$Q(12)$ (resíduos ²)	0,000 ^{**}	0,000 ^{**}	0,006 ^{**}
$Q(24)$ (resíduos ²)	0,001 ^{**}	0,001 ^{**}	0,075
$Q(36)$ (resíduos ²)	0,000 ^{**}	0,000 ^{**}	0,023 [*]
d_1	—	0,6183 (0,4115)	—
d_2	—	-0,4931 (0,3491)	—
d_3	—	0,3903 (0,3343)	—
d_{170}	—	—	-0,9736 (0,4532)
d_{822}	—	—	1,0259 (0,4202)
d_{1037}	—	—	2,8418 (1,0331)
d_{1040}	—	—	-2,2778 (1,0352)
d_{1122}	—	—	-1,1444 (0,4905)
γ_1	0,9828	0,9660 ⁺	0,9796
σ_n^2	0,02361 [0,0089]	0,0313 [0,0119]	0,0210 [0,0080]
σ_ξ^2	2,6451 [1,0000]	2,6317 [1,0000]	2,6406 [1,0000]

(*) Denota rejeição da hipótese nula de não-autocorrelação dos resíduos ao nível de 5%.

(**) Denota rejeição ao nível de 1%.

Desvios-padrão entre parênteses; os valores entre colchetes denotam a taxa entre a variância do termo irregular e a do termo auto-regressivo; o sinal (+) denota o melhor modelo.

A Tabela 8 contém as funções de perda e a aderência ao intervalo de confiança para os três modelos estimados. Na previsão dentro da amostra, com todas as observações (Exercício I), os menores desvios da volatilidade prevista em relação aos resíduos padronizados (estatísticas MSE e MAE) são apresentados pelo modelo 2, sendo que, nas outras duas funções de perda, sobressai-se o modelo 3. Esses dois modelos apresentam bom desempenho tanto nas funções de perda quanto na frequência de observações fora do intervalo de confiança.

Já nos exercícios II (previsão tradicional fora da amostra) e III (previsão com atualização das estimativas), a melhor *performance* é apresentada pelo modelo que controla os *outliers* (modelo 3). Porém, os três modelos possuem desempenho idêntico no intervalo de confiança fora da amostra. Desse modo, pode-se concluir que os dois modelos com intervenções apresentam ajuste e acurácia preditiva superiores ao modelo básico, sendo, portanto, os dois modelos escolhidos para representar a volatilidade estocástica do lbovespa.

Tabela 8 – Funções de perda e freqüência de OBS fora do IC para os modelos SV

Modelos	MSE	MAE	LE ² Exercício I	LE	Freqüência (%)
Modelo I	36,8676	4,7511	0,1499	0,3248	4,31
Modelo II	19,1023*	3,7032*	0,0849	0,2486	5,13*
Modelo III	23,6893	3,7914	0,0841*	0,2419*	4,88*
Exercício II					
Modelo I	20,2237	4,3409	0,1172	0,3225	3,00
Modelo II	17,0923	3,9452	0,0919	0,2824	3,00
Modelo III	14,8210*	3,6410*	0,0754*	0,2534*	3,00
Exercício III					
Modelo I	63,0378	6,3961	0,1878	0,3953	4,00
Modelo II	58,6779	6,0384	0,1585	0,3585	4,00
Modelo III	54,9352*	5,6992*	0,1358*	0,3263*	4,00

Os asteriscos denotam o melhor modelo.

4.3. Comparação das volatilidades extraídas pelo modelos selecionados

Na Figura 3, são exibidas as volatilidades estimadas em cada modelo selecionado, bem como o desvio-padrão amostral dos retornos, calculado a partir de uma janela móvel de 20 dias (SD 20 dias). As volatilidades são dadas em termos anuais, calculadas a partir da volatilidade diária pela expressão $h_t \sqrt{252}$ (modelos EGARCH) e $\sigma_t \sqrt{252}$ (modelos SV). Percebe-se que o modelo EGARCH(1,1) é aquele que se aproxima mais dos movimentos do desvio-padrão móvel, inclusive reproduzindo os picos de volatilidade da série. Já o EGARCH(1,1)-d apresenta movimentos menos bruscos, tendo em vista que controla os maiores *outliers* da série.

Figura 3 – Volatilidade anual do Ibovespa

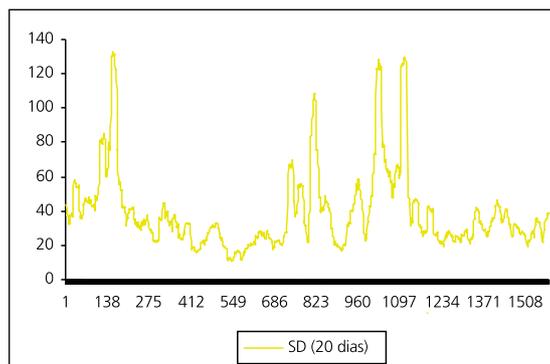
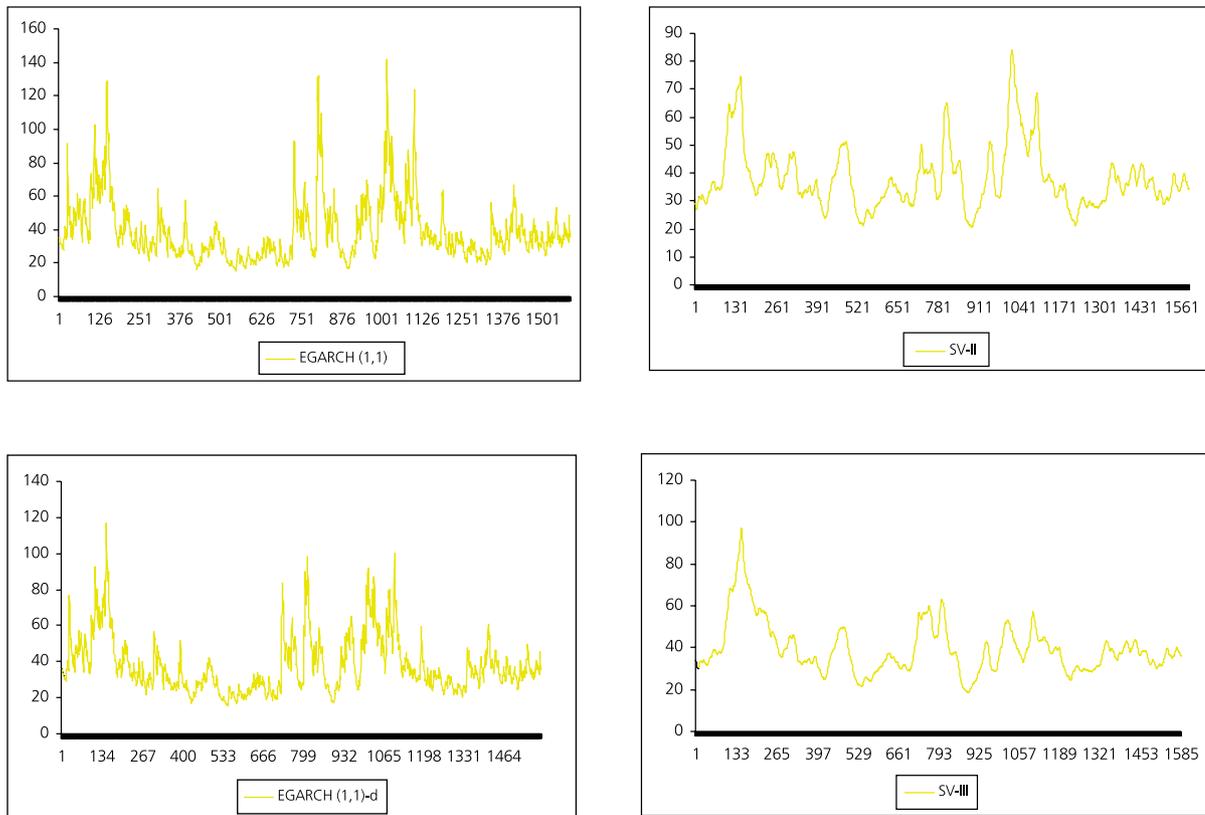


Figura 3 – Volatilidade anual do Ibovespa (continuação)

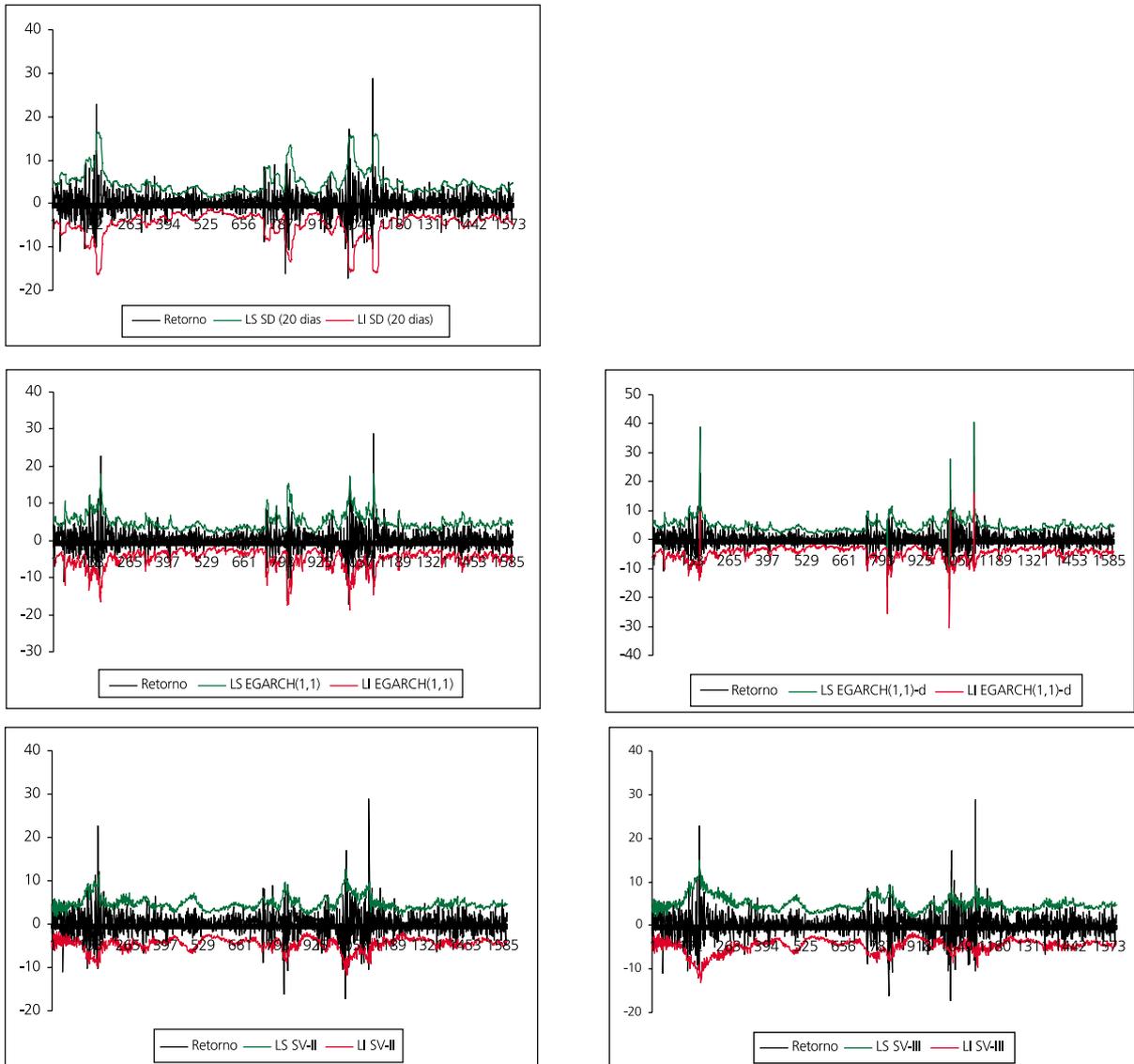


A volatilidade suavizada dos modelos SV apresenta comportamento menos parecido com o desvio-padrão amostral. No modelo 2 (SV-II), não é possível discernir os quatro regimes de volatilidade, bastante visíveis no gráfico do desvio-padrão, tendo em vista que ele controla pelos regimes. Da mesma forma, as observações aberrantes não aparecem no modelo 3 (SV-III), as quais são também controladas como no modelo EGARCH(1,1)-d. A inspeção visual dos gráficos permite afirmar que esse último é a representação mais satisfatória da volatilidade do Ibovespa.

A Figura 4 mostra os retornos do Ibovespa e os intervalos de confiança com seus limites superior (LS) e inferior (LI), calculados para os modelos selecionados e para o desvio-padrão amostral com janela de 20 dias, para o qual foi assumida média nula para a distribuição dos retornos. O desvio-padrão amostral não captura os retornos extremos, mesmo os que não são aberrantes, o que implica maior número de observações fora do intervalo. Além disso, quando a volatilidade é baixa, o limite inferior do intervalo de confiança é sistematicamente superestimado, mas isso ocorre porque se assumiu média nula para os retornos, resultando em simetria para os limites inferior e superior.

Por sua vez, os modelos de volatilidade estocástica parecem superestimar os dois limites do intervalo em períodos de baixa volatilidade, enquanto os intervalos dos modelos EGARCH revelam limites mais adequados à distribuição dos retornos, embora ambas as classes de modelos tenham apresentado desempenho parecido no que se refere à frequência de observações fora do intervalo (na previsão dentro da amostra). É importante assinalar que todos os modelos foram capazes de alargar o intervalo de confiança em períodos de elevada volatilidade e de estreitá-lo nos períodos de volatilidade baixa, fazendo-o com maior precisão do que o método do desvio-padrão móvel de 20 dias.

Figura 4 – Intervalos de confiança dos modelos selecionados



5. Uma aplicação dos modelos de volatilidade: o cálculo de VAR

Nesta seção, os modelos selecionados serão utilizados no cálculo diário do VAR de uma carteira hipotética, idêntica à composição do Ibovespa. Esse exercício, além de uma aplicação prática dos modelos de extração de volatilidade, simula a rotina de gerenciamento de risco baseada em VAR, feita pela maioria dos gestores de risco. Adicionalmente, é um teste empírico, com bastante apelo intuitivo, que servirá de avaliação final para os quatro modelos selecionados.

Quanto à carteira hipotética, supôs-se um investimento inicial de R\$1 milhão, em 3/8/2000, nas ações que compõem o Ibovespa, na exata proporção em que participam do índice. Não foram feitos investimentos adicionais até o término da série, em 28/12/2000, sendo que, nesse período (100 dias), o comportamento da carteira foi acompanhado diariamente. Supôs-se ainda que a proporção de cada ativo na carteira se manteve fixa nesse horizonte de investimento, de maneira que a variação diária do valor do portfólio em dado dia t , ΔP_t , é proveniente apenas da variação do retorno dos

ativos, ponderada pelas respectivas participações. Portanto, teoricamente, essa carteira hipotética deveria apresentar retornos diários idênticos aos do Ibovespa. Assim, o cálculo do VAR diário, ou a perda máxima esperada em $t-1$ para determinado dia t , assumindo-se que os retornos tenham distribuição normal, é dado pela fórmula:

$$\text{VAR}_{t|t-1} = \mu_t - 1,96\sqrt{h_t} P_{t-1} \quad (38)$$

onde μ_t e $\sqrt{h_t}$ são, respectivamente, a média e a volatilidade condicionais dos retornos estimadas em cada modelo e P_{t-1} é o valor da carteira em $t-1$. Para facilitar o cálculo, serão utilizados os mesmos valores de μ_t e $\sqrt{h_t}$, encontrados na previsão fora da amostra, com atualização das estimativas a cada 20 dias (Exercício III, de previsão um-passo-à-frente fora da amostra). Na Figura 5, pode-se comparar, em cada modelo, a variação efetiva do valor carteira (ΔP_t) com o VAR calculado em (38) e com o ganho máximo esperado ($[\mu_t + 1,96\sqrt{h_t}] P_{t-1}$). Também é dado o VAR para o *benchmark* (desvio-padrão móvel, SD 20 dias), que é igual ao ganho máximo esperado por causa da hipótese de média nula dos retornos. Percebe-se que o VAR (perda máxima esperada) calculado nos modelos EGARCH, em geral, supera a perda efetiva da carteira nos mesmos dias em que isso ocorre nos modelos de volatilidade estocástica. Ou seja, esse simples exercício indica que, aparentemente, não há vantagem comparativa de uma classe de modelos sobre a outra. Naturalmente, a afirmação anterior deve ser ressalvada pelo curto horizonte de tempo considerado no exercício (apenas 100 dias) e pelo fato de que a comparação não está sendo feita entre modelos com idêntica especificação (por exemplo, os modelos EGARCH selecionados não controlam os regimes de volatilidade, enquanto o SV-II, sim).

Nota-se, ainda, que o desempenho do *benchmark* não difere muito dos modelos selecionados, provavelmente em função de os retornos se mostrarem bem comportados nas 100 últimas observações. De fato, o teste de Jarque-Bera não rejeita a hipótese nula de que os 100 últimos retornos tenham distribuição normal (p -value de 0,743), bem como o teste de Ljung-Box não rejeita a hipótese nula de não-autocorrelação dos retornos (nenhum p -value se mostrou inferior a 0,474 entre as 36 primeiras defasagens). Deve-se lembrar que o final da amostra está contida numa *subsample* de baixa volatilidade (cerca de 30% ao ano), somente comparável aos meses de bonança do Plano Real (meados de 1995 a meados de 1997).

Figura 5 – VAR dos modelos selecionados e variação efetiva da carteira (em reais)

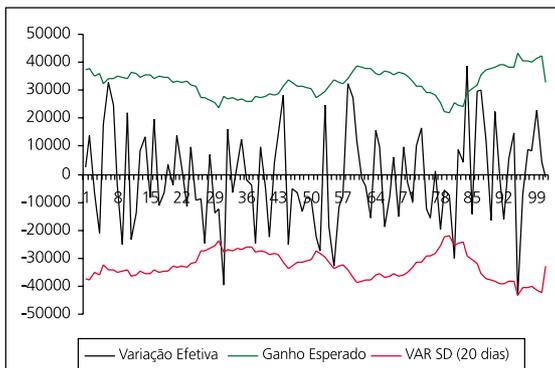
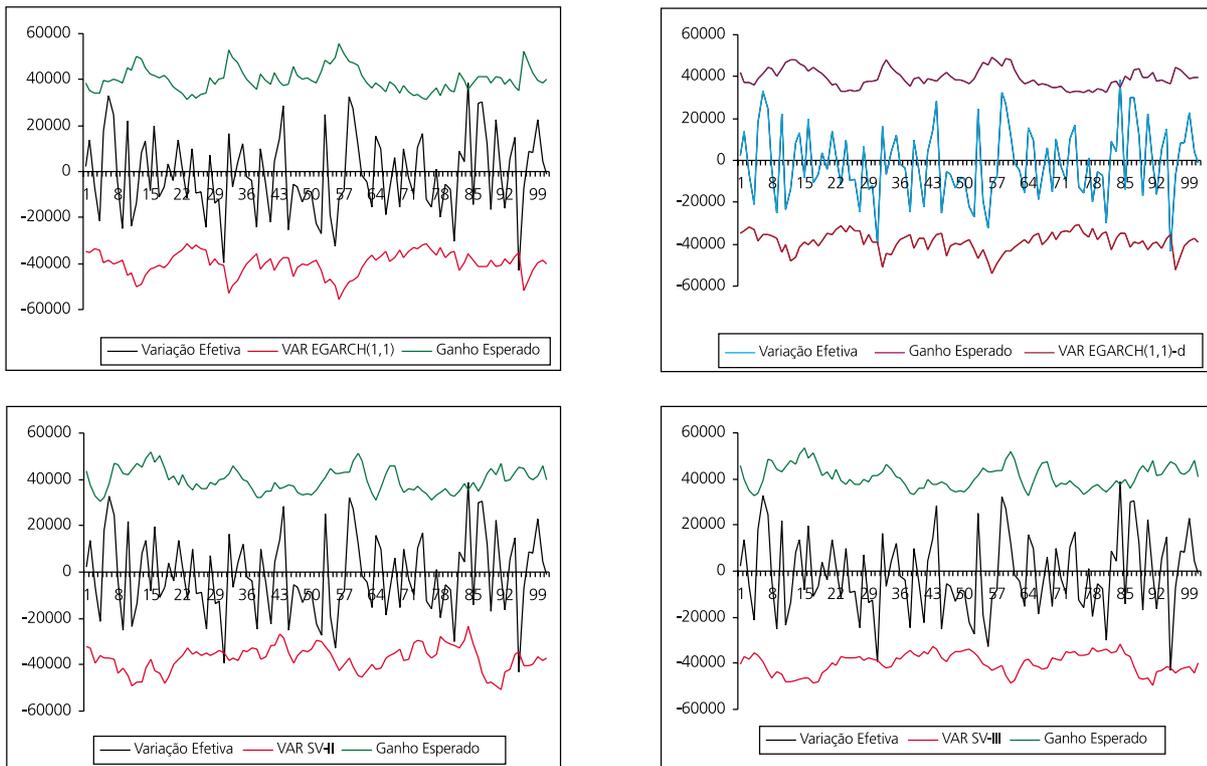
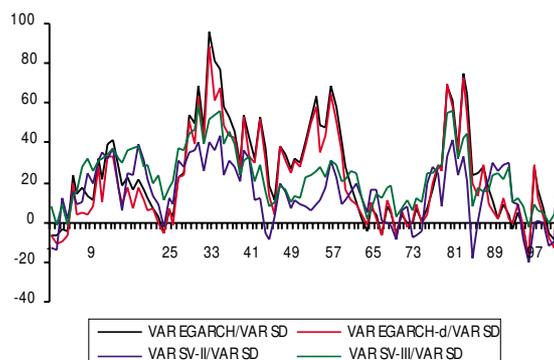


Figura 5 – VAR dos modelos selecionados e variação efetiva da carteira (em reais) (continuação)



Uma consideração final pode ainda ser extraída do exercício de simulação: ambas as classes de modelos de volatilidade apresentaram VAR diários muito próximos, sendo de R\$39,4 mil a média diária para os dois modelos EGARCH e de R\$38,5 mil a média diária para os dois modelos SV. A mesma proximidade se verifica quando se normaliza o VAR de cada modelo pelo VAR do *benchmark*, verificando-se desvios médios de 24,8% para o EGARCH, de 21,1% para o EGARCH-d, de 15% para o SV-II e de 21,4% para o SV-III. A evolução dos desvios diários é dada na Figura 6.

Figura 6 – Desvios médios percentuais entre o VAR de cada modelo e o VAR do SD (20 dias)



Esse resultado implica que a afirmação feita na Seção 1, de que os modelos SV são uma alternativa aos modelos da família GARCH, deve ser vista com certa cautela. Mais apropriado seria dizer que ambas as classes de modelos são equivalentes e não-rivais. Por essa razão, e a despeito da boa *performance* dos consagrados modelos EGARCH, um bom gestor de risco deveria utilizar as duas ferramentas de forma complementar, até porque não mais existem empecilhos computacionais que inviabilizem a utilização dos dois métodos no dia-a-dia.

6. Conclusão

Este trabalho aplicou duas metodologias de extração de volatilidade – GARCH e os modelos SV – à série dos retornos do Ibovespa desde o início do Plano Real. Os modelos selecionados, principalmente EGARCH, foram capazes não apenas de representar os fatos estilizados dos retornos do Ibovespa com relativa precisão, mas também comprovaram ser boas ferramentas de mensuração da volatilidade da série. A volatilidade estimada por esses modelos é útil tanto para os modelos de precificação de opções como para o controle de risco (cálculo do VAR), cujo exemplo prático foi dado na seção anterior. O exercício prático mostrou que as duas classes de modelos parecem ser mais complementares do que rivais, ambas apresentando virtudes e fragilidades, comentadas na Seção 2. Dessa forma, recomenda-se a aplicação das duas metodologias na rotina diária dos gestores de riscos, o que pode conferir maior grau de segurança à tomada de decisões.

Convém lembrar que sofisticções dos modelos GARCH, como SWARCH e SWGARCH, e a estimação utilizando distribuições mais compatíveis com o comportamento dos retornos (como a *t-Student* e, mesmo, a *Generalized Error Distribution*) devem representar os fatos estilizados do Ibovespa com precisão ainda maior. Evidentemente, a utilização desses modelos mais complexos dependerá dos ganhos marginais em relação aos modelos mais simples.

7. Bibliografia

- BOLLERSLEV, T. "Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity", in *Journal of Econometrics* 31, 1986.
- _____ and WOOLDRIDGE, J.M. "Quasi-maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariances", in *Econometric Reviews*, 11, 143-172, 1992.
- BOX, G.E.P. and JENKINS, G.M. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Holden Day, 1976.
- ENDERS, W. *Applied Econometric Time Series*. John Wiley & Sons, 1995.
- ENGLE, R.F. "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", in *Econometrica* 50, 987-1007, July 1982.
- _____ and BOLLERSLEV, T. "Modeling the Persistence of Conditional Variances", in *Econometric Reviews*, 78, 111-125, 1986.
- _____, LILIEN, D. and ROBINS, R. "Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: the ARCH-M Model", in *Econometrica* 55, 391-407, March 1987.
- GLOSTEN, L.R., JAGANNATHAN, R. and RUNKLE, D. "On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Normal Excess Return on Stocks", in *Journal of Finance* 48, 1779-1801, 1993.
- HAMILTON, J.D. *Time Series Analysis*. Princeton University Press, 1994.
- _____ and SUSMEL, R. "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime", in *Journal of Econometrics* 64, 307-333, 1994.
- HARVEY, A., ESTHER, R. and SHEPHARD, N. "Multivariate Stochastic Variance Models", in *Review of Economic Studies* 61, 247-264, 1994.
- HULL, J.C. *Options, Futures, & Other Derivatives*. Prentice Hall, 2000.

- ISSLER, J.V. "Estimating and Forecasting the Volatility of Brazilian Finance Series Using ARCH Models", in *The Brazilian Review of Econometrics*, 19, 1, 5-56, May 1999a.
- _____. "Comentários sobre o artigo Modelos Alternativos para Extração da Volatilidade de Ativos: um Estudo Comparativo", in *The Brazilian Review of Econometrics*, vol. 19, nº 1, 181-192, May 1999b.
- NELSON, D.B. "The Time Series Behavior Stock Market Volatility and Returns", Ph.D Dissertation, MIT, 1998.
- _____. "Conditional Heterosketasticity in Asset Returns: a New Approach", in *Econometrica* 59, 347-370, 1991.
- TAYLOR, S.J. "Conjectured Models for Trend in Financial Prices Tests and Forecasts", in *Journal of the Royal Statistical Society*, A-143, 338-362, 1980.
- VALLS PEREIRA, P.L. "Comments About the Paper: Estimating and Forecasting the Volatility of Brazilian Finance Series Using ARCH Models", in *The Brazilian Review of Econometrics*, 19, 1, 193-196, May 1999.
- _____. and ALMEIDA, N.M.C.G. "Mudança de Regime em Volatilidade: os Modelos Swgarch", Texto de Discussão nº 11, IPE/USP e Ibmec Business School, 2000.
- _____. e ZIEGELMANN, F.A. "Modelos de Volatilidade Estocástica com Deformação Temporal: um Estudo Empírico para o Ibovespa", in *Pesquisa e Planejamento Econômico*, 27, 2, 323-343, 1997.
- _____. HOTTA, L.k., SOUZA, L.A.R. and ALMEIDA, N.M.C.G. "Alternative Models to Extract Asset Volatility: a Comparative Study", in *The Brazilian Review of Econometrics*, 19, 1, 57-109, May 1999.

Nelson Ferreira Souza Sobrinho é mestrando em Teoria Econômica pela FEA/USP. E-mail: nelsonfss@bol.com.br e nelsonfss@mail.usp.br.



Se você escreveu um artigo, leu algo interessante ou tomou conhecimento de uma estratégia de negociação sobre o mercado de derivativos – financeiros ou agropecuários –, você pode publicá-los na *Resenha BM&F*. O espaço sempre estará aberto para seus leitores e colaboradores.

Os textos, com nome do autor, endereços postal e eletrônico, e telefone, devem ser enviados em duas vias para:

