Urishon-Nachbin approach to utility representation theorem

Magyarkuti, Gyula

Corvinus University of Budapest

25 October 2008

Szeparábilitási koncepciók és a reprezentációs tétel Nachbin–féle megközelítése

Magyarkuti Gyula*
Corvinus Egyetem Budapest
Matematika Tanszék

2008. október 25.

Kivonat

A hasznossági függvénnyel való reprezentáció ekvivalens megfogalmazásait tisztázzuk, elsősorban Bridges–Mehta (1995) és Herden–Pallack (2002) alapján. Hangsúlyozni szeretnénk, hogy a reprezentációs tétel az Urisszon–lemma hatókörébe tartozik. A Gap–lemmát nem használjuk, annak súlyát az Urisszon–Nachbin gondolat veszi át. Ez azért fontos, mert ez utóbbi gondolat a topológia mára standard, és korán kialakult eszköztárába tartozik, amíg a Gap–lemma más diszciplínában nem kap szerepet.

A motiváció a következő: A Debreu–féle open gap lemma alkalmazása szerint tranzitív, teljes, a topológiával kompatibilis reláció esetén, ha létezik reprezentáció, akkor folytonos reprezentáció is van. Eszerint Eilenberg és Debreu elegendő feltételeiben (5.3) a topológiai feltételeknek igazándiból a reprezentáció egzisztenciájának biztosításában van szerepük, és a folytonosság már csak a gap lemmában megfogalmazott tulajdonságon múlik. A gap lemma a kérdéskörtől teljesen független, tisztán a valós számok egy igen mélynek látszó és máshol nem szereplő tehát misztikus tulajdonságát állítja. Ez azt az érzetet kelti, hogy a probléma ilyetén tárgyalása nem kielégítő abban az értelemben, hogy nincs beágyazva az analízis és a topológia szokásos fogalom rendszerébe.

A kérdés tehát az, hogy mi a topológia igazi szerepe a reprezentálhatósággal kapcsolatban. Azért, hogy ez minél szembeszökőbben kiderülhessen, először a (nem feltétlen folytonos) reprezentálhatóságra adunk szükséges és elégséges feltételeket (3.12), majd evvel analóg szükséges és elegendő feltételt találunk a folytonos reprezentálhatóságra is (5.2). Ez utóbbi állítások következményeként közös fogalmi rendszerbe helyezve egyszerre bizonyítjuk Eilenberg és Debreu jól ismert tételeit (5.3), amelyek elegendő feltételeket fogalmaznak meg a folytonos reprezentációra.

Azt szeretném hangsúlyozni, hogy a reprezentációs tételt az Urisszon–lemma hold udvarába tartozó állítások közé kell sorolnunk! A gap lemmát nem használjuk és súlyát az Urisszon-Nacbin–féle standardizálódott gondolat veszi át, amely szintén egy mély tulajdonságát használja a valós számok struktúrájának. A gap lemmára nyugodtan tekinthetünk úgy, mint Debreu eredeti hibás bizonyításának megmentése érdekében tett kétségtelenül jelentős, de pusztán technikai erölködésre, amelynek fennmaradását csak az indokolja, hogy valamiért nagyon nehezen találtak rá az abban az időben már standarnak számító Urisszon-féle gondolat alkalmazhatóságára.

1. Bevezetés

Először is megmutatjuk, hogy könnyű elegendő feltételeket találni a reprezentálhatóságra. Nem lenne nehéz megmutatni azt sem, hogy az (1.1 Lemma) feltételei teljesülnek, ha R egy tranzitív, teljes a topológiával kompatibilis reláció, a topológia pedig M2 tulajdonságú. Hasonlóan, ha R egy tranzitív, teljes a topológiával kompatibilis reláció, topológia szeparábilis és összefüggő, akkor (1.2 Lemma) feltételei is fennállnak. Klasszikusan ezek után azonnal alkalmazhatnánk az open gap lemmát, ami folytonos reprezentációt biztosítana, amivel Eilenberg és Debreu tételeit igazolhatnánk is.

Ezt az utat azonban itt nem követjük, hiszen korábban is hangsúlyoztuk szükséges és elegendő feltételeket keresünk.

*e-mail: magyarkuti@member.ams.org web: http://www.uni-corvinus.hu/magyarkuti

1.1. Jelölések

X jelöli az alaphalmazt és $R \subseteq X \times X$ reláció mellett legyen R_x az alsó– és R^x a felsőnívóhalmaz, azaz $R_x \doteq \{y \in R : (x,y) \in R\}$ és $R^x \doteq \{y \in R : (y,x) \in R\}$. Jelölje $A(R) \doteq R \cap (R^{-1})^c$ a *reláció aszimmetrikus részét* és $S(R) \doteq R \cap R^{-1}$ a *reláció szimmetrikus részét.*

Azt mondjuk, hogy egy $f : X \to \mathbb{R}$ függvény R*-monoton*, ha az $(x,y) \in R \Rightarrow f(x) \geq f(y)$. implikáció fennáll.

Amennyiben az $(x,y) \in R \iff f(x) \geq f(y)$ ekvivalencia is fennáll, úgy azt mondjuk, hogy f *reprezentálja* R-et. Világos, hogy az $f : X \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor reprezentáció ha R-monoton és $(x,y) \in A(R) \Rightarrow f(x) > f(y)$.

1.2. Triviális reprezentáció konstrukciók

A szakaszban leírt két hasznossági függvény konstrukció sokszor szükséges és a második motiválja a későbbi Jaffray–sűrűség definícióját.

1.1. lemma. *Legyen $R \subseteq X \times X$ egy tranzitív és teljes reláció, valamint rendelkezzen a $\mathcal{B} = \{B_k \subseteq X : k \in \mathbb{N}\}$ megszámlálható halmazrendszer a következő tulajdonsággal:*
· $(x,y) \in A(R) \Rightarrow \exists B_n \in \mathcal{B}$, *hogy* $y \in B_n \subseteq A(R)_x$.
Ekkor az R reláció reprezentálható.

Bizonyítás.
Adott $x \in X$ mellett legyen $N(x) \doteq \{n \in \mathbb{N} : B_n \subseteq A(R)_x\}$, továbbá

$$f(x) \doteq \sum_{n \in N(x)} \frac{1}{2^n}.$$

A tranzitivitás miatt, $(x,y) \in R$ esetén $A(R)_x \supseteq A(R)_y$, ezért $N(x) \supseteq N(y)$, ezért $f(x) \geq f(y)$.
Ha viszont $(x,y) \in A(R)$, akkor a $\mathcal{B}$ halmazrendszerre tett feltétel miatt létezik $B_n \in \mathcal{B}$ eleme, amelyre $y \in B_n \subseteq A(R)_x$. Eszerint $n \in N(x)$. Ha $n \in N(y)$ is fennállna, akkor $y \in B_n \subseteq A(R)_y$ is teljesülne ellentmondva az aszimmetrikus rész aszimmetriájával, tehát azt kaptuk, hogy $(x,y) \in A(R)$ esetén $f(x) > f(y)$ áll fenn, ami épp azt jelenti, hogy f reprezentálja az R relációt. ❑

1.2. lemma. *Legyen R egy tranzitív és teljes reláció, valamint rendelkezzen a $Z \subseteq X$ megszámlálható halmaz a következő tulajdonsággal:*
· $(x,y) \in A(R) \Rightarrow \exists z_1, z_2 \in Z$, *hogy* $(x,z_1) \in R$, $(z_1,z_2) \in A(R)$, $(z_2,y) \in R$,
Ekkor az R reláció reprezentálható.

Bizonyítás.
Rögzítsük a Z egy indexelését, és definiáljuk az $r : X \times X \to \mathbb{R}$ függvényt, mint az $A(R)$ halmaz karakterisztikus függvényét. Legyen

$$f(x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} r(x, z_n).$$

Meg fogjuk mutatni, hogy f reprezentálja az R rendezést.
Legyen először $(x,y) \in R$. Ha egy adott $n \in \mathbb{N}$ mellett $(y,z_n) \in A(R)$, akkor R tranzitivitása szerint $(x,z_n) \in A(R)$ is fennáll, amiből $f(x) \geq f(y)$ már következik is.
Nézzük azt az esetet, mikor $(x,y) \in A(R)$. A Z halmaz Jaffray–szeparábilitása miatt létezik $z_k \in Z$, amelyre $(x,z_k) \in A(R)$, de $(z_k,y) \in R$. Ez utóbbi szerint $(y,z_k) \notin A(R)$, tehát $r(x,z_k) = 1$ és $r(y,z_k) = 0$. Így $f(x) > f(y)$. Az R teljessége miatt ez azt jelenti, hogy $f(x) \geq f(y)$ egyenlőtlenség implikálja az $(x,y) \in R$ relációt. ❑

2. Jaffray, Debreu és Birkhoff szeparábilitási koncepciója

A szakaszban óvakodunk minden topológiai fogalomtól, és csak pusztán a reprezentálhatósággal ekvivalens sűrűségi koncepciókat vizsgáljuk.

2.1. definíció (jump). *Azt mondjuk, hogy a $H \subseteq X$ halmaz* jump*, ha létezik olyan $x, y \in X$ melyekre:*
· $H = R_x \cap R^y$;
· $(x,y) \in A(R)$;
· $A(R)_x \cap A(R)^y = \emptyset$.

Az x közvetlen rákövetkezője y–nak, *vagy ami evvel ekvivalens y* közvetlen megelőzője x–nek, *ha az $R_x \cap R^y$ jump halmaz. Ekkor az (x,y) páros egy* reprezentációja *az $R_x \cap R^y$ jump halmaznak és x valamint y a* végpontjai *a szóban forgó jumpnak.*

Mivel a reláció antiszimmetriája nincs feltéve, ezért egy konkrét jump halmazt több (x,y) pár is reprezentálhat, valamint egy konkrét jump halmaznak nagyon sok végpontja lehet. Hogy jobban beleszokjunk a definíciókba nézzünk egy példát.

2.2. megjegyzés. *Tekintsük az $X \doteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmaz felett azt a következő relációt:*

$$R \doteq \left\{(x,y) \in X \times X : xy > 0 \text{ vagy } x > y\right\}.$$

Világos, hogy R reflexív, tranzitív, sőt teljes is. Nézzük milyen nívóhalmazai vannak a relációnak és az aszimmetrikus részének!

$$\begin{array}{ll} R^x = X & \text{, ha } x < 0; \\ R^x = \mathbb{R}_+ & \text{, ha } x > 0; \\ R_x = X & \text{, ha } x > 0; \\ R_x = \mathbb{R}_- & \text{, ha } x < 0; \end{array} \quad \textit{valamint} \quad \begin{array}{ll} A(R)^x = \mathbb{R}_+ & \text{, ha } x < 0; \\ A(R)^x = \emptyset & \text{, ha } x > 0; \\ A(R)_x = \mathbb{R}_- & \text{, ha } x > 0; \\ A(R)_x = \emptyset & \text{, ha } x < 0. \end{array}$$

Keressük a jump halmazokat!
Ha $y > 0$, akkor $A(R)^y = \emptyset$ miatt $R_x \cap R^y$ nem lehet jump.
Ha $x < 0$, akkor $A(R)_x = \emptyset$ miatt $R_x \cap R^y$ nem lehet jump.
Ha $x > 0 > y$, akkor $R_x \cap R^y = X$ jump, hiszen $(x,y) \in A(R)$ és $A(R)_x \cap A(R)^y = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \emptyset$.

Összefoglalva: Egyetlen jump halmaz van az egész X, valamint minden negatív számnak rákövetkezője tetszőleges pozitív szám, és persze minden pozitív számnak megelőzője akármelyik negatív szám. Az is látható, hogy ennek a jumpnak minden $x > 0 > y$, szám a végpontja.

2.3. állítás. *Tegyük fel, hogy R reflexív és tranzitív reláció, valamint az (x,y) és az (u,v) párok egy–egy jump halmazt reprezentálnak. Ekkor $(x,u) \in S(R)$ és $(y,v) \in S(R)$ együttes fennállása a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy az (x,y) és az (u,v) párok ugyanazt a jump halmazt reprezentálják.*
Tetszőleges elem rákövetkezőjével ekvivalens elem maga is rákövetkező. Feltéve, hogy R még teljes is egy elem rákövetkezőinek halmaza éppen az $S(R)$ egy ekvivalencia osztálya.

Bizonyítás.
Tegyük fel, hogy $R_x \cap R^y = R_u \cap R^v$, ezért $u, v \in R_x \cap R^y$, tehát $(x,u) \in R$ és $(v,y) \in R$. Hasonlóan $x, y \in R_u \cap R^v$, ezért $(u,x) \in R$ és $(y,v) \in R$. Ez azt jelenti, hogy amennyiben (x,y) és az (u,v) pár ugyanazt a jump halmazt reprzentálja, akkor $(x,u) \in S(R)$ és $(y,v) \in S(R)$ is fennáll. Fordítva, ha az (x,y) és az (u,v) pár jump halmazokat reprezentál, és $(x,u) \in S(R)$ valamint $(y,v) \in S(R)$ is fennáll, akkor a tranzitivitás miatt $R_x \cap R^y = R_u \cap R^v$.

Tegyük most fel, hogy R teljes. Legyen x és z két rákövetkezője y–nak, azaz (x,y) és (z,y) is egy–egy jump halmazt reprezentálnak. De $(x,z) \in A(R)$ nem lehet, hiszen ekkor $z \in A(R)_x \cap R(R)^y$ lenne, és hasonlóan $(z,x) \in A(R)$ sem lehetséges. Így R teljessége szerint $(x,z) \in S(R)$. ❏

2.4. definíció (Jaffray–, Debreu–, Birkhoff–sűrű halmaz). *Legyen R egy reflexív, tranzitív reláció X felett és $Z \subseteq X$ egy részhalmaza X–nek. Azt mondjuk, hogy a Z halmaz*
· Jaffray–értelemben sűrű *az R relációra nézve, ha az alábbi implikáció fennáll:*

$$(x,y) \in A(R) \Rightarrow \exists z_1, z_2 \in Z, \text{ hogy } (x,z_1) \in R,\ (z_1,z_2) \in A(R),\ (z_2,y) \in R,$$

· Debreu–értelemben sűrű *az R relációra nézve, ha az alábbi implikáció fennáll:*

$$(x,y) \in A(R) \Rightarrow \exists z \in Z, \text{ hogy } (x,z) \in R,\ (z,y) \in R,$$

· Birkhoff–értelemben sűrű *az R relációra nézve, ha az alábbi implikáció fennáll:*

$$S(R)_x \cap Z = \emptyset, S(R)_y \cap Z = \emptyset, \left(x,y\right) \in A(R) \Rightarrow \exists z \in Z, \textit{hogy}\,(x,z) \in A(R);\ \left(z,y\right) \in A(R).$$

Amennyiben van a térben Jaffray–, Debreu–, vagy Birkhoff–értelemben sűrű megszámlálható részhalmaz, úgy a teret rendre Jaffray–, Debreu–, vagy Birkhoff–értelemben szeparábilisnak *mondjuk az R relációra nézve.*

2.5. megjegyzés. *Látható, hogy a fenti (2.2) pontbeli relációnkra nézve a tér mind Jaffray–, mind Debreu–, mind Birkhoff–értelemben szeparábilis.*
Ugyanis a $Z \doteq \{-1,1\}$ halmaz Jaffray–értelemben sűrű, hiszen $\left(x,y\right) \in A(R)$ esetén $x > 0 > y$, ezért $(x,1) \in R$, $(1,-1) \in A(R)$ valamint $\left(-1,y\right) \in R$. Hasonlóan, $Z \doteq \{1\}$ egy Debreu–sűrű halmaz hiszen $\left(x,y\right) \in A(R)$ esetén $x > 0 > y$, ezért $(x,1) \in R$ és $\left(1,y\right) \in R$, sőt $\left(1,y\right) \in A(R)$. Végül a $Z \doteq \{1\}$ Birkhoff–sűrű részhalmaz is, hiszen olyan $\left(x,y\right) \in A(R)$ pár nincs melyre $(x,1) \in S(R)$ ne állna fenn, ezért a fenti implikáció feltétele sohasem teljesül.

Amint a következő lemma állítja, ha a reláció reprezentálható, akkor csak megszámlálhatóan sok jump halmaz lehetséges. Ezért fontos olyan feltételeket találni, amelyek fennállása megszámlálhatóra szűkíti a lehetséges jumpok számát. Amennyiben topológia is lenne a téren, akkor ilyen feltételt ad még a (5.3) Eilenberg és Debreu tétel is.

2.6. lemma (jump halmazok számossága legfeljebb megszámlálható). *Tegyük fel, hogy az R tranzitív és teljes relációra az alábbi két feltétel egyike teljesül:*
· Birkhoff–értelemben szeparábilis, vagy
· Létezik R–nek $f : X \to \mathbb{R}$ reprezentációja.
Ekkor az X–beli jump halmazok számossága legfeljebb megszámlálható.

Bizonyítás.
Tegyük fel, hogy Z egy Bikhoff–sűrű halmaz. Reprezentáljon az $\left(x,y\right)$ pár egy jumpot. Ha $S(R)_x \cap Z = \emptyset$ és $S(R)_y \cap Z = \emptyset$ lenne, akkor a Birkhoff–sűrűség miatt létezne $z \in Z$, amelyre $z \in A(R)_x \cap A(R)^y$ teljesülne, evvel ellentmondva annak, hogy $R_x \cap R^y$ egy jump. Azt kaptuk tehát, hogy tetszőleges $\left(x,y\right)$ által reprezentált jumphoz létezik $z \in Z$ melyre az $z \in S(R)_x$ vagy $z \in S(R)_y$ fennáll. Rendeljük hozzá minden jumphoz az egyik ilyen $z \in Z$ pontot. Amennyiben ilyen módon egy z pont három jump képe lenne, akkor lenne két olyan jump is, amelyeknek z alsó vagy felső reprezentánsa lenne. Nézzük mondjuk a felső esetet: Ekkor $\left(z,y_1\right)$ és $\left(z,y_2\right)$ is jump lenne, ami R teljessége és a (2.3) állítás miatt csak úgy lehet, ha y_1 és y_2 is ekvivalensek, tehát $\left(z,y_1\right)$ és $\left(z,y_2\right)$ végül azonos jump halmazt reprezentálnak. Azt kaptuk tehát, hogy a fenti hozzárendelésnél minden $z \in Z$ elem legfeljebb két jumpnak lehet a képe, ezért a Z megszámlálhatóságából a jumpok halmazának megszámlálhatósága is következik.

Legyen most f egy reprezentánsa a relációnak. Világos, hogy amennyiben az $\left(x,y\right)$ pár az $R_x \cap R^y$ jump halmazt reprezentálja, akkor $\left(f\left(y\right), f(x)\right) \subseteq \mathbb{R}$ a számegyenes egy nem üres, nyílt intervalluma, amely diszjunkt az f értékkészletétől. Ebből könnyen látható, hogy két különböző jump halmaz képei egymástól diszjunkt intervallumok. Mivel diszjunkt, nem üres, nyílt intervallumok csak megszámlálhatóan sokan vannak, ezért a jumpok halmaza is legfeljebb megszámlálható. ❑

2.7. állítás. *Legyen R egy tranzitív és reflexív reláció X felett. Egy Jaffray–sűrű halmaz egyben Debreu–sűrű is és egy Debreu–sűrű halmaz egyben Birkhoff–sűrű is.*

Legyen most Z' egy Birkhoff–sűrű halmaz. Rögzítsünk minden egyes jump halmaznak egy reprezentációját, és álljon a Z'' halmaz az összes jump halmaz egy–egy reprezentációinak végpontjaiból. Ekkor a $Z' \cup Z''$ halmaz egyben Jaffray–sűrű is.

Bizonyítás.
Az első állítás közvetlenül következik R tranzitivitásából, és a szóban forgó sűrűségek definícióiból. Csak a második állítást kell igazolnunk. Legyen $Z = Z' \cup Z''$ a tételben konstruált halmaz. Először azt a speciális esetet mutatjuk meg, hogy ha $\left(z,y\right) \in A(R)$, de $z \in Z$, akkor létezik $z' \in Z$ melyre $(z,z') \in A(R)$ és $\left(z',y\right) \in R$ is fennáll. Ugyanis, ha $S(R)_y \cap Z \neq \emptyset$, akkor ez trivi. Ha $S(R)_y \cap Z = \emptyset$, akkor $R_z \cap R^y$ nem lehet jump, hiszen ekkor $\left(z,y\right)$ reprezentálná ezt a jumpot, ezért létezne $z'' \in Z''$ leme, amelyre z'' ekvivalens lenne y–nal. Tudjuk tehát, hogy $R_z \cap R^y$ nem jump, azaz létezik $v \in X$, melyre $(z,v) \in A(R)$ és $\left(v,y\right) \in A(R)$. Ha $S(R)_v \cap Z \neq \emptyset$, akkor nyilván készen is vagyunk, ellenkező esetben pedig $S(R)_v \cap Z = \emptyset = S(R)_y \cap Z$ miatt alkalmazható a Z' halmaz Birkhoff–sűrűsége a $\left(v,y\right) \in A(R)$ alternatívákra. Létezik tehát $z' \in Z'$, amelyre $(v,z') \in A(R)$ és $\left(z',y\right) \in A(R)$.

Legyen most tetszőleges $\left(x,y\right) \in A(R)$. Persze három eset lehetséges:
a.) $S(R)_x \cap Z \neq \emptyset$. Ekkor a fent bizonyított speciális eset szerint készen is vagyunk.

b.) $S(R)_y \cap Z \neq \emptyset$. Világos, hogy R^{-1}-re a fentit ismételve megint készen vagyunk.
c.) $S(R)_x \cap Z = \emptyset = S(R)_y \cap Z$. Ekkor alkalmazva az $(x, y) \in A(R)$ alternatívákra a Z' halmaz Birkhoff–sűrűségének definícióját, kapunk egy $z' \in Z'$ pontot, melyre $(x, z') \in A(R)$ és $(z', y) \in A(R)$. Ez utóbbira alkalmazva a már igazolt speciális esetet azt kapjuk, hogy van olyan $z'' \in Z$, melyre $(z, z'') \in A(R)$ és $(z'', y) \in R$. ❑

2.8. következmény (sűrűségi koncepciók ekvivalenciája). *Legyen R teljes, tranzitív reláció. Ekkor az alábbi feltevések egymással ekvivalensek:*
(1) *A tér Jaffray–értelemben szeparábilis az R relációra nézve.*
(2) *A tér Debreu–értelemben szeparábilis az R relációra nézve.*
(3) *A tér Birkhoff–értelemben szeparábilis az R relációra nézve.*

Ha a fenti feltételek egyike így mindegyike teljesül, akkor a továbbiakban azt mondjuk, hogy a tér szeparábilis *az R relációra nézve.*

Bizonyítás.
Láttuk, hogy (1) ⇒ (2) ⇒ (3) fennáll még a teljesség feltétele nélkül is.
(3) ⇒ (1) Ha van a térnek Z' megszámlálható Birkhoff–sűrű részhalmaza, akkor legyen $Z = Z' \cup Z''$ mint az előző (2.7) állításban. Láttuk — (2.6) —, hogy a térnek csak megszámlálhatóan sok jump halmaza lehet, ezért Z'' is legfeljebb megszámlálható. Azt kaptuk tehát, hogy Z egy legfeljebb megszámlálható, Jaffray–sűrű halmaz, ami igazolja a három állítás ekvivalens voltát. ❑

Végül megmutatjuk, hogy a fenti sűrűségi koncepciók feltételezése épp a hasznossági függvénnyel való reprezentáció feltételével ekvivalens. Ha a lexikografikus rendezésre gondolunk $\mathbb{R}^2$-en, akkor világos, hogy az $(x, 1)$ és $(x, 0)$ pontok tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ mellett nem üres nyílt rendezésintervallumot határoznak meg, ezért a lexikografikus rendezés nem lehet szeparábilis.

2.9. állítás (reprezentálhatóság). *Legyen R egy tranzitív és teljes reláció X–en. Az alábbi feltevések ekvivalensek:*
(1) *A tér R–szeparábilis;*
(2) *Az R reláció reprezentálható.*

Bizonyítás.
(1) ⇒ (2) A 1.2 Lemma éppen azt állítja, hogy egy Jaffray–sűrű, megszámlálható halmaz segítségével reprezentálhatjuk a relációt.
(2) ⇒ (1) Legyen tetszőleges $r, s \in \mathbb{Q}$ racionális számok mellett

$$A_{r,s} \doteq \{x \in X : r > f(x) > s\}$$

Amennyiben $A_{r,s} \neq \emptyset$, úgy válasszunk minden egyes ilyen halmazból egy $a_{r,s} \in A_{r,s}$ elemet. Álljon a Z halmaz a jumpok végpontjaiból és az összes fenti $a_{r,s}$ alakú pontból. Megmutatjuk, hogy Z egy Debreu–sűrű halmaz. Legyen $(x, y) \in A(R)$ rögzítve. Ha $R_x \cap R^y$ egy jump, akkor nyilván készen is vagyunk, hiszen van egy x–el ekvivalens pontja Z-nek. Ellenkező esetben létezik $v \in X$, amelyre $(x, v) \in A(R)$ és $(v, y) \in A(R)$ is fennáll. Persze létezik $r, s \in \mathbb{Q}$, amelyekre

$$f(x) > r > f(v) > s > f(y).$$

Azt látjuk, hogy $A_{r,s} \neq \emptyset$, tekintsük tehát az $a_{r,s} \in A_{r,s}$ pontot Z–ből, azaz

$$f(x) > r > f(a_{r,s}) > s > f(y).$$

Persze f reprezentálja R–et, ezért azt kaptuk, hogy találtunk $a_{r,s} \in Z$ pontot, amelyre

$$(x, a_{r,s}) \in A(R) \quad \text{és} \quad (a_{r,s}, y) \in A(R)$$

is fennáll. No, de Z számossága a (2.6) állítás szerint legfeljebb megszámlálható. ❑

3. Tranzitív és teljes reláció rendezés topológiája

A szakaszban továbbra sem tesszük fel, hogy lenne a téren egy R-től függetlenül előre megadott topológia, de egy újabb sűrűség koncepciót vezetünk be a reláció által generált topológia segítségével.

3.1. definíció (rendezés topológia). *Rögzített $R \subseteq X \times X$ reláció mellett legyen t_R az a legszűkebb olyan topológia, melyre valamennyi $A(R)^x$ alakú felső és valamennyi $A(R)_x$ alakú alsó nívóhalmaz nyílt X–ben. Ezt nevezzük az R generálta* rendezés topológiának.

3.2. megjegyzés. *Világos, hogy a fenti definícióval t_R voltaképpen szubbázissal van megadva, tehát t_R egy szubbázisa:*

$$\mathcal{S} \doteq \{A(R)^x : x \in X\} \cup \{A(R)_x : x \in X\}.$$

Először is tisztáznunk kell, hogy a rendezés topológiának milyen kényelmesen használható bázisait lehet megadni. A következő állítás avval az $\mathbb{R}$-beli állítással analóg, amely szerint a nyílt intervallumok az euklideszi topológia bázisát alkotják.

3.3. állítás (bázis). *Tegyük fel, hogy R tranzitív és teljes. Ekkor t_R egy bázisa az alábbi halmazrendszer*

$$\mathcal{B} \doteq \{A(R)_x \cap A(R)^y : (x,y) \in A(R)\} \cup$$
$$\cup \{A(R)^x : x \in X\} \cup \{A(R)_x : x \in X\} \cup \{X, \emptyset\}.$$

Bizonyítás.
Egy a szubbázisával megadott topológikus tér bázisa definíció szerint a szubbázis véges metszet burka. Mivel R tranzitív, ezért $(x,y) \in R$ mellett $A(R)^x \cap A(R)^y = A(R)^x$ valamint $A(R)_x \cap A(R)_y = A(R)_y$ az $A(R) \circ S(R) \subseteq A(R)$ és $S(R) \circ A(R) \subseteq A(R)$ kevert tranzitivitások szerint. Az R teljessége miatt tehát $\mathcal{S}$ véges metszet burkában csak $\{A(R)^x : x \in X\}$; $\{A(R)_x : x \in X\}$; illetve $\{A(R)_x \cap A(R)^y : (x,y) \in R\}$ alakú halmazok maradnak. Ha $(x,y) \in S(R)$, akkor $A(R)_x \cap A(R)^y = \emptyset$, ezért valóban $\mathcal{B}$ az $\mathcal{S}$ véges metszet burka. ❑

Ennyit lehetett egész általánosságban állítani. A következő állításban két fontos speciális esetet tekintünk, amikor a relációnak a tranzitivitáson és a teljességen kívül más tulajdonságai is vannak. Ilyenkor a fentinél kényelmesebb bázissal is dolgozhatunk. Emlékeztetünk arra, hogy x egy *legnagyobb (legkisebb)* eleme X-nek R-szerint, ha $R_x = X$ ($R^x = X$).

3.4. állítás (bázis, ha nincs legnagyobb (-kisebb) elem). *Legyen R tranzitív és teljes. Ha a térnek nincs a relációra nézve legnagyobb (legkisebb eleme), akkor a fenti $\mathcal{B}$ bázisból a felső(alsó)–nívóhalmazok elhagyhatók. Pontosabban:*

· Ha nem létezik X–ben legnagyobb elem, akkor $\mathcal{B}_1$ halmazrendszer bázisa a t_R rendezés topológiának

$$\mathcal{B}_1 \doteq \{A(R)_x \cap A(R)^y : (x,y) \in A(R)\} \cup \{A(R)_x : x \in X\} \cup \{X, \emptyset\}.$$

· Ha nem létezik X–ben legkisebb elem, akkor $\mathcal{B}_2$ halmazrendszer bázisa a t_R rendezés topológiának

$$\mathcal{B}_2 \doteq \{A(R)_x \cap A(R)^y : (x,y) \in A(R)\} \cup \{A(R)^x : x \in X\} \cup \{X, \emptyset\}.$$

· Ha sem legnagyobb sem legkisebb pont sem létezik, akkor a

$$\mathcal{B}_3 \doteq \{A(R)_x \cap A(R)^y : (x,y) \in A(R)\} \cup \{X, \emptyset\}$$

halmazrendszer is bázisa a rendezéstopológiának.

Bizonyítás.
Nézzük azt az esetet, mikor nincs legnagyobb elem. Ekkor azt kell belátnunk, hogy minden $A(R)^x$ alakú nem üres halmaz előáll mint a $\mathcal{B}_1$ tipusú halmazok egyesítése. Legyen tehát $u \in A(R)^x$. No de $R_u \neq X$, ezért létezik $y \in A(R)^u$, így $u \in A(R)^x \cap A(R)_y \subseteq A(R)^x$. Azt mutattuk meg tehát, hogy

$$A(R)^x = \cup_{y \in A(R)^x} \left(A(R)^x \cap A(R)_y\right)$$

A másik két esetben is hasonlóan kapjuk, hogy $A(R)_x$ előáll a fenti tipusú halmazok egyesítéseként. ❑

3.5. állítás (bázis, Jaffray–sűrű részhalmaz mellett). *Legyen most is R tranzitív és teljes reláció, amelynek Z egy Jaffray–sűrű részhalmaza. Ekkor*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_Z \quad \doteq \quad & \{A(R)_x \cap A(R)^y : (x,y) \in A(R), x, y \in Z\} \\ & \cup \{A(R)^x : x \in Z\} \cup \{A(R)_x : x \in Z\} \cup \{X, \emptyset\}\end{aligned}$$

is bázisa a rendezéstopológiának.
Az előző állításhoz hasonlóan, ha nincs legnagyobb vagy (és) legkisebb elem a relációra nézve, akkor a fenti unió második vagy (és) harmadik halmaza elhagyható.

Bizonyítás.
Láttuk ugyanis, hogy a fenti halmazok mind nyíltak. Amennyiben $u \in U$ egy nyílt halmaza a rendezéstopológiának, akkor létezik egy $B \in \mathcal{B}_1$ bázis halmaz, amelyre $u \in B \subseteq U$. E B halmaz lehet $B = A(R)_x \cap A(R)^y$, $(x, y) \in A(R)$, vagy $B = A(R)^x$, vagy $B = A(R)_x$ alakú. Legyen először $u \in B = A(R)_x \cap A(R)^y$, valamely $(x, y) \in A(R)$ mellett. Alkalmazva a Jaffray–szeparábilitást az $(x, u) \in A(R)$ és az $(u, y) \in A(R)$ mellett kapjuk, hogy léteznek $z_1, z_2 \in Z$ illetve $z_3, z_4 \in Z$ pontok, amelyekre

$$(x, z_1) \in R, (z_1, z_2) \in A(R), (z_2, u) \in R \quad \text{valamint} \quad (u, z_3) \in R, (z_3, z_4) \in A(R), (z_4, y) \in R.$$

Eszerint $u \in A(R)_{z_1} \cap A(R)^{z_4} \subseteq A(R)_x \cap A(R)^y = B$. Ez azt jelenti, hogy minden $B = A(R)_x \cap A(R)^y$ alakú bázis halmaz előáll, mint $A(R)_{z_1} \cap A(R)^{z_4}$ $(z_1, z_4) \in A(R)$, $z_1, z_4 \in Z$ alakú halmazok egyesítése. Ha most $u \in B = A(R)^x$, akkor a Jaffray-szeparábilitás szerint található $z_1, z_2 \in Z$ pont, melyekre

$$(u, z_1) \in R, \ (z_1, z_2) \in A(R), \ (z_2, x) \in R.$$

Így $u \in A(R)^{z_2} \subseteq A(R)^x = B$. Azt kaptuk tehát, hogy minden $B = A(R)^x$ alakú bázis halmaz előáll mint $A(R)^z$ alakú halmazok egyesítése, ahol $z \in Z$. Hasonló igaz az $A(R)_x$ alakú halmazokra is. ❑

3.6. megjegyzés. *Az iménti állítás könnyű következménye, hogy amennyiben a tranzitív és teljes reláció Jaffray–szeparábilis, akkor a rendezés topológiájának van megszámlálható bázisa, azaz M2 tulajdonságú. Később látni fogjuk, hogy ennek az állításnak a megfordítása is igaz.*

3.7. definíció (gyengén sűrű halmaz). *Legyen R egy reflexív, tranzitív reláció X felett és $Z \subseteq X$ egy részhalmaza X–nek. Azt mondjuk, hogy a Z halmaz*
· gyenge értelemben sűrű *az R relációra nézve, ha az alábbi implikáció fennáll:*

$$(x, y) \in A(R), \ A(R)_x \cap A(R)^y \neq \emptyset \Rightarrow A(R)_x \cap A(R)^y \cap Z \neq \emptyset.$$

Amennyiben van a térben gyenge értelemben sűrű megszámlálható részhalmaz, úgy a teret gyengén szeparábilisnak *mondjuk az R relációra nézve.*

Most példát adunk tranzitív, teljes relációra, amely gyengén szeparábilis, de nem R-szeparábilis. Látjuk majd, hogy a reláció generálta rendezéstopológia példa olyan topologikus térre is, amely topológiai értelemben szeparábilis, de nem M2.

3.8. megjegyzés. *Legyen X az $\mathbb{R}^2$ tér következő részhalmaza*

$$X \doteq \{(\xi, 0) : \xi \in \mathbb{Q}\} \cup \{(\xi, 1) : \xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \cup \{(\xi, 2) : \xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Legyen R az $\mathbb{R}^2$ lexikografikus rendezésének X-re való megszorítása. Látható, hogy (X, R) tranzitív és teljes. A trükk abban áll, hogy amennyiben ξ egy irracionális szám, akkor $A(R)^{(\xi,1)} \cap A(R)_{(\xi,2)} = \emptyset$. Legyen $Y \doteq \{(\xi, 0) : \xi \in \mathbb{Q}\}$. Nem nehéz ellenőrizni, hogy a racionális számok $\mathbb{R}$-ben való sűrűsége miatt Y egy gyengén sűrű részhalmaza X-nek, de ez nem Debreu–sűrű.

Persze könnyen látható a fenti példánál, hogy minden ξ irracionális szám mellett $(\xi, 1)$, $(\xi, 2)$ egy jumpot reprezentál, tehát kontinuum sok jump halmazunk van, és az is nagyon egyszerű, hogy nincs a rendezésnek $X \to \mathbb{R}$ reprezentációja, hiszen az $\big(f(\xi, 1), f(\xi, 2)\big)$ nem üres nyílt intervallumok egymástól diszjunktak.

3.9. megjegyzés. *Mivel tetszőleges $A(R)_x \cap A(R)^y$ alakú halmaz nyílt a rendezés topológiában ezért egy a rendezés topológiában sűrű halmaz egyszersmind gyengén R-sűrű is.*

3.10. állítás. *Legyen R tranzitív és teljes reláció. Az alábbi feltevések ekvivalensek.*
· *A tér gyengén szeparábilis az R relációra nézve;*
· *Az (X, t_R) topológikus tér szeparábilis.*

Bizonyítás.
$(1) \Rightarrow (2)$ Legyen Z megszámlálható, gyengén sűrű részhalmaz, és Z' álljon Z pontjaiból valamint a térnek az R relációra nézve legnagyobb és legkisebb eleméből, amennyiben ilyen vagy ilyenek vannak. Azt állítjuk, hogy Z' sűrű a rendezés topológiában. Ehhez elég megmutatni, hogy ha B egy nem üres, bázis elem, akkor $B \cap Z' \neq \emptyset$.

Azt fogjuk használni, hogy a tranzitivitás és teljesség feltétele mellett a $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, és $\mathcal{B}_3$ halmazrendszerek bázisát alkotják a rendezés topológiának. Ha

$$B \doteq A(R)_x \cap A(R)^y$$

alakú, ahol $(x, y) \in A(R)$, akkor $B \cap Z \neq \emptyset$ épp Z gyengén sűrűségének következménye. Amennyiben a térben nincs legnagyobb és legkisebb elem sem, akkor készen is vagyunk, hiszen ekkor a $\mathcal{B}_3$ halmazrendszer bázisa a rendezéstopológiának.

Ha van a térben $s \in X$ legnagyobb elem, de nincs legkisebb akkor $\mathcal{B}_2$ bázisát alkotja t_R–nek, ezért B a fentin kívül lehet még

$$B \doteq A(R)^x$$

alakú is. Ekkor R tranzitivitás miatt $s \in A(R)^x$, hiszen $A(R)^x \neq \emptyset$. De $s \in Z'$ a Z' konstrukciója miatt, így evvel az esettel is készen vagyunk. A harmadik eset az, amikor van a térben legnagyobb és van $r \in X$ legkisebb elem is. Ekkor csak azt tudjuk, hogy $\mathcal{B}_1$ bázist alkot, azaz B a fentieken kívül lehet még

$$B \doteq A(R)_x$$

alakú nem üres halmaz is. Ekkor persze $r \in A(R)_x$ teljesül, újra az R tranzitivitása miatt, tehát a $\mathcal{B}_1$ halmazrendszer bázis volta miatt Z' valóban sűrű részhalmaza a rendezés topológiának.

(2) $\Rightarrow$ (1) állítás fennáll a tranzitivitás és teljesség feltétele nélkül is. ❑

3.11. állítás. *Legyen R egy tranzitív és teljes reláció, Z pedig olyan halmaz, amely tartalmazza valamennyi jump halmaz végpontjainak egy–egy reprezentációját. Az alábbi feltevések ekvivalensek.*

· *A Z halmaz topológiai értelemben sűrű részhalmaza az (X, t_R) rendezés topológiának.*

· *A Z részhalmaz Debreu–értelemben sűrű.*

Bizonyítás.

(1) $\Rightarrow$ (2) Amint már meggondoltuk, a Z topológiai értelemben sűrű halmaz, egyben gyengén sűrű is. A Debreu–sűrűség igazolásához legyen $(x, y) \in A(R)$.

Ha $A(R)_x \cap A(R)^y = \emptyset$ lenne, akkor $R_x \cap R^y$ egy jump lenne, tehát lenne Z-ben mind x-szel mind y-nal ekvivalens elem.

Ha viszont $A(R)_x \cap A(R)^y \neq \emptyset$, akkor a gyenge sűrűség definícója szerint az $A(R)_x \cap A(R)^y$ halmaz bele is metsz Z-be. Ez azt jelenti, hogy Z valóban Debreu-sűrű.

(2) $\Rightarrow$ (1) Tegyük most fel, hogy Z Debreu–értelemben sűrű. Tekintsünk egy U nem üres nyílt részhalmazát t_R-nek. Láttuk, hogy a

$$\mathcal{B}_1 \doteq \{A(R)_x \cap A(R)^y : (x, y) \in A(R)\} \cup \{A(R)^x : x \in X\} \cup \cup\{A(R)_x : x \in X\} \cup \{X, \emptyset\}$$

halmazok bázist alkotnak, így feltehető, hogy U a fenti halmazok egyike. Meg kell mutatnunk, hogy U tartalmaz Z-beli pontot.

Ha $u \in U = A(R)_x \cap A(R)^y$, ahol $(x, y) \in A(R)$, akkor tekintsük az $A(R)_u \cap A(R)^y$ halmazt. Amennyiben e halmaz üres, akkor u egy jump végpontja, tehát Z-ben van u-val ekvivalens elem, ezért $(A(R)_x \cap A(R)^y) \cap Z \neq \emptyset$. Amennyiben $v \in A(R)_u \cap A(R)^y$, akkor áttérünk az $A(R)_u \cap A(R)^v$ halmaz vizsgálatára. Világos, hogy $(u, v) \in A(R)$, így Z Debreu-sűrűsége miatt létezik $z \in Z$ amelyre $z \in R_u \cap R^v \subseteq A(R)_x \cap A(R)^y$.

Hasonlóan $u \in U = A(R)^x$ és $u \in U = A(R)_x$ esetén is látható, hogy $U \cap Z \neq \emptyset$. ❑

Ha hozzávennénk az alábbi állításhoz az R-szeparábilitás (2.8) ekvivalenseit, akkor eddigiek egy jó összefoglalását kaphatnánk.

3.12. állítás. *Legyen R egy tranzitív és teljes reláció X-en. Az alábbiak ekvivalensek.*

· *A tér R–szeparábilis;*

· *A tér gyengén R–szeparábilis, és a jump halmazok számossága megszámlálható;*

· *A tér gyengén R–szeparábilis, és létezik R-nek reprezentációja;*

· *A generált t_R rendezés topológiának van megszámlálható bázisa (M2);*

· *Az R reláció reprezentálható.*

Bizonyítás.

(1) $\Longleftrightarrow$ (5) Láttuk az (2.9) állításban.

(1) $\Rightarrow$ (4) Tudjuk, hogy az R–szeparábilitás ekvivalens a Jaffray–szeparábilitással. Legyen tehát Z egy megszámlálható Jaffray–sűrű halmaz. Láttuk, hogy ekkor a

$$\left\{A(R)_x \cap A(R)^y : (x,y) \in A(R), x,y \in Z\right\} \quad \cup \quad \left\{A(R)^x : x \in Z\right\} \quad \cup \quad \left\{A(R)_x : x \in Z\right\} \quad \cup \quad X \quad \cup \quad \{\emptyset\}$$

halmazrendszer bázisát alkotja a rendezéstopológiának. Világos viszont, hogy Z megszámlálhatósága miatt a fenti bázis is megszámlálható, ami azt jelenti, hogy a t_R rendezéstopológia valóban $M2$ tulajdonságú.
(4) $\Rightarrow$ (3) Minden $M2$ tér egyben szeparábilis is, hiszen csak ki kell venni egy–egy elemet a megszámlálható bázisból. Meg kell még mutatnunk, hogy van reprezentációja R-nek. Legyen tehát adva a t_R rendezéstopológia egy megszámlálható bázisa:

$$\mathcal{B} \doteq \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Erre a $\mathcal{B}$ halmazrendszerre alkalmazhatjuk a (1.1) lemmát, így R valóban reprezentálható.
(3) $\Rightarrow$ (2) Trivi, mivel tudjuk, hogy egy reprezentálható relációnak csak megszámlálhatóan sok jump halmaza lehet.
(2) $\Rightarrow$ (1) Az előző állítást kell használnunk. A topológiai értelemben megszámlálható sűrű halmazt kibővítjük a megszámlálhatóan sok jump halmaz végpontjait reprezentáló pontokkal, és így egy Debreu-sűrű halmazt kapunk, tehát a tér valóban R–szeparábilis. ❑

3.1. A rendezés topológia altértopológiája

Az alfejezet egy kis kitérő a rendezéstopológiáról, és nem tartozik közvetlenül a hasznossági függvénnyel való reprezentálhatóság témakörébe.

Szokásos probléma, hogy egy altértopológiai nagyon csúnya lehet, ha egy csúnya részhalmazra szorítjuk meg. Az alábbiakban ezt a kérdéskört járjuk körül a rendezéstopológiára nézve.

Legyen $Y \subseteq X$ egy részhalmaza X–nek. Jelölje t'_R a t_R topológia Y–ra való megszorítását és R' az R relációnak az Y–ra való megszorítását, azaz $R' \doteq R \cap (Y \times Y)$. Mi kapcsolat t'_R és $t_{R'}$ között?

3.13. állítás. *Legyen R egy tranzitív és teljes reláció X felett és $Y \subseteq X$ rögzített részhalmaz. Ekkor a megszorított reláció $t_{R'}$ rendezés topológiája, gyengébb mint a rendezés topológia t'_R megszorítása, azaz*

$$t_{R'} \subseteq t'_R.$$

Bizonyítás.
A rendezés topológia definíciója szerint $t_{R'}$ a leggyengébb olyan topológia Y–on, amelyre az $A(R')^y$ és az $A(R')_y$ alakú halmazok nyíltak tetszőleges $y \in Y$ mellett. No de $A(R')^y = A(R)^y \cap Y$ és $A(R')_y = A(R)_y \cap Y$ bármely $y \in Y$ esetén, ezért az $A(R')^y$ és $A(R')_y$ nívóhalmazok nyíltak a t'_R relatív topológiában. ❑

3.14. megjegyzés. *A fordított tartalmazás általában nem igaz. Gondoljunk az $\mathbb{R}$ szokásos $\geq$ relációjára, és az $Y = [0,1) \cup \{2\}$ részhalmazra. Látható, hogy $\{2\} \in t'_R$–nek, mivel $\{2\} = A(R)^1 \cap Y$. Másrészt a $\{2\}$ halmaz nem áll elő mint $A(R')^y$ alakú halmazok egyesítése $0 < y < 1$ mellett.*

3.15. állítás. *Legyen most $Y \subseteq X$ egy olyan részhalmaza X–nek, amely rendelkezik az alábbi tulajdonsággal:*
Minden $x \in X$-hez létezik $y \in Y$, hogy $A(R)^x \cap Y = A(R')^y$ és minden $x \in X$-hez létezik $y \in Y$, hogy $A(R)_x \cap Y = A(R')_y$.
Ekkor a

$$t'_R \subseteq t_{R'}$$

tartalmazás is fennáll.
Speciálisan, ha az Y halmaz $Y = A(R)^x$; vagy $Y = A(R)_x$; vagy $Y = A(R)_{x_1} \cap A(R)^{x_2}$ alakú, akkor

$$t'_R = t_{R'}.$$

Bizonyítás.
Legyen $U \in t'_R$ nyílt halmaz. Ekkor $U = V \cap Y$, ahol $V \in t_R$. Ha $V = A(R)^x$, akkor

$$U = A(R)^x \cap Y = A\left(R'\right)^y$$

valamely $y \in Y$ mellett a feltétel szerint, tehát $U \in t_{R'}$ valóban fennáll. Hasonlóan, készen is vagyunk ha $V = A(R)_x$ alakban adott. Ha $V = A(R)^{x_1} \cap A(R)_{x_2}$, akkor

$$U = \left(A(R)^{x_1} \cap A(R)_{x_2}\right) \cap Y = \left(A(R)^{x_1} \cap Y\right) \cap \left(A(R)_{x_2} \cap Y\right) = A\left(R'\right)^{y_1} \cap A\left(R'\right)_{y_2},$$

tehát $U \in t_{R'}$ szintén teljesül. Találtunk tehát a t'_R topológia egy olyan bázisát, amelynek minden eleme egyben $t_{R'}$–beli is. Ezt elég belátni. ❑

4. Uriszon-Nachbin megközelítés

Herden és Pallack [3]-ben jegyzi meg, hogy az Uriszon-lemma rendezett topologikus terekre vonatkozó Nachbin-féle általánosítása igaz akkor is, ha a topologikus téren definiált relációról semmi továbbit nem teszünk fel, ellentétben Nachbin [5] Ph.D. dolgozatával, ahol a szerző tranzitív és reflexív relációra mondja ki a tételt. Herden és Pallack egyrészt a „straightforward” jelzőt használja, de indoklásul hivatkozik még [2]-re is.

Jelen írásban a Herden-féle általánosítást gondoljuk meg. Nachbin bizonyítását elemezve látszik, hogy a szerző sem a reflexivitást, sem a tranzitivitást nem használta indoklásában. A jól ismert Uriszon-lemma eredeti bizonyítását is leírom, így látható, hogy Nacbin hozzájárulásának eredete is az Uriszon-féle gondolat [8].

4.1. Uriszon-lemma

4.1. lemma (Uriszon). *Az (X, τ) topologikus térre alább tett feltevések egymással ekvivalensek:*

(1) *Diszjunkt zárt halmazoknak vannak diszjunkt nyílt környezetei;*

(2) *Ha G zárt halmaz és Q ennek nyílt környezete, akkor van olyan U nyílt környezete G-nek melyre még $\mathrm{cl}(U) \subseteq Q$ is teljesül, azaz*

$$G \subseteq U \subseteq \mathrm{cl}(U) \subseteq Q.$$

(3) *Ha G és F egymástól diszjunkt zárt halmazok, akkor léteznek olyan $U(r)$ $(r \in [0,1])$ nyílt halmazok, amelyekre az alábbi három dolog fennáll:*

- *$G \subseteq U(0)$;*
- *$F \subseteq U(1)^c$;*
- *$r < r'$ esetén $\mathrm{cl}(U(r)) \subseteq U(r')$.*

(4) *Ha G és F egymástól diszjunkt zárt halmazok, akkor létezik $f : X \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre az alábbi három tulajdonság teljesül:*

- *f folytonos;*
- *minden $x \in X$ esetén $0 \le f(x) \le 1$;*
- *minden $x \in G$ esetén $f(x) = 0$ és minden $x \in F$ esetén $f(x) = 1$.*

Amennyiben a tétel egyik feltétele teljesül, akkor (4)-ben szereplő függvénynek

$$f(x) \doteq \inf\{t \in \mathbb{R} : x \in U(t)\} = \sup\left\{t \in \mathbb{R} : x \notin U(t)^c\right\}$$

is megfelel, ahol a $\{U(t) : t \in \mathbb{R}\}$ a (3) pontban definiált halmazrendszer.

A jól ismert bizonyítást lásd például [6]-ban is.
Bizonyítás.
(1) ⇒ (2) Tekintsük a G zárt halmazt és ennek egy Q nyílt környezetét. Ekkor G és Q^c halmazok diszjunktak és zártak, tehát (1) miatt létezik U és V diszjunkt nyílt halmaz, amelyekre

$$G \subseteq U \text{ és } Q^c \subseteq V.$$

Találtunk tehát U nyílt környezetét a G halmaznak, melyre $U \subseteq V^c$, amiből V^c zártsága miatt

$$\mathrm{cl}(U) \subseteq V^c \subseteq Q$$

is következik. Evvel (2) tulajdonság teljesülését beláttuk.
(2) $\Rightarrow$ (3) a kívánt tulajdonságú $U(r)$ halmazok konstrukciója következik. Először szorítkozzunk csak a $[0,1]$ intervallum $r = k/2^n$ alakú diadikus törtjeire. Az n-szerinti indukcióval definiálunk:
Ha $n = 0$, akkor csak $r = 0$ és $r = 1$ lehetséges, tehát csak az $U(0)$ és az $U(1)$ halmazokat kell definiálnunk, de olyan módon, hogy a tételben megfogalmazott három tulajdonság teljesüljön. Ehhez használjuk (2) tulajdonságot. A G zárt és az F^c nyílt halmazokra $G \subseteq F^c$, létezik tehát $U(0)$ nyílt halmaz, melyre

$$G \subseteq U(0) \subseteq \mathrm{cl}(U(0)) \subseteq F^c.$$

amennyiben $U(1) \doteq F^c$ definícióval élünk, akkor az $n = 1$ esettel készen is vagyunk.
Tegyük fel most, hogy valamely n számig már definiáltuk valamennyi $U(k/2^n)$ alakú halmazt úgy, hogy azok kielégítik az

$$r < r' \Rightarrow \mathrm{cl}(U(r)) \subseteq U\left(r'\right)$$

feltételt. Most definiálni fogjuk az $U\left(k/2^{n+1}\right)$ alakú halmazokat. Amennyiben k páros, azaz $k = 2l$ alakú, akkor legyen egyszerűen

$$U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) \doteq U\left(\frac{l}{2^n}\right).$$

Ha k páratlan, akkor az $U\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right)$ és az $U\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right)$ alakú halmazok már definiáltak olyan módon, hogy még

$$\mathrm{cl}\left(U\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right)\right) \subseteq U\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right)$$

is fennáll. A (2) tulajdonság felhasználásával, legyen $U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)$ olyan nyílt környezete a $\mathrm{cl}\left(U\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right)\right)$ zárt halmaznak, amelyre még

$$\mathrm{cl}\left(U\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right)\right) \subseteq U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) \subseteq \mathrm{cl}\left(U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)\right) \subseteq U\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right)$$

is fennáll. Ilyen módon tehát definiáltuk az összes $U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)$ alakú halmazt, továbbá

$$k < l \Rightarrow \mathrm{cl}\left(U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)\right) \subseteq U\left(\frac{l}{2^{n+1}}\right)$$

is fennáll. Ebből már világos, hogy amennyiben $r < r'$ diadikus törtek, úgy $\mathrm{cl}(U(r)) \subseteq U(r')$, hiszen létezik k, l és n természetes szám, melyekre $r = \frac{k}{2^n}$, $r' = \frac{l}{2^n}$ és persze $k < l$. Így alkalmazva a fenti kiemelt sort, valóban azt kapjuk, hogy $\mathrm{cl}(U(r)) \subseteq U(r')$.

Most definiáljuk tetszőleges $r \in [0,1]$ esetén a kívánt $U(r)$ halmazokat, az alábbi módon

$$U(r) \doteq \cup\{U(t) : t \leq r \text{ és } t \text{ diadikus tört}\}$$

Mivel diadikus törtekre $t \leq r$ esetén $U(t) \subseteq U(r)$, ezért a fenti definíció helyben hagyja $U(r)$ eredeti értelmezését amennyiben r diadikus tört. A definíció alapján világos, hogy $r < r'$ esetén $U(r) \subseteq U(r')$. Legyen most $0 \leq r < r' \leq 1$. Világos, hogy létezik t és t' diadikus tört, melyekre $r < t < t' < r'$. Ezekre

$$U\left(r'\right) \supseteq U\left(t'\right) \supseteq \mathrm{cl}(U(t)) \supseteq \mathrm{cl}(U(r)).$$

Ezt kellett belátni.
(3) $\Rightarrow$ (4) a G és F diszjunkt zárt halmazokhoz, legyenek az $U(r)$ ($r \in [0,1]$) halmazok a (3) szerint definiálva. Az egyszerűség kedvéért egészítsük ki ezeket a következő módon: $r < 0$ mellett legyen $U(r) \doteq \emptyset$, és $r > 1$ mellett $U(r) \doteq X$. Definiáljuk az $f : X \to \mathbb{R}$ függvényt:

$$f(x) \doteq \inf\{t \in \mathbb{R} : x \in U(t)\}.$$

az f jól definiált, hiszen $t > 1$ mellett $x \in U(t)$ biztosan teljesül, tehát az inf mögötti halmaz nem üres. Ha $t < 0$, akkor az $x \in U(t)$ biztosan nem áll fenn, tehát az inf mögötti halmaz alulról korlátos is. A fenti gondolatból az

is látszik, hogy minden $x \in X$ mellett $0 \le f(x) \le 1$, tehát valóban $f : X \to [0,1]$. Tudjuk, hogy $x \in G \subseteq U(0)$, ezért $f(G) = \{0\}$, továbbá $x \in F \subseteq U(1)^c$, ezért $f(F) = \{1\}$.
Legyen x_0 egy rögzített pont, belátjuk az f függvény x_0-beli folytonosságát. Jelölje $t_0 \doteq f(x_0)$, továbbá $\varepsilon > 0$-t rögzítsük. Mivel
$$t_0 = \inf\{t \in \mathbb{R} : x_0 \in U(t)\},$$
ezért $t_0 + \varepsilon$-hoz létezik $t' < t_0 + \varepsilon$, melyre $x_0 \in U(t') \subseteq U(t_0 + \varepsilon)$, tehát
$$x_0 \in U(t_0 + \varepsilon),$$
és persze az f értelmezése szerint
$$x \in U(t_0 + \varepsilon) \Rightarrow f(x) \le t_0 + \varepsilon.$$
Másrészről $t_0 - \varepsilon/2$ nem eleme az infinum mögötti halmaznak, $x_0 \notin U(t_0 - \varepsilon/2)$, ezért a $\mathrm{cl}(U(t_0 - \varepsilon)) \subseteq U(t_0 - \varepsilon/2)$ tartalmazás miatt
$$x_0 \notin \mathrm{cl}(U(t_0 - \varepsilon)),$$
és ha $f(x) < t_0 - \varepsilon$ fennállna, akkor f értelmezése szerint $x \in U(t_0 - \varepsilon)$ következne, tehát
$$x \notin U(t_0 + \varepsilon) \Rightarrow f(x) \ge t_0 - \varepsilon.$$
Összefoglalva azt kaptuk, hogy
$$x_0 \in U(t_0 + \varepsilon) \cap \mathrm{cl}(U(t_0 - \varepsilon))^c$$
és
$$x \in U(t_0 + \varepsilon) \cap \mathrm{cl}(U(t_0 - \varepsilon))^c \Rightarrow t_0 - \varepsilon \le f(x) \le t_0 + \varepsilon.$$
Ez épp f-nek x_0-ban való folytonosságát jelenti.
(4) $\Rightarrow$ (1) Legyenek a G és az F egymástól diszjunkt zárt halmazok, továbbá f az őket szétválasztó folytonos függvény, amely (4) szerint létezik. Legyen
$$U \doteq f^{-1}([0,1/2)) \text{ és } V \doteq f^{-1}((1/2,1]).$$
Világos, hogy f folytonossága miatt U és V nyílt halmazok, a definíciójuk szerint diszjunktak, továbbá $G \subseteq U$ és $F \subseteq V$. Ezt kellett belátni. ❑

4.2. Nachbin-féle kiterjesztés

Legyen a továbbiakban az (X, τ) topologikus téren egy R reláció is megadva.

4.2. definíció. *Az $A \subseteq X$ hamazt* fogyónak *nevezzük, ha minden $a \in A$ esetén $R_a \subseteq A$ és hasonlóan az A halmazt* növőnek *mondjuk, ha minden $a \in A$ esetén $R^a \subseteq A$ is teljesül.*

4.3. megjegyzés. *Világos, hogy X növő (fogyó) halmaz, és akárhány növő (fogyó) halmaz metszete sőt egyesítése is növő (fogyó). Az is pusztán az alsó- és felsőnívóhalmaz definíciójának következménye, hogy valamely növő (fogyó) halmaz komplementuma fogyó (növő).*

4.4. definíció. *Jelölje tetszőleges $a \subseteq X$ esetén*
· *$d(a)$ az a-t tartalmazó legszűkebb csökkenő halmazt;*
· *$i(a)$ az a-t tartalmazó legszűkebb növő halmazt;*
· *$D(a)$ az a-t tartalmazó legszűkebb csökkenő és zárt halmazt;*
· *$I(a)$ az a-t tartalmazó legszűkebb növő és zárt halmazt.*

4.5. megjegyzés. *Látható, hogy d, i, D, I lezárási operátorok.*

4.6. lemma (Nachbin). *Az (X, τ) topologikus téren legyen adva egy R reláció. Az alábbi feltevések egymással ekvivalensek:*

(1) *Ha F és G diszjunkt zárt halmazok F fogyó G növő, akkor vannak olyan U és V diszjunkt nyílt környezetei, melyekre U fogyó és V növő.*

(2) *Ha G zárt fogyó halmaz és Q ennek nyílt fogyó környezete, akkor van olyan U nyílt fogyó környezete G-nek melyre még $D(U) \subseteq Q$ is teljesül, azaz*

$$G \subseteq U \subseteq D(U) \subseteq Q.$$

(3) *Ha G és F egymástól diszjunkt zárt halmazok G fogyó és F növő, akkor léteznek olyan $U(r)$ $(r \in [0,1])$ nyílt fogyó halmazok, amelyekre az alábbi három dolog fennáll:*

- $G \subseteq U(0)$;
- $F \subseteq U(1)^c$;
- $r < r'$ *esetén* $D(U(r)) \subseteq U(r')$.

(4) *Ha G és F egymástól diszjunkt zárt halmazok G fogyó és F növő, akkor létezik $f : X \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre az alábbi négy tulajdonság teljesül:*

- f *R–monoton függvény, azaz minden $(x, y) \in R$ esetén $f(x) \geq f(y)$;*
- f *folytonos;*
- *minden $x \in X$ esetén $0 \leq f(x) \leq 1$;*
- *minden $x \in G$ esetén $f(x) = 0$ és minden $x \in F$ esetén $f(x) = 1$.*

Amennyiben a tétel egyik feltétele teljesül, akkor (4)*-ben szereplő függvénynek*

$$f(x) \doteq \inf\{t \in \mathbb{R} : x \in U(t)\} = \sup\{t \in \mathbb{R} : x \notin U(t)^c\}$$

is megfelel, ahol a $\{U(t) : t \in \mathbb{R}\}$ a (3) *pontban definiált halmazrendszer.*

*Az (X, τ) topologikus teret R-*normálisnak *nevezzük, ha a fenti négy ekvivalens feltétel egyike így mindegyike teljesül.*

Bizonyítás.
(1) ⇒ (2) Tekintsük a G zárt fogyó halmazt és ennek egy Q nyílt fogyó környezetét. Ekkor G és Q^c halmazok diszjunktak és zártak G fogyó és Q^c növő, tehát (1) miatt létezik U fogyó és V növő diszjunkt nyílt halmaz, amelyekre

$$G \subseteq U \text{ és } Q^c \subseteq V.$$

Találtunk tehát U nyílt környezetét a G halmaznak, melyre $U \subseteq V^c$, amiből V^c zárt és fogyó volta miatt

$$D(U) \subseteq V^c \subseteq Q$$

is következik. Evvel (2) tulajdonság teljesülését beláttuk.
(2) ⇒ (3) a kívánt tulajdonságú $U(r)$ halmazok konstrukciója következik. Először szorítkozzunk csak a $[0,1]$ intervallum $r = k/2^n$ alakú diadikus törtjeire. Az n-szerinti indukcióval definiálunk:
Ha $n = 0$, akkor csak $r = 0$ és $r = 1$ lehetséges, tehát csak az $U(0)$ és az $U(1)$ halmazokat kell definiálnunk, de olyan módon, hogy a tételben megfogalmazott három tulajdonság teljesüljön. Ehhez használjuk (2) tulajdonságot. A G zárt és az F^c nyílt fogyó halmazokra $G \subseteq F^c$, létezik tehát $U(0)$ nyílt fogyó halmaz, melyre

$$G \subseteq U(0) \subseteq D(U(0)) \subseteq F^c.$$

amennyiben $U(1) \doteq F^c$ definícióval élünk, akkor az $n = 1$ esettel készen is vagyunk. Látható, hogy $U(0)$ és $U(1)$ kielégíti a megkövetelt három feltételt.
Tegyük fel most, hogy valamely n számig már definiáltuk valamennyi $U(k/2^n)$ alakú halmazt úgy, hogy azok kielégítik az

$$r < r' \Rightarrow D(U(r)) \subseteq U(r')$$

feltételt. Most definiálni fogjuk az $U(k/2^{n+1})$ alakú halmazokat. Amennyiben k páros, azaz $k = 2l$ alakú, akkor legyen egyszerűen

$$U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) = U\left(\frac{2l}{2^{n+1}}\right) \doteq U\left(\frac{l}{2^n}\right).$$

Ha k páratlan, akkor az indukciós feltevés szerint $U\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right)$ és az $U\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right)$ alakú halmazok már definiálva vannak olyan módon, hogy

$$D\left(U\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right)\right) \subseteq U\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right)$$

is fennáll. A (2) tulajdonság fennállása miatt, legyen $U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)$ olyan nyílt fogyó környezete a $D\left(U\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right)\right)$ zárt fogyó halmaznak, amelyre még

$$D\left(U\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right)\right) \subseteq U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) \subseteq D\left(U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)\right) \subseteq U\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right)$$

is fennáll. Ilyen módon tehát definiáltuk az összes $U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)$ nyílt fogyó halmazt, továbbá a

$$k < l \Rightarrow D\left(U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)\right) \subseteq U\left(\frac{l}{2^{n+1}}\right)$$

implikáció is fennáll. Ebből már világos, hogy amennyiben $r < r'$ diadikus törtek, úgy $D(U(r)) \subseteq U(r')$, hiszen létezik k, l és n természetes szám melyekre $r = \frac{k}{2^n}$, $r' = \frac{l}{2^n}$ és persze $k < l$. Így alkalmazva a fenti kiemelt sort, valóban azt kapjuk, hogy $D(U(r)) \subseteq U(r')$.

Most definiáljuk tetszőleges $r \in [0,1]$ esetén a kívánt $U(r)$ halmazokat, az alábbi módon

$$U(r) \doteq \cup\{U(t) : t \leq r \text{ és } t \text{ diadikus tört}\}$$

Mivel diadikus törtekre $t \leq r$ esetén $U(t) \subseteq U(r)$, ezért a fenti definíció helyben hagyja $U(r)$ eredeti értelmezését amennyiben r diadikus tört. A definíció alapján az világos, hogy $r < r'$ esetén $U(r) \subseteq U(r')$. Legyen most $0 \leq r < r' \leq 1$. Világos, hogy létezik t és t' diadikus tört, melyekre $r < t < t' < r'$. Ezekre

$$U\left(r'\right) \supseteq U\left(t'\right) \supseteq D(U(t)) \supseteq D(U(r)).$$

Ezt kellett belátni.
(3) ⇒ (4) Világos, hogy tetszőleges a halmazra $U \subseteq \mathrm{cl}(U) \subseteq D(U)$, ezért (3) fennállásából következik, hogy fennáll az Uriszon-lemma (3) pontja is, tehát az evvel ekvivalens (4) is. Azt kell már csak belátnunk, hogy az

$$f(x) \doteq \inf\{t \in \mathbb{R} : x \in U(t)\}.$$

teljesíti a kívánt monotonitási feltételt. Legyen tehát $(x, y) \in R$. Világos, hogy

$$\{t \in \mathbb{R} : x \in U(t)\} \subseteq \{t \in \mathbb{R} : y \in U(t)\},$$

hiszen $U(t)$ egy fogyó halmaz, azaz $x \in U(t)$ esetén $y \in R_x$ miatt $y \in U(t)$. Véve mindkét halmaz infimumát azt kapjuk, hogy $f(x) \geq f(y)$. Ezt kellett belátni.
(4) ⇒ (1) Legyenek a G fogyó és az F növő egymástól diszjunkt zárt halmazok, továbbá f az őket szétválasztó folytonos monoton függvény, amely (4) szerint létezik. Legyen

$$U \doteq f^{-1}([0,1/2)) \text{ és } V \doteq f^{-1}((1/2,1]).$$

Világos, hogy f folytonossága miatt U és V nyílt halmazok, a definíciójuk szerint diszjunktak, továbbá $G \subseteq U$ és $F \subseteq V$. Ezt kellett belátni. Az f monotonitási tulajdonsága miatt U fogyó és V növő. ❏

Nézzünk egy nagyon fontos speciális esetet:

4.7. példa. *Legyen az (X, τ) topologikus téren egy R tranzitív, teljes reláció adva, amely kompatiblis a topológiával, azaz minden $x \in R$ esetén az R^x és R_x felső- illetve alsónívóhalmazok zártak.*
Ekkor a τ topológia R-normális.

Bizonyítás.
Legyenek a G növő, és az F fogyó diszjunkt halmazok zártak. Először tegyük fel, hogy létezik $z \notin G \cup F$. Világos, hogy az R teljessége miatt $G \subseteq A(R)^z$ és $F \subseteq A(R)_z$. Az $A(R)$ reláció felső- illetve alsónívóhalmazai növő illetve fogyó halmazok az R-relációra nézve, az $A(R) \circ R \subseteq A(R)$ tulajdonság miatt. Így a teljességet újra kihasználva sikerült G és F fogyó illetve növő zárt halmazokat fogyó illetve növő diszjunkt nyílt halmazokkal szétválasztanunk.

Másodszor nézzük azt az esetet mikor $X = F \cup G$, azaz $F^c \cap G^c = \emptyset$. Vegyük észre, hogy készen is vagyunk, hiszen F^c egy növő nyílt halmaz, amely tartalmazza G-t, és G^c egy fogyó nyílt halmaz, amely tartalmazza F-et. ❏

Emlékezzünk arra, hogy valamely R teljes reláció esetén $A(R) \circ S(R) \subseteq A(R)$ ekvivalens $S(R) \circ A(R) \subseteq A(R)$ feltétellel, és implikálja $S(R)$ szimmetrikus rész tranzitivitását. Amennyiben τ még összefüggő is X-en, akkor az $A(R) \circ S(R) \subseteq A(R)$ feltétel R tranzitivitásával ekvivalens. (Rader-tétel) . Lásd még [7] és [4].

5. A folytonos reláció fogalma

A fejezetben legyen (X, τ) egy topologikus tér. Amennyiben az R egy bináris reláció X felett, úgy jelölje $L_c(R)$ azon Q tranzitiv, teljes, a topologiával kompatibilis relációk halmazát, amelyre $R \subseteq Q$. Világos, hogy $X \times X \in L_c(R)$ tetszőleges $R \subseteq X \times X$ mellett.

5.1. állítás. *Legyen R egy tranzitív és teljes reláció az (X, τ) topológikus téren. Az alábbi két feltétetel egymással ekvivalens:*
· R kompatibilis a topológiával, azaz R^x és R_x tetszőleges $x \in X$ esetén zárt halmaz;
· minden $(x, y) \in A(R)$-hez létezik $f : X \to [0,1]$ folytonos, R–monoton függvény, amelyre

$$1 = f(x) > f(y) = 0.$$

Bizonyítás.
Tekintsük az R_y és R^x zárt halmazokat. Az $A(R)$ aszimmetrikus rész negatív tranzitivitása miatt ezek diszjunktak, hiszen $A(R)_x \cup A(R)^y = X$, ergo $R^x \cap R_y = \emptyset$. Az R tranzitivitása miatt R^x növő és R_y fogyó halmaz. Kihasználva, hogy a tér R-normális, a Nachbin-szeparációs tétel szerint létezik monoton növő valós f függvény, amelyre $f\left(\left\{R_y\right\}\right) = 0$ és $f(\{R^x\}) = 1$.
Megfordítva, rögzített $x \in X$ mellett megmutatjuk, hogy R_x zárt. A felső nívóhalmaz zártságának igazolása evvel analóg módon történik. Világos, hogy az alábbi három eset közül az egyik teljesül:

(1) $A(R)^x = \emptyset$;
(2) $\exists z \in A(R)^x$, hogy $\forall u \in A(R)^x$-re $(u, z) \in R$;
(3) $\forall z \in A(R)^x$-hez $\exists u \in A(R)^x$, melyre $(z, u) \in A(R)$.

Az első esetben $R_x = X$.
A második esetben a (z, x) párhoz van olyan monoton folytonos függvény, melyre $f(z) > f(x)$. Válasszuk meg az ε számot úgy, hogy $f(z) > f(z) - \varepsilon > f(x)$. Ekkor

$$R_x = f^{-1}\left(\left(-\infty, f(z) - \varepsilon\right]\right),$$

hiszen $v \in R_x$ esetén az f monotonitása szerint $f(z) - \varepsilon > f(x) \geq f(v)$ valamint, ha $v \notin R_x$, akkor $v \in A(R)^x$, azaz $(v, z) \in R$, azaz $f(v) \geq f(z) > f(z) - \varepsilon$. Kihasználva f folytonosságát azt kapjuk, hogy R_x zárt halmaz ősképe lévén maga is zárt.
A harmadik esetben minden $z \in A(R)^x$-hez létezik $u \in A(R)^x$, melyre $(z, u) \in A(R)$. Minden ilyen (z, u) párhoz válasszuk az $f_{z,u} : X \to \mathbb{R}$ folytonos, monoton függvényeket, melyekre $f_{z,u}(z) > f_{z,u}(u)$. Tekintsük a következő halmazt:

$$\cap\left\{f_{z,u}^{-1}\left(-\infty, f_{z,u}(u)\right] : z \in A(R)^x, u \in A(R)^x \quad \text{és} \quad (z, u) \in A(R)\right\}.$$

Egy $v \in R_x$ esetén $f_{z,u}(u) \geq f_{z,u}(x) \geq f_{z,u}(v)$ minden $f_{z,u}$ monoton függvény mellett, ezért R_x részhalmaza a fenti halmaznak. Másrészről, ha $v \notin R_x$, akkor $v \in A(R)^x$, így létezik $u \in A(R)^x$, melyre $(v, u) \in A(R)$. Az ehhez a (v, u) párhoz tartozó $f_{v,u}$ függvényre $f_{v,u}(v) > f_{v,u}(u)$, azaz $v \notin f_{v,u}^{-1}\left(-\infty, f_{v,u}(u)\right]$, tehát v nem lehet a fent kiemelt halmaznak sem eleme. Megmutattuk tehát, hogy

$$\cap\left\{f_{z,u}^{-1}\left(-\infty, f_{z,u}(u)\right] : z \in A(R)^x, u \in A(R)^x \quad \text{és} \quad (z, u) \in A(R)\right\} = R_x$$

teljesül, amiből R_x zártsága az $f_{z,u}$ függvények folytonossága miatt már könnyen adódik. ❏

5.1. Reprezentálhatóság

Az alfejezetben a reprezentálhatóságnak az Urisszon–lemmával kapcsolatos eredményeit gyűjtöm össze. Természetesen csak tranzitív és teljes reláció reprezentálhatósága jöhet szóba, ezért végig feltesszük az R reláció tranzitivitását és teljességét!

A legáltalánosabb feltétel, amelyből a Debreu– és az Eilenberg–tétel is következik az alábbi.

5.2. állítás. *Legyen R egy tranzitív, teljes reláció az (X,τ) topológikus tér felett. Az alábbi feltevések ekvivalensek:*

· *A tér R–szeparábilis és $t_R \subseteq \tau$;*

· *A tér gyengén R–szeparábilis, a jump halmazok számossága megszámlálható és $t_R \subseteq \tau$;*

· *A tér gyengén R–szeparábilis, létezik R-nek reprezentációja és $t_R \subseteq \tau$;*

· *A generált t_R rendezés topológiának van megszámlálható bázisa, azaz a tér M2 tulajdonságú és $t_R \subseteq \tau$;*

· *Az R reláció reprezentálható és $t_R \subseteq \tau$;*

· *Az R reláció a τ topológiára nézve folytonos függvénnyel reprezentálható.*

Bizonyítás.
Az első öt állítás ekvivalenciája a (3.12) állítás miatt nyilvánvaló, hiszen attól csak annyiban különbözik, hogy mindegyik feltételhez hozzátettük a topológiával való kompatibilitást.
(1) $\Rightarrow$ (6) Legyen $Z \doteq \{z_1,\ldots\}$ egy Jaffray–sűrű megszámlálható részhalmaz. Minden $(z_n,z_m)\in A(R)$ mellett legyen $f_{n,m} : X \to [0,1]$ egy folytonos R-monoton függvény, amelyre $f_{n,m}(z_n) > f_{n,m}(z_m)$. Ilyen függvény létezését a (5.1) állítás garantálja. Legyen

$$f \doteq \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+m}} f_{n,m}$$

Világos, hogy f folytonos az abszolút konvergencia miatt; és R-monoton, mivel R-monoton függvények összege és határértéke is ilyen. Tegyük fel most, hogy $(x,y)\in A(R)$. A Jaffray–sűrűség definíciója miatt létezik $(z_n,z_m)\in A(R)$, amelyre $(x,z_n)\in R$ és $(z_m,y)\in R$. Erre az n és m számra $f(x)\geq f(z_n) > f(z_m)\geq f(y)$, hiszen minden más párosra $f_{k,l}(z_n)\geq f_{k,l}(z_m)$, de a fent rögzített n és m számokra $f_{n,m}(z_n) > f_{n,m}(z_m)$. Ezt kellett belátni.
(6) $\Rightarrow$ (5) Egyszerűen következik abból, hogy $R^x = f^{-1}\left((-\infty, f(x)]\right)$. ❑

Most nézzük Eilenberg és Debreu tételeit.

5.3. állítás (Eilenberg, Debreu). *Legyen R tranzitív és teljes reláció, amely kompatibilis az (X,τ) topológikus térrel. Tegyük fel, hogy az alábbi két feltétel egyike fennáll:*
· *(X,τ) összefüggő és szeparábilis (Eilenberg feltétele);*
· *(X,τ) M2 tér, azaz van megszámlálható bázisa (Debreu feltétele).*

Ekkor van a térben megszámlálható Jaffray–sűrű részhalmaz, tehát az előző (5.2) állítás szerint a reláció folytonos függvénnyel reprezentálható.

Bizonyítás.
Tegyük fel, hogy tér összefüggő és létezik megszámlálható sűrű részhalmaza. Megmutatjuk, hogy ekkor nincs jump halmaza X-nek. Legyen ugyanis $(x,y)\in A(R)$. A tranzitivitás szerint R^x és R_y diszjunkt halmazok, és $X \neq R^x \cup R_y$ a tér összefüggősége és a reláció kompatibilitása miatt. Kihasználva a teljességet, kapjuk, hogy $A(R)_x \cap A(R)^y \neq \emptyset$, tehát $R_x \cap R^y$ nem lehet egy jump halmaz reprezentációja.

Most nézzük azt az esetet, mikor a τ topológia M2. Rögzítsünk egy $\mathcal{B} = \{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ bázist. A $\mathcal{B}$ halmazrendszer rendelkezik az (1.1)-ban előírt tulajdonsággal, tehát a relációnak van nem feltétlen folytonos reprezentációja, amiből persze következik (2.6), hogy csak megszámlálhatóan sok jump halmaz létezése lehetséges.

Tudjuk tehát, hogy mindkét feltétel implikálja, hogy a topológiának legyen megszámlálható sűrű halmaza, és a jumpok halmaza legfeljebb megszámlálható. Node egy topológiai értelemben sűrű halmaz kiegészítve az összes jumpok végpontjaival egy Jaffray–sűrű halmazt alkot. ❑

5.4. definíció. *Legyen* (X,τ) *egy topologikus tér és* $R \subseteq X \times X$ *reláció. Azt mondjuk, hogy* R *folytonos, ha minden* $(x,y) \in A(R)$*-hez létezik* $f : X \to \mathbb{R}$ *folytonos,* R*–monoton függvény, amelyre* $f(x) > f(y)$*.*

Az előző állítás szerint egy tranzitív, teljes relációra a folytonosság egybeesik a topologiával való kompatibilitással.

5.5. állítás. *Legyen* R *egy bináris reláció az* (X,τ) *topologikus téren. Az alábbi két feltétel egymással ekvivalens:*
· R *folytonos*
· $A(R) \subseteq \{A(Q) : Q \in L_c(R)\}$

Bizonyítás.
Tegyük fel, hogy R egy folytonos reláció, valamint $(x,y) \in A(R)$. Definíció szerint létezik tehát $f : X \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amely egyrészt R–monoton, másrészt $f(x) > f(y)$. Legyen Q_f az f által indukált reláció, azaz

$$(u,v) \in Q_f \quad \text{pontosan akkor, ha} \quad f(u) \geq f(v).$$

Világos, hogy Q_f tranzitív, teljes, az f folytonossága miatt a Q_f szerinti nívóhalmazok zártak, továbbá az f függvény R–monotonitása szerint $R \subseteq Q_f$ is teljesül, azaz $Q_f \in L_c(R)$. Az $f(x) > f(y)$ egyenlőtlenség szerint viszont $(x,y) \in A\left(Q_f\right)$ is fennáll, ami azt jelenti, hogy az $A(R) \subseteq \{A(Q) : Q \in L_c(R)\}$ tartalmazást beláttuk.

Fordítva, ha a tartalmazás fennáll, akkor rögzítsük az $(x,y) \in A(R)$ párt. Legyen $Q \in L_c(R)$ olyan, melyre $(x,y) \in A(Q)$. Az előző állítást Q–ra alkalmazva, kapunk egy $f : X \to \mathbb{R}$ folytonos Q–monoton függvényt, melyre $f(x) > f(y)$. Node $R \subseteq Q$ szerint a Q–monotonitás implikálja az R–monotonitást, ami azt jelenti, hogy valóban teljesül az R reláció folytonosságának definíciója. ❏

6. Az R–τ topológia

Rögzített (X,t) topológikus tér, és R tranzitív, teljes reláció. Most bevezetünk két újabb topológiát X-en. Először is jelölje $\mathcal{F}(X,t,R)$ az összes $f : X \to \mathbb{R}$ a t topológiára nézve folytonos és az R relációra nézve monoton — $(x,y) \in R \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ — függvények halmazát.

6.1. definíció. *Jelölje* t_R *azt a leggyengébb topologiát, ahol minden* $x \in X$ *mellett az* $A(R)^x$ *és az* $A(R)_x$ *alakú halmazok nyíltak. Ez az a topológia, amelynek szubbázisa:*

$$\left\{A(R)^x : x \in X\right\} \cup \left\{A(R)_x : x \in X\right\} \cup \{X,\emptyset\}$$

Ezt szokás az R *generálta topológiának nevezni.*

6.2. definíció. *Jelölje most* t^R *azt a leggyengébb olyan topológiát, amelyre nézve minden* $f \in \mathcal{F}(X,t,R)$ *függvény folytonos. E topológia szubbázisa:*

$$\left\{X\left(f > c\right) : f \in \mathcal{F}(X,t,R), c \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{X\left(f < c\right) : f \in \mathcal{F}(X,t,R), c \in \mathbb{R}\right\} \cup$$
$$\cup \{X,\emptyset\}.$$

E topológiát Herden és Pallack a szóban forgó dolgozatukban R–t *topológiának nevezi.*

Világos, hogy a generált t_R topológia nem függ az eredeti t topológiától csak az R relációtól, de t^R már függ t–től és R–től is. Ennyiben érthető az elnevezések közti aszimmetria. Végül is mindkét topológia egyfajta gyenge topológia!

Minél pontosabban látnunk kéne a három topológia kapcsolatát! Először kezdjük a triviális részekkel:

6.3. megjegyzés. · *A* $t_R \subseteq t$ *pontosan akkor áll fenn, ha minden* $x \in X$*–re* $A(R)^x, A(R)_x \in t$*, ami a teljesség miatt avval ekvivalens, hogy* R *kompatibilis a* t *topológiával.*
· *A* $t^R \subseteq t$ *mindig igaz, hiszen minden* $f \in \mathcal{F}(X,t,R)$ *függvény* t*–folytonos is.*
· *A* $t^R \subseteq t_R$ *is mindig igaz. Ugyanis, amennyiben* $X\left(f > c\right)$ *nem üres, akkor tetszőleges* $f(u) > c$ *mellett* $X\left(f > c\right) \supseteq R^u$*, hiszen* f *az* R *relációra nézve monton. Így azt kapjuk, hogy* t^R *minden nemüres* $X\left(f > c\right) \cap X\left(f < d\right)$ *bázis eleme tartalmaz* $R^u \cap R_v \supseteq A(R)^u \cap A(R)_v$ *alakú halmazt. Node ez utóbbiak éppen* t_R *bázisát alkotják.*

6.4. állítás. (X, t) *topológikus tér, R tranzitív és teljes reláció. Ekkor az alábbi három feltétel ekivalens:*
· *az R alsó és felső nívóhalmazai zártak;*
· $t_R \subseteq t$;
· $t_R = t^R$.

Bizonyítás.
(1) ⇒ (2) és (2) ⇒ (1) Az első két állítás ekvivalenciája R teljessége mellett nyilvánvaló, mint azt az imént is megjegyeztük.
(3) ⇒ (2) $t_R = t^R \subseteq t$ az iménti megjegyzés miatt.
(2) ⇒ (3) Tegyük fel, hogy $t_R \subseteq t$, azaz $A(R)$ nívóhalmazai nyíltak és R nívóhalmazai zártak az eredeti t topológiára nézve. Elegendő megmutatnunk, hogy $t_R \subseteq t^R$. Ehhez elég megmutatni, hogy az $A(R)^x \in t^R$ és $A(R)_x \in t^R$ minden $x \in X$ mellett. No de R teljességét kihasználva a (5.1) állítás szerint

$$A(R)^x = \cup\{X(f > f(x)) : f \in \mathcal{F}(X, t, R)\},$$

hiszen ha $(y, x) \in A(R)$, akkor létezik $f \in \mathcal{F}(X, t, R)$ melyre $f(y) > f(x)$, és megfordítva ha y olyan pont melyre $f(y) > f(x)$, akkor $(x, y) \in R \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ implikáció miatt $(y, x) \in A(R)$ is teljesül. ❏

Hivatkozások

[1] D.S. Bridges and G.B. Mehta. (1995) *Representation of Preference Orderings.* Springer, Berlin.

[2] Gerhard Herden. (1995) On some equivalent approaches of mathematical utility theory. *Mathematical Social Sciences*, 29:19–31.

[3] Gerhard Herden and Andreas Pallack. (2002) On the continuous analogue of the Szpilrajn Theorem I. *Journal of Mathematical Social Sciences*, 43:115–134.

[4] Gyula Magyarkúti. (2001) *A racionalitás fogalmának axiómatikus megközelítése.* Ph.D. értekezés, BKE, Budapest.

[5] Leopoldo Nachbin. *Topology and Order.* (1965) D. Van Nostrand Company, Princeton, New Yersey, Toronto, New York, London.

[6] Horst Shubert. (1986) *Topológia.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

[7] Hugo Sonnenschein. (1965) The relationship between transitive preference and the structure of the choice space. *Econometrica*, 33:624–634.

[8] P Uryshon. (1925) Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen. *Annalen*, 94:262–295.

Abstract

Urishon–Nachbin Approach to the Representation Theorem

Primarily following Bridges-Mehta (1995) and Herden-Pallack (2002), this paper is a discussion of the equivalent re-formalizations of the utility representation problem. Our contribution to this widely discussed theory of economic literature is that we consider the representation theorem as a consequence of the Urishon's lemma. Note that Debreu's celebrated Gap-lemma is not used here. It is substituted by one of the most standardized tools of the topology of early 20th century; the Nachbin's version of the Urishon's-lemma.