



Munich Personal RePEc Archive

Theorem of existence of ruptures in the probability scale

Harin, Alexander

<institution>

08. February 2010

Online at <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/20593/>

MPRA Paper No. 20593, posted 09. February 2010 / 11:17

Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей

Александр Харин

Московский физико-технический институт
Современная Гуманитарная Академия

В статье доказаны теоремы о существовании разрывов у границ конечных интервалов и у границ шкалы вероятностей.

Содержание

Введение	1
Общая схема доказательства	2
1. Предварительные замечания	3
1.1. Общие условия, допущения и обозначения	
1.2. Максимально возможная величина центрального момента для ограниченного интервала	
2. Общая теорема о существовании разрывов	4
2.1. Общая лемма о стремлении к нулю центральных моментов	
2.2. Общая теорема о существовании разрывов для математического ожидания	
3. Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей	5
3.1. Общие замечания	
3.2. Лемма о стремлении к нулю центральных моментов плотности оценки вероятности	
3.3. Теорема о существовании разрывов для оценки вероятности	
3.4. Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей	
4. Пример разрывов в шкале вероятностей	6
4.1. Условия	
4.2. Результаты	
4.3. Вывод	
5. Применения теоремы. Экономика. Прогнозирование	7
Заключение	7
Литература	7
Приложения П1-П5	8

Введение

В настоящей статье, в развитие Nagin (2009), доказываются простые, но принципиальные теоремы о существовании разрывов у границ конечных интервалов и у границ шкалы вероятностей.

Общая упрощенная схема доказательства

Предварительное замечание

Максимально возможная величина конечного центрального момента $E(X-M)^n$ для конечного интервала $[A, B]$ не превышает соответствующей конечной степени n величины $(B-A)$ этого интервала, т.е. конечна

$$|E(X-M)^n| \equiv \left| \int_A^B (x-M)^n f(x) dx \right| \leq (B-A)^n \int_A^B f(x) dx = (B-A)^n < \infty.$$

Общая лемма

Если математическое ожидание M стремится к границе A конечного интервала $[A, B]$, то конечные центральные моменты стремятся к 0, в т.ч.

$$|E(X-M)^n| \leq (B-A)^n \times 2 \frac{(M-A)}{(B-A)} \xrightarrow{M \rightarrow A} 0.$$

Общая теорема

Если, на конечном диапазоне, какой-либо конечный центральный момент не может приближаться к нулю ближе, чем на ненулевую величину $r_1 > 0$, то математическое ожидание тоже не может приближаться к границе этого диапазона ближе, чем на ненулевую величину $r_2 > 0$, в т.ч.

$$0 < r_1 \leq |E(X-M)^n| \leq (B-A)^n \times 2 \frac{(M-A)}{(B-A)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 0 < r_2 \equiv \frac{r_1}{2(B-A)^{n-1}} \leq (M-A).$$

Другими словами, если, для функции, заданной на конечном диапазоне, существует ненулевой разрыв (rupture) $r_1 > 0$ между ее конечным центральным моментом и нулем, то между ее математическим ожиданием и границами диапазона тоже существуют ненулевые разрывы $r_2 > 0$.

Теорема для оценки вероятности

Если на диапазоне $[0, 1]$ для оценки вероятности, частоты $F \equiv M$ существует ненулевой разрыв $r_1 > 0$ между ее дисперсией и нулем, то между F и границами диапазона тоже существуют ненулевые разрывы $r_2 > 0$, в т.ч.

$$0 < r_2 \equiv \frac{r_1}{2} \leq M = F.$$

Теорема для вероятности

Если вероятность P является пределом, к которому стремится оценка вероятности, частота F при стремлении количества испытаний K к бесконечности, и существуют ненулевые разрывы $r_2 > 0$ между F и границами шкалы вероятностей, то между P и границами шкалы вероятностей существуют такие же ненулевые разрывы $r_2 > 0$, в т.ч.

$$F \xrightarrow{K \rightarrow \infty} P \quad \text{и} \quad 0 < r_2 \leq F \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 0 < r_2 \leq P.$$

1. Предварительные замечания

1.1. Общие условия, допущения и обозначения

Пусть далее, на интервале $X=[A, B]$: $0 < (B-A) < \infty$, определены: $f(x)$: для $x < A$ и $x > B$ справедливо $f(x) \equiv 0$ и для любой $F(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)f(x)dx = \int_A^B F(x)f(x)dx,$$

а для $A \leq x \leq B$ справедливо $f(x) \geq 0$;

интеграл

$$\int_A^B f(x)dx = Const_1 \neq 0;$$

начальный момент первого порядка, математическое ожидание

$$EX = \frac{1}{Const_1} \int_A^B xf(x)dx \equiv M;$$

и, для $n: 1 < n < \infty$, центральный момент n -го порядка

$$E(X - M)^n = \frac{1}{Const_1} \int_A^B (x - M)^n f(x)dx.$$

Без ограничения общности, $f(x)$ можно нормировать так, что $Const_1 = 1$. В основном тексте статьи и в приложениях записи выполняются в общей нормировке. В общей схеме доказательства, для простоты и наглядности, записи выполнены в нормировке на 1. В приложении активно используется параметр $m \equiv (M-A)/(B-A)$. Очевидно, что $0 \leq m \leq 1$.

1.2. Максимально возможная величина центрального момента для ограниченного интервала

Максимально возможную величину центрального момента можно оценить, исходя из определения

$$\begin{aligned} |E(X - M)^n| &= \left| \frac{1}{Const_1} \int_A^B (x - M)^n f(x)dx \right| \leq \frac{1}{Const_1} \int_A^B |(x - M)^n| f(x)dx \leq \\ &\leq \frac{1}{Const_1} (B - A)^n \int_A^B f(x)dx = (B - A)^n \end{aligned}$$

Более точную оценку (см. П1) дает имеющая максимально возможную величину центрального момента функция, сконцентрированная на краях интервала, $f(x) = C_A \delta(x-A) + C_B \delta(x-B)$: $C_A + C_B = 1$. Коэффициенты C_A и C_B можно выразить через M как $C_A = (B-M)/(B-A)$ и $C_B = (M-A)/(B-A)$ и

$$Max(E(X - M)^n) = ((A - M)^n \frac{B - M}{B - A} + (B - M)^n \frac{M - A}{B - A}).$$

Через нее получаем для $n=2$ очевидный максимум при $M_{max} = (B-A)/2$

$$Max(E(X - M)^2) = \left(\frac{B - A}{2}\right)^2,$$

а для $n=2k \gg 1$ - максимумы при $M_{max} \approx A + (B-A)/2n$ и $M_{max} \approx B - (B-A)/2n$

$$Max(E(X - M)^n) \approx \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{(B - A)^n}{2n}.$$

2. Общая теорема о существовании разрывов

2.1. Общая лемма о стремлении к нулю центральных моментов

Если, для $f(x)$, определенной в разделе 1.1., $M \equiv E(X)$ стремится к A или к B , то, для $1 < n < \infty$, $E(X-M)^n$ стремится к нулю.

Доказательство (подробно см. П2): Для $M \rightarrow A$

$$\begin{aligned} |E(X-M)^n| &\leq ((M-A)^{n-1} + (B-M)^{n-1}) \frac{(M-A)(B-M)}{B-A} \leq \\ &\leq ((B-A)^{n-1} + (B-A)^{n-1}) \frac{(M-A)(B-M)}{B-A} \leq 2(B-A)^{n-1}(M-A) \\ |E(X-M)^n| &\leq (B-A)^n \times 2 \frac{(M-A)}{(B-A)} \xrightarrow{M \rightarrow A} 0. \end{aligned}$$

Таким образом, при конечных $(B-A)$ и n и при M , стремящемся к A , т.е. при $(M-A)$, стремящемся к нулю, $E(X-M)^n$ тоже стремится к нулю. Для $M \rightarrow B$ рассмотрение полностью аналогично вышеприведенному.

Лемма доказана.

Замечание. Можно (см. П2) получить более точную оценку сходимости к нулю центральных моментов, в т.ч. для $M \rightarrow A$

$$|E(X-M)^n| \leq (B-A)^n \frac{M-A}{B-A} \xrightarrow{M \rightarrow A} 0$$

2.2. Общая теорема о существовании разрывов

для математического ожидания

Если, для $f(x)$, определенной в разделе 1.1., существуют $n : 1 < n < \infty$, и $r_1 > 0 : |E(X-M)^n| \geq r_1 > 0$, то существует $r_2 > 0 : A < (A+r_2) \leq E(X) \leq (B-r_2) < B$.

Доказательство (подробно см. П3): Из леммы, для $M \rightarrow A$

$$0 < r_1 \leq |E(X-M)^n| \leq (B-A)^n \times 2 \frac{(M-A)}{(B-A)} = 2(B-A)^{n-1}(M-A)$$

$$0 < \frac{r_1}{2(B-A)^{n-1}} \leq (M-A)$$

$$r_2 \equiv \frac{r_1}{2(B-A)^{n-1}}$$

Для $M \rightarrow B$ рассмотрение полностью аналогично вышеприведенному.

Поскольку $(B-A)$ и n – конечны, а $r_1 > 0$, то конечны и больше нуля – как $(M-A) \geq r_2 > 0$ так и $(B-M) \geq r_2 > 0$.

Теорема доказана.

Таким образом, если, на конечном диапазоне, конечный центральный момент не может приближаться к нулю ближе, чем на ненулевую величину $r_1 > 0$, то математическое ожидание тоже не может приближаться к границе этого диапазона ближе, чем на ненулевую величину $r_2 > 0$.

В более общем виде: Если для функции, определенной на конечном интервале, существует ненулевой разрыв (rupture), запрещенная зона $r_1 > 0$ между возможными значениями какого-либо из ее конечных центральных моментов и нулем, то между возможными значениями математического ожидания этой функции и любой из границ интервала тоже существуют ненулевые разрывы, запрещенные зоны $r_2 > 0$.

3. Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей

3.1. Общие замечания

Пусть, для серии испытаний с количеством испытаний K , в т.ч. при K , стремящемся к бесконечности $K \rightarrow \infty$, плотность $f(x)$ оценки вероятности, частоты $F : F \equiv M \equiv E(X)$, некоторого события имеет свойства, заданные в разделе 1.1., в частности, определена на $[0, 1]$ и $Const_1 = 1$.

3.2. Лемма о стремлении к нулю центральных моментов плотности оценки вероятности

Если для плотности $f(x)$, определенной в разделе 3.1., $E(X) \rightarrow 0$ или $E(X) \rightarrow 1$, то, для $1 < n < \infty$, $E(X-M)^n \rightarrow 0$.

Доказательство: Поскольку условия данной леммы удовлетворяют условиям леммы раздела 2.1, то утверждение данной леммы так же справедливо, как и утверждение леммы раздела 2.1. Лемма доказана.

3.3. Теорема о существовании разрывов для оценки вероятности

Если для плотности $f(x)$, определенной в разделе 3.1., существуют $n : 1 < n < \infty$, и $r_1 > 0 : E(X-M)^n \geq r_1 > 0$, то для оценки вероятности, частоты $F \equiv M \equiv E(X)$ существует $r_2 > 0 : 0 < r_2 \leq F \equiv M \equiv E(X) \leq (1-r_2) < 1$.

Доказательство: Поскольку условия данной теоремы удовлетворяют условиям теоремы раздела 2.2, то утверждение данной теоремы так же справедливо, как и утверждение теоремы раздела 2.2. Теорема доказана.

3.4. Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей

Если на интервале $[0, 1]$ определена P : при стремлении количества испытаний K к бесконечности, оценка вероятности, частота F стремится к P , т.е. $P = \lim F$, между оценкой вероятности и любой из границ интервала существуют ненулевые разрывы $0 < r_2 \leq F \leq (1-r_2) < 1$, то такие же ненулевые разрывы $0 < r_2 \leq P \leq (1-r_2) < 1$ существуют между P и любой из границ интервала.

Доказательство (подробнее см. П4): Поскольку операция взятия предела сохраняет нестрогие неравенства, то, при $P = \lim F$, из $r_2 \leq F \leq (1-r_2)$ следует $r_2 \leq P \leq (1-r_2)$. Теорема доказана.

Поскольку вероятность удовлетворяет условиям, наложенным на P , то теорема справедлива и для вероятности.

Теорему можно сформулировать и для нужд практических приложений:

Если, для серии испытаний с количеством испытаний K , стремящимся к бесконечности $K \rightarrow \infty$, и оценкой вероятности, частотой F , стремящейся при этом к вероятности P , т.е. $P = \lim F$, существует разрыв $r_1 > 0$ между возможными значениями дисперсии D оценки вероятности F и нулем, то у границ шкалы вероятностей тоже существуют разрывы $r_2 > 0$, как для возможных значений оценки вероятности F , так и для возможных значений вероятности P .

Следует подчеркнуть, что эти разрывы у границ шкалы вероятностей для F и для P существуют только тогда, когда имеет место ненулевой разрыв между возможными значениями дисперсии D (или иного центрального момента) оценки вероятности F и нулем.

4. Пример разрывов в шкале вероятностей

Условия

Простейший пример подобных разрывов – стрельба в мишень в одномерном приближении (подробнее см. П5):

Пусть размер мишени равен $2L > 0$, а разброс попаданий, при точном прицеливании, подчиняется нормальному закону с дисперсией σ^2 . Тогда максимальная вероятность попадания в мишень P_{in_Max} и минимальная вероятность промаха $P_{out_min} = 1 - P_{in_Max}$ равны (см., напр., Прохоров 1988):

Результаты

При $\sigma = 0$ имеем $P_{in_Max} = 1$ и $P_{out_min} = 0$, то есть разрывов нет, то есть $r_2 = 1 - P_{in_Max} = P_{out_min} = 0$.

При $L = 3\sigma$ имеем $0 \leq P_{in} \leq P_{in_Max} = 0,997 < 1$ и $0 < 0,003 = P_{out_min} \leq P_{out} \leq 1$. При этом, разрывы r_2 в шкале вероятностей для попаданий и промахов составляют $r_2 = 0,003 > 0$.

При $L = 2\sigma$ имеем $0 \leq P_{in} \leq P_{in_Max} = 0,95 < 1$ и $0 < 0,05 = P_{out_min} \leq P_{out} \leq 1$. При этом, разрывы r_2 в шкале вероятностей для попаданий и промахов составляют $r_2 = 0,05 > 0$.

При $L = \sigma$ имеем $0 \leq P_{in} \leq P_{in_Max} = 0,68 < 1$ и $0 < 0,32 = P_{out_min} \leq P_{out} \leq 1$. При этом, разрывы r_2 в шкале вероятностей для попаданий и промахов составляют $r_2 = 0,32 > 0$.

Вывод

Таким образом:

При нулевой $\sigma = 0$ - разрывов нет ($r_2 = 0$).

При ненулевой $\sigma > 0$:

- появляется ненулевой разрыв $r_2 > 0$ между возможными значениями вероятности попадания $0 \leq P_{in} \leq P_{in_Max} = 1 - r_2 < 1$ и единицей;

- появляется такой же ненулевой разрыв $r_2 > 0$ между возможными значениями вероятности промаха $0 < r_2 = P_{out_min} \leq P_{out} \leq 1$ и нулем.

5. Применения теоремы. Экономика. Прогнозирование

Возможность существования разрывов в шкале вероятностей должна проявляться и проявляется в реальности, в т.ч. в экономике и прогнозировании. Широко известен целый ряд парадоксов теории полезности, в т.ч. парадокс Алле, «премия за риск», преувеличение малых и преуменьшение больших вероятностей, «парадокс четырех областей». Как отметили Kahneman и Thaler (2006) эти парадоксы до сих пор не решены современной экономической теорией. Существуют проблемы точности прогнозов, наглядно проявившиеся в ходе текущего кризиса.

Использование теоремы о существовании разрывов в шкале вероятностей позволяет получить и обосновать решения этих парадоксов (см., напр., Харин 2007 и 2009), а также корректирующую формулу прогнозирования (см., напр., Харин 2008).

Заключение

В статье доказана общая возможность, при определенных условиях, существования разрывов в шкале возможных значений математических ожиданий величин, определенных на конечных интервалах. Доказана также возможность, при определенных условиях, существования разрывов в шкале вероятностей, как для оценок вероятности, так и для вероятности.

Следует заметить, что, несмотря на очевидность и элементарность теоремы, и на то, что некоторые из простых расчетов и оценок, приведенных в статье, могли публиковаться ранее, напр., в учебниках, теорема в целом является новой и полезной. Так, теорема позволяет получить и обосновать решения ряда известных парадоксов экономической теории (см., напр., Харин 2007 и 2009) и новые результаты в прогнозировании (см., напр., Харин 2008).

Литература

- Narin, A. (2009) "Ruptures in the probability scale? Calculation of ruptures' dimensions" MPRA, 19348.
- Kahneman, D. and Thaler, R. (2006) "Anomalies: Utility Maximization and Experienced Utility" Journal of Economic Perspectives, 20, #1, 221-234.
- Прохоров, Ю.В. ред. (1988) "Математический энциклопедический словарь" М., Советская энциклопедия, 1988.
- Харин, А.А. (2009) "Учет краевых эффектов шумов – новый путь к решению проблем теории полезности?" Первый Российский экономический конгресс (РЭК-2009).
- Харин, А.А. (2008) "К разработке общей формулы прогнозирования" Труды 51-й научной конференции МФТИ – 2008 "Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук".
- Харин, А.А. (2007) "Принцип неопределенного будущего, примеры его применения в экономической теории, возможности его применения в теориях сложных систем, в теории множеств, теории вероятностей и логике" Моделирование и Анализ Безопасности и Риска в Сложных Системах: Труды 7-й Международной Научной Школы МА БР – 2007.

Приложения П1-П5

П1. Подробный расчет максимально возможной величины центрального момента для ограниченного интервала	9
Две дельта-функции	
П1.1. Расчет для $n=2k$ и для оценки сверху	
Максимум в середине интервала	
Максимум при $n=2$	
Локальные максимумы, ближайшие к краям диапазона	
П1.2. Оценка для $n=2k+1$	
Оценка максимумов для $n=2k+1$	
Максимум при $n=3$	
Замечание. Сравнение с оценкой сверху для $n=3$	
П2. Подробное доказательство леммы о стремлении к нулю центральных моментов	15
Подробное доказательство	
Более точная оценка сходимости центральных моментов	
П3. Подробное доказательство теоремы о существовании разрывов для математического ожидания	16
Подробное доказательство	
Возможные формулировки	
Замечание 1. Более точная оценка разрыва r_2	
Замечание 2. Условия существования разрывов	
П4. Подробное доказательство теоремы для вероятности ...	18
Подробное доказательство	
Возможные формулировки	
Замечание 1. Более точная оценка разрыва r_2	
Замечание 2. Условия существования разрывов	
П5. Подробный пример разрывов в шкале вероятностей	20
Условия	
Результаты	
Вывод	
Замечание. Дисперсия σ^2 разброса попаданий и дисперсия D оценки вероятности попаданий и промахов	

Приложение П1. Подробный расчет максимально возможной величины центрального момента для ограниченного интервала

Две дельта-функции

П1.1. Расчет для $n=2k$ и для оценки сверху

Максимум в середине интервала

Максимум при $n=2$

Локальные максимумы, ближайšie к краям диапазона

П1.2. Оценка для $n=2k+1$

Оценка максимумов для $n=2k+1$

Максимум при $n=3$

Замечание. Сравнение с оценкой сверху для $n=3$

Две дельта-функции

Максимально возможную величину центрального момента $Max(E(X-M)^n)$ имеет функция $f_{Max}(x)=C_A\delta(x-A)+C_B\delta(x-B)$: $C_A+C_B=1$, представляющая собой две дельта-функции, находящиеся на разных краях интервала $[A, B]$. Коэффициенты C_A и C_B можно выразить через M как $C_A=(B-M)/(B-A)$ и $C_B=(M-A)/(B-A)$. Тогда

$$\begin{aligned} Max(E(X-M)^n) &= \frac{1}{Const_1} \int_A^B (x-M)^n f_{Max}(x) dx = \\ &= ((A-M)^n \frac{B-M}{B-A} + (B-M)^n \frac{A-M}{B-A}) \end{aligned}$$

Введем параметр $m \equiv (M-A)/(B-A) = C_B$, $1-m \equiv (B-M)/(B-A) = C_A$. Тогда

$$\begin{aligned} Max(E(X-M)^n) &= ((-m)^n (1-m) + m(1-m)^n) \times (B-A)^n \\ &= ((-1)^n m^n (1-m) + m(1-m)^n) \times (B-A)^n \leq \\ &\leq (m^n (1-m) + m(1-m)^n) \times (B-A)^n \end{aligned}$$

Полный анализ функции $((-1)^n m^n (1-m) + m(1-m)^n)$ не является целью данной статьи. Поэтому далее будут выполняться только самые простые оценки и расчеты.

Для $n=2k$ и для оценки сверху

$$Max(E(X-M)^n) \leq (m^n (1-m) + m(1-m)^n) \times (B-A)^n$$

и первая производная по m

$$\begin{aligned} (m^n (1-m) + m(1-m)^n)'_m &= \\ &= nm^{n-1}(1-m) - m^n + (1-m)^n - nm(1-m)^{n-1} \end{aligned}$$

Для $n=2k+1$

$$Max(E(X-M)^n) = (-m^n (1-m) + m(1-m)^n) \times (B-A)^n$$

и первая производная по m

$$\begin{aligned} (-m^n (1-m) + m(1-m)^n)'_m &= \\ &= -nm^{n-1}(1-m) + m^n + (1-m)^n - nm(1-m)^{n-1} \end{aligned}$$

П1.1. Расчет для $n=2k$ и для оценки сверху
 Максимум в середине интервала

Видно, что, для $n=2k$ и для оценки сверху, $Max(E(X-M)^n)$ и первая производная по m симметричны по m и $1-m$. Полагая $1-m=m$, получаем

$$\begin{aligned} nm^{n-1}(1-m) - m^n + (1-m)^n - nm(1-m)^{n-1} &= \\ = nm^{n-1}m - m^n + m^n - nmm^{n-1} &= \\ = nm^{n-1}m - nmm^{n-1} - m^n + m^n &\equiv 0 \end{aligned}$$

т.е., для $n=2k$ и для оценки сверху, посередине интервала, при $m=1-m=1/2$, всегда имеет место экстремум либо точка перегиба. Вычислим вторую производную

$$\begin{aligned} (nm^{n-1}(1-m) - m^n + (1-m)^n - nm(1-m)^{n-1})'_m &= \\ = n(n-1)m^{n-2}(1-m) - nm^{n-1} - nm^{n-1} - & \\ - n(1-m)^{n-1} - n(1-m)^{n-1} + n(n-1)m(1-m)^{n-2} &= \\ = n(n-1)m^{n-2}(1-m) - 2nm^{n-1} - 2n(1-m)^{n-1} + n(n-1)m(1-m)^{n-2} & \end{aligned}$$

В точке $m=1-m$ вторая производная равна

$$\begin{aligned} n(n-1)m^{n-2}(1-m) - 2nm^{n-1} - 2n(1-m)^{n-1} + n(n-1)m(1-m)^{n-2} &= \\ = n(n-1)m^{n-1} - 2nm^{n-1} - 2nm^{n-1} + n(n-1)m^{n-1} &= \\ = 2n(n-1)m^{n-1} - 4nm^{n-1} = 2nm^{n-1}(n-1-2) &= \\ = 2nm^{n-1}(n-3) & \end{aligned}$$

т.е., при $n=2$ получаем максимум, при $n>3$ – минимум, а при $n=3$ – точку перегиба либо экстремум.

Максимум при $n=2$

В точке $m=1-m=1/2$ при $n=2$ для центрального момента (дисперсии) получаем известное выражение

$$\begin{aligned} Max(E(X-M)^2) &= (m^2(1-m) + m(1-m)^2)(B-A)^2 = \\ = (m^2m + mm^2)(B-A)^2 &= 2m^3(B-A)^2 = 2\frac{1}{2^3}(B-A)^2 = \\ = \left(\frac{B-A}{2}\right)^2 & \end{aligned}$$

Локальные максимумы,
ближайшие к краям диапазона

Найдем ближайшие к краям диапазона локальные максимумы при $n > 3$.
Рассмотрим области, где $m \ll 1$ и $n > 3$

$$\begin{aligned} & (m^n(1-m) + m(1-m)^n)'_m = \\ & = nm^{n-1}(1-m) - m^n + (1-m)^n - nm(1-m)^{n-1} \approx \\ & \approx (1-m)^n - nm(1-m)^{n-1} \approx 1 - nm - nm = \\ & = 1 - 2nm \end{aligned}$$

то есть, локальные экстремумы имеют место при

$$m \approx \frac{1}{2n}.$$

Заметим, что это подразумевает $n \gg 1$.

Аналогично, для $(1-m) \ll 1$, локальные экстремумы имеют место при

$$m \approx 1 - \frac{1}{2n}.$$

В локальных экстремумах вторая производная

$$(1 - 2nm)'_m = -2n < 0,$$

т.е. имеют место локальные максимумы. Аналогично, локальные максимумы имеют место и в точках $m = 1 - 1/2n$. В обоих этих случаях значения центрального момента при $n \gg 1$ приближенно равны

$$\begin{aligned} \text{Max}(E(X - M)^n) & \leq (m^n(1-m) + m(1-m)^n)(B - A)^n = \\ & = \left(\left(\frac{1}{2n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n\right)(B - A)^n \approx \\ & \approx \left(\left(\frac{1}{2n}\right)^n + \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n\right)(B - A)^n \approx \\ & \approx \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n (B - A)^n \end{aligned}$$

Найдем $(1 - 1/2n)^n$. Обозначая $x = -2n$, получаем $n = -x/2$ и, при $n \gg 1$, вычисление сводится к вычислению e

$$\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-\frac{x}{2}} \approx \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

В результате получаем для $m = 1/2n$ и для $m = 1 - 1/2n$, при $n \gg 1$

$$\begin{aligned} \text{Max}(E(X - M)^n) & \leq (m^n(1-m) + m(1-m)^n)(B - A)^n \approx \\ & \approx \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n (B - A)^n \approx \\ & \approx \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{(B - A)^n}{2n} \end{aligned}$$

Для проверки, сравним величины полученных локальных максимумов центральных моментов с величинами центральных моментов, для M в середине диапазона. Для $m=1-m=1/2$

$$\begin{aligned} \text{Max}(E(X - \frac{A+B}{2})^n) &\leq (m^n(1-m) + m(1-m)^n)(B-A)^n = \\ &= (m^n m + m m^n)(B-A)^n = 2m^{n+1}(B-A)^n = \frac{2}{2^{n+1}}(B-A)^n = (\frac{B-A}{2})^n = \\ &= \frac{(B-A)^n}{2^n} \end{aligned}$$

Для $m=1/2n$ и $n \gg 1$

$$\text{Max}(E(X - (A + \frac{B-A}{n}))^n) \approx \frac{1}{2\sqrt{e}} \frac{(B-A)^n}{n}$$

Видно, что в формулах различаются только коэффициенты знаменателя при $(B-A)^n$, т.е. $n2\sqrt{e}$ и 2^n . Степенная функция 2^n растет быстрее, чем натуральный ряд n . Оценим, начиная с какого n , коэффициент $1/n2\sqrt{e}$ станет больше, чем коэффициент $1/2^n$. Сравним

$$\frac{1}{2^n} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\sqrt{e}} \frac{1}{n} \approx \frac{1}{3} \frac{1}{n}.$$

При $n=3$

$$\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} > \frac{1}{3} \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

При $n=4$

$$\frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} < \frac{1}{3} \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Видно, что, начиная с $n=4$, величины полученных локальных максимумов центральных моментов при $m=1/2n$ превышают величины центральных моментов при $m=1/2$.

П1.2. Оценка для $n=2k+1$

Оценка максимумов для $n=2k+1$

Легко видеть, что для $n=2k+1$ функция

$$\text{Max}(E(X - M)^n) = (-m^n(1 - m) + m(1 - m)^n) \times (B - A)^n$$

будет на $2m^n(1 - m)$ меньше оценки сверху

$$\text{Max}(E(X - M)^n) \leq (m^n(1 - m) + m(1 - m)^n) \times (B - A)^n,$$

полученной выше.

Максимум при $n=3$

Для примера рассчитаем положение максимума при $n=3$

$$\begin{aligned} & (-m^3(1 - m) + m(1 - m)^3)'_m = \\ & = -3m^2(1 - m) + m^3 + (1 - m)^3 - 3m(1 - m)^2 = \\ & = -3m^2 + 3m^3 + m^3 + 1 - 3m + 3m^2 - m^3 - 3m + 6m^2 - 3m^3 = \\ & = 3m^3 - 3m^3 + m^3 - m^3 - 3m^2 + 3m^2 + 6m^2 - 3m - 3m + 1 = \\ & = 6m^2 - 6m + 1 \end{aligned}$$

$$6m^2 - 6m + 1 = 0$$

$$m = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 1}}{6} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{8}{9}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{9}}\right)$$

Вторая производная

$$(1 - 6m + 6m^2)'_m =$$

$$= -6 + 12m$$

меньше нуля для $m < 1/2$ и больше нуля для $m > 1/2$, т.е. имеем два максимума по абсолютному значению. Приблизительно можно положить

$$\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{9}}\right) \approx \frac{1}{2} \left(1 \pm \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 9}\right)\right).$$

В частности, для $m < 1/2$

$$m \approx \frac{1}{2} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 9}\right)\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{2 \cdot 9} = \frac{1}{36} = \frac{1}{6^2}$$

и

$$\begin{aligned} & -m^3(1 - m) + m(1 - m)^3 = \\ & = -\frac{1}{6^6} \left(1 - \frac{1}{6^2}\right) + \frac{1}{6^2} \left(1 - \frac{1}{6^2}\right)^3 \approx \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \text{Max}(E(X - M)^3) = (-m^3(1 - m) + m(1 - m)^3) \times (B - A)^3 \approx \\ & \approx m(B - A)^3 \approx \frac{(B - A)^3}{6^2} = \frac{2}{9} \left(\frac{B - A}{2}\right)^3 = 6 \left(\frac{B - A}{6}\right)^3 \end{aligned}$$

Замечание.

Сравнение с оценкой сверху для $n=3$

Рассмотрим оценку сверху для $n=3$:

Для $n=3$ можно разложить оценку сверху по параметру x : $m=1/2(1+x)$,

$$\begin{aligned}
 m^3(1-m) + m(1-m)^3 &= \frac{1}{2^4}((1+x)^3(1-x) + (1+x)(1-x)^3) \\
 (1+x)^3(1-x) + (1+x)(1-x)^3 &= \\
 &= (1+3x+3x^2+x^3)(1-x) + (1-3x+3x^2-x^3)(1+x) = \\
 &= 1+3x+3x^2+x^3-x-3x^2-3x^3-x^4 + \\
 &+ 1-3x+3x^2-x^3+x-3x^2+3x^3-x^4 = \\
 &= 1+2x-2x^3-x^4 + \\
 &+ 1-2x+2x^3-x^4 = 2(1-x^4) \\
 \text{Max}(E(X-M)^3) &< (m^3(1-m) + m(1-m)^3) \times (B-A)^3 = \\
 &= 2(1-x^4) \frac{1}{2^4} (B-A)^3 = \\
 &= (1-x^4) \left(\frac{B-A}{2}\right)^3
 \end{aligned}$$

То есть при $m=1/2$ оценка сверху имеет максимум

$$\text{Max}(E(X-M)^3) < \left(\frac{B-A}{2}\right)^3 > \frac{2}{9} \left(\frac{B-A}{2}\right)^3,$$

При $m=1/2n=1/6$

$$\begin{aligned}
 \text{Max}(E(X-M)^n) &\leq (m^n(1-m) + m(1-m)^n)(B-A)^n = \\
 &= \left(\left(\frac{1}{2n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n\right) (B-A)^n = \\
 &= \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\left(1 - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{6}\right)^3\right) (B-A)^3 = \\
 &= \left(\frac{1}{6}\right)^4 (5 + 5^3) (B-A)^3 = \frac{130}{6^4} (B-A)^3 = \\
 &= \frac{130}{6} \left(\frac{B-A}{6}\right)^3 = \frac{65}{3} \left(\frac{B-A}{6}\right)^3 > \\
 &> 21 \left(\frac{B-A}{6}\right)^3 > 6 \left(\frac{B-A}{6}\right)^3
 \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}
 \text{Max}(E(X - (A + \frac{B-A}{3}))^3) &\approx \frac{1}{2\sqrt{e}} \frac{(B-A)^3}{3} \approx \frac{1}{3} \frac{(B-A)^3}{3} = \frac{6^3}{9} \left(\frac{B-A}{6}\right)^3 = \\
 &= 3 \times 2^3 \times \left(\frac{B-A}{6}\right)^3 = 24 \left(\frac{B-A}{6}\right)^3 > 6 \left(\frac{B-A}{6}\right)^3
 \end{aligned}$$

Видно, что оценка сверху при всех подходах действительно превышает реальное значение функции.

**Приложение П2. Подробное доказательство леммы
о стремлении к нулю центральных моментов**

Подробное доказательство

Если, для $f(x)$, определенной в разделе 1.1., $E(X)=M$ стремится к A или к B , то $E(X-M)^n$ стремится к нулю.

Доказательство:

Для $M \rightarrow A$

$$\begin{aligned} \text{Max}(E(X-M)^n) &\leq ((M-A)^{n-1} + (B-M)^{n-1}) \frac{(M-A)(B-M)}{B-A} < \\ &< \frac{(M-A)(B-M)}{B-A} ((B-A)^{n-1} + (B-A)^{n-1}) \leq 2(M-A)(B-A)^{n-1} =, \\ &= 2 \frac{(M-A)}{B-A} (B-A)^n \equiv 2m(B-A)^n \end{aligned}$$

Если справедливо строгое неравенство, то тем более справедливо нестрогое неравенство

$$E(X-M)^n \leq (B-A)^n \times 2 \frac{M-A}{B-A} \equiv (B-A)^n \times 2m \xrightarrow{m \rightarrow 0} 0,$$

достаточное для целей настоящей статьи.

Таким образом, при конечных $(B-A)$ и n и при $M \rightarrow A$, т.е. при $(M-A)$ и m , стремящихся к нулю, центральные моменты $E(X-M)^n$ тоже стремятся к нулю. Для $M \rightarrow B$ рассмотрение полностью аналогично вышеприведенному.

Лемма доказана.

Более точная оценка сходимости центральных моментов

Сделаем более точную оценку сходимости к 0 центральных моментов.

Снова рассмотрим, при $M \rightarrow A$, т.е. при $m \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \text{Max}(E(X-M)^n) &\leq (m^n(1-m) + m(1-m)^n)(B-A)^n = \\ &= m(1-m)(m^{n-1} + (1-m)^{n-1}) \times (B-A)^n \xrightarrow{m \rightarrow 0} \\ &\xrightarrow{m \rightarrow 0} m(1-m)^{n-1} \times (B-A)^n \xrightarrow{m \rightarrow 0} \\ &\xrightarrow{m \rightarrow 0} m(B-A)^n \end{aligned}$$

Для проверки, сравним эту оценку с общей формулой

$$\text{Max}(E(X-M)^n) \leq m(1-m)(m^{n-1} + (1-m)^{n-1})(B-A)^n.$$

Оценку отличает от общей формулы только сомножитель

$$(1-m)(m^{n-1} + (1-m)^{n-1}).$$

Поскольку $m \leq 1$, то $(1-m) \leq 1$ и, для $n \geq 2$,

$$(m^{n-1} + (1-m)^{n-1}) \leq (m + (1-m)) \equiv 1.$$

Следовательно, для $n \geq 2$

$$m(1-m)(m^{n-1} + (1-m)^{n-1})(B-A)^n \leq m(B-A)^n.$$

Таким образом, более точную оценку сходимости центральных моментов к 0 можно применять для всего требуемого диапазона $1 < n < \infty$.

Приложение ПЗ. Подробное доказательство теоремы о существовании разрывов для математического ожидания

Подробное доказательство

Возможные формулировки

Замечание 1. Более точная оценка разрыва r_2

Замечание 2. Условия существования разрывов

Подробное доказательство

Если, для $f(x)$, определенной в разделе 1.1., существуют $n : 1 < n < \infty$, и $r_1 > 0 : |E(X-M)^n| \geq r_1 > 0$, то существует $r_2 > 0 : A < (A+r_2) \leq E(X) \leq (B-r_2) < B$.

Доказательство.

Из условий теоремы и из леммы, для $M \rightarrow A$,

$$0 < r_1 \leq |E(X-M)^n| \leq (B-A)^n \times 2 \frac{(M-A)}{(B-A)} = 2(B-A)^{n-1}(M-A)$$

$$0 < r_1 \leq 2(B-A)^{n-1}(M-A)$$

$$0 < r_2 \equiv \frac{r_1}{2(B-A)^{n-1}} \leq (M-A)$$

$$r_2 \equiv \frac{r_1}{2(B-A)^{n-1}}.$$

Для $M \rightarrow B$ рассмотрение полностью аналогично вышеприведенному.

Поскольку $(B-A)$ и n – конечны, а $r_1 > 0$, то конечны и больше нуля - как $(M-A) \geq r_2 > 0$ так и $(B-M) \geq r_2 > 0$.

Теорема доказана.

Возможные формулировки

Если, на конечном диапазоне, конечный центральный момент не может приближаться к нулю ближе, чем на ненулевую величину $r_1 > 0$, то математическое ожидание не может приближаться к границе этого диапазона ближе, чем на (другую) ненулевую величину $r_2 > 0$.

Другими словами, если для функции, определенной на конечном интервале, существует ненулевой разрыв (rupture), запрещенная зона $r_1 > 0$ между каким-либо из ее центральных моментов и нулем, то между математическим ожиданием этой функции и любой из границ интервала тоже существуют ненулевые разрывы, запрещенные зоны $r_2 > 0$.

В более общем виде, для возможных значений: Если для функции, определенной на конечном интервале, существует ненулевой разрыв, запрещенная зона $r_1 > 0$ между возможными значениями какого-либо из ее центральных моментов и нулем, то между возможными значениями математического ожидания этой функции и любой из границ интервала тоже существуют ненулевые разрывы, запрещенные зоны $r_2 > 0$.

Замечание 1. Более точная оценка разрыва r_2

Заметим, что, согласно П2, можно дать более точную оценку r_2

$$0 < r_1 \leq |E(X - M)^n| \leq (B - A)^n \frac{(M - A)}{(B - A)} = (B - A)^{n-1} (M - A)$$

$$0 < r_1 \leq (B - A)^{n-1} (M - A)$$

$$0 < r_2 \equiv \frac{r_1}{(B - A)^{n-1}} \leq (M - A),$$

то есть

$$r_2 \equiv \frac{r_1}{(B - A)^{n-1}}$$

и, при $(B - A) = 1$

$$r_2 = r_1$$

Это же справедливо и для $M \rightarrow B$.

Замечание 2. Условия существования разрывов

Следует подчеркнуть, что разрывы для математического ожидания функции, о которых идет речь, существуют не всегда и не для всех случаев. Эти разрывы между границами интервала и математическим ожиданием функции существуют только тогда и только для тех случаев, когда и в которых существует ненулевой разрыв между возможными значениями какого-либо центрального момента функции и нулем.

Приложение П4. Подробное доказательство теоремы для вероятности

Подробное доказательство

Возможные формулировки

Замечание 1. Более точная оценка разрыва r_2

Замечание 2. Условия существования разрывов

Подробное доказательство

Пусть, для серии испытаний с количеством испытаний K , в т.ч. при K , стремящемся к бесконечности, плотность $f(x)$ оценки вероятности, частоты $F : F \equiv M \equiv E(X)$, некоторого события имеет свойства, заданные в разделе 1.1., в частности, определена на $[0, 1]$ и $Const_1 = 1$.

Тогда, если на интервале $[0, 1]$ определена P : при стремлении количества испытаний K к бесконечности $K \rightarrow \infty$, оценка вероятности F стремится к P , т.е.

$$\lim_{K \rightarrow \infty} F = P,$$

и между оценкой вероятности и любой из границ интервала существуют ненулевые разрывы $0 < r_2 \leq F \leq (1 - r_2) < 1$, то такие же ненулевые разрывы $0 < r_2 \leq P \leq (1 - r_2) < 1$ существуют между P и любой из границ интервала.

Доказательство.

Из

$$\lim_{K \rightarrow \infty} F = P$$

следует, что для любого $r > 0$ существует K_r : для $K > K_r$ $|F - P| < r$.

Для случая $0 < r_2 \leq P$ предположим, от противного, что существует $r_3 > 0$: $0 \leq P = r_2 - r_3 < r_2$.

Для $K > K_r$ положим $r = (r_2 - P)/2 = r_3/2$. Тогда $|F - P| < r_3/2$. При $F \geq P \geq 0$, $F - P = |F - P| < r_3/2$ и $F < P + r_3/2 = r_2 - r_3 + r_3/2 = r_2 - r_3/2 < r_2$, то есть $F < r_2 - r_3/2 < r_2$, что противоречит исходному условию $F \geq r_2$.

Доказательство для случая $P \leq (1 - r_2) < 1$ полностью аналогично вышеприведенному.

Поскольку вероятность удовлетворяет условиям, наложенным на P , то теорема справедлива и для вероятности. Теорема доказана.

Возможные формулировки

Теорему можно сформулировать и для нужд практических приложений, как более конкретно, так и в более общем виде:

Если, для серии испытаний с количеством испытаний, стремящимся к бесконечности, оценка вероятности стремится к вероятности, а дисперсия оценки вероятности, из-за каких-либо причин (например, из-за шумов, из-за нестабильностей), не может приближаться к нулю ближе, чем на ненулевую величину $r_1 > 0$, то, как оценка вероятности так и вероятность, тоже не могут приближаться к границе этого диапазона ближе, чем на (другую) ненулевую величину $r_2 > 0$.

Другими словами, если, для серии испытаний с количеством испытаний, стремящимся к бесконечности, оценка вероятности стремится к вероятности, а между дисперсией оценки вероятности и нулем, из-за каких-либо причин (например, из-за шумов, из-за нестабильностей), существует ненулевой разрыв, то у границ шкалы вероятностей тоже существуют ненулевые разрывы, как для оценки вероятности, так и для вероятности.

В более общем виде, для возможных значений можно также сказать:

Если, для серии испытаний с количеством испытаний, стремящимся к бесконечности, оценка вероятности стремится к вероятности, а между возможными значениями дисперсии оценки вероятности и нулем, из-за каких-либо причин (например, из-за шумов, из-за нестабильностей), существует ненулевой разрыв, то у границ шкалы вероятностей тоже существуют ненулевые разрывы, как для возможных значений оценки вероятности, так и для возможных значений вероятности.

Замечание 1. Более точная оценка разрыва r_2

Заметим, что, согласно П2, можно дать более точную оценку r_2

$$r_2 \equiv \frac{r_1}{(B-A)^{n-1}}$$

и, при $(B-A)=1$, то есть для случаев оценки вероятности и вероятности

$$r_2 = r_1.$$

Замечание 2. Условия существования разрывов

Следует подчеркнуть, что разрывы, о которых идет речь, существуют не всегда и не для всех случаев. Эти разрывы в шкале вероятностей существуют и для оценки вероятности и для вероятности только тогда и только для тех случаев, когда и в которых существует ненулевой разрыв между возможными значениями дисперсии (или иного центрального момента) оценки вероятности и нулем.

Приложение П5. Подробный пример разрывов в шкале вероятностей

Условия

Результаты

Вывод

Замечание. Дисперсия σ^2 разброса попаданий и дисперсия D оценки вероятности попаданий и промахов

Условия

Самый простой пример разрывов в шкале вероятностей – стрельба в мишень (одномерный случай):

Пусть, при точном прицеливании, имеет место некоторый разброс попаданий, например:

А) из-за разброса в размере пули (если диаметр пули меньше диаметра ствола, то пуля будет вылетать из ствола не по оптической оси ствола, а по некоторому пучку траекторий вокруг этой оси) и разброса в количестве и качестве заряда или

Б) при стрельбе дробью.

Пусть также размер мишени равен $2L$, а разброс попаданий подчиняется нормальному закону распределения с дисперсией σ^2 (и среднеквадратичным отклонением σ). Естественно, σ увеличивается, например, с уменьшением длины ствола, а также, в данном случае, с увеличением расстояния до мишени (то есть σ в данном случае измеряется в линейных, а не в угловых единицах).

Возможные значения вероятности попадания в мишень P_{in} могут, в зависимости от нахождения точки прицела, располагаться в диапазоне от минимального, нулевого значения $P_{in_min}=0$, достигаемого, например, если точка прицела находится в направлении, противоположном мишени, до максимального значения P_{in_Max} , достигаемого, если точка прицела гарантированно находится в центре мишени.

Возможные значения вероятности промаха $P_{out}=1-P_{in}$ могут, в зависимости от нахождения точки прицела, располагаться в диапазоне от максимального значения $P_{out_Max}=1$, достигаемого, например, если точка прицела находится в направлении, противоположном мишени, до минимального значения P_{out_min} , достигаемого, если точка прицела гарантированно находится в центре мишени.

Если точка прицела перемещается от направления, противоположного мишени, до точки, находящейся в центре мишени, то вероятность попадания в мишень P_{in} увеличивается от 0 до P_{in_Max} , а вероятность промаха P_{out} соответственно уменьшается от 1 до P_{out_min} . При этом: Если $\sigma=0$, то переходы вероятности попадания от 0 к P_{in_Max} и вероятности промаха от 1 к P_{out_min} происходят скачком. Если $\sigma>0$, то оба перехода происходят плавно и P_{in} принимает все значения между 0 и P_{in_Max} , а P_{out} принимает все значения между 1 и P_{out_min} .

Если точка прицела гарантированно находится в центре мишени, то максимальная вероятность попадания в мишень P_{in_Max} и минимальная вероятность промаха P_{out_min} , в зависимости от соотношения σ и L , равны (см., напр., Прохоров 1988):

Результаты

Для простоты рассмотрим только 4 классических точки: $\sigma=0$ (или $\sigma\approx 0$) или $L>3\sigma>0$, $L=3\sigma$, $L=2\sigma$ и $L=\sigma$.

При $L>\sigma=0$, максимальная вероятность попадания в мишень составляет $P_{in_Max}=1$, а минимальная вероятность промаха составляет соответственно $P_{out_min}=0$. Следовательно, возможные значения вероятности попадания в мишень, в зависимости от точки прицела, могут быть равны $P_{in_min}=0$ или $P_{in_Max}=1$, а возможные значения вероятности промаха могут быть равны соответственно $P_{out_Max}=1$ или $P_{out_min}=0$. Таким образом, при $L>\sigma=0$, разрывов в шкале вероятностей нет $r_2=1-P_{in_Max}=P_{out_min}=0$.

При $\sigma\approx 0$ и при $L>3\sigma>0$, когда, по «правилу трех сигм», можно полагать $\sigma\approx 0$, максимальная вероятность попадания в мишень составляет $P_{in_Max}\approx 1$, и минимальная вероятность промаха составляет соответственно $P_{out_min}\approx 0$. Следовательно возможные значения вероятности попадания в мишень, в зависимости от точки прицела, могут находиться в диапазоне $0\leq P_{in}\leq P_{in_Max}\approx 1$, а возможные значения вероятности промаха могут находиться соответственно в диапазоне $0\approx P_{out_min}\leq P_{out}\leq 1$. Таким образом, при $\sigma\approx 0$ и при $L>3\sigma>0$, разрывов в шкале вероятностей тоже нет, точнее говоря, разрывы в шкале вероятностей можно считать равными нулю $r_2=1-P_{in_Max}=P_{out_min}\approx 0$.

При $L=3\sigma>0$, максимальная вероятность попадания в мишень составляет $P_{in_Max}\approx 0,997$, а минимальная вероятность промаха составляет $P_{out_min}\approx 0,003$. Следовательно возможные значения вероятности попадания в мишень, в зависимости от точки прицела, могут находиться в диапазоне $0\leq P_{in}\leq P_{in_Max}=0,997<1$, а возможные значения вероятности промаха могут находиться соответственно в диапазоне $0<0,003=P_{out_min}\leq P_{out}\leq 1$. Таким образом, при $L=3\sigma>0$, в шкале вероятностей появляются ненулевые разрывы $r_2=1-P_{in_Max}=P_{out_min}=0,003>0$.

При $L=2\sigma>0$, максимальная вероятность попадания в мишень составляет $P_{in_Max}=0,95$, а минимальная вероятность промаха составляет $P_{out_min}=0,05$. Следовательно возможные значения вероятности попадания в мишень, в зависимости от точки прицела, могут находиться в диапазоне $0\leq P_{in}\leq P_{in_Max}=0,95<1$, а возможные значения вероятности промаха могут находиться соответственно в диапазоне $0<0,05=P_{out_min}\leq P_{out}\leq 1$. Таким образом, при $L=2\sigma>0$, в шкале вероятностей существуют ненулевые разрывы $r_2=1-P_{in_Max}=P_{out_min}=0,05>0$.

При $L=\sigma>0$, максимальная вероятность попадания в мишень составляет $P_{in_Max}=0,68$, а минимальная вероятность промаха составляет $P_{out_min}=0,32$. Следовательно возможные значения вероятности попадания в мишень, в зависимости от точки прицела, могут находиться в диапазоне $0\leq P_{in}\leq P_{in_Max}=0,68<1$, а возможные значения вероятности промаха могут находиться соответственно в диапазоне $0<0,32=P_{out_min}\leq P_{out}\leq 1$. Таким образом, при $L=\sigma>0$, в шкале вероятностей существуют ненулевые разрывы $r_2=1-P_{in_Max}=P_{out_min}=0,32>0$.

Результаты. Краткий список

При $L > \sigma = 0$ получаем $P_{in} = P_{in_min} = 0$ или $P_{in} = P_{in_Max} = 1$,
 $P_{out} = P_{out_Max} = 1$ или $P_{out} = P_{out_min} = 0$ и
 $r_2 = 1 - P_{in_Max} = P_{out_min} = 0$.

При $L > 3\sigma > 0$, для многих практических применений, по «правилу трех сигм»,
 можно полагать $\sigma \approx 0$ и $0 \leq P_{in} \leq P_{in_Max} \approx 1$,
 $0 \approx P_{out_min} \leq P_{out} \leq 1$ и
 $r_2 = 1 - P_{in_Max} = P_{out_min} \approx 0$.

При $L = 3\sigma > 0$ получаем $0 \leq P_{in} \leq P_{in_Max} = 0,997 < 1$,
 $0 < 0,003 = P_{out_min} \leq P_{out} \leq 1$ и
 $r_2 = 1 - P_{in_Max} = P_{out_min} = 0,003 > 0$.

При $L = 2\sigma > 0$ получаем $0 \leq P_{in} \leq P_{in_Max} = 0,95 < 1$,
 $0 < 0,05 = P_{out_min} \leq P_{out} \leq 1$ и
 $r_2 = 1 - P_{in_Max} = P_{out_min} = 0,05 > 0$.

При $L = \sigma > 0$ получаем $0 \leq P_{in} \leq P_{in_Max} = 0,68 < 1$,
 $0 < 0,32 = P_{out_min} \leq P_{out} \leq 1$ и
 $r_2 = 1 - P_{in_Max} = P_{out_min} = 0,32 > 0$.

Вывод

Таким образом, при нулевой дисперсии (и в тех случаях, когда дисперсию можно считать нулевой), т.е. при $\sigma^2 = 0$ (и при $\sigma \approx 0$ или $L > 3\sigma$) - разрывов в шкале вероятностей нет (практически нет).

При ненулевой дисперсии $\sigma^2 > 0$ - в шкале вероятностей появляются ненулевые разрывы $r_2 > 0$:

- между областью возможных (в зависимости от нахождения точки прицела) значений вероятности $P_{in} : 0 \leq P_{in} \leq P_{in_Max} = 1 - r_2 < 1$, попадания в мишень и единицей, то есть верхней границей шкалы вероятностей, и

- между областью возможных (в зависимости от нахождения точки прицела) значений вероятности $P_{out} : 0 < r_2 = P_{out_min} \leq P_{out} \leq 1$, промаха и нулем, то есть нижней границей шкалы вероятностей.

Замечание. Дисперсия σ^2 разброса попаданий
и дисперсия D оценки вероятности попаданий и промахов

Заметим, что дисперсия разброса попаданий σ^2 может определять дисперсию D оценки вероятности попаданий и промахов, но не является ею.

Если дисперсия разброса попаданий $\sigma^2=0$ (или если $\sigma^2 \approx 0$ или если $L > 3\sigma$), то область возможных значений дисперсии D доходит (при $\sigma^2 \approx 0$ и $L > 3\sigma > 0$ - приблизительно доходит) до нуля. Поэтому, в данном случае, нет (практически нет) разрыва, запрещенной зоны между возможными значениями дисперсии D оценки вероятности и нулем, то есть $r_l=0$ (или $r_l \approx 0$).

Если $3\sigma > L > 0$, то область возможных значений дисперсии D не доходит до нуля, то есть существует разрыв $r_l > 0$:

Для оценки вероятности попадания в мишень – только в области
вблизи l

(Если точка прицела находится в направлении, противоположном мишени, то есть если оценка вероятности попадания в мишень находится в области вблизи 0 , то увеличение, изменение σ от $\sigma=0$ до $\sigma > 0$ не влияет на D . Следовательно, вблизи оценки вероятности попаданий, равной 0 , дисперсия D оценки вероятности попадания в мишень может быть равна 0).

Для оценки вероятности промаха – только в области вблизи 0

(Если точка прицела находится в направлении, противоположном мишени, то есть если оценка вероятности промаха находится в области вблизи l , то увеличение, изменение σ от $\sigma=0$ до $\sigma > 0$ также не влияет на D . Следовательно, вблизи оценки вероятности промаха, равной l , дисперсия D оценки вероятности промаха может быть равна 0).

Вследствие этого, данный простой пример может иллюстрировать теорему о существовании разрывов в шкале вероятностей наглядно, но лишь частично, в отдельных областях, а именно:

Для оценки вероятности и вероятности попадания в мишень – только в области вблизи l .

Для оценки вероятности и вероятности промаха – только в области вблизи 0 .