From Reserves to Options: " The partecipation to the profit in insurance life policies"

Giandomenico, Rossano

University of Bologna - Department of Economics

21 July 2003

ALMA MATER STUDIORUM

UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Facoltà di economia
Corso di laurea in economia del turismo

Dalle riserve alle opzioni:
"la partecipazione agli utili nelle polizze vita"

Tesi in: Matematica Finanziaria

Presentata da:
Rossano Giandomenico

Relatore:
Franco Nardini

Sessione 1
Anno accademico 2002-2003

Indice:

1° PARTE: OPTION PRICING MODEL

2° PARTE: DALLE RISERVE ALLE OPZIONI

APPENDICE

Option Pricing Model

Introduzione:

Un'opzione è un contratto che attribuisce al suo possessore il diritto di vendere o acquistare una determinata attività ad un prezzo prefissato, detto prezzo d'esercizio.
Le opzioni possono essere emesse con diverse scadenze ma abitualmente vengono scritte a uno, due, tre, e sei mesi , o ad uno o più anni, e solitamente coprono cento titoli o multipli di cento.
Le opzioni sono normalmente negoziate in mercati organizzati, infatti, il contratto non viene emesso da chi sottoscrive l'opzione ma da un brooker che ne garantisce l'adempimento, conferendogli così lo status di strumento negoziabile.
Naturalmente l'acquirente pagherà un prezzo per avere il privilegio dell'opzione, rappresentato dal prezzo di mercato.
Inoltre, possiamo avere due tipi di opzioni, le opzioni Americane che possono essere esercitate in qualsiasi momento fino alla data di scadenza, e le opzioni Europee che possono essere esercitate solo alla data di scadenza.
Infine, occorre notare la doppia natura delle opzioni, sia come strumento speculativo sia come strumento di copertura, infatti, molti investitori non dissociano le proprie opzioni dagli altri investimenti, e come vedremo, è possibile costruire portafogli privi di rischio combinando le opzioni con le attività sottostanti.

Principali contratti d'opzione:

I contratti d'opzione si dividono in due fondamentali categorie, opzioni "Call" ed opzioni "Put", che rispettivamente attribuiscono al suo titolare il diritto ad acquistare, o a vendere, entro la data di scadenza, una determinata attività sottostante ad un predeterminato prezzo, detto prezzo d'esercizio.
I relativi pay-off saranno dati dal valore futuro dell'attività sottostante, che rappresenta una variabile aleatoria dato che non possiamo conoscerlo con esattezza.
Indicando con " X " il prezzo d'esercizio ed "$S(\tau)$" il valore dell'attività sottostante al momento " τ " della scadenza, e con " Φc " il pay-off di un'opzione Call ed " Φp " il pay-off di un'opzione Put, abbiamo:

$$\Phi c = \max[\, 0 , S(\tau) - X \,]$$

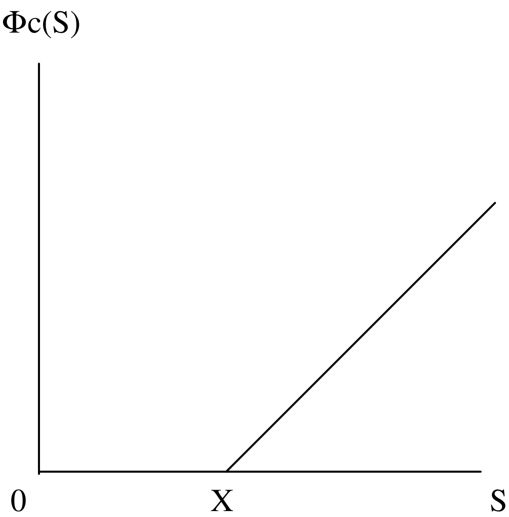
$$\Phi p = \max[\, X - S(\tau), 0]$$

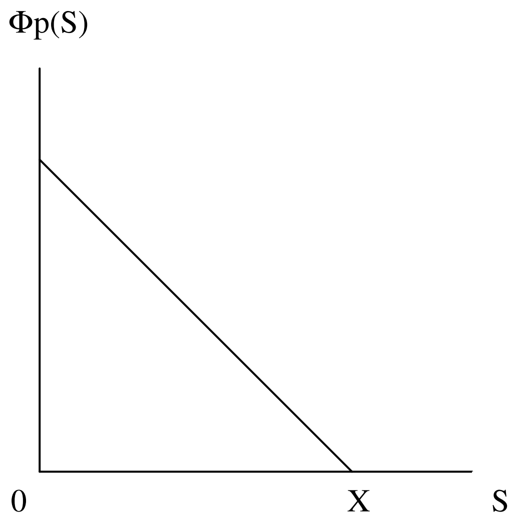
Risulta chiaro che per $S(\tau)>X$ l'opzione Call sarà "in the money", cioè da diritto ad un pay-off finale positivo pari alla differenza $S(\tau)-X$, mentre, per $S(\tau)<X$ il pay-off finale sarà nullo e l'opzione non verrà esercitata (out of the money).
Intuitivamente si capisce come l'acquirente di una Call scommetta su un rialzo di S(o), cosi come, l'emittente della stessa scommette su un suo ribasso.
Il profitto dell'emittente sarà dato dalla differenza fra il prezzo ricevuto e il pay-off dell'opzione, conseguentemente, il profitto dell'acquirente sarà dato dalla differenza fra il pay-off dell'opzione ed il prezzo pagato per la stessa.
Il discorso può essere facilmente adattato alle opzioni Put, mentre, è più interessante notare come l'acquirente della stessa scommetta su un ribasso di S(o), e che quindi, si trova nella stessa posizione dell'emittente di un opzione Call, ma vi si differenzia per la condizione di profitto, infatti, per $S(\tau)<X$ il pay-off della Call sarà nullo ed il profitto dell'emittente sarà il prezzo ricevuto, al contrario, il profitto dell'acquirente di una Put è dato dalla differenza fra il prezzo pagato e il pay-off della Put, il quale cresce al decrescere di S(o).
Lo stesso discorso può essere fatto per l'acquirente di una Call e l'emittente di una Put, ma possiamo vedere le condizioni di profitto analiticamente, ponendo: "W = prezzo", abbiamo:

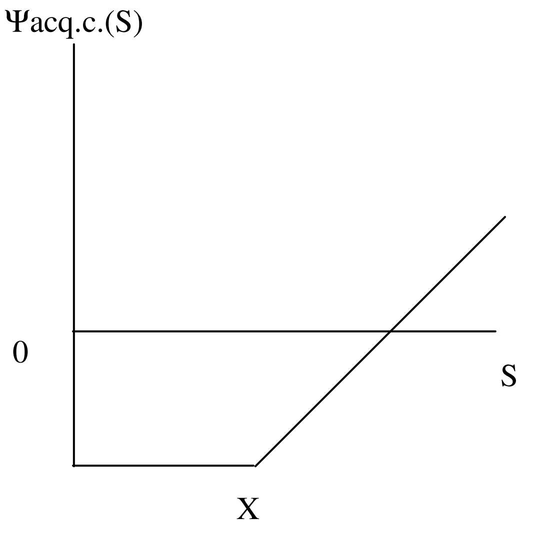
$$\Psi em.,c. = Wc - \Phi c(S)$$
$$\Psi acq.,c.= \Phi c(S) - Wc$$
$$\Psi em.,p. = Wp - \Phi p(S)$$
$$\Psi acq.,p.= \Phi p(St) - Wp$$

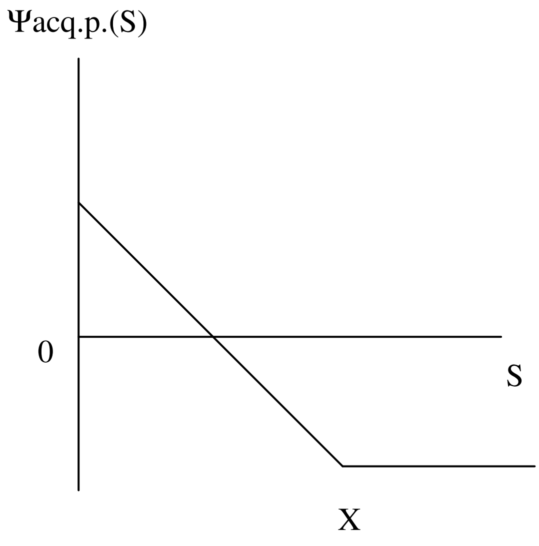
Possiamo notare come un'emittente di un'opzione si espone ad un rischio illimitato e ad un guadagno limitato a "W", mentre, l'acquirente è esposto ad una perdita limitata a "W" e ad un guadagno illimitato, ma questo si ha se consideriamo le opzioni disgiuntamente dagli investimenti nelle attività sottostanti.
Inoltre, se consideriamo che il prezzo d'esercizio venga fissato al livello del prezzo corrente, tale che S(o)=X , e che l'opzione copra un solo titolo, avremo che l'opzione guadagnerà, o perderà, un euro per ogni euro di variazione dell'attività sottostante.

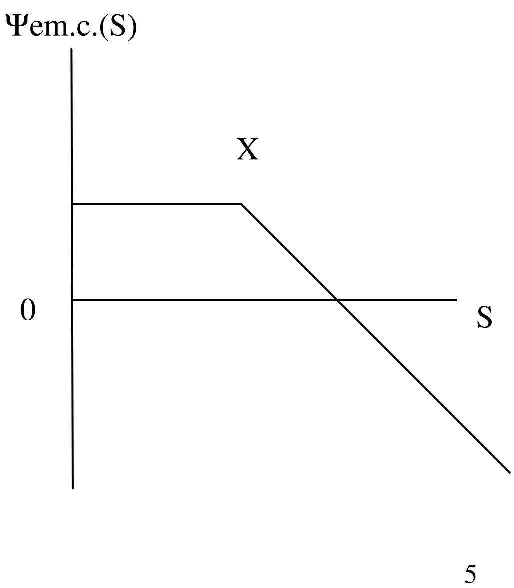
Ne consegue che, sia i pay-off e sia le condizioni di profitto, sono rette a 45° che hanno come asse il punto S(o)=X , ma vediamolo graficamente:

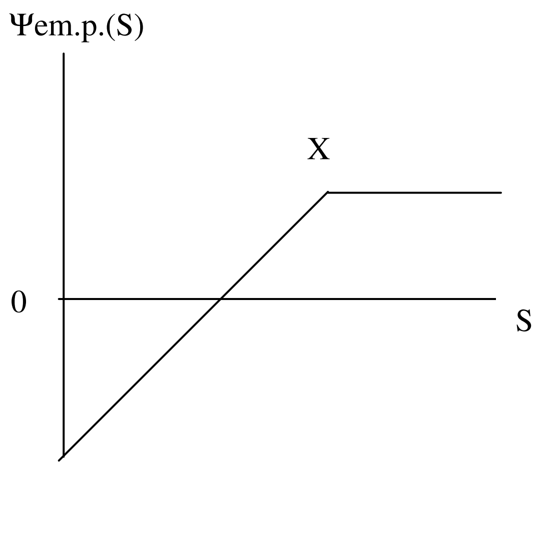












Altri contratti d'opzione, largamente diffusi, sono ottenuti dalla combinazione in un unico contratto di opzioni Call ed opzioni Put, vediamo alcuni esempi:
Uno "Straddle" consiste nella combinazione nello stesso contratto di una Call ed una Put sulla stessa attività, con lo stesso prezzo d'esercizio e la stessa data di scadenza.
Esso garantisce guadagni per grandi cambiamenti e perdite per piccole variazioni.
Uno "Strip" consiste nella combinazione di due Put e una Call sulla stessa attività, con lo stesso prezzo d'esercizio e la stessa data di scadenza.
Uno "Strap" consiste nella combinazione di due Call ed una Put sulla stessa attività, con lo stesso prezzo d'esercizio e la stessa scadenza.
In ogni caso, differenti mercati tendono a generare delle proprie forme di opzioni, il cui limite può essere solo posto dall'immaginazione.
Per esprimere le diverse combinazioni di opzioni possiamo usare i vettori piuttòsto che i grafici.
Iniziamo caratterizzando sei posizioni base:

Acquisto Call [+1,0]	Acquisto Put [0,+1]
Vendita Call [-1,0]	Vendita Put [0,-1]
Posizione lunga[+1,-1]	Posizione corta[-1,+1]

con: +1 indica un guadagno
-1 indica una perdita

Occorre osservare che i vettori non indicano l'ammontare del prezzo pagato o ricevuto ma solo la natura della posizione speculativa per $S(o)=X$.
Cosi acquistando una Put e una Call ottengo uno Straddle come segue:

$$[+1,0] + [0,+1] = [+1,+1]$$

da cui abbiamo il vettore per uno Straddle venduto: [-1,-1]

Acquistare una Put ed un'azione sottostante è equivalente ad acquistare una Call sulla stessa:

$$[0,+1] + [+1,-1] = [+1,0]$$

Acquistare una Call e tenere una posizione corta sull'azione è equivalente ad acquistare una Put:

$$[+1,0] + [-1,+1] = [0,+1]$$

Acquistare uno Straddle ed avere una posizione lunga sull'azione è equivalente ad acquistare due Call:

$$[+1,+1] + [+1,-1] = [+2,0]$$

Vendere una Call ed acquistare l'azione sottostante è equivalente a vendere una Put:

[-1,0] + [+1,-1] = [0,-1]

Vendere uno Straddle e acquistare l'azione è equivalente a vendere due Put:

[-1,-1] + [+1,-1] = [0,-2]

Vendere due Call e acquistare l'azione è equivalente a vendere uno Straddle:

[-2,0] + [+1,-1] = [-1,-1]

Infine, vendere una Put ed acquistare una Call è equivalente ad acquistare l'azione sottostante:

[0,-1] + [+1,0] = [+1,-1]

Altre combinazioni possono essere facilmente ottenute.

La cosa importante da notare è come gli investitori possano modificare un'opzione in un'altra al variare delle proprie aspettative, è come essi possano speculare sulla conversione delle stesse.
Ad esempio se acquistiamo una Put e la relativa azione abbiamo lo stesso pay-off che avremmo acquistando una Call, di conseguenza, se vendiamo una Call il nostro portafoglio sarà perfettamente bilanciato e potremo lucrare l'eventuale differenza fra il prezzo della Put e il prezzo della Call.

[0,+1] + [+1,-1] + [-1,0] = [0,0]

Lo stesso possiamo fare se vendiamo una Call, acquistiamo un'azione e acquistiamo una Put, e l'eventuale profitto o perdita sarà dato dalla differenza fra il prezzo della Call e il prezzo della Put.

[-1,0] + [+1,-1] + [0,+1] = [0,0]

Altre possibilità di speculare possono essere facilmente trovate.

Restrizioni al valore razionale di un'opzione:

Prima di proseguire con la nostra analisi, bisogna introdurre il concetto di ***dominanza stocastica*** :

" Un'attività sarà preferita da tutti gli investitori, siano essi avversi, propensi o indifferenti al rischio, se il rendimento che offre è comunque superiore, in ogni stato del mondo, al rendimento offerto da una seconda attività "

Tuttavia, l'esistenza di attività stocasticamente dominate in mercati perfettamente concorrenziali, privi di costi di transazione e senza alcuna restrizione sulle vendite allo scoperto e sui prestiti, è equivalente ad assumere l'esistenza di situazioni di arbitraggio.
Comunque, possiamo avere un'attività stocasticamente dominata senza possibilità di arbitraggio in un mercato imperfetto, se assumiamo la razionalità simmetrica di mercato e che gli investitori preferiscano una ricchezza maggiore ad una minore.

A questo punto, indichiamo il valore di una opzione Americana, con prezzo d'esercizio " X ", tempo mancante alla scadenza " T " e prezzo dell'attività sottostante " S ", come:

$$Wc(S,T,X) \qquad\qquad Wp(S,T,X)$$

ed il valore delle opzioni Europee come:

$$Wc(S,T,X) \qquad\qquad Wp(S,T,X)$$

Da cui,per ogni " T = 0 " abbiamo:

$$Wp(S,0,X) = Wp(S,0,X) = \max\,[X-S(\tau)\,,\,0\,]$$

$$Wc(S,0,X) = Wc(S,0,X) = \max\,[\,0\,,\,S(\tau)-X\,]$$

Essendo le opzioni Americane esercitabili in qualsiasi momento, abbiamo la seguente condizione d'arbitraggio per il loro prezzo:

$$Wp(S,T,X) \geq \max\,[\,X-S\,,\,0\,]$$

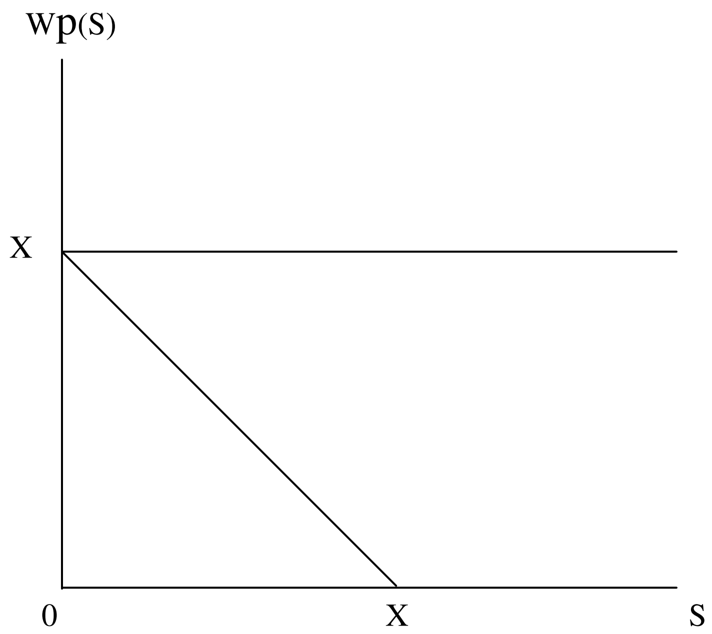
$$Wc(S,T,X) \geq \max\,[\,0\,,\,S-X\,]$$

Ed i seguenti vincoli:

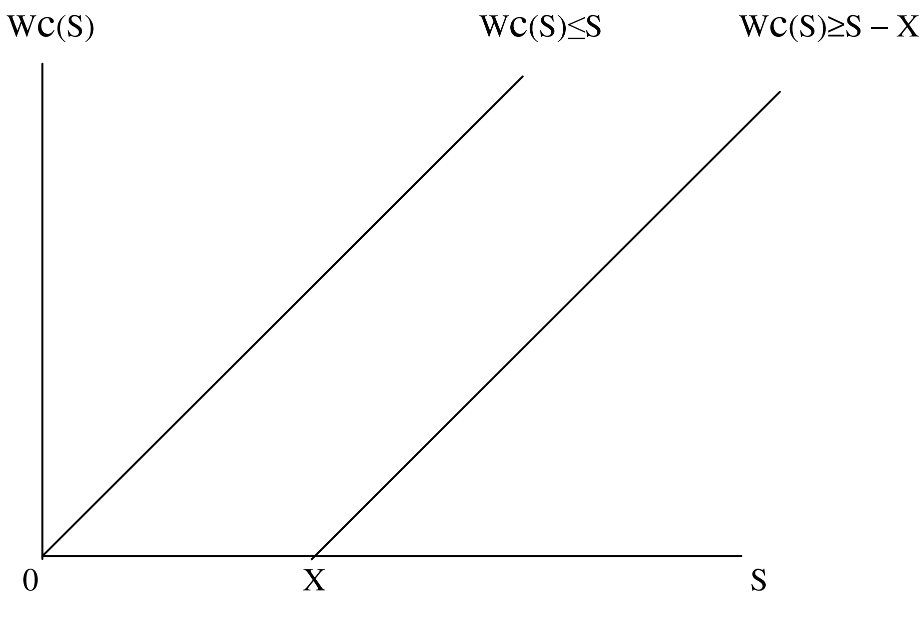
$$Wp(S,T,X) \leq X \qquad \forall \quad S \geq 0$$

$$Wc(S,T,X) \leq S \qquad \forall \quad X \geq 0$$

Vediamo graficamente i limiti al valore delle opzioni Americane:



Come possiamo notare dal grafico il prezzo di una Put può continuare ad avere valore anche quando S > X , questo si spiega con il fatto che finché ci sarà la possibilità che l'opzione sia "in the money" essa continuerà ad avere un valore positivo.



Lo stesso discorso precedente può essere fatto per le opzioni Call, quando S < X.

1° assunzione: *"Condizione necessaria per una teoria razionale delle opzioni è che esse non siano valutate né come un titolo dominante né come un titolo dominato"*

Come diretta conseguenza della 1° assunzione abbiamo che:

$$\mathsf{Wc}(S,T_2,X) \geq \mathsf{Wc}(S,T_1,X) \qquad \forall \quad T_2 > T_1$$

$$\mathsf{Wp}(S,T_2,X) \geq \mathsf{Wp}(S,T_1,X) \qquad \forall \quad T_2 > T_1$$

Inoltre:

$$\mathsf{Wc}(S,T,X_2) \leq \mathsf{Wc}(S,T,X_1) \qquad \forall \quad X_2 > X_1$$

$$Wc(S,T,X_2) \leq Wc(S,T,X_1) \qquad \forall \quad X_2 > X_1$$

$$\mathsf{Wp}(S,T,X_2) \geq \mathsf{Wp}(S,T,X_1) \qquad \forall \quad X_2 > X_1$$

$$Wp(S,T,X_2) \geq Wp(S,T,X_1) \qquad \forall \quad X_2 > X_1$$

Infine, ricordando che le opzioni Americane possono essere esercitate anche prima della scadenza, abbiamo:

$$\mathsf{Wc}(S,T,X) \geq Wc(S,T,X)$$

$$\mathsf{Wp}(S,T,X) \geq Wp(S,T,X)$$

Alla 1° assunzione possiamo anche ricollegare il vincolo visto in precedenza:

$$S \geq \mathsf{Wc}(S,T,X) \geq Wc(S,T,X)$$

Infatti, se immaginiamo che $S(o) = Wc(St,T,X)$, possiamo costruire un portafoglio completamente autofinanziato avendo una posizione lunga sul titolo ed una corta sulla Call, alla fine del periodo avremo il seguente pay-off:

$$S(\tau) - \max[\, 0 \,,\, S(\tau) - X \,] > 0 \qquad \text{Sempre}$$

Da cui possiamo subito notare che sarà ancora più grande per $S(o) < Wc(S,T,X)$.

Limiti al valore di un'opzione Call Europea:

1° Teorema: *Se il prezzo d'esercizio di una Call Europea è " X " e se nessun payout (dividendo) viene distribuito dall'attività sottostante (azione), o alternativamente, se la Call Europea è protetta da tali payout abbiamo:*

$$Wc(S,T,X) \geq \max [\, 0 \,,\, S - X \, esp(-r(T)T)]$$

Ponendo " $esp(-r(T)T) = P(T)$ " diamo la seguente dimostrazione:
Consideriamo i seguenti portafogli:

A) $Wc(S,T,X) + XP(T)$

B) $S(o)$

Il portafoglio "A" consiste nell'acquisto di una Call e di " X " Titoli "risk-free" al prezzo P(T) per Titolo.
Il portafoglio "B" consiste nell'acquisto dell'azione sottostante alla Call per S(o).
Alla scadenza possiamo avere due scenari:

	Va	Vb	
$S(\tau)>X$	$[S(\tau) - X] + X$	$S(\tau)$	Va=Vb
$S(\tau)<X$	$0 + X$	$S(\tau)$	Va>Vb

Dalla 1° assunzione abbiamo che per evitare la dominanza stocastica del portafoglio "A" sul portafoglio "B", che escluderebbe l'acquisto dell'azione, esso deve avere un prezzo più alto dello stesso:

$$Wc(S,T,X) + XP(T) \geq S(o)$$

Da cui:

$$Wc'(T) > 0 \text{ , dato che: } P(T)' < 0$$

$$Wc'(r) > 0 \text{ , dato che: } P(r)' < 0$$

Il 1°teorema ci dimostra come il prezzo di una Call debba essere funzione crescente del tasso "risk-free" e del tempo, il che è equivalente ad assumere che il prezzo d'esercizio sia variabile e funzione decrescente del tasso "risk-free" e del tempo.
Un altro argomento per giustificare questo risultato anche per piccoli cambiamenti di " r " e " T " viene dall'osservazione che una Call Europea è equivalente al capitale proprio di un'impresa indebitata per XP(T), se il presente valore di tale debito è una funzione decrescente di " r " e " T " allora per un dato valore dell'impresa il prezzo della Call sarà funzione crescente di " r " e " T ".

2° Teorema: *Se le ipotesi del 1°Teorema reggono,allora una Call Americana non sarà mai esercitata prima della data di scadenza ed avrà lo stesso valore di una Call Europea.*

$$WC(S,T,X)=Wc(S,T,X)$$

Infatti, dato che : $S - XP(T) > S - X$

Il detentore di una Call Americana può sempre migliorare la sua posizione vendendola sul mercato piuttòsto che esercitandola prima della scadenza.

3° Teorema: *Se l'attività sottostante distribuisce payout e se la Call non è protetta da questi, potrebbe verificarsi l'esercizio anticipato di una Call Americana.*

Dim.:
Consideriamo i seguenti portafogli:

A) $Wc(S,T,X)+(X+Div)P(T)$

B) $S(o)$

Il portafoglio "A" consiste nell'acquisto di una Call e di (X+Div) titoli "risk-free" al prezzo P(T) per titolo, dove il giorno di godimento del dividendo coincide con quello di scadenza della Call, mentre il portafoglio "B" consiste nell'acquisto dell'azione sottostante alla Call per S(o).
Alla scadenza avremo due scenari:

	Va	Vb	
$S(\tau)>X$	$[S(\tau)-X]+[X+Div]$	$S(\tau)+Div$	$Va = Vb$
$S(\tau)<X$	$[0] +[X+Div]$	$S(\tau)+Div$	$Va > Vb$

Dalla 1° assunzione abbiamo che:

$$Wc(S,T,X)+(X+Div)P(T) \geq S(o)$$

Da cui:

$$Wc(S,T,X) \geq \max[\ 0, S - (X+Div)P(T)\ ]$$

Risulta chiaro che per determinati valori della grandezza (X+Div)P(T) può essere conveniente esercitare anticipatamente la Call Americana e precisamente per:

$$(X+Div)P(T) > X$$

Evidentemente se il giorno del godimento del dividendo è precedente " $t < T$ " l'ultima diseguaglianza vale a porzioni è precisamente avremo che:

$$XP(T)+DivP(t)>(X+Div)P(T).$$

4° Teorema: *Se le condizioni ipotizzate dal 1°teorema valgono allora il prezzo di una Call perpetua " $T = \infty$ " dovrà uguagliare il valore dell'attività sottostante.*

Dim.:
Dato che $P(\infty) = 0$ abbiamo per il 1°teorema:

$$Wc(S,\infty,X) \geq \max[\,0,\; S - 0]$$

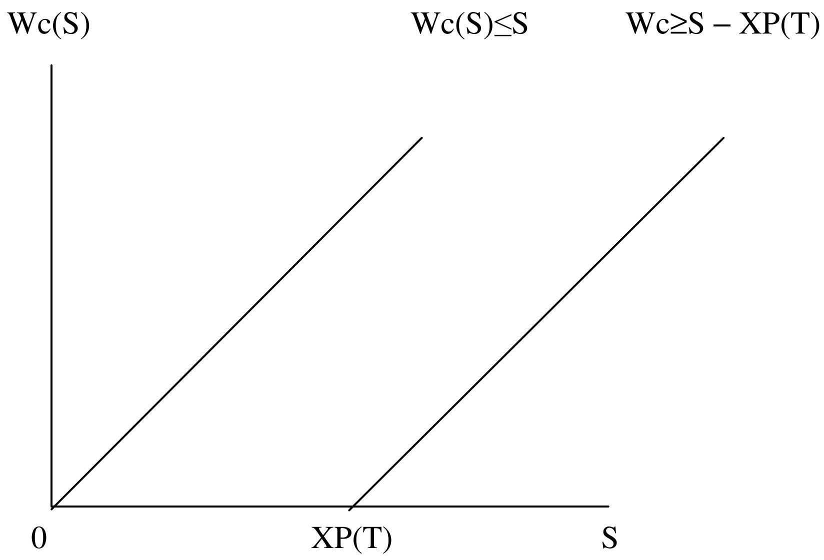
Ma per la 1°assunzione abbiamo:

$$Wc(S,T,X) \leq S$$

Per cui:

$$Wc(S,\infty,X) = S$$

Un'opzione Call perpetua vale tanto quanto l'attività sottostante.
Ma vediamo graficamente i limiti al valore di un'opzione Call Europea:



5° Teorema: *Se il prezzo di una Call viene determinato razionalmente abbiamo che è funzione convessa del suo prezzo d'esercizio.*

$$Wc''(X) \leq 0$$

Dim.:
Consideriamo i seguenti portafogli:

A) $\lambda Wc(S,T,X_1) + (1-\lambda)Wc(S,T,X_2)$

B) $Wc(S,T,X_3)$

Dove:

$X_3 = \lambda X_1 + (1-\lambda) \qquad 0 \le \lambda \le 1$

$X_2 > X_1$

I pay-off dei due portafogli saranno:

A) $\lambda \max[0, S(\tau) - X_1] + (1-\lambda) \max[0, S(\tau) - X_2]$

B) $\max[0, S(\tau) - \lambda X_1 - (1-\lambda) X_2]$

Per evitare la dominanza il valore corrente del portafoglio "B" deve essere minore o uguale al valore corrente del portafoglio "A" :

$$Wc(S,T,X_3) \le \lambda Wc(S,T,X_1) + (1-\lambda) Wc(S,T,X_2)$$

Il che dimostra la convessità.

2° Assunzione: *Se " $S_J = S_ì = S(o)$ " , " $T_j = T_ì = T$ " , " $X_j = X_ì = X$ " , e se il tasso di rendimento sulle attività è identicamente distribuito abbiamo:*

$$Wc_{,j}(S,T,X) = Wc_{,ì}(S,T,X)$$

Questo implica che dal punto di vista del detentore di un'opzione Call la sola caratteristica che identifica l'attività sottostante è la distribuzione ex-ante del tasso di rendimento.

6° Teorema: *Se " $S_ì = S(o)$ " $\forall$ " ì ", la determinazione razionale del prezzo di un'opzione Call è una funzione crescente della rischiosità dell'attività su cui è scritta.*

Dim.:

Consideriamo i seguenti portafogli:

A) $\sum_{ì=1}^{n} \lambda_ì \, Wc_{,ì}(S,T,X)$
Che consiste in un portafoglio di Call su ogni azione ì-esima.

B) $Wc_{,n+1}(S,T,X)$
Che consiste in una Call sul portafoglio di azioni ì-esime.

Dove:

$$0 \le \lambda_ì \le 1 \qquad \sum_{ì=1}^{n} \lambda_ì = 1$$

$$S_{n+1} = \Sigma \lambda_ì S_ì = S \Sigma \lambda_ì = S$$

I rispettivi pay-off saranno:

A) $\Sigma \lambda_ì \max[0, S_ì(\tau) - X]$

B) $\max[0, \Sigma \lambda_ì S_ì(\tau) - X]$

Da cui possiamo ricavare che il pay-off del portafoglio "A" sarà maggiore o uguale al pay-off del portafoglio "B" dato che esso sarà positivo anche quando l'opzione sul portafoglio di azioni non verrà esercitato.

Da cui per evitare la dominanza stocastica abbiamo:

$$Wc,n+1(S,T,X) \leq \Sigma\lambda ìWc,ì(S,T,X)$$

1° Corollario: Se valgono le ipotesi del 6° teorema e se supponiamo che i tassi di rendimento delle attività siano identicamente distribuiti, dalla 2°assunzione deriva:

$$Wc,ì(S,T,X) = Wc(S,T,X) \qquad \forall\ ì = 1,2,\ldots.n$$

$$Wc,n+1(S,T,X) \leq \Sigma\lambda_{ì}Wc(S,T,X)$$

$$Wc,n+1(S,T,X) \leq Wc,ì(S,T,X) \qquad \forall\ ì = 1,2,\ldots.n$$

2° Corollario: Poniamo $Z_{ì}(\tau) = Z(\tau) + \varepsilon_{ì}$ essere la distribuzione del tasso di rendimento dell'attività " ì ", dove le variabili casuali " $\varepsilon_{ì}$ " sono indipendenti e identicamente distribuite e tale che: $E[\varepsilon_{ì}|Z(\tau)] = 0$ (valore atteso condizionato)

Definiamo:

$$Zn+1(\tau) = 1/n\ \Sigma Z_{ì}(\tau) = Z(\tau) + 1/n\ \Sigma\varepsilon_{ì}$$

Ricordando che le $Z_{ì}(\tau)$ sono tutte identicamente distribuite per costruzione,dal 1°corollario e per " $\gamma = 1 / n$ " abbiamo:

$$Wc,n+1(S,T,X) \leq Wc,ì(S,T,X) \qquad \forall \quad \text{" ì "}$$

Per la legge dei grandi numeri abbiamo che $Zn+1(\tau)$ converge in probabilità a $Z(\tau)$ per " $n \rightarrow \infty$ ", e quindi per la 2°assunzione abbiamo:

$$\lim_{n\rightarrow\infty} Wc,n+1(S,T,X) = Wc,z(S,T,X)$$

Ed infine ricordando che l'attività " ì " è più rischiosa dell'attività " Z " per costruzione, abbiamo per il 1°corollario:

$$Wc,z(S,T,X) \leq Wc,ì(S,T,X) \qquad \forall \quad \text{" ì "}$$

Che dimostra come dal punto di vista del valore di un'opzione la diversificazione sia un male.
Questa relazione tra il prezzo di un'opzione Call e la rischiosità dell'attività sottostante è coerente con gli studi empirici di Van Horne, così come lo sono anche le relazioni con " r " e " T " viste nel 1°teorema.

7° Teorema: *Se " k " è una costante positiva per $Q = kS$, $X_Q = kX$, abbiamo:*

$$Wc(Q,T,X_Q) = kWc(S,T,X)$$

Dim.:
Dato che il pay-off di $Wc(Q,T,X_Q)$ è esattamente " k " volte il pay-off di $Wc(S,T,X)$ per evitare la dominanza stocastica di uno sull'altro occorre che i prezzi si uguaglino.

Finora nessuna assunzione è stata fatta sulle proprietà della distribuzione dei tassi di rendimento $Z_i(T)$, ma se assumiamo che siano indipendentemente distribuite, allora, sono anche indipendenti dal livello iniziale del prezzo dell'attività, per cui otteniamo il seguente teorema.

8° Teorema: *Se la distribuzione del tasso di rendimento sull'attività è indipendente dal livello iniziale del prezzo allora $Wc(S,T,X)$ è omogeneo di grado uno in " S " e " X ".*

Dim.:

Poniamo: " $k = (S_2/S_1)$ " e " $X_2 = kX_1$ ", per il 7° teorema abbiamo:

$$Wc_{,2}(S_2,T,X_2) = kWc_{,2}(S_1,T,X_1)$$

Dato che per ipotesi le $Z_i(T)$ sono identicamente distribuite per la 2°assunzione abbiamo:

$$Wc_{,2}(S_1,T,X_1) = Wc_{,1}(S_1,T,X_1)$$

e quindi:

$$Wc_{,2}(kS_1,T,kX_1) = kWc_{,1}(S_1,T,X_1)$$

9° Teorema: *Se la distribuzione del tasso di rendimento di un'attività è indipendente dal livello iniziale del suo prezzo allora $Wc(S,T,X)$ è una funzione convessa del prezzo dell'attività " S ".*

$$Wc''(S) \leq 0$$

Dim.:

Se:

$$S_3 = \gamma S_1 + (1-\gamma)S_2 \qquad X_3 = \lambda X_1+(1-\lambda)X_2$$
$$S_2 > S_1 \qquad X_2 > X_1$$
$$0 \leq \gamma \leq 1 \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Abbiamo:

$$Wc(S_3,T,X) \leq \gamma Wc(S_1,T,X) + (1-\gamma)Wc(S_2,T,X)$$

Dal 5° teorema abbiamo:

$$Wc(1,T,X_3) \leq \lambda Wc(1,T,X_1) + (1-\lambda)Wc(1,T,X_2)$$

Ponendo: $\lambda = \gamma S_1 / S_2$, $X_1 = X / S_1$, $X_2 = X / S_2$, e moltiplicando entrambi i lati della diseguaglianza per "S_3" abbiamo:

$$S_3Wc(1,T,X_3) \leq \gamma S_1Wc(1,T,X_1) + (1-\gamma)S_2Wc(1,T,X_2)$$

Dall'8° teorema ricaviamo:

$$Wc(S_3,T,S_3X_3) \leq \gamma Wc(S_1,T,S_1X_1) + (1-\gamma)Wc(S_2,T,S_2X_2)$$

Da cui risolvendo:

$$Wc(S_3,T,X_3) \leq \gamma Wc(S_1,T,X_1) + (1-\gamma)Wc(S_2,T,X_2)$$

Benché la convessità sia una proprietà sempre assunta per le opzioni è possibile provare che se la distribuzione del tasso di rendimento futuro dell'attività è sufficientemente dipendente dal livello iniziale del prezzo, si possono verificare perverse concavità locali.
Un certo numero di teoremi visti precedentemente dipendono dall'ipotesi che nessun payout venga distribuito sull'attività sottostante durante la vita dell'opzione o che l'opzione sia protetta da tali pagamenti.
In generale, il valore di un'opzione viene influenzato da un inatteso cambiamento nella politica degli investimenti, nella politica dei dividendi e nella struttura finanziaria dell'azienda.
Ad esempio, se l'azienda dovesse cambiare la propria politica degli investimenti in modo da abbassare il rischio del suo "cash flow", ne conseguirebbe per il 6°teorema che per un dato livello del prezzo dell'attività sottostante il valore dell'opzione declinerà.
Analogamente se l'azienda modificasse la propria struttura finanziaria in modo da aumentare il livello del suo debito, essa accrescerebbe anche la sua rischiosità e di conseguenza il valore dell'opzione diverrà maggiore.
Infine, se la parte del rendimento totale ricevuto dagli azionisti in forma di dividendi viene incrementata per un cambiamento nella politica degli stessi, il valore di una Call non protetta diminuirà poiché il detentore della stessa non ha alcun diritto su di essi, ed in estremo potremmo avere un'azienda che liquida tutte le sue attività e le distribuisce sotto forma di dividendi tale che: $S(\tau) = 0$.
Mentre possiamo proteggere l'opzione contro i cambiamenti nella politica degli investimenti e della struttura finanziaria solo con delle restrizioni dirette al management aziendale, è possibile provvedere una serie di aggiustamenti in grado di proteggere l'opzione dal pagamento dei dividendi.
Definizione:

"Un'opzione è detta protetta dai payout se per una fissata politica degli investimenti e per una fissata struttura finanziaria il valore di un'opzione è invariante alla scelta della politica dei dividendi "

10° Teorema: *Se il rendimento totale dell'azione è invariante alla frazione del rendimento rappresentata dai payout (Modigliani-Miller), e se in ogni data successiva alla distribuzione dei payout,durante la vita delle opzioni, il contratto viene aggiustato in modo tale che il numero di attività che possono essere acquistate al prezzo " X " sia incrementato di una percentuale pari (Div / S*), dove "S*" rappresenta il prezzo dell'azione ex-cedola, allora l'opzione sarà protetta dalla distribuzione dei payout.*

Dim.:
Consideriamo due aziende con i tassi di rendimento totale identicamente distribuiti tale che:

$$Z_1(\tau) = Z_2(\tau) = Z(\tau)$$

dove la seconda azienda non distribuisce dividendi, e con lo stesso prezzo iniziale

$$S_1(o) = S_2(o) = S$$

Poniamo:

$$Z_1(\tau) = \lambda_1(\tau)x_1(\tau)$$

Dove:

$\lambda_1(\tau) = 1 + [Div/S_1*(\tau)]$ "tasso di rendimento da dividendi "

$x_1(\tau)$ " tasso di rendimento da capital gains "

$S_1*(\tau) = x_1(\tau)S$ " prezzo per azione ex-payout al tempo τ "

$N_1(\tau) = \lambda_1(\tau)N_1(o)$ " numero di azioni che l'opzione da diritto ad acquistare " al prezzo d'esercizio X.

$$N_1(o) = 1$$
$$N_2(o) = N_2(\tau) = 1$$

Alla data di scadenza o quando l'opzione viene esercitata abbiamo il seguente pay-off:

$$\max [\, 0, N_1(\tau)S_1*(\tau) - X]$$

Ma:

$$N_1(\tau)S_1*(\tau) = \lambda_1(\tau)x_1(\tau)S = Z(\tau)S$$

Ricordando che per costruzione:(pensa che siano la stessa impresa)

$$Z(\tau)S = Z_2(\tau)S_2$$

Abbiamo lo stesso pay-off finale.
Inoltre, poiché per ipotesi le " Z " sono tutte identicamente distribuite, abbiamo per la 2°assunzione:

$$Wc_{,1}(S,T,X) = Wc_{,2}(S,T,X)$$

Per concludere notate come sia possibile generalizzare nel seguente modo:

$$N_1(\tau)S_1*(\tau) = \prod_{k=1}^{\tau} \lambda_1(k) \prod_{k=1}^{\tau} x_1(k)S = \prod_{k=1}^{\tau} Z(k)S$$

Limiti al valore di un'opzione Put Europea:

Parità Put-Call: *Il prezzo di una Put Europea può essere espresso in termini di valore di una Call Europea.*

Supponiamo di avere il seguente portafoglio:

$$Wp(S,T,X) + S(o) - Wc(S,T,X)$$

Che consiste in una posizione lunga nell'attività sottostante e una Put ed una posizione corta in una Call con stessa scadenza e prezzo d'esercizio della Put.
Il pay-off del portafoglio sarà in qualunque stato del mondo pari a " X " dato che la Put guadagnerà esattamente quanto perderà l'azione mentre la Call perderà esattamente quanto guadagnerà l'azione, di conseguenza il portafoglio sarà completamente "risk-free".
Quindi per evitare che il portafoglio sia dominante o dominato, esso deve avere un rendimento pari al tasso "risk-free" tale che:

$$Wp(S,T,X) + S(o) - Wc(S,T,X) \ = \ XP(T)$$

Da cui ponendo S(o)=X otteniamo la seguente relazione:

$$Wp(S,T,X) - Wc(S,T,X) \ = \ [1 - P(T)]\ X \ > 0 \qquad \text{sempre}$$

Questo ci dimostra che se tutti i parametri di valutazione sono identici e il prezzo d'esercizio uguaglia il prezzo corrente del titolo, l'opzione Call avrà un prezzo maggiore dell'opzione Put.
Da un più attento esame della parità Put-Call possiamo notare come i seguenti portafogli diano lo stesso pay-off in qualunque stato del mondo:

A) $Wp(S,T,X) + S(o) - XP(T)$

B) $Wc(S,T,X)$

Dunque per evitare la dominanza del Portafoglio "B" sul portafoglio "A", esso deve avere un prezzo maggiore o uguale allo stesso:

$$Wp(S,T,X) + S - XP(T) \leq Wc(S,T,X)$$

Lo stesso accade per i seguenti portafogli:

A) $Wc(S,T,X) - S(o) + XP(T)$

B) $Wp(S,T,X)$

Da cui:

$$Wc(S,T,X) - S + XP(T) \leq Wp(S,T,X)$$

Se il tasso d'interesse sia sulle posizioni lunghe sia sulle posizioni corte uguaglia il tasso "risk-free" otteniamo lo stesso risultato della parità Put-Call visto in precedenza.
In particolare notiamo che nessuna assunzione sulla distribuzione del prezzo dell'attività e dei futuri tassi d'interesse è richiesta per provare la parità Put-Call.

1° Corollario:

$$XP(T) \geq Wp(S,T,X)$$

Dato che:

$$Wp(S,T,X) \leq XP(T) + [Wc(S,T,X) - S]$$

$$Wc(S,T,X) - S \leq 0$$

Implica che:

$$Wp(S,T,X) \leq XP(T)$$

2° Corollario:

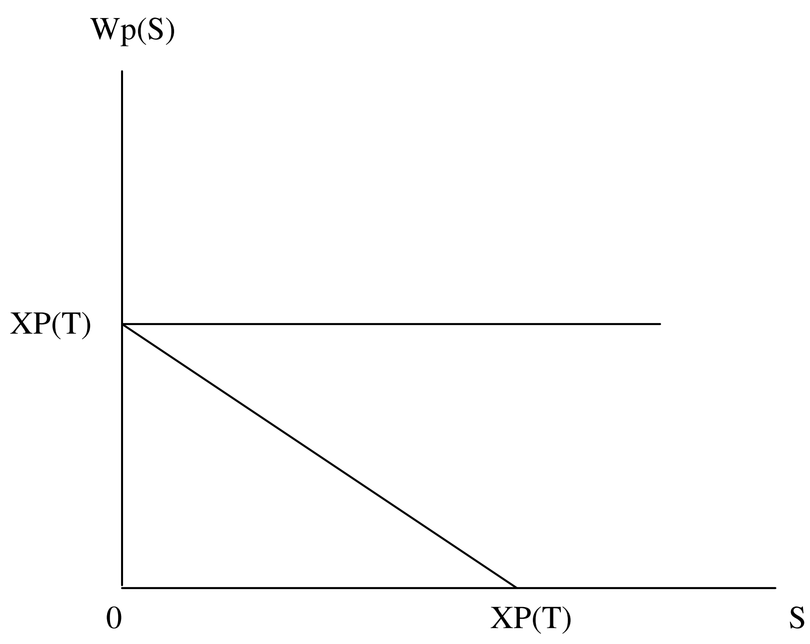
$$Wp(S,\infty.X) = 0 \quad , \quad \text{dato che:} \quad P(\infty)= 0$$

3° Corollario:

$$Wp(S,T,X) \geq XP(T) - S \quad , \quad \text{dato che:} \quad Wc(S,T,X) \geq 0$$

La parità Put-Call ci permette di derivare direttamente il prezzo razionale di una Put Europea e i rispettivi teoremi dalla teoria razionale delle Call Europee.
In particolare, ogni volta che Wc(S,T,X) sarà omogenea di grado uno, convessa in " X " ed " S ", e crescente rispetto al rischio, lo sarà anche Wp(S,T,X).

Ma vediamo graficamente i limiti al valore di un'opzione Put Europea:



Tuttavia, diversamente dalle opzioni Call Americane, le opzioni Put Americane anche se protette dai payout distribuiti sull'attività sottostante continuano ad avere una positiva probabilità di essere esercitate prematuramente.
Poiché le Put Americane possono essere esercitate in ogni momento il loro prezzo deve soddisfare le seguenti condizioni di arbitraggio:

$$W\mathrm{p}(S,T,X) \geq \max[\,0,X - S]$$

$$W\mathrm{p}(S,T,X) \geq \; Wp(S,T,X)$$

Dove l'ultima condizione vale solo se c'è una positiva probabilità di un esercizio prematuro altrimenti il prezzo di una Put Americana uguaglierà quello di una Put Europea.
Tuttavia ricordando che:

$$W\mathrm{p}(S,T_2,X) \geq W\mathrm{p}(S,T_1,X) \qquad \forall \qquad T_2 > T_1$$

Dal 2°corollario deriverebbe che tutte le opzioni Put Americane avrebbero un prezzo nullo, il che ovviamente violerebbe la prima condizioni di arbitraggio per " $S < X$ " .
Ma vediamolo meglio ponendo la parità Put-Call per le opzioni Americane:

$$W\mathrm{c}(S,T,X) - S + XP(T) = W\mathrm{p}(S,T,X)$$

Da cui possiamo ricavare:

$$(X - S) + W\mathrm{c}(S,T,X) - X[1 - P(T)] = W\mathrm{p}(S,T,X)$$

Se poniamo:

$$W\mathrm{c}(S,T,X) - X[1 - P(T)] < 0$$

Il che si può verificare per piccoli valori dell'attività sottostante, otteniamo che il portafoglio non è più dominante per una Put Americana perché vìola la prima condizione di arbitraggio.
Poiché c'è la possibilità di un prematuro esercizio delle Put Americana anche se protetta dai payout distribuiti sull'attività sottostante, non possiamo valutarla in termini di opzioni Call, ne consegue che una loro valutazione è molto più difficile della controparte Europea.

Relazione di hedging:

A questo punto continueremo la nostra analisi ipotizzando che gli agenti abbiano l'opportunità di osservare i prezzi e prendere decisioni, ad esempio sulla composizione di un portafoglio, in ogni istante del tempo.
La distinzione dai modelli con tempo discreto in cui gli agenti hanno la possibilità di osservare i prezzi e prendere decisioni solo in un punto discreto del tempo può sembrare non di grande importanza ma in questo contesto diviene cruciale.
Il problema di scegliere un portafoglio o di valutare un'opzione quando il prezzo futuro di un'attività è conosciuto precisamente non è né realistico né molto interessante, al contrario, quando gli agenti prendono le loro decisioni continuamente i prezzi devono essere modellati in modo tale che una qualche incertezza sull'immediato futuro venga preservata. (A)
Infatti, le contrattazioni avvengono all'incirca continuamente ed il prezzo di un'azione a fine giornata può assumere centinaia di valori.
Lo sviluppo di modelli stocastici continui che hanno questa caratteristica sono la chiave di molti risultati importanti tra cui la determinazione del prezzo di un'opzione.
In particolare nella teoria delle opzioni se il prezzo dell'attività segue un processo geometrico di Brown e se gli agenti hanno l'opportunità di contrattare continuamente, il mercato diviene completo.
La completezza in questo contesto significa che tutte le opzioni, Call e Put, possono essere replicate tramite una strategia che combina l'attività sottostante con una posizione corta o lunga su titoli "risk-free" da cui, per evitare possibilità di arbitraggio, il loro prezzo deve essere uguale al costo del portafoglio replicante.
Ma vediamo come sia possibile costruire portafogli coperti nel continuo combinando un'attività con le opzioni Call Europee scritte sulla stessa:

$$Vc = S(t) - mWc(S,T,X)$$

Dove:

$$m = 1 / (\partial Wc/\partial S) \qquad \text{numero di opzioni per azione}$$

Risulta chiaro che il coefficiente di copertura " m " ci permette di immunizzare il portafoglio dalle variazioni del prezzo dell'attività dato che l'opzione guadagnerà o perderà valore in modo da ripristinare la posizione netta iniziale.
Infatti, ad una variazione di $S(t)$ corrisponde una variazione nel prezzo dell'opzione pari a "$dS(t)\times\partial W/\partial S$" che controbilancia perfettamente $dS(t)$, ricordando che: " $\partial W/\partial S > 0$ ".
Tuttavia, $\partial W/\partial S$ non è una funzione lineare e come le variabili $S(t)$ e T , cambiano si modifica anche il numero di opzioni necessarie per coprire il portafoglio, ma se la copertura viene mantenuta continuamente la relazione di "hedging" diviene esatta.
Chiaramente se gli agenti non possono contrattare continuamente la copertura non è ottenibile e il modello cade, ma dato che anche per grandi cambiamenti del prezzo dell'attività sottostante la variazione di valore del portafoglio non è eccessiva, la relazione di "hedging" è approssimativamente esatta.
Inoltre, se assumiamo che il processo stocastico continuo possa avere dei punti di discontinuità con dei salti (Jump-process), ci accorgiamo come la relazione di "hedging" non sia più certa ma solo approssimata.

Comunque, se le posizioni non vengono riaggiustate continuamente, il rischio può essere diversificato formando un portafoglio composto da un largo numero di tali posizioni coperte.
Bisogna osservare che la direzione del cambiamento del valore del portafoglio non aggiustato continuamente è indipendente dalla direzione del prezzo dell'attività.
A questo punto possiamo notare che abbiamo ottenuto un portafoglio il cui valore non dipende dal prezzo dell'attività ma solo dal tempo e da altre variabili conosciute e costanti.
In particolare dal 1°teorema sappiamo che il valore di Wc(S,T,X) converge da max [0,S(t) – XP(T)] ad max [0,S(t) – X] per un dato S(t), da cui possiamo notare che all'approssimarsi della scadenza il prezzo delle opzioni Call decresce aumentando così il valore del portafoglio nel tempo.
La relazione di "hedging" può essere ottenuta anche in termini di numero di azioni per opzione Call ma naturalmente in questo caso non sarà il numero di opzioni ad essere riaggiustato ma bensì il numero di azioni, analiticamente avremo:

$$Vc = (1/m)S(t) - Wc$$

Con:

$$1/m = \partial Wc/\partial S$$

Questo risultato ci dimostra come il portafoglio possa essere immunizzato anche se non esiste un mercato delle opzioni con possibilità di contrattare continuamente, cioè la relazione è valida anche per le opzioni "over the counter".
Possiamo capire come la relazione di "hedging" lavora nel continuo con un semplice esempio nel tempo discreto.

Consideriamo due portafogli:

A) $S(o) - mWc$

B) $VP(T)$

Alla scadenza avremo i seguenti pay-off:

	Va	Vb
$S(\tau)>X$	$S(\tau) - m[S(\tau) - X]$	V
$S(\tau)<X$	$S(\tau)$	V

Possiamo facilmente notare che scegliendo un appropriato valore per "V" ed "m" i due portafogli danno lo stesso pay-off, ne consegue che per evitare opportunità di arbitraggio debbono avere lo stesso prezzo:

$$S(t) - mWc = VP(T)$$

Una volta ottenuta la relazione di “hedging” possiamo replicare l’opzione Call Europea attuando una strategia che combina una posizione lunga sull’azione ed una posizione corta su i titoli:

$$Wc = (1/m)S(t) - VP(T)$$

Questo breve esempio ci dimostra come sia necessario conoscere con esattezza la distribuzione del prezzo dell’azione ed è proprio in questo che si differenzia dal modello continuo.
Infatti, il valore di “V” che mi permette di immunizzare il portafoglio e pari al valore minimo che “S(t)” può assumere, ma dato che non siamo in grado di conoscerlo a priori possiamo solo fare delle supposizioni sulle possibili realizzazioni e le probabilità del loro verificarsi.
Questo ci introduce in un contesto probabilistico e i risultati ottenibili possono essere diversi a seconda dell’ipotesi distribuzionale adottata.

La determinazione del prezzo di un'opzione Europea:

Dalla relazione di hedging risulta evidente che per evitare opportunità di arbitraggio il portafoglio coperto deve essere remunerato al tasso "risk-free".
Se la condizione di arbitraggio viene rispettata il prezzo di un'opzione sarà funzione del valore dell'attività sottostante e del tempo, ma per una sua derivazione dobbiamo ipotizzare alcune condizioni ideali dei mercati.
Le ipotesi del modello sono le seguenti:

1) Il tasso d'interesse "risk-free" è conosciuto ed è costante nel tempo il che equivale ad ipotizzare una curva dei rendimenti piatta.

2) L'azione non distribuisce dividendi.

3) L'opzione è di tipo Europeo e può essere esercitata solo alla scadenza.

4) Le contrattazioni avvengono continuamente in mercati privi di frizioni e di costi di transazione

5) Non ci sono restrizioni sulle posizioni lunghe o corte nel mercato del credito, le quali vengono assunte al tasso "risk-free".

6) Non ci sono restrizioni sulle vendite allo scoperto.

7) Il prezzo dell'azione segue un processo geometrico di Brown descritto dalla seguente equazione differenziale stocastica(A):

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dw(t)$$
$$S(t) = s(o)$$

8) Nessuna ipotesi è necessaria riguardo alle preferenze degli investitori se non che soddisfino la 1° assunzione.

9) Tutti gli investitori sono d'accordo sul valore di " σ " e sulle caratteristiche della distribuzione " $dw(t)$ " mentre non è richiesto che siano d'accordo sul valore di " α ".

A questo punto possiamo derivare il prezzo di un'opzione Call come funzione del tempo e del prezzo dell'azione sottostante: " $Wc = F(S(t),t)$ "
Data la condizione di arbitraggio il portafoglio coperto deve essere remunerato al tasso di rendimento "risk-free", per cui abbiamo:

$$dS(t) - [1/(\partial F/\partial S)]dF(s,t) = \{S(t) - [1/(\partial S/\partial S)]F(S(t),t)\}\ rdt$$

In forma ridotta:

$$dVc = (Vc)\ rdt$$

Applicando il lemma di Ito(A) possiamo esplicitare la variazione del prezzo dell'opzione come segue:

$$dF(s,t) = [(\partial F/\partial t) + \alpha S(t)(\partial F/\partial S) + ½\ \sigma^2\ S(t)^2(\partial^2 F/\partial S^2)]dt + \sigma S(t)(\partial F/\partial S)dw(t)$$

Che possiamo anche riscrivere come:

$$dF(s,t) = [\ Ft + \alpha S(t)Fs + ½\ \sigma^2 S(t)^2 Fss]dt + \sigma S(t)Fsdw$$

Sostituendolo nella condizione di arbitraggio otteniamo:

$$\alpha S(t)dt + \sigma S(t)dw - \sigma S(t)dw - \alpha S(t)dt - \{[Ft + ½\ \sigma^2 S(t)^2 Fss]/Fs\}dt =$$
$$= \{S(t) - [F(S(t),t)/Fs]\}\ rdt$$

Possiamo notare come i primi quattro termini si annullino a vicenda eliminando l'unico termine stocastico "dS(t)", questo è dovuto alla relazione di "hedging".
A questo punto otteniamo la seguente equazione differenziale non stocastica:

$$Ft\ +\ rS(t)Fs + ½\ \sigma^2 S(t)^2 Fss - rF(S(t),t) = 0$$

Che può essere risolta sottoponendola alla condizione limite che alla data di scadenza il prezzo dell'opzione debba essere:

$$F(S(\tau),\tau) = \Phi c[S(\tau)]$$

Siamo di fronte ad un'equazione differenziale parabolica soggetta a vincolo.
La soluzione di questo sistema ci viene data da Feynman-Kaç(A):

$$F(S(t),t) = \exp - r(\tau - t)\ E_{S(o),t}\{\Phi c[S(\tau)]\}$$

Dove " $E_{S(o),t}$ " è il valore atteso che è stato indicizzato per enfatizzare il fatto che esso viene determinato per un dato " $S(t) = s(o)$ ".
Bisogna notare che il processo stocastico continuo "S(t)" da cui deriva la soluzione del sistema ha la stessa forma originale ma si differenzia per il tasso di rendimento istantaneo che è uguale al tasso "risk-free":

$$dS(t) = S(t)rdt + S(t)\sigma(t)dw$$
$$S(t) = s(o)$$

Il nuovo processo è giusto una regola tecnica di calcolo definita solo per il momento al fine di ottenere la soluzione del sistema.
Comunque possiamo interpretare la soluzione come il valore attuale del pay-off atteso in un mondo neutrale al rischio, infatti, " r " è il valore che avrebbe " α " se gli gli investitori fossero indifferenti al rischio.
Risulta chiaro che stiamo valutando l'opzione come se vivessimo in un mondo neutrale al rischio, nel senso che la formula è valida indipendentemente dalle preferenze degli agenti.
Questo risultato è dovuto alla relazione di "hedging", la quale permette a chi costruisce un portafoglio coperto di avere un "drift" pari al tasso "risk-free".
A questo punto possiamo anche scrivere "S(τ)" esplicitamente sfruttando le proprietà del processo geometrico di Brown(A):

$$S(\tau) = s(o)\ \exp(r - ½\ \sigma^2)(\tau - t) + \sigma\ [w(\tau) - w(t)]$$

Da questo possiamo derivare:

$$S(\tau) = S(o)\exp(Y)$$

Dove " Y " è una variabile stocastica con la seguente distribuzione:

$$N\ [(r - ½\,\sigma^2)(\tau - t)\ ,\ \sigma\sqrt{(\tau - t)}]$$

Da cui otteniamo la seguente formula per il prezzo di un'opzione:

$$F(s,t) = \exp\,[-\,r(\tau - t)] \int_{-\infty}^{\infty} \Phi c[S(o)\exp(y)]\, f(y)dy$$

Dove $f(y)$ è la funzione di densità della variabile stocastica " Y ".

Ricordando che $\Phi c = \max\,[0\ ,\ S(\tau) - X\ ]$, ponendo $T = (\tau - t)$ è normalizzando $S(\tau)$ abbiamo:

$$S(\tau) = S(o)\exp[(r - ½\,\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}\,Z]$$

Dove " Z " è una variabile normale standardizzata: N[0,1]

A questo punto l'integrale precedente diviene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \max\,\Big[0\ ,\ \{S(o)\exp[(r - ½\,\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}\,z]\} - X\Big]\ \vartheta(z)dz$$

dove " $\vartheta(z)$ " è la funzione densità della distribuzione normale standardizzata N[0,1]:

$$\vartheta(z) = (1/\sqrt{2\pi})\exp - (z^2\,½\,)$$

L'integrale sopra si annulla quando:

$$S(o)\exp[(r - ½\,\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}\,z] < X$$

e risolvendo per " z ", quando " $z < z°$ " dove:

$$z° \;=\; \frac{\ln(x/S) - (r - ½\,\sigma^2)\,T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Da cui possiamo riscrivere l'integrale nel seguente modo:

$$\int_{z°}^{\infty} [S(o)\exp\,(r - ½\,\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}\cdot z]\ \vartheta(z)dz \;-\; \int_{z°}^{\infty} X\ \vartheta(z)dz \;=\; A - B$$

L'integrale "B" può ovviamente essere riscritto come:

$$B = X \, Prob(z \geq z°)$$

ed usando la proprietà simmetrica della distribuzione N[0,1] può essere scritto come:

$$B = X \, Prob(z \leq -z°)$$

per cui l'integrale "B" è uguale ad:

$$B = X \, N[-z°]$$

dove denotiamo con N[z] la funzione cumulativa della distribuzione N[0,1]:

$$N[z] = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{z} \exp - z^2 ½ \; dx$$

A questo punto non ci resta che computare l'integrale "A" per ottenere la formula del prezzo di un'opzione Call:

$$\frac{S(o) \exp(r - ½ \sigma^2)T}{\sqrt{2\pi}} \int_{z°}^{\infty} \exp(\sigma\sqrt{T} \cdot z) \exp - (z^2 ½) \; dz$$

$$\frac{S(o) \exp(r - ½ \sigma^2)T}{\sqrt{2\pi}} \int_{z°}^{\infty} \exp - [(z/\sqrt{2})^2 - 2\sigma\sqrt{T}(z/\sqrt{2})(\sqrt{2}/2) + (\sigma\sqrt{T}/\sqrt{2})^2 - (\sigma\sqrt{T}/\sqrt{2})^2] dz$$

da questa trasformazione possiamo ottenere un quadrato di un binomio:

$$\frac{S(o) \exp(r - ½ \sigma^2)T}{\sqrt{2\pi}} \exp (½ \sigma^2 T) \int_{z°}^{\infty} \exp \frac{- (z - \sigma\sqrt{T})^2}{2}$$

da cui risolvendo abbiamo:

$$\frac{S(o) \exp(rT)}{\sqrt{2\pi}} \int_{z°}^{\infty} \exp - ½ (z - \sigma\sqrt{T})^2 \; dz$$

che può essere normalizzato come segue:

$$A = S(o) \; \exp(rT) \int_{z° - \sigma\sqrt{T}}^{\infty} (1/\sqrt{2\pi}) \exp - ½ z^2 \; dz$$

da cui:

$$A = S(o) \exp(rT)\, N[z° - \sigma\sqrt{T}]$$

che per la proprietà simmetrica della distribuzione normale può essere riscritto come segue:

$$A = S(o) \exp(rT)\, N[-z° + \sigma\sqrt{T}]$$

Finalmente abbiamo ottenuto la seguente formula per il prezzo di un'opzione Call Europea:

$$\boxed{Wc(s,t) = S(o)\, N[h] - XP(T)\, N[h°]}$$

Dove:

$$h(s,t) = \frac{\ln S/x + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$h°(s,t) = \frac{\ln S/x + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = h(s,t) - \sigma\sqrt{T}$$

Possiamo interpretare N[h°] come la probabilità che l'opzione sia "in the money", mentre, N[h] che è l'inverso del rapporto di copertura, come la probabilità di copertura.
Inoltre possiamo notare che se "S(t)" è molto più grande di "X" allora:

$$N[h] \rightarrow 1 \qquad N[h°] \rightarrow 1 \qquad \Rightarrow \qquad Wc \rightarrow S(t) - XP(T)$$

La formula del prezzo di un'opzione Call può essere vista come il costo del portafoglio replicante che consiste in una posizione lunga in azioni per S(t)N[h] ed una posizione corta in titoli per XP(T)N[h°] , dove " $1/m = N[h]$ " e " $V = XN[h°]$ ".
Il fatto che un'opzione possa essere replicata ci permette di determinare il suo prezzo come il costo del partafoglio replicante se ammettiamo che non esistano opportunità di arbitraggio intertemporali.
Questa distinzione apparentemente poco rilevante ci permette di dimostrare che la formula del prezzo dell' opzione è esatta anche se non esiste un mercato delle opzioni.
Inoltre ci permette di non assumere che la dinamica del prezzo dell'opzione sia descritto da un processo di Ito, nonché, che sia una funzione lineare.

A questo punto possiamo esplicitare l'opzione Call Europea come funzione di cinque fattori deterministici $Wc(S,T,X,r,\sigma)$ e studiare come cambia al variare di uno di essi tenendo fermi tutti gli altri.
Inizieremo prima con le variazioni al limite:

$$S(t)\rightarrow 0 \;\Rightarrow\; Wc\rightarrow 0$$
$$S(t)\rightarrow \infty \Rightarrow\; Wc\rightarrow \infty$$

$$X \rightarrow 0 \;\Rightarrow\; Wc\rightarrow S(t)$$
$$X\rightarrow \infty \;\Rightarrow\; Wc\rightarrow 0$$

Dato:

$$S(t)<X \text{ abbiamo: } \quad T\rightarrow 0 \;\Rightarrow\; Wc\rightarrow 0$$
$$S(t)>X \text{ abbiamo: } \quad T\rightarrow 0 \;\Rightarrow\; Wc\rightarrow S(t) - X$$

e come:

$$T\rightarrow \infty \;\Rightarrow\; Wc\rightarrow S(t)$$
$$r\rightarrow \infty \;\Rightarrow Wc\rightarrow S(t)$$

Dato:

$$S(t)<XP(T) \text{ abbiamo: } \sigma\rightarrow 0 \Rightarrow\; Wc\rightarrow 0$$
$$S(t)>XP(T) \text{ abbiamo: } \sigma\rightarrow 0 \Rightarrow\; Wc\rightarrow S(t) - XP(T)$$

e come:

$$\sigma\rightarrow \infty \;\Rightarrow\; Wc\rightarrow S(t)$$

L'analisi della sensibilità della formula del prezzo di una Call Europea a piccoli cambiamenti di ognuna delle cinque variabili da una rappresentazione matematica alternativa:

$$\partial Wc/\partial S = N[h] > 0$$
$$\partial Wc/\partial X = -P(T)N[h°] < 0$$
$$\partial Wc/\partial t = -[S(t)\vartheta(h)\sigma/r\surd(\tau\text{-}t)] - rXP(T)\, N[h°] < 0$$
$$\partial Wc/\partial \tau = [S(t)\vartheta(h)\sigma/r\surd(\tau\text{-}t)] + rXP(T)\, N[h°] > 0$$
$$\partial Wc/\partial r = (\tau\text{-}t)XP(T)\, N[h°] > 0$$
$$\partial Wc/\partial \sigma = S(t)\vartheta(h)\surd(\tau\text{-}t) > 0$$

Per concludere la nostra analisi introdurremo altre due misure di sensibilità, l'elasticità del prezzo della Call rispetto alle variazioni del valore dell'azione ed il Gamma che ci da una misura della reattività del Delta ($\partial Wc/\partial S$):

$$\eta(c) = N[h](S(t)/Wc) > 0$$

$$\partial^2 Wc/\partial S^2 = \vartheta(h)/[S(t)\sigma\surd(\tau\text{-}t)] > 0$$

Possiamo notare che tranne per piccoli valori di "S(t)" rispetto ad " X " l'elasticità è maggiore di uno, dato che "$S(t) \geq Wc$", il che dimostra che le opzioni Call sono molto più volatili delle attività sottostanti.

A questo punto possiamo determinare il prezzo di un'opzione Put Europea direttamente dalla parità Put-Call:

$$Wp(St,T,X) = Wc(St,T,X) - S(t) + XP(T)$$

Sostituendo Wc(St,T,X)) con la formula per il prezzo di un'opzione Call Europea Wc(s,t) otteniamo la seguente relazione:

$$Wp(s,t) = -S(t)(1 - N[h]) + P(T)X(1 - N[h°])$$

ed usando la proprietà simmetrica della distribuzione normale standardizzata otteniamo la formula finale del prezzo di un'opzione Put Europea:

$$\boxed{Wp(s,t) = P(T)X\, N[z°] - S(o)\, N[z° - \sigma\sqrt{T}]}$$

Dove " z° " è già stato definito precedentemente come:

$$z° = \frac{\ln(x/s) - (r - ½\,\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Anche le opzioni Put Europee possono essere esplicitate come funzione di cinque variabili deterministiche $Wp(St,T,X,r,\sigma)$ e di conseguenza possiamo studiarne la sensibilità sia rispetto a grandi variazioni sia rispetto a piccole variazioni:

$$S(t) \to 0 \Rightarrow Wp \to XP(T)$$
$$S(t) \to \infty \Rightarrow Wp \to 0$$

$$X \to 0 \Rightarrow Wp \to 0$$
$$X \to \infty \Rightarrow Wp \to \infty$$

Dato:

$$S(t) < X \text{ abbiamo: } T \to 0 \Rightarrow Wp \to X - S(t)$$
$$S(t) > X \text{ abbiamo: } T \to 0 \Rightarrow Wp \to 0$$

e come:

$$T \to \infty \Rightarrow Wp \to 0$$
$$r \to \infty \Rightarrow Wp \to 0$$

Dato:

$$S(t) < XP(T) \text{ abbiamo: } \sigma \to 0 \Rightarrow Wp \to XP(T) - S(t)$$
$$S(t) > XP(T) \text{ abbiamo: } \sigma \to 0 \Rightarrow Wp \to 0$$

e come:

$$\sigma \to \infty \Rightarrow Wp \to XP(T)$$

Continuando nella nostra analisi abbiamo:

$$\partial Wp/\partial S = \partial Wc/\partial S - 1 < 0$$
$$\partial Wp/\partial X = \partial Wc/\partial X + P(T) > 0$$
$$\partial Wp/\partial t = \partial Wc/\partial t + rXP(T)$$
$$\partial Wp/\partial \tau = \partial Wc/\partial \tau - rXP(T)$$
$$\partial Wp/\partial r = \partial Wc/\partial r - (\tau\text{-}t)XP(T) < 0$$
$$\partial Wp/\partial \sigma = \partial Wc/\partial \sigma > 0$$

Da cui notiamo subito che nulla possiamo dire circa il segno delle derivate parziali rispetto al tempo, infatti, esse dipenderanno dalla posizione della curva del prezzo della Put rispetto alla retta del pay-off finale, dato che per un dato "S(t)" la curva del prezzo convergerà verso la retta del pay-off finale.
Infine concludiamo con l'elasticità della Put rispetto al prezzo dell'azione:

$$\eta(p) = (N[h] - 1)(St/Wp) < 0$$

In cui possiamo notare, oltre al segno, che per piccoli valori di "S(t)" rispetto ad " X " è ipotizzabile " Wp>S(t) ", e quindi, l'elasticità sarà probabilmente minore di uno, mentre, nella situazione opposta nulla possiamo dire circa l'effetto che prevarrà, ma ricordando che possiamo valutare le Put Europee in termini di opzioni Call ne consegue che in generale esse saranno più volatili delle attività sottostanti.

Evidenza empirica:

Il primo test empirico sul modello appena visto fu effettuato dagli stessi Black-Scholes(1972), essi utilizzarono come dati i prezzi rilevati fra il 1966 e il 1969 di contratti riguardanti 545 titoli trattati sull' "over-the-counter option market".
Le opzioni trattate non avevano prezzi d'esercizio o scadenze standardizzati, tuttavia, erano protette dal pagamento dei dividendi, infatti ogni volta che l'azione sottostante distribuiva dividendi il prezzo d'esercizio delle opzioni circolanti veniva ridotto dello stesso ammontare del dividendo.
Successivamente essi confrontarono i prezzi del modello con i prezzi effettivi delle opzioni alla data di emissione separando quelle sopravvalutate da quelle sottovalutate.
Per ciascuna opzione acquistata (se sottovalutata) o venduta (se sopravvalutata) venne formato un portafoglio coperto perfettamente privo di rischio, vendendo o acquistando le azioni sottostanti negoziate.
L'opzione è stata conservata per tutta la sua durata mentre la copertura priva di rischio è stata rivista giornalmente.
I loro risultati hanno mostrato l'esistenza di sostanziali rendimenti eccedenti positivi, ma una volta considerati i costi di transazione questi ultimi svaniscono, ne consegue che anche qualora i mercati delle opzioni non appaiono efficienti è impossibile per gli operatori avvantaggiarsi di tale inefficienza.
La stessa procedura, se ripetuta utilizzando i prezzi del modello, produceva, usando le varianze effettive (ex-post), insignificanti profitti medi, mentre quando si utilizzavano le varianze stimate ex-ante, si risolveva in rendimenti negativi eccedenti rispetto al portafoglio.
Questo risultato mostra che il mercato utilizza fattori ulteriori rispetto ai prezzi passati per valutare le varianze istantanee ex-ante dei rendimenti azionari e che quando si usano le varianze effettive si colgono gli effettivi prezzi delle opzioni in modo abbastanza preciso.
Nel 1977 Galai ha utilizzato dati del Chicago Board of Option Exchange (CBOE), dove i contratti di opzione avevano prezzi d'esercizio e date di scadenza standardizzate, ma non erano protette dal pagamento dei dividendi.
La standardizzazione dei contratti ha provocato un elevato numero di negoziazioni e minori costi di transazione.
Le volatilità sono state calcolate sulla base dei dati raccolti prima dell'attuazione della strategia di trading ed i principali risultati del test sono stati i seguenti:

1) In assenza di costi di transazione si sono verificati rendimenti eccedenti positivi.
2) Supponendo costi di transazione pari all'1%, i rendimenti eccedenti venivano meno.
3) L'influsso dei vari parametri (r,σ) sul risultato del test era modesto.
4) I risultati erano sensibili alla distribuzione dei dividendi, infatti negoziare opzioni su azioni con più alti dividendi rendeva rendimenti eccedenti minori.
5) I test sulle strategie di combinazione " spread " di opzioni Put e Call hanno dato risultati similari a quelli prodotti dalle strategie di copertura sopra esposte.

Usando i prezzi di chiusura giornaliera del CBOE tra il 31 dicembre '75 ed il 31 dicembre '76 delle sei principali società, MacBeth-Merville(1979) hanno verificato il modello ottenendo i seguenti risultati:

1) I prezzi relativi al modello sono in media minori dei prezzi di mercato relativi ad opzioni " in the money "
2) Il grado in cui il modello sottovaluta un'opzione "in the money" aumenta con il grado in cui l'opzione è "in the money" e diminuisce con il diminuire del tempo mancante alla scadenza.
3) I prezzi del modello per le opzioni "out of money" con meno di novanta giorni alla scadenza sono, in generale, maggiori dei prezzi di mercato, ma non sembra esserci alcuna relazione tra il grado di sopravvalutazione e il grado in cui l'opzione è "out of money", o il tempo mancante alla scadenza.

Bhattacharya(1980) usando come dati di partenza il prezzo dell'azione, la varianza ex-post e il tasso privo di rischio, ha dimostrato che non esistono significative deviazioni dal prezzo effettivo di mercato, eccetto che per le opzioni "at the money" (S = X) molto vicine alla scadenza, le quali vengono sopravvalutate dal modello.
Inoltre, Klemkosky-Resnick(1979) hanno effettuato un test per valutare la parità Put-Call raccogliendo dati dal CBOE fra il luglio '77 e il giugno '78.
Furono costruiti 606 portafogli coperti, dove la Put , la Call e l'azione sottostante dovevano essere negoziate entro un minuto l'una dall'altra.
Se la parità Put-Call vale, allora non ci sono rendimenti derivanti dall'arbitraggio e il mercato è efficiente, senza dover fare riferimento al modello di valutazione delle opzioni.
Il risultato ottenuto fu coerente con la parità Put-Call, infatti se $20 era il minimo costo di transazione a finche un membro ufficiale della borsa potesse assumere una posizione coperta, allora solo il 27% delle posizioni coperte erano vantaggiose, mentre, se $60 era il costo di transazione minimo per un investitore non membro allora solo il 7% delle posizioni coperte era vantaggioso.
Concludendo possiamo dire che il modello ben si adatta all'osservazione empirica ed è coerente con l'efficienza di mercato, infatti, ogni volta che si sono cercate distorsioni economicamente sfruttabili i rendimenti eccedenti sono scomparsi quando sono stati considerati i costi di transazione.
D'altra parte ci sono state distorsioni statisticamente significative del modello, ma rimane ancora poco chiaro quali delle distorsioni osservate siano causate da specificazioni imprecise del modello e quali siano dovute a problemi statistici incontrati nel valutare i parametri del modello.

Struttura a termine dei tassi di interesse:

In questo capitolo affronteremo il problema di modellare la forma della struttura a termine dei tassi di interesse usando l'ipotesi di non arbitraggio come nel precedente modello per la determinazione del prezzo di un'opzione Call Europea.
Tuttavia, occorre precisare che differentemente da esso il mercato non è completo dato che non esiste un mercato del sottostante capace di esprimere un prezzo.
Infatti, la struttura a termine dei tassi di interesse viene determinata indirettamente dai prezzi dei titoli di puro sconto $P(t,\tau)$ per ogni scadenza " τ ".
In altre parole, in questo modello noi consideriamo il tasso di interesse come l'attività sottostante, mentre, i titoli di puro sconto come derivati dello stesso.
Il fatto che non esiste un mercato che esprime il prezzo dell'attività sottostante ci fa già intuire che l'ipotesi di non arbitraggio non è sufficiente a garantire l'unicità del prezzo di un titolo di puro sconto dato che non è possibile costruire un portafoglio replicante.
Tuttavia, possiamo indagare la relazione che i prezzi dei titoli con differente scadenza devono soddisfare data l'ipotesi di assenza di possibilità di arbitraggio nel mercato.
Le ipotesi del modello sono le seguenti:

A) Il tasso di interesse segue un processo stocastico continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$dr(\tau) = \mu(\tau)d\tau + \delta(\tau)dw(\tau)$$
$$r(t) = R(t,t)$$

Dove:

$$R(t, t+T) = -(1/T) \ln P(t, t+T) \quad \text{" struttura a termine dei tassi di interesse "}$$

$$R(t,t) = \lim_{T\to 0} R(t, t+T) \qquad \text{" tasso Spot "}$$

B) Il prezzo $P(t,\tau)$ di un titolo di puro sconto viene determinato unicamente dalla dinamica di $r(t)$:

$$P(t,\tau) = F(r(t),t,\tau) = F^{\tau}(r(t),t)$$

Dove: " τ " viene considerato un parametro.

$$F^{\tau}(r(\tau),\tau) = 1 \qquad \forall \quad r(\tau)$$

C) Il valore di un conto monetario, o di un prestito, dell'ammontare di "B" remunerato al tasso " spot " $R(t,t)$ seguirà la seguente dinamica:

$$dB(\tau) = B(t)r(\tau)d\tau$$
$$B(t) = B(o)$$

Dove: $r(\tau)$ è stato definito precedentemente.

Conseguenza diretta di questa ipotesi è che:

$$B(\tau) = B(t) \exp\{\int_t^{\tau} r(s)ds\}$$

Infatti, investire in un portafoglio composto di titoli di puro sconto che scadono giusto in " $t + dt$ " è equivalente ad investire in un conto monetario dato che in caso contrario si creerebbero opportunità di arbitraggio.

D) Il mercato è efficiente, non ci sono costi di transazione, le informazioni sono disponibili simultaneamente a tutti gli investitori i quali agiscono razionalmente (preferendo più ricchezza che meno ed usando tutte le informazioni disponibili).
Quest'ultima ipotesi implica che gli investitori abbiano aspettative omogenee e che non esistano opportunità di arbitraggio.

A questo punto il problema principale è quello di determinare la forma di $F^{\tau}(r(t),t)$ data l'ipotesi di non arbitraggio, ed a questo proposito consideriamo un portafoglio composto da due titoli di puro sconto con differenti scadenze: " $s < \tau$ "

$$dV = V \{\upsilon_{\tau}(dF^{\tau}/F^{\tau}) + \upsilon_S(dF^S/F^S)\} \qquad 1.1$$

Dove sappiamo dal lemma di Ito che:

$$dF^S = F^S\alpha_S\, dt + F^S\sigma_S\, dw(t) \qquad 1.2$$

$$\alpha_S = [F_t^S + \mu F_r^S + ½\, \delta^2 F_{rr}^S] / F^S \qquad 1.3$$

$$\sigma_S = \delta F_r^S / F^S \qquad 1.4$$

Lo stesso abbiamo per " dF^{τ} ", mentre, " υ " rappresenta il peso nel portafoglio del titolo di puro sconto.
A questo punto inserendo 1.2 in 1.1 otteniamo la seguente dinamica del portafoglio:

$$dV = V(\upsilon_S\alpha_S + \upsilon_{\tau}\alpha_{\tau})\, dt + V(\upsilon_S\sigma_S + \upsilon_{\tau}\sigma_{\tau})\, dw(t)$$

Ora definiamo il nostro portafoglio con le seguenti equazioni:

$$\upsilon_S + \upsilon_{\tau} = 1$$
$$\upsilon_S\sigma_S + \upsilon_{\tau}\sigma_{\tau} = 0$$

Che possono essere facilmente risolte come:

$$\upsilon_{\tau} = -\sigma_S / (\sigma_{\tau} - \sigma_S)$$
$$\upsilon_S = \sigma_{\tau} / (\sigma_{\tau} - \sigma_S)$$

Da cui infine otteniamo:

$$dV = V[(\alpha_S\sigma_{\tau} - \alpha_{\tau}\sigma_S) / (\sigma_{\tau} - \sigma_S)]\, dt$$

Dove possiamo notare che "$dw(t)$" si annulla eliminando così l'unico termine stocastico, ne consegue che il portafoglio è privo di rischio e quindi dovrà essere remunerato al tasso "spot" secondo la dinamica dell'ipotesi "C", dato che in caso contrario si creerebbero opportunità di arbitraggio:

$$[(\alpha_S\sigma_{\tau} - \alpha_{\tau}\sigma_S) / (\sigma_{\tau} - \sigma_S)] = r(t)$$

Che possiamo anche scrivere come:

$$[\alpha_S - r(t)] / \sigma_S = [\alpha_\tau - r(t)] / \sigma_\tau$$

Dove possiamo notare che il quoziente comune non dipende né dalla scelta di " s " né dalla scelta di " τ ", ne consegue che se il mercato è privo di opportunità di arbitraggio esiste un processo " $\lambda(t)$ " tale che la seguente relazione è valida per qualsiasi data di scadenza " τ " :

$$[\alpha_\tau(t) - r(t)] / \sigma_\tau(t) = \lambda(t) \qquad \forall \quad \text{“}\tau\text{”} \qquad 1.5$$

Notiamo che abbiamo ottenuto il premio al rischio per unità di volatilità richiesto dal mercato per evitare opportunità di arbitraggio.
Inoltre, se consideriamo due titoli di puro sconto con differenti scadenze possiamo avere diversi tassi di rendimento istantaneo e diverse volatilità, l'unica cosa richiesta è che il valore dei due quozienti si eguagli per evitare possibilità di arbitraggio fra i titoli.
Da tutto questo consegue che i titoli di puro sconto devono avere lo stesso premio al rischio " $\lambda(t)$ " indipendentemente dalla loro data di scadenza.
A questo punto sostituendo 1.3 ed 1.4 nell'1.5 otteniamo la seguente equazione della struttura a termine che $F^\tau(r(t),t)$ deve soddisfare:

$$F_t^\tau + (\mu - \lambda\delta) F_r^\tau + ½\, \delta^2 F_{rr}^\tau - r(t) F^\tau = 0 \qquad 1.6$$

$$F^\tau(r(\tau),\tau) = 1$$

La soluzione di questo problema parabolico ci viene data da Feynman-Kaç facendo uso del fattore integrante: $\exp\{-\int r(s)\, ds\}$

$$P(t,\tau) = E_{R(t,t),t}\{\exp - \int_t^\tau r(s)ds \times 1\} \qquad 1.7$$

Dove:

$$dr(\tau)^* = (\mu - \lambda\delta)\, d\tau + \delta\, dw(\tau)$$
$$r(t)^* = R(t,t)$$

Possiamo notare che il prezzo di un titolo di puro sconto viene dato dal valore atteso del pay-off finale scontato secondo il nuovo processo " $r(t)^*$ " il quale può avere diverse misure di probabilità per differenti scelte di " $\lambda(t)$ ", il che significa che possiamo avere molti differenti sistemi dei prezzi ognuno dei quali è coerente con l'assenza di arbitraggio.
Questo risultato è dovuto come accennato all'inizio al fatto che il mercato non è completo e questo non ci permette di determinare in modo unico il prezzo di un titolo di puro sconto il cui valore dipenderà oltre che da " $r(t)$ " anche dalle forze di mercato, cioè, dalla domanda e dalla offerta, le quali riflettono l'avversione al rischio aggregata, le preferenze per la liquidità degli agenti ed altri fattori.

Infatti, il premio al rischio non viene determinato all'interno del modello ma deve essere specificato per potere ottenere la soluzione dell'equazione della struttura a termine, in particolare sappiamo che chi determina il suo valore è il mercato, questo significa che se noi facciamo una scelta ad "hoc" del suo valore abbiamo implicitamente fatto un'assunzione sulle preferenze del mercato.

Da questo segue immediatamente che se noi vogliamo avere un modello concreto dobbiamo ottenere dal mercato attraverso metodi empirici le informazioni necessarie.

Questa tecnica spesso chiamata inversione della curva dei rendimenti si basa sull'idea di ottenere l'informazione sul prezzo di mercato del rischio usando i prezzi esistenti dei titoli di puro sconto per ogni data di scadenza ed i risultati ottenibili saranno diversi a seconda del modello utilizzato.

Il fatto che non si possa determinare in modo univoco il prezzo di un titolo di puro sconto è abbastanza fastidioso soprattutto se vogliamo determinare il prezzo di un'opzione Europea sullo stesso dato che come abbiamo visto i prezzi delle opzioni possono essere molto sensibili anche rispetto a piccole variazioni del valore del sottostante.

Inversione della curva dei rendimenti:

Come abbiamo visto la soluzione al sistema 1.6 ci viene data dalla 1.7 , dove il processo " r(t) " ha una distribuzione normale(A) , il che comporta che la soluzione 1.7 consiste nel computare il valore atteso di una variabile stocastica con distribuzione log-normale.
Bisogna osservare che il tasso di interesse può assumere anche valori negativi il che è inaccettabile da un punto di vista economico, ed è proprio questo il limite del nostro modello, tuttavia, la probabilità che questo possa accadere è estremamente bassa per dei valori ragionevoli dei parametri.
Questo ci induce a ipotizzare l'esistenza di una struttura a termine affine che ha la seguente forma:

$$P(t,\tau) = F^{\tau}(r_{(t)},t)$$

Dove:

$$F^{\tau}(r_{(t)},t) = \exp\,[A(t,\tau) - B(t,\tau)\, r(t)] \qquad 1.8$$

Dove $A(t,\tau)$ e $B(t,\tau)$ sono funzioni deterministiche ed il processo " r(t) " ha come "drift" $(\mu-\lambda\delta)$.
In letteratura ci sono un largo numero di proposte su come specificare la dinamica di "r(t)", ma noi utilizzeremo il modello di Vasicek(1976):

$$dr(t) = [b - ar(t)]\, dt + \delta dw_r(t)$$

A questo punto sorge il problema di come stimare i parametri del modello (a,b,δ) , infatti, quando noi osserviamo il mondo reale non abbiamo il processo " r(t)* ", tuttavia, sappiamo dalla teoria del martingala che la varianza rimane la stessa anche se c'è un diverso "drift" il che ci consente una sua stima direttamente dalle serie storiche dei prezzi dei Titoli.
Mentre, per la determinazione degli altri parametri che influenzano il "drift" dovremo ricorrere ad un altro approccio denominato inversione della curva dei rendimenti che fa uso della struttura a termine affine 1.8.
Infatti, se noi assumiamo questo, possiamo facilmente calcolare le varie derivate parziali di F(r,t), e poiché F(r,t) deve soddisfare l'equazione della struttura a termine 1.6 otteniamo:

$$A_t(t,\tau) - [1 + B_t(t,\tau)]\, r(t) - \mu(t,r)\, B(t,\tau) + ½\, \delta^2(t,r)\, B^2(t,\tau) = 0 \qquad 1.9$$

Ed il vincolo $F(r_{(\tau)},\tau) = 1$ implica:

$$A(\tau,\tau) = 0$$
$$B(\tau,\tau) = 0$$

L'equazione 1.9 ci da la relazione che $A(t,\tau)$, $B(t,\tau)$, $\mu(t,r)$, $\delta(t,r)$ devono soddisfare per far sì che una struttura a termine affine esista.
Ed in particolare abbiamo nel modello di Vasicek(1976):

$$\mu(t,r) = a[(b/a) - r(t)]$$
$$\delta(t,r) = \delta$$

Da cui sostituendo nella 1.9 e raccogliendo r(t) otteniamo:

$$A_t + ½\delta^2 B^2 - Bb - (1 + B_t - aB)\, r(t) = 0$$

Questa equazione vale per tutti i valori di " t , τ , $r(t)$ ".

A questo punto se consideriamo dei valori fissi di " t " e " τ " l'equazione dovrà valere per tutti i valori di "r(t)", ne consegue che il suo coefficiente dovrà essere nullo, il che ci lascia con i seguenti sistemi:

$$B_t(t,\tau) - aB(t,\tau) = -1 \qquad 1.10$$
$$B(\tau,\tau) = 0$$

$$A_t(t,\tau) = bB(t,\tau) - ½\, \delta^2 B^2(t,\tau) \qquad 1.11$$
$$A(\tau,\tau) = 0$$

Una volta risolta l'equazione 1.10 semplicemente inseriamo la soluzione $B(t,\tau)$ nella 1.11 e integriamo per ottenere la soluzione $A(t,\tau)$:

$$B(t,\tau) = (1/a)\,[1 - \exp -a\,(\tau\text{-}t)]$$
$$A(t,\tau) = (\delta^2/2) \int_t^\tau B^2(s,\tau) - b \int_t^\tau B(s,\tau)ds$$

Quindi nel modello di Vasicek(1976) il prezzo di un titolo di puro sconto viene dato da:

$$\boxed{P(t,\tau) = \exp\,[A(t,\tau) - B(t,\tau)\, r(t)]}$$

Dove:

$$B(t,\tau) = (1/a)\,[1 - \exp -a\,(\tau\text{-}t)]$$

$$A(t,\tau) = \frac{[B(t,\tau) - \tau + t](ab - ½\delta^2)}{a^2} - \frac{\delta^2 B^2(t,\tau)}{4a}$$

Notiamo che:

$$\sigma_p(t,\tau) = -\,\delta B(t,\tau)$$

La varianza di $P(t,\tau)$ è una funzione crescente di $(\tau - t)$.
Da tutto questo consegue che "$dP(t,\tau) / P(t,\tau)$" è un processo geometrico di Brown dato dal seguente differenziale stocastico:

$$dP(t,\tau) / P(t,\tau) = r(t)\, dt + \sigma_p(t,\tau)\, dw_r(t)$$

A questo punto se calcoliamo il valore di $P(t,\tau)$ per ogni " $\tau > t$ " otteniamo la struttura a termine "teorica" dei tassi di interesse, ma bisogna notare che essa dipenderà dal valore dei parametri (a,b).
Noi non abbiamo ancora determinato il loro valore perché come abbiamo detto esso viene determinato dalle preferenze del mercato, quindi per ottenere i nostri valori dobbiamo andare sul mercato e rilevare l'attuale curva dei rendimenti, successivamente bisogna calibrare il modello in modo tale che la curva teorica si adatti a quella empirica meglio possibile, cercando ad esempio di minimizzare gli scarti quadratici tra valori teorici e valori empirici.
Tuttavia, se lavoriamo con un numero limitato di parametri, come in questo caso, è impossibile ottenere un'adattamento perfetto, mentre se lavoriamo con un numero illimitato di parametri come nel modello di Hull-White(1990) abbiamo il problema dell'instabilità numerica della stima dei parametri. C'è comunque un approccio totalmente differente proposto da Heath-Jarrow-Morton(1992) che fondamentalmente prende l'attuale struttura a termine empirica come condizione iniziale della curva dei tassi forward, ottenendo così automaticamente una perfetta aderenza della struttura a termine teorica.

La determinazione del prezzo di un'opzione Europea quando i tassi di interesse sono stocastici:

A questo punto è facile ottenere che la soluzione per il prezzo di un'opzione Call Europea quando i tassi di interesse sono stocastici viene data da Faynman-Kaç come:

$$Wc(S,t) = E_{R(t,t),S(o),t}\{\exp \int_t^\tau r(s)ds \ \ \Phi c[S(\tau)]\ \}$$

Da cui subito notiamo che per ottenere la soluzione occorre fare l'integrale della distribuzione congiunta di due variabili stocastiche, il che può risultare un duro lavoro.
A tal fine utilizzeremo una tecnica chiamata "cambio di numerario" che ci permette di ridurre drasticamente il numero di calcoli necessari per ottenere la formula finale per il prezzo di un'opzione Call Europea.
Infatti, a tal proposito considereremo un'economia composta dalle seguenti attività: $[B(t);P(t,..);S_1(t)\ldots S_n(t);W_{C,1}\ldots W_{C,n}]$ dove tutti gli elementi sono già stati definiti precedentemente.
A questo punto è interessante osservare che possiamo normalizzare la nostra economia dividendo tutte le attività per il numerario $P(t,\tau)$ ottenendo così quella che chiameremo la "N-economia":
$[B(t)/P(t,\tau);\ 1\ ;\ N_1(t)\ldots N_n(t)\ ;\ W_{C,1}/P(t,\tau)\ldots W_{C,n}/P(t,\tau)]$, dove: "$N(t) = S(t)/P(t,\tau)$" e da cui possiamo subito notare che abbiamo ottenuto un'economia dove il tasso di interesse è nullo e dove le attività " $N(t)$" hanno come distribuzione stocastica una Martingala geometrica.
Questo è dovuto al fatto che nel modello per la determinazione del prezzo di un'opzione le due attività hanno come "drift" il tasso di interesse "$r(t)$".
Ora dobbiamo chiederci se un contratto replicabile nella N-economia usando la strategia di portafoglio " h " lo è anche nella nostra economia, e la risposta è affermativa, mentre la connessione fra il valore dei due portafogli sarà data da:

$$V^N(t,h) \ = \ V^S(t,h) \,/\, P(t,\tau)$$

Ne consegue che l'S-economia è priva di arbitraggio se e solo se lo è anche l'N-economia, l'S-economia è completa se è solo se lo è anche l'N-economia, il processo $Wc(S,t)$ è privo di arbitraggio nella S-economia se e solo se lo è anche $Wc(N,t)$ nella N-economia.
A questo punto è chiaro che possiamo determinare il prezzo dell'opzione Call nella N-economia sulla base dell'ipotesi di non arbitraggio e riportare il risultato indietro nella nostra economia:

$$Wc(S,t) \ = \ Wc(N,t)\, P(t,\tau)$$

$$Wc(N,t) \ = \ E^{\tau}_{N(o),t}[\Phi c(N)]$$

Dove "$N(t)$" è dato dal seguente processo stocastico continuo:

$$dN(t) \ = \ N(t)\, \sigma_N(t)\, dw_N(t) \ = \ N(t)\, [\sigma_S(t)\, dw_S(t) \ - \ \sigma_P(t,\tau)\, dw_r(t)]$$
$$N(t) \ = \ S(o) \,/\, P(t,\tau)$$

Dove:

$$\sigma_N(t) \ = \ \sqrt{[\sigma_S{}^2(t) + \sigma_P{}^2(t,\tau)]}$$

dato che " $w_S(t)$ " e " $w_P(t)$ " sono stocasticamente indipendenti.

Questo risultato è facilmente comprensibile se ricordiamo che entrambe le attività “S(t)” e “P(t,τ)” seguono un processo geometrico di Brown(A).
Il valore atteso è stato indicizzato con “ τ ” per enfatizzare il fatto che esso dipende dalla scelta della data di scadenza dell’opzione, questo è il prezzo che dobbiamo pagare per la nostra generalizzazione.
Sfruttando le proprietà del processo geometrico e utilizzando il lemma di Ito possiamo facilmente ottenere la seguente soluzione:

$$N(\tau) = N(t) \exp\{-\tfrac{1}{2} \int_t^\tau \sigma_N^2(s)\, ds + \int_t^\tau \sigma_N(s)\, dw_N(s)\}$$

A questo punto dobbiamo calcolare il seguente integrale:

$$Wc(S) / P(t,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi c[N(t) \exp(y)] f(y) dy$$

Che possiamo riscrivere, ponendo: $\sigma^2 = [\, 1 / (\tau - t)\,] \int_t^\tau \sigma_N^2(s)\, ds$, $T = (\tau - t)$, come:

$$Wc(N,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \max \{0 , [N(t) \exp(-\tfrac{1}{2} \sigma^2 T + \sigma\sqrt{T} z)] - X\} \vartheta(z)\, dz$$

L’integrale si annulla quando: $N(\tau) < X$ e risolvendo per “ z ” , quando ” $z < z°$ ”, dove:

$$z° = \frac{\ln[XP(t,\tau)/S(o)] + \tfrac{1}{2} \sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Da questo ne consegue che possiamo riscrivere l’integrale nel seguente modo:

$$\int_{z°}^{\infty} [N(t) \exp(-\tfrac{1}{2} \sigma^2 T + \sigma\sqrt{T} z)]\, \vartheta(z) dz - \int_{z°}^{\infty} X\, \vartheta(z) dz = A - B$$

L’integrale “B” può ovviamente essere scritto come:

$$B = X\, \mathrm{Prob}(z \geq z°)$$

Ed usando la proprietà simmetrica della distribuzione normale possiamo scriverlo come:

$$B = X\, \mathrm{Prob}(z \leq -z°)$$

Da cui ovviamente abbiamo:

$$B = X\, N[-z°]$$

Ora ci resta da valutare l’integrale “A”, ed usando la trasformazione già vista precedentemente otteniamo:

$$A = N(t) \int_{z° - \sigma\sqrt{T}}^{\infty} \vartheta(z)\, dz$$

Ed infine sostituendo "N(t)" otteniamo:

$$A = S(o) / P(t,\tau) \; N[-z° + \sigma\sqrt{T}]$$

Finalmente siamo giunti alla seguente soluzione:

$$Wc(S,t) / P(t,\tau) = [S(o)/P(t,\tau)] \, N[-z° + \sigma\sqrt{T}] - X \, N[-z°]$$

Da cui risolvendo per Wc(S,t) otteniamo la soluzione finale per il prezzo di un'opzione Call Europea:

$$\boxed{Wc(S,t) = S(o) \, N[h] - XP(t,\tau) \, N[h°]}$$

Dove:

$$h° = \frac{\ln\{S(o)/[XP(t,\tau)]\} - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$h = \frac{\ln\{S(o)/[XP(t,\tau)]\} + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

A questo punto possiamo ottenere il prezzo di un'opzione Put Europea semplicemente inserendo la precedente formula nella parità Put-Call, ottenendo cosi:

$$\boxed{Wp(S,t) = XP(t,\tau) \, N[z°] - S(o) \, N[z° - \sigma\sqrt{T}]}$$

Dove " z° " è già stato definito precedentemente.
Infine, usando la tecnica del cambio di numerario abbiamo la seguente formula per il prezzo di un'opzione Call Europea su un titolo di puro sconto che scade in " $s > \tau$ ", basato sul modello di Vasicek(1976):

$$\boxed{Wc(p,t) = P(t,s) \, N[d + \sqrt{\int \sigma_N^2}] - XP(t,\tau) \, N[d]}$$

Dove:

$$d = \{ \ln [P(t,s) / (XP(t,\tau))] - \tfrac{1}{2}\int \sigma_N^2 \} \; / \; \sqrt{\int \sigma_N^2}$$

$$\int_t^\tau \sigma_N^2(s) \, ds = (\delta^2/2a^3) \{1 - [\exp -2a(\tau-t)]\}\{1 - [\exp -a(s-\tau)]\}^2$$

$$\sigma_N = -\delta \, [B(t,s) - B(t,\tau)]$$

Il capitale proprio di un'impresa indebitata come opzione Call:

In letteratura si è sempre posto l'accento sul fatto che il capitale proprio di un impresa indebitata in realtà è un'opzione Call sul valore dell'impresa, infatti, se alla data di scadenza del debito il valore dell'attivo è minore dello stesso, l'opzione Call non verrà esercitata e l'impresa fallirà lasciando ai possessori del debito il valore residuo dell'impresa.
Bisogna osservare che stiamo ipotizzando che il debito scada tutto insieme e che l'impresa possa fallire, infatti, è proprio la possibilità di fallimento che rende il capitale proprio un'opzione Call, il che equivale a dire che gli azionisti possono esercitare un'opzione Put nei confronti dei possessori del debito.
Possiamo formalizzare meglio il problema nel seguente modo:

1) Il valore iniziale del debito è dato dalla somma del valore delle obbligazioni di puro sconto che scadono in " τ ", il cui valore facciale totale è dato da: L^*
2) Gli obbligazionisti non possono portare l'impresa al fallimento fino alla data di scadenza del debito.
3) Assenza di imposte e costi di insolvenza.
4) L'impresa non distribuisce dividendi.
5) Il valore dell'attivo al tempo iniziale è dato da " $A(t)$ "
6) Il valore del passivo al tempo iniziale è dato da " $Wc(A,T,L^*) + L^* P(t,\tau) - Wp(A,T,L^*)$ "

Ma ora vediamo meglio come sia possibile ottenere un simile prospetto, come abbiamo già detto se alla data di scadenza del debito il valore dell'attivo sarà minore del valore facciale del debito, gli azionisti falliranno lasciando ai possessori del debito il valore residuo dell'impresa, tutto questo ci suggerisce che il pay-off finale del capitale proprio è uguale a quello di un'opzione Call sul valore dell'attivo:

$$E(\tau) = \max [0, A(\tau) - L^*]$$

Di conseguenza otteniamo che il valore del capitale proprio al tempo " t " sarà dato da:

$$E(t) = Wc(A,T,L^*)$$

Dove:

$$T = (\tau - t)$$

Analogamente abbiamo il seguente pay-off finale del debito dell'impresa:

$$L(\tau) = \min [L^* , A(\tau)]$$

Da cui:

$$L(\tau) - L^* = \min [A(\tau) - L^* , 0]$$

A questo punto possiamo osservare che abbiamo ottenuto lo stesso pay-off finale di una posizione corta su un'opzione Put scritta sul valore dell'attivo:

$$L(\tau) - L^* = -\max [L^* - A(\tau) , 0]$$

Questo risultato è facilmente intuibile, infatti, nel momento in cui l'opzione Call non viene esercitata $[A(\tau) < L^*]$ automaticamente viene esercitata un'opzione Put contro i possessori del debito.
Da tutto questo consegue che il valore del debito al tempo " t " sarà dato da:

$$L(t) = L^*P(t,\tau) - Wp(A,T,L^*)$$

Dato che il valore dell'attivo deve uguagliare il valore del passivo(Modigliani-Miller), otteniamo che:

$$A(t) - Wc(A,T,L^*) \; = \; L^* \, P(t,\tau) - Wp(A,T,L^*)$$

$$L(t) \; = \; L^* \, P(t,\tau) - Wp(A,T,L^*)$$

$$Wp(A;T;L^*) \; = \; L^* \, P(t,\tau) - L(t)$$

Dove possiamo calcolare il valore dell'obbligazione data la possibilità di fallimento e la differenza fra il valore del titolo privo di rischio e il valore del titolo rischioso, ottenendo così anche il premio al rischio.
L'ipotesi 3 comporta che il valore dell'impresa non è influenzato dalla struttura del suo capitale, la quale influirà solo sulla ripartizione dello stesso fra azionisti e obbligazionisti (Modigliani-Miller).
Questo comporta che il valore dell'attivo è dato dalla somma fra valore totale delle azioni ed il valore totale delle obbligazioni, tale che: $A(t) = E(t) + L(t)$
Merton(1977) ha dimostrato usando l'ipotesi di non arbitraggio che il teorema di Modigliani-Miller è valido anche se introduciamo la possibilità di fallimento.
A questo punto possiamo notare che il nostro modello può avere molte implicazioni di finanza aziendale, innanzi tutto osserviamo che la formula $L(t) = L^* P(t,\tau) - Wp(A,T,L^*)$ descrive il valore totale del debito che è equivalente ad avere una posizione lunga su un titolo di puro sconto privo di rishio ed una posizione corta su una Put, d'altra parte $L(t) = A(t) - Wc(A,T,L^*)$ e quindi possiamo facilmente dimostrare che ad una variazione percentuale positiva di L^* corrisponde una minore variazione percentuale positiva di $A(t) - Wc(A,T,L^*)$, questo è dovuto alla presenza della opzione Call che è una funzione convessa del prezzo d'esercizio.
Da un punto di vista economico possiamo dire che al crescere del debito aumenta il premio al rischio richiesto dal mercato dato che è salita la probabilità di fallimento.
Analogamente possiamo notare che al crescere del debito diminuisce il valore del capitale proprio dato che è equivalente ad ipotizzare che il prezzo d'esercizio della Call sia aumentato.
Quindi un incremento dei debiti (L^*) tenuto costante il valore totale dell'impresa comporta un aumento della probabilità di fallimento e una riduzione del valore di mercato delle obbligazioni.
Supposte tutte le obbligazioni di valore nominale unitario,il loro numero è: " $n_B = L^*$ "
Di conseguenza possiamo esprimere il prezzo di un'obbligazione nel seguente modo:

$$B(t) \; = \; P(t,\tau) - [Wp(A,T,L^*)/n_B]$$

Infatti se l'impresa cambia la struttura del suo capitale emettendo nuove obbligazioni che vengono usate per ritirare le proprie azioni il valore di mercato delle obbligazioni scende mentre il valore di mercato delle azioni sale dato che gli azionisti si sono appropriati di parte del premio al rischio dei vecchi obbligazionisti.
Tuttavia, se le nuove emissioni di obbligazioni sono subordinate a quelle precedenti sia il prezzo delle azioni e sia il prezzo delle obbligazioni già esistenti non saranno influenzati dall'operazione.
In questo senso possiamo dire che un cambiamento nella struttura del capitale può influenzare il valore delle azioni ma non quello dell'impresa nel suo complesso.
Come abbiamo visto una qualsiasi variazione nel valore del capitale proprio viene controbilanciata da una variazione uguale e di segno opposto nel valore del debito rischioso, la cui relazione viene data dalle seguenti derivate parziali:

$$\partial S/\partial A = N[h] \qquad \partial L_t/\partial A = N[-h] = 1 - N[h]$$

L'ipotesi 4 ci garantisce che gli azionisti non possano appropriarsi di parte della ricchezza degli obbligazionisti tramite la distribuzione dei dividendi, in estremo potremmo avere un impresa che liquida tutte le sue attività e le distribuisce sotto forma di dividendi, di conseguenza il valore delle obbligazioni sarebbe nullo.
Se rimuoviamo l'ipotesi 4 favoriremo anche per dividendi di modesta ampiezza gli azionisti a discapito degli obbligazionisti, ne consegue che una liberalizzazione della politica dei dividendi incrementa il prezzo delle azioni e riduce il prezzo delle obbligazioni.
Dato che gli azionisti di un'impresa indebitata hanno l'incentivo a pagarsi il più alto dividendo possibile, solitamente l'obbligazione contiene restrizioni sulla politica dei dividendi.
Comunque bisogna osservare che normalmente l'ampiezza dell'effetto di un cambiamento nella politica dei dividendi è molto piccolo.
Concludiamo osservando che il modello che abbiamo presentato è coerente con la relazione di parità Put-Call.

Un modello per i fondi di investimento:

Come abbiamo visto nel precedente capitolo il valore dell'attivo rappresenta l'attività sottostante al capitale proprio, mentre, il valore del debito alla data di scadenza rappresenta il prezzo d'esercizio del capitale proprio come opzione Call.
Finora nulla è stato detto circa la composizione dell'attivo e la sua dinamica, in questo capitolo ipotizzeremo che l'attivo sia un portafoglio di investimento, il che ci permette di ritenere che la relazione di "hedging" sia valida dato che il sottostante viene negoziato nei mercati finanziari.
Iniziamo ipotizzando che il nostro portafoglio sia composto interamente di titoli di puro sconto privi di rischio che scadono tutti insieme alla data " τ ", ne consegue che:

$$dA(t)/A(t) = r(t)dt + \sigma_p(t,\tau)dw_p(t)$$

Dove: $\sigma_A = \sigma_p(t,\tau) = \delta B(t,\tau)$ per le ipotesi poste, mentre, "W_p" cattura la variabilità di $P(t,\tau)$.

Utilizzando il numerario $P(t,\tau)$ otteniamo il seguente risultato:

$$\sigma_N^2 = \sigma_A^2(t) + \sigma_p^2(t,\tau) - 2\,\rho_{(A,P)}\,\sigma_A(t)\,\sigma_p(t,\tau)$$

Dove:

$\rho_{(A,P)} = 1$ " il coefficiente di correlazione fra $A(t)$ e $P(t,\tau)$ "

Dato che "$A(t)$" è perfettamente correlato con " $P(t,\tau)$ ".
Inoltre, dato che "$dP(t,\tau)/ P(t,\tau)$" è perfettamente correlato negativamente con "$dr(t)$" abbiamo che:

$$\rho_{(A,r)} = -\rho_{(A,P)}$$

Da cui possiamo riscrivere la precedente formula nel seguente modo:

$$\sigma_N^2 = \sigma_A^2(t) + \sigma_p^2(t,\tau) + 2\,\rho_{(A,r)}\,\sigma_A(t)\,\sigma_p(t,\tau)$$

:

A questo punto possiamo notare che se iniziamo a ridurre il peso dei titoli privi di rischio nel portafoglio aquistando azioni la covarianza fra $A(t)$ e $P(t,\tau)$ diminuisce, e questo si riflette sul coefficiente di correlazione fra gli stessi, in effetti da un più attento esame possiamo notare che $\rho_{(A,P)}$ è esattamente il peso dei titoli privi di rischio nel portafoglio, infatti, per " $\rho_{(A,P)} = 0$ " la covarianza fra $A(t)$ e $P(t,\tau)$ sarà nulla.
Da tutto questo possiamo dedurre che $A(t)$ segue il seguente processo stocastico continuo:

$$dA(t)/A(t) = \mu_A\,dt + \sigma_A\,[\rho_{(A,r)}\,dw_r(t) + \sqrt{(1 - \rho_{(A,r)}^2)}\,dw_S(t)]$$

In altre parole la varianza totale di $A(t)$ può essere divisa in due parti, la componente che cattura il rischio dei tassi di interesse $\rho^2\sigma_A^2$ e la componente che cattura il rishio dell'azione $(1-\rho^2)\sigma_A^2$.
Nota che usando il numerario $P(t,\tau)$ otteniamo lo stesso risultato per la $Var(N)$ visto precedentemente:

$$\sigma_N^2 = [\rho_{(A,r)}\,\sigma_A(t) + \sigma_p(t,\tau)]^2 + (1 - \rho_{(A,r)}^2)\,\sigma_A^2$$

Il che può essere facilmente provato sviluppando il quadrato del binomio.
A questo punto possiamo anche ipotizzare che $A(t)$ sia investito in attività reali che sono correlati con i tassi di interesse, il che equivale ad ipotizzare che i profitti dell'impresa siano correlati con i tassi di interesse.

Bibliografia:

Black , Scholes : "The pricing of options and corporate liabilities"
Journal of political economy, 1973, pag.637-659

Black, Scholes : " The valuation of option contracts and a test of market efficiency"
Journal of finance, 1972, pag.399-418

Black, Derman, Toy : "A one-factor model of interest rates and its application to tresury Bond Option" Financial analists journal, 1990, jan-feb, pag.33-39

Bhattacharya, M. : "Empirical properties of B-S formula under ideal condition"
Journal of financial and quantitative analysis, Dec1980, Pag1081-1106

Bjòrk,T. : "Arbitrage Theory in Continuous Time"
Oxford University Press (1998)

Cootner: "The random charter of stock market prices"
Cambridge, Mass, MIT.(1964)

Galai, D. : " Test of market efficiency of Chicago board of option exchange"
Journal of business, 1977, pag.167-197

Heath, Jarrow, Morton : "Bond pricing and the term structure of interest rate"
Econometrica, 1992, n°60, pag.77-106

Hull ,White : "Pricing interest rate derivative securities"
The review of financial studies, 1990, n°3, pag.573-592

Ho , Lee : "Term structure movements and pricing interest rate contingent claims"
Journal of finance, 1986, n°41, pag.1011-1029

Klemkosky, Resnick : "Put-Call parity and market efficiency"
Journal of finance, Dec1979, pag.1141-1155

MacBeth, Merville : "An empirical examination of B-S Call option pricing model"
Journal of finance, Dec1979, pag.1173-1186

Merton,R.: "The theory of rational option pricing"
Bell journal of economics and management science, 1973b,pag.141-183

Vasicek, O. : "An equilibrium characterization of the term structure"
Journal of financial economics, 1977, pag.177-188

Dalle riserve alle opzioni

Introduzione:

Fino a pochi anni fa il ramo vita era unicamente associato con la protezione della famiglia contro le conseguenze di una morte prematura, mentre oggi esso tende a definirsi più come un fondo di investimento la cui finalità assicurativa è quella di dare una protezione finanziaria contro il declino dei tassi di interesse.
Tuttavia, diversamente dagli altri intermediari finanziari, le passività della compagnia assicurativa sono tradizionalmente legate ad eventi incerti quali incendi, furti, incidenti, inquinamento, ecc. , che introducono un nuovo rishio nel mercato dei capitali.
Infatti, le compagnie non sanno né quando tali eventi si verificheranno e né di quale ammontare sarà il danno, il che porta a vedere il rischio assicurativo come qualcosa di completamente diverso dal rischio finanziario tipico degli altri intermediari finanziari.
Durante gli anni '80 l'elevato numero di istituti finanziari insolventi fu un evento traumatico per gli Stati Uniti, infatti l'aumento dell'inflazione fece crescere i tassi di interesse nella prima parte della decade, questo indusse i risparmiatori a cercare investimenti con rendimenti superiori all'inflazione e portò un significativo flusso di denaro nei fondi di investimento, i quali corrispondevano rendimenti superiori agli istituti di credito.
La competizione per il risparmio fra i vari istituti finanziari divenne feroce, questa pressione legata ad errori nella regolamentazione ha comportato perverse conseguenze.
Infatti, le istituzioni finanziarie furono spinte a migrare verso prodotti sensibili ai tassi di interesse e ad offrire rendimenti sempre più alti (ex-ante) che le porto ad investire in attività sempre più rischiose e ad operare con meno capitale per dollaro di attività.
Un buon esempio delle conseguenze di questo riassetto ci viene dato dal ramo vita delle compagnie assicurative Americane, per le quali il risultato fu disastroso.
Prima del 1987 meno di dieci compagnie assicurative furono registrate come insolventi, tuttavia , solo nel 1987 ben diciannove compagnie fallirono, nel 1989 ne fallirono quaranta, fino a giungere alla cifra record di cinquantotto nel 1991, sfatando definitivamente il luogo comune " troppo grande per divenire insolvente ".
Il Canada ha avuto gli stessi tipi di problemi mentre l'Europa è stata colpita in modo più leggero da tali eventi, benché ne sia stata data meno pubblicità le maggiori compagnie Europee hanno visto degradare il loro "Rating" e in qualche caso sono state dichiarate insolventi, come ad esempio la francese Garantie Mutuelle e la scandinava Hafflia.
Fino ad allora le compagnie assicurative avevano indirizzato le proprie scelte nella convinzione che i tassi di interesse rimanessero stabili, inoltre, furono sottovalutate le opzioni insite nei contratti (embedded options).
In virtù di tali opzioni l'assicurato può scegliere alla scadenza del contratto la forma di pagamento preferita (rendita o capitale), contrarre un prestito con il capitale accumulato con la polizza, versare premi più elevati rispetto a quanto inizialmente stabilito, ottenere il riscatto del contratto o la proroga dello stesso alla scadenza.
Al momento della liquidazione l'assicurato ha diritto al massimo fra il valore del portafoglio di attività e l'ammontare del capitale minimo maturato.
In altri termini, il tasso minimo garantito può essere considerato come un'opzione il cui valore deve tenere conto delle aspettative sui tassi e dovrebbe essere incorporato nel prezzo del premio come elemento finanziariamente distinto dalle altre componenti.
Studi specifici hanno dimostrato che gli assicurati esercitano più frequentemente le opzioni di riscatto e di prestito quando i tassi aumentano, mentre tendono a restare più a lungo nei contratti

quando i tassi scendono dato che normalmente i rendimenti riconosciuti dalle compagnie assicurative risultano più attraenti delle opportunità del mercato. (Babbel 1997)
Tale tipologia di rischi, legati alla variabilità dei tassi di interesse e all'esercizio delle opzioni insite da parte degli assicurati, non furono sufficientemente considerati negli anni precedenti caratterizzati dalla stabilità dei tassi di interesse.
La discesa dei tassi di interesse ha determinato la presa di coscienza del problema connesso alla presenza nel portafoglio di prodotti che assicuravano alla scadenza un rendimento superiore a quello che si poteva ottenere in quel momento sul mercato finanziario.
A partire dal 1997 le compagnie assicurative hanno progressivamente aumentato la quota degli attivi a copertura costituita da titoli e obbligazioni a tasso fisso, con una tendenza ad un allungamento delle scadenze, mentre, alcune compagnie hanno fatto ricorso per la prima volta a titoli strutturati caratterizzati da lunga durata, rendimento minimo garantito, e rendimenti variabili basati sui tassi "swap" a lungo termine, allo scopo di immunizzare i rischi del tasso minimo garantito sulle polizze vita.
Inoltre è aumentata l'offerta di strumenti assicurativi nei quali il rischio derivante dall'andamento delle variabili di mercato viene di fatto ad essere trasferito in tutto o in parte sull'assicurato, come nel caso delle polizze "unit linked" e "index linked".
L'attenzione delle compagnie si è focalizzata su una più attenta gestione degli attivi a copertura e sulla strutturazione di nuovi prodotti assicurativi.
In tale contesto, le tecniche di "Asset-Liability Management" (ALM) si sono sviluppate per far fronte al rischio tasso d'interesse (immunization), mentre, l'evoluzione successiva ha permesso di comprendere anche rischi diversi da quelli di tasso ed i modelli di ALM si sono trasformati in uno strumento utile per la gestione integrata dei rischi finanziari cui è esposta la compagnia assicurativa.
Dunque l'obiettivo di questa parte è quello di comprendere meglio la natura delle compagnie assicurative e di evitare che la storia si ripeta nuovamente, cercando di determinare gli errori comuni che hanno portato ad un cattivo "Asset-Liability Management" (mismatching).
A tal fine è importante capire la dinamica delle attività e delle passività, poiché , è solo attraverso questo che possiamo valutare correttamente la rischiosità delle compagnie assicurative.
L'approccio che noi useremo sarà basato sull'Option Pricing Model sviluppato nella prima parte di questa tesi, ottenendo così una valutazione della "duration" e della "convessità" delle attività e delle passività che sono alla base di qualsiasi approccio di ALM.
Inoltre, verranno presentate le implicazioni per la regolamentazione del settore assicurativo derivanti da tale modello.

L'attività tradizionale delle compagnie assicurative:

Tradizionalmente le compagnie assicurative avevano il compito di raccogliere i premi presso il pubblico e successivamente provvedere al risarcimento dei danni subiti dagli assicurati.
Gli assicuratori, quando analizzano i guadagni generati dalla loro compagnia, tendono a dividerli in due parti distinte, risultato tecnico e risultato finanziario, il primo è dato dalla differenza fra l'insieme dei premi assicurativi e le spese per risarcimento e amministrazione danni, mentre, il secondo è dato dai guadagni generati dall'investimento in attività finanziarie della riserva matematica.
Infatti occorre notare che poiché il premio è normalmente fisso, all'inizio del contratto le entrate risultano superiori alle uscite, tale eccedenza, che prende il nome di riserva matematica, viene calcolata secondo forme attuariali ed è soggetta a regolamentazione specifica.
Una compagnia assicurativa può essere vista come "Hedge Fund" dato che fa uso della leva finanziaria, infatti, i premi assicurativi, tipicamente versati una volta all'anno, possono essere visti come prestiti a breve termine che sono chiaramente più rischiosi del debito tradizionale, non conoscendo in anticipo né il loro ammontare né la loro data di scadenza.
Tuttavia una soluzione a questo problema può essere data da un operazione di "securitizing" che consiste nel trasferimento al mercato del rischio assicurativo, ovviamente, nulla viene per niente.
Bisogna osservare che questi strumenti finanziari rendono il mercato più completo, infatti, essi permettono una maggiore diversificazione dato che il loro rendimento non è correlato con i rischi finanziari.
Formalmente il tasso di rendimento sul capitale proprio è dato dalla somma tra il risultato tecnico e il risultato finanziario diviso per il valore iniziale del capitale proprio:

$$r_E = [mP + r_A(E + R)] / E$$

Dove:

" P " rappresenta il premio assicurativo
" m " denota il margine atteso dal risultato tecnico
" R " denota la riserva matematica
" E " è il valore del capitale proprio
" r_A " è il tasso di rendimento dell'attivo della compagnia

Per semplicità stiamo supponendo che la compagnia non emette debito.
A questo punto possiamo riscrivere la precedente formula nel seguente modo:

$$r_E = ms + r_A(gs + 1)$$

Dove:

$$s = P/E \qquad g = R/P$$

Questa formula ci dice come gli azionisti della compagnia ottengono il loro rendimento, il quale è una funzione crescente della leva finanziaria " s " e del tempo che intercorre fra l'entrata del premio e l'uscita dei risarcimenti " g ".
Briys e Husson(1984) hanno mostrato che il risultato tecnico delle compagnie francesi è stato in rosso dal 1974 al 1982, quindi, se prendiamo il rapporto fra il risultato tecnico e la riserva matematica, lo possiamo interpretare come il tasso di interesse implicito del debito della compagnia.

Tradizionalmente il premio assicurativo viene calcolato come segue:

$$P = E[D] + C + p$$

Dove:

" E[D] " rappresenta l'aspettativa matematica dei risarcimenti (premio puro).
" C " denota i costi amministrativi della compagnia (caricamenti).
" p " è il premio al rischio che ci permette di coprire la deviazione dei risarcimenti effettivi da quelli attesi, ma anche,di provvedere ad un profitto atteso per la compagnia implicita nel mercato (caricamenti di sicurezza).

In altre parole per determinare il premio assicurativo facciamo uso della legge dei grandi numeri. Inoltre possiamo notare che il risultato finanziario non compare nel calcolo del premio assicurativo, mentre, " p " sarà determinato dalle forze di mercato.
Benché si possa obiettare che nel calcolo del premio assicurativo debba essere incluso il risultato finanziario, in risposta ci limiteremo a citare oltre a Briys e Husson(1984) il commento della Standard & Poor(2000) sul mercato assicurativo Italiano:

"Con la bassa inflazione e i bassi tassi di interessi dell'unione Europea le perdite tecniche appaiono insostenibili anche quando i guadagni finanziari vengono presi in considerazione "

A questo punto occorre notare che una polizza assicurativa non è nient'altro che un'opzione Put, la quale ha la funzione di proteggere il suo detentore dalla caduta di valore del sottostante.
Concludiamo osservando che negli ultimi anni il ramo vita rappresenta più dell'70% dei prodotti assicurativi piazzati sul mercato, il che porta ad accentuare sempre più gli aspetti finanziari della gestione dell'attivo delle compagnie assicurative e gli elementi di omogeneità fra rischi bancari e rischi assicurativi (bancassurance).
In effetti, da un più attento esame, possiamo notare che il problema della riserva matematica delle compagnie assicurative è simile a quello del coefficiente di riserva degli istituti bancari, anch'esso gestito con la logica della legge dei grandi numeri.

Il ramo vita delle compagnie assicurative:

Con il contratto di assicurazione sulla vita, l'assicuratore, in corrispettivo di un premio unico o periodico si obbliga a pagare un determinato capitale o a corrispondere una determinata rendita al verificarsi di un evento attinente alla vita umana.
Il rischio che grava sull'assicuratore è dunque in funzione della durata della vita dell'assicurato, e la relativa delimitazione è quella che risulta dalla precisazione degli eventi che influiscono sulla durata stessa (età, stato di salute, professione svolta, ecc.).
Tale tipologia di rischio (demografico) viene considerata nella fissazione del premio da parte dell'impresa attraverso la definizione di apposite ipotesi demografiche che vengono effettuate sulla base di tavole di mortalità e consentono all'impresa di determinare una parte di "premio puro" che può essere definita come "premio di rischio".
Dato che il contraente versa i premi in anticipo rispetto al verificarsi dell'evento, nel calcolo del "premio puro" dovremo tenere conto anche del tasso di rendimento che si prevede di ricavare dall'investimento finanziario dei premi corrisposti dagli assicurati (premio di risparmio).
Normalmente l'assicuratore riconosce all'assicurato un rendimento minimo garantito sulle somme da questi versati, solitamente inferiore ai tassi correnti di mercato (tasso tecnico di tariffa).
Tuttavia esso viene definito al momento della stipula del contratto e rimane in vigore per tutta la durata del contratto e perciò per un lasso di tempo generalmente lungo.
In periodi di stabilità dei tassi di interesse la corresponsione di un tasso garantito minimo non costituiva un problema per le imprese assicurative, anzì, in periodi di ascesa dei tassi di interessi, consentiva loro di beneficiare dei rendimenti maggiori che potevano essere ottenuti dal mercato.
Tutto questo ha comportato, dal lato della domanda, una mancanza di competitività del prodotto assicurativo rispetto ad impieghi alternativi di investimento del risparmio.
Intorno agli anni '80 le compagnie assicurative affiancarono ai prodotti tradizionali altre forme di assicurazione sulla vita, in grado di valorizzare maggiormente la componente finanziaria al fine di garantire agli assicurati prestazioni tali da difendere, almeno in parte, il loro potere di acquisto nel tempo.
Si diffusero le polizze rivalutabili, con le quali l'assicurato partecipa ai risultati finanziari ottenuti dalla compagnia attraverso l'investimento della riserve.
Nelle polizze "rivalutabili" le prestazioni dell'assicuratore sono ancorate al reddito degli investimenti che confluiscono in una gestione separata delle riserve matematiche, esse prevedono oltre ad un rendimento minimo garantito anche una partecipazione agli utili della gestione.
In tali tipologie di polizze la garanzia di rendimento minimo può avvenire su base annua o al momento della liquidazione del capitale, in ogni caso, il detentore della polizza vita ha diritto al massimo tra il valore del capitale ottenuto tramite la gestione separata e l'ammontare del capitale garantito a scadenza.
La compagnia con la garanzia di rendimento minimo assume, quindi, un rischio legato alla circostanza che negli anni successivi alla stipula del contratto essa non riesca ad investire sul mercato dei capitali in attività che le consentano di realizzare rendimenti uguali o superiori a quelli garantiti.
Tale circostanza può realizzarsi sia quando i mercati finanziari sono caratterizzati da una discesa dei tassi di interesse sia nei momenti in cui un rialzo dei tassi di interesse possono generare delle "minusvalenze" sul valore dell'attivo.
In tale ambito, assume un peso importante la verifica degli strumenti operativi e gestionali utilizzati dalle compagnie assicurative per misurare e gestire i rischi finanziari connessi al loro portafoglio, sia dal lato degli investimenti sia dal lato degli impegni.
In tale ottica si avverte anche l'importanza dell'uso da parte delle compagnie assicurative di tecniche di gestione integrata dell'attivo e del passivo, in cui le tecniche di ALM rivestono un ruolo cruciale.

Rischio tecnico e rischio finanziario:

Ai rischi normalmente connessi all'attività assicurativa, definiti rischi tecnici o attuariali (sottotariffazione, sovrasinistralità, insufficienza delle riserve tecniche, ecc.), si aggiungono i rischi legati agli investimenti finanziari compiuti dalle compagnie assicurative.
Babbel, Santomero(1999) distinguono quattro macroclassi di rischio e i relativi rimedi:

1) Rischio attuariale: " derivante dall'inadeguatezza delle basi tecniche sulle quali è stato costruito il premio puro.Si tratta,in sostanza delle ipotesi sulla probabilità degli eventi sinistrosi e del tasso tecnico utilizzato nel calcolo del premio. Tale tipologia di rischio consiste nella probabilità di una modifica dei fattori demografici o finanziari attuariali utilizzati nella stima iniziale."

2) Rischio di mercato: " inteso come la componente di rischio non diversificabile all'interno della compagnia assicurativa.Esso si riferisce alla probabilità che il valore dell'attivo e del passivo cambino in relazione a fattori esterni, quali possono essere le variazioni dei tassi di interesse, dei valori dei titoli, ed in generale, dalle condizioni di reinvestimento. Può manifestarsi in modi differenti ed essere relativo ai tassi di interesse, al valore delle azioni, all'andamento dei cambi, all'inflazione, ecc."

3) Rischio di credito: " dovuto al rischio di insolvenza del proprio debitore il quale potrebbe non essere in grado di adempiere alle proprie obbligazioni.
Tale rischio difficilmente potrà essere eliminato del tutto in quanto può nascere da fattori sistemici "

4) Rischio di liquidità: " si verifica quando la compagnia non può trasformare gli investimenti in liquidità senza sopportare perdite in conto capitale "

La conoscenza del profilo di rischio è indispensabile per le compagnie assicurative sia sotto il profilo commerciale, per le strategie di "pricing", sia sotto quello gestionale, per orientare concretamente il processo decisionale.
All'interno dell'area del "risk management" l'analisi dei rischi finanziari ha acquisito negli ultimi anni un'importanza crescente nelle compagnie assicurative, come è già accaduto in passato nel settore bancario.
Dal punto di vista della vigilanza ciò che rileva è soprattutto che la compagnia disponga di un portafoglio ottimale di attività a copertura delle riserva tecniche, che sia coerente con il principio del "close matching" tra flussi dell'attivo e del passivo, ed inoltre, che tenga anche conto della dinamica dei flussi futuri.

L'Asset Liabilty Management:

L'ALM è uno strumento gestionale che fa sì che le scelte di natura finanziaria e commerciale siano basate su una chiara percezione dei rischi e dei rendimenti.
Esso rappresenta uno strumento indispensabile per stabilire un legame tra il passivo e l'attivo del bilancio, per gestire il rischio tasso d'interesse assicurando anche una redditività degli investimenti, per consentire una adeguata comunicazione fra le persone dell'azienda che si occupano dell'attivo e quelli incaricati dello studio e progettazione dei prodotti assicurativi al fine di coordinare nel modo migliore le strategie di investimento con le strategie commerciali.
Quindi, nella prospettiva di un estensione dell'ALM ad una gestione integrata della compagnia, bisogna individuare una modalità tecnica che consenta di far dialogare efficacemente chi si occupa del passivo e chi si occupa dell'attivo, in modo da permettere al gestore finanziario di costruire un insieme di attività a copertura delle riserve.
Le strategie gestionali relative all'attivo sono indirizzate a modificare il profilo rischio/rendimento medio del portafoglio (Duration, Rating, composizione del portafoglio di attivi), ad immunizzare il portafoglio stesso con appropriati strumenti finanziari (opzioni su titoli, opzioni sui tassi, swap, swaption).
Le strategie gestionali relative al passivo riguardano la politica dei prodotti (disegno, pricing), la creazione di gestioni coerenti per le nuove emissioni di contratti con diverse garanzie di rendimento minimo, l'offerta agli assicurati di soluzioni di trasformazione fra i diversi contratti, l'interruzione della produzione di una determinata tipologia contrattuale, la promozione dei prodotti, la riassicurazione.
A livello di gestione di impresa l'ALM si presenta utile per valutare la solvibilità prospettica, il rischio e i rendimenti delle linee d'affari, e per identificare scenari rischiosi.
La dottrina è concorde nel ritenere che l'ALM non è di per sé sinonimo di perfetto allineamento di attivo e passivo, ma piuttòsto un insieme di tecniche che aiutano a misurare il grado di disallineamento e a trovare strumenti per la sua gestione, fornendo al manager una visione dell'esposizione della compagnia alla volatilità dei tassi di interesse, della sua tolleranza per questo rischio e delle possibilità di mantenere un surplus di attivo rispetto al passivo, conseguendo così un profitto.
Babbel, Stricker, Vanderhoff(1990) evidenziano che l'ALM influenzi anche il valore di un'impresa, infatti, quelle che hanno un maggiore " mismatching " tra attivo e passivo hanno generalmente una maggiore volatilità nel prezzo delle proprie azioni a seguito di fluttuazioni nei tassi di interesse.
Mentre le imprese che operano con un adeguato allineamento tra attivo e passivo risultano essere in grado di ottenere più facilmente extra profitti, in quanto in grado di ottimizzare la gestione operativa con la gestione finanziaria.
Dunque, una efficiente gestione della compagnia assicurativa con tecniche di ALM ne accresce il valore in quanto la rende meno esposta ai rischi di mercato.
Le tecniche più semplici per analizzare i flussi di cassa, consistono nell'ordinare gli attivi e i passivi in funzione della relativa scadenza e del tipo di interesse (fisso o variabile).
In questo modo si possono generare indicatori elementari della sensibilità del valore economico dei relativi importi alle variazioni dei tassi di interesse.
In prevalenza vengono utilizzate le tecniche della Duration (durata finanziaria) e della convessità dell'attivo, che vengono rapportate al portafoglio delle passività relative.
L'applicazione dell'analisi della Duration dell'attivo e del passivo delle istituzioni finanziarie e delle compagnie assicurative prende avvio dalle tecniche di stima di Macaulay(1938) e di Redington(1952), trova le sue prime applicazioni nel sistema bancario e nasce come tentativo di approfondire le implicazioni economiche delle diverse durate contrattuali.
La Duration di Macaulay misura la vita media di un titolo tenendo conto della distribuzione nel tempo dei flussi di cassa generati dallo stesso.

Come vedremo si tratta di un indicatore della durata media del titolo, ovvero, del periodo medio di rientro dei flussi di cassa, espresso nella stessa unità di tempo utilizzata per misurare la scadenze dei tassi di interesse, inoltre, può essere utilizzata come indicatore di rischio per indicare la sensibilità del prezzo dei titoli al variare dei tassi di interesse (volatilità).
In generale la volatilità del prezzo di un titolo al variare dei tassi di interesse è proporzionale alla Duration del titolo, ciò significa che tanto maggiore è la Duration di un titolo tanto maggiore è la variazione percentuale del prezzo data una variazione percentuale nel tasso di interesse.
La Duration modificata (non la Macaulay) può essere graficamente rappresentata da una retta tangente alla curva che rappresenta la relazione prezzo/rendimento del titolo, tuttavia, essendo la funzione del prezzo non lineare si creano delle imperfezioni nella stima, che per variazioni dei tassi contenute rimangono trascurabili.
Comunque possiamo introdurre un altro indicatore definito come "convessità" , che misura il grado di curvatura della funzione del prezzo consentendoci di correggere la stima ottenuta.
Qualora si riuscisse ad ottenere, in un ipotesi tuttavia poco realistica, che la Duration dell'attivo e del passivo siano perfettamente uguali ed in grado di generare posizioni di "cash-flow " perfettamente simmetriche, il risultato netto di natura finanziaria sarebbe prestabilito e non influenzabile da eventuali variazioni dei tassi di interesse (immunization), risultando così anche il capitale proprio immune alle variazioni dei tassi di interesse.
Tuttavia, tale ipotesi risulta difficilmente realizzabile in quanto le compagnie assicurative presentano attivi e passivi con scadenze altamente diversificate, il cui rinnovo può avvenire a condizioni differenti che rendono il margine finanziario non immune dalle variazioni di mercato.
Bisogna osservare che i modelli di Duration debbono essere usati con estrema cautela, infatti, richiedono una grande quantità di informazioni e un certo numero di approssimazioni, quali ad esempio la selezione di appropriati tassi di interesse, accurate stime sui "cash-flow" in entrata ed in uscita, la selezione di un adeguato orizzonte temporale su cui costruire il modello, ecc.
Come sottolineato dallo stesso Redington(1952), l'applicazione delle tecniche di Duration al ramo vita delle compagnie assicurative trova i suoi limiti nella valutazione della Duration del passivo, dovuto alla componente opzionale che a quei tempi era ancora qualcosa di oscuro.
Concludiamo notando che le compagnie che vogliono potreggersi contro il rischio di non poter corrispondere il rendimento minimo previsto nei contratti, potranno acquistare delle opzioni Put con prezzo d'esercizio pari al valore del capitale minimo garantito a scadenza (portfolio insurance).
Tuttavia, questo tipo di operazione richiede l'esborso del premio per le opzioni il che può portare anche a ridurre di molto i profitti. Al fine di superare tale difficoltà possiamo creare delle opzioni in via sintetica tramite la costruzione di un portafoglio dinamico capace di replicare il valore dell'opzione Put di cui abbiamo bisogno semplicemente costruendo un portafoglio dinamico composto dai titoli rischiosi e i titoli privi di rischio.

Le polizze vita con partecipazione agli utili:

In questo capitolo presenteremo un modello basato sull'option pricing model che ci permetterà di determinare il prezzo equo delle polizze vita con partecipazione agli utili e di derivare delle implicazioni per la regolamentazione del settore.
Le polizze in questione (Universal Life) permettono di ottenere un tasso minimo di rendimento " r^* ", e di partecipare agli utili derivanti dalla gestione dell'attivo della compagnia assicurativa (capital gains, cedole, dividendi, ecc.) secondo il coefficiente di partecipazione " β " (tasso di retrocessione).
Il coefficiente di partecipazione viene solitamente fissato tramite regolamentazione, ad esempio in Francia è pari all'85% degli utili.
Al tempo iniziale " t " la compagnia assicuratrice acquista un portafoglio di attività "A_t" finanziate dal capitale proprio " $E_t = (1-\alpha)A_t$ " e dai premi delle polizze vita raccolte " $L_t = \alpha A_t$ ".
La dinamica del valore dell'attivo è data dal seguente processo stocastico continuo:

$$dA_t/A_t = \mu_A dt + \sigma_A[\rho dW(t) + \sqrt{(1-\rho^2)}dB(t)]$$

Dove: " ρ " è il coefficiente di correlazione tra il valore dell'attivo e i tassi d'interesse.
" W " è un processo di Wiener indipendente da " B "che cattura il rischio tassi d'interesse.
" B " è un processo di Wiener che cattura tutti gli altri rischi dell'attivo, compreso quello assicurativo, cioè stiamo ipotizzando che nel portafoglio sia presente un derivato finanziario sull'attività tradizionale della compagnia stessa.

Mentre per determinare l'incertezza dei tassi d'interesse faremo uso del modello di Vasicek(1976) visto nella prima parte di questa tesi.
A questo punto definiamo il bonus finanziario che viene distribuito ai detentori delle polizze vita una volta che il tasso di rendimento garantito è stato pagato come:

$$B_\tau = \max \{0, \beta[(L_t/A_t)(A_\tau - A_t) - (L^* - L_t)]\}$$

$$= \beta\alpha \max [0, A_\tau - (L^*/\alpha)]$$

Dove:

$$L^* = L_t \exp[r^*(\tau-t)]$$

$$L^*/\alpha = L^*/(L_t/A_t) = A_t \exp[r^*(\tau-t)]$$

Notiamo che stiamo supponendo che i detentori delle polizze vita partecipano agli utili,una volta dedotto il rendimento garantito dai profitti, solo per la frazione " α ".
Risulta chiaro che il bonus sarà positivo solo quando " $A_\tau > L^*/\alpha$ " , o alternativamente quando " $A_\tau > A_t \exp[r^*(\tau-t)]$ ", che ci dice che la compagnia inizia a dividere il suo profitto non appena il tasso di rendimento dell'attivo inizia ad essere maggiore del tasso di rendimento garantito ai possessori delle polizze vita.
Tre sono gli scenari possibili alla data di scadenza " τ ":

1° $A_\tau < L^*$ $\Rightarrow$ $L_\tau = A_\tau$ $E_\tau = 0$

2° $L^* \leq A_\tau < L^*/\alpha$ $\Rightarrow$ $L_\tau = L^*$ $E_\tau = A_\tau - L^*$

3° $A_\tau \geq L^*/\alpha$ $\Rightarrow$ $L_\tau = L^* + B_\tau = \beta\alpha A_\tau + (1-\beta)L^*$ $E_\tau = (1-\beta\alpha)A_\tau - (1-\beta)L^*$

Naturalmente il primo scenario corrisponde ad una situazione di totale insolvenza, il secondo scenario ad un caso di parziale insolvenza dato che la compagnia riesce a pagare gli interessi garantiti ma nessun bonus viene distribuito, mentre nel terzo scenario la compagnia riesce sia a pagare gli interessi garantiti sia a distribuire il bonus.
Come abbiamo già visto nella prima parte della tesi, questi valori finali ci suggeriscono che il capitale proprio e le polizze vita hanno la caratteristica di essere delle opzioni scritte sul valore della compagnia assicurativa, con la differenza che la struttura contrattuale è molto più complessa ed include caratteristiche che non sono presenti nel precedente modello.
Il valore del capitale proprio alla data di scadenza sarà dato da:

$$E_\tau = \max[0, A_\tau - L^*] - \beta\alpha \max[0, A_\tau - (L^*/\alpha)]$$

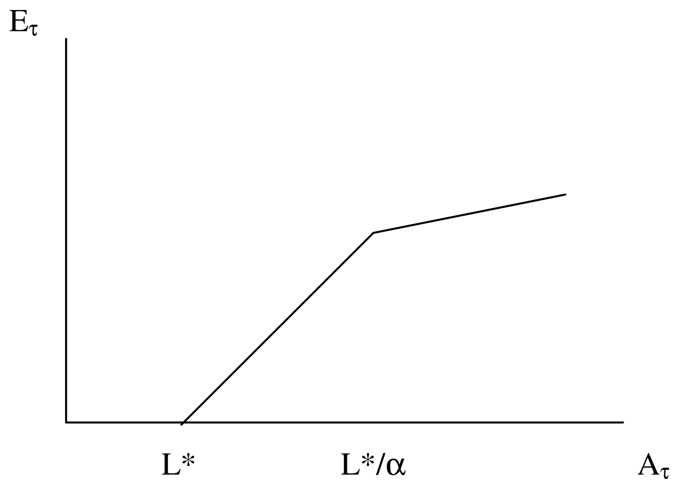
Come possiamo notare i due termini a destra dell'equazione non sono nient'altro che i valori finali di due opzioni Call Europee, per cui il valore del capitale proprio può essere scritto come segue:

$$E_t = Wc(A,T,L^*) - \beta\alpha\, Wc(A,T,L^*/\alpha)$$

Dove:

$$T = (\tau - t)$$
$$Wc(A,T,L^*) = A_t N[d_1] - P(t,\tau)L^* N[d_2]$$
$$Wc(A,T,L^*/\alpha) = A_t N[d_3] - P(t,\tau)(L^*/\alpha)N[d_4]$$

Possiamo facilmente osservare che la seconda opzione potrà essere "in the money" solo se lo sarà la prima, dato che: $L^* < L^*/\alpha$
A scadenza " $t = \tau$ ", otteniamo graficamente:



A questo punto possiamo riscrivere la formula per il valore del capitale proprio nel seguente modo:

$$E_t = A_t [N(d_1) - \beta\alpha N(d_3)] - P(t,\tau)L^* [N(d_2) - \beta N(d_4)]$$

Quindi il capitale proprio è un portafoglio composto da una posizione lunga ed una posizione corta su un'opzione Call, infatti, il bonus del detentore della polizza vita è equivalente ad un'opzione Call sul valore della compagnia pesato con il coefficiente: " $\beta\alpha$ "

Di conseguenza possiamo indicare il valore delle passività nel seguente modo:

$$L_t = L^*P(t,\tau) - Wp(A,T,L^*) + \beta\alpha Wc(A,T,L^*/\alpha)$$

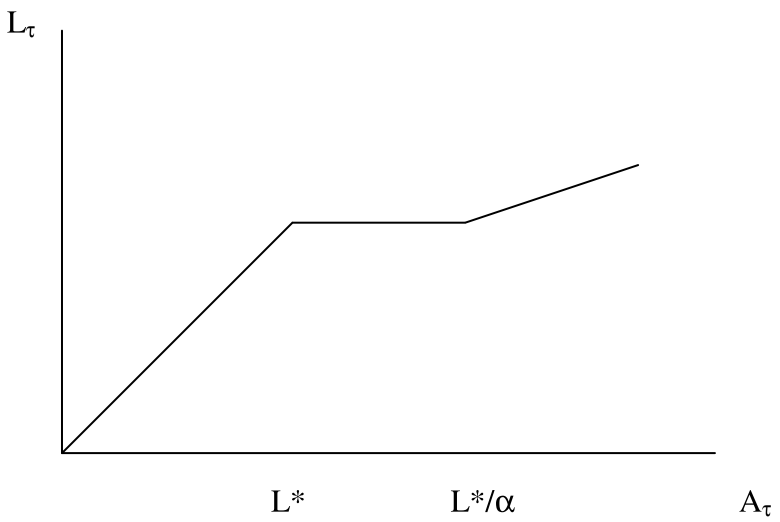
Dove:

$$Wp(A,T,L^*) = P(t,\tau)L^*N[-d_2] - A_tN[-d_1]$$

Ci consente di riscrivere la formula nel seguente modo:

$$L_t = A_t[N(-d_1)+\beta\alpha N(d_3)] + P(t,\tau)L^*[N(d_2)-\beta N(d_4)]$$

Ma vediamo graficamente il valore finale delle passività:



L’adeguato tasso di rendimento garantito e livello di partecipazione agli utili:

I detentori delle polizze vita affrontano il rischio che i loro contratti non ottengano il rendimento inizialmente pianificato, infatti, in caso di insolvenza, ai creditori viene distribuito il valore residuo della compagnia assicurativa.
I detentori delle polizze vita con partecipazione agli utili hanno due vie per ottenere un adeguato premio al rischio: per un dato coefficiente di partecipazione il tasso di rendimento garantito deve essere tale da permettere un equo (ex-ante) tasso di rendimento sulle polizze, o alternativamente, per un dato tasso di rendimento garantito il coefficiente di partecipazione deve essere tale da permettere un equo (ex-ante) tasso di rendimento sulle polizze.
Visto dalla parte degli azionisti della compagnia assicurativa il prezzo di una polizza vita deve essere tale da permettere che loro siano adeguatamente compensati per il rischio a cui sono esposti.
Questo significa che il coefficiente di partecipazione agli utili e il tasso di rendimento garantito dovranno essere tali da permettere che l’esborso iniziale degli azionisti sia pari al valore attuale del loro diritto sul futuro “cash-flow” della compagnia, ma questo valore lo conosciamo già, per cui abbiamo la seguente condizione di equilibrio:

$$(1 - \alpha)\, A_t \;=\; Wc(A,T,L^*) - \beta\alpha Wc(A,T,L^*/\alpha)$$

In altre parole né i detentori delle polizze vita sovvenzionano gli azionisti né gli azionisti sovvenzionano i detentori delle polizze vita.
Quella appena vista è la condizione di equilibrio che “ r* “ e “ β “ devono soddisfare, infatti, dato uno dei due l’altro viene automaticamente determinato come soluzione dell’equazione.
Tuttavia possiamo derivare una formula esplicita solo per il coefficiente di partecipazione:

$$\beta^* \;=\; \frac{Wc(A,T,L^*) - (1-\alpha)A_t}{\alpha Wc(A,T,L^*/\alpha)}$$

La condizione di equilibrio può essere usata sia per esaminare la relazione che lega i parametri del prezzo di una polizza vita ai vari fattori (volatilità, leva finanziaria, ecc.), sia per derivare alcune implicazioni per la regolamentazione del settore.
Dall’implementazione numerica sappiamo che per un coefficiente di partecipazione nullo il tasso di rendimento garantito è una funzione crescente della volatilità del portafoglio di attività e della volatilità dei tassi di interesse(σ_N), ed essenzialmente riflette un incremento del premio richiesto dai detentori delle polizze vita per il rischio che affrontano.
Tuttavia con un coefficiente di partecipazione pari all’85% il tasso di rendimento garantito decresce per bassi livelli di volatilità, mentre, cresce per alti livelli di volatilità, questo si spiega con il fatto che i detentori delle polizze vita con partecipazione agli utili affrontano il dilemma della volatilità, infatti per bassi livelli di volatilità prevale l’effetto della posizione lunga sull’opzione Call, mentre per alti livelli di volatilità prevale l’effetto della posizione corta sull’opzione Put.

Da tutto questo possiamo dire che man mano che il coefficiente di partecipazione cresce i detentori delle polizze vita con partecipazione agli utili diventano più propensi al rischio.
Analogamente sappiamo che il coefficiente di partecipazione per bassi livelli di volatilità (σ_N) è decrescente,mentre per alti livelli è crescente, questo implica che forzare la compagnia ad applicare un determinato coefficiente di partecipazione può avere due conseguenze, o riduce la volatilità del portafoglio o la accresce, la seconda conseguenza è qualcosa che i regolatori solitamente non si aspettano.
Infine sappiamo che il tasso di rendimento garantito è una funzione crescente del tasso di indebitamento della compagnia, mentre, un incremento del coefficiente di partecipazione ne riduce i valori senza modificarne l'andamento, cioè provoca uno spostamento parallelo della curva.
A questo punto analizziamo le implicazioni che ha per la regolamentazione la nostra condizione di equilibrio.
Solitamente i regolatori prevedono tre principali corsi di azione: "fissano un limite massimo per il tasso di indebitamento, controllano la composizione del portafoglio di attività per evitare che la compagnia investa in attività troppo rischiose ed impongono un tetto massimo al tasso di rendimento garantito al detentore della polizza vita, inoltre in alcuni paesi viene anche imposto un livello minimo al coefficiente di partecipazione (tasso di retrocessione)".
Fissare allo stesso tempo un tasso di indebitamento massimo, un coefficiente di partecipazione minimo ed un determinato tasso di rendimento garantito può portare a non trovare una condizione di equilibrio, ed in particolare un aumento del coefficiente di partecipazione riduce sempre più le possibilità di trovare un punto di equilibrio, infatti, in Germania le polizze vita con partecipazione agli utili non sono molto diffuse dato che la regolamentazione prevede un coefficiente di partecipazione minimo del 95%.
Il messaggio che possiamo trarre da questo è che il tasso di rendimento garantito ed il coefficiente di partecipazione agli utili debbano essere determinati dalle forze competitive del mercato e non dalle imposizioni della regolamentazione.
Infatti, se ipotizziamo che i mercati siano efficienti, le offerte delle compagnie assicurative convergeranno verso i valori della condizione di equilibrio, inoltre, si potrebbe avere un maggior numero di prodotti finanziari che combinano diversi livelli di rischio-rendimento, con ovviò vantaggio per i risparmiatori, i quali potranno beneficiare di una più ampia gamma di scelte.

Duration di Macaulay:

Nella prima parte di questa tesi abbiamo analizzato parecchi aspetti della valutazione di un titolo privo di rischio, un altro aspetto è la sensibilità del suo valore a variazioni inattese dei tassi di interesse di mercato.
Possiamo concettualizzare questa relazione con la nozione di elasticità del prezzo dei titoli ai tassi di interesse, che a sua volta viene data dal rapporto fra la variazione percentuale del prezzo dei titoli e la variazione percentuale dei tassi di interesse, dati una certa cedola ed il valore nominale:

$$\eta_P = -(\partial P/P) / (\partial r/r) \qquad 1.1$$

L'elasticità misura la percentuale nel cambiamento del prezzo del titolo per una variazione dell'1% dei tassi di interesse.
Tuttavia, l'espressione 1.1 fornisce solo un'approssimazione poiché essa regge solo per variazioni minime dei tassi di interesse, Macaulay(1938) ha derivato nel discreto un'espressione di misura più operativa, la Duration:

$$P(t) = [C_1/(1+r)] + [C_2/(1+r)^2] + \ldots\ldots + [C_T/(1+r)^T] + P(T)/(1+r)^T$$

Dove:

C_t = valore della cedola al tempo " t "
$P(T)$ = valore facciale del titolo
T = data di scadenza

A questo punto calcoliamo la seguente derivata parziale:

$$\partial P(t)/\partial(1+r) =$$
$$= -[C_1/(1+r)^2 + 2C_2/(1+r)^3 + \ldots\ldots + TC_T/(1+r)^{T+1} + TP(T)/(1+r)^{T+1}$$

Moltiplicando per " (1 + r)/P(t) " otteniamo:

$$[\partial P(t)/P(t)] / [\partial(1+r)/(1+r)] =$$
$$= -[1/P(t)]\,\{C_1/(1+r) + 2C_2(1+r)^2 + \ldots + TC_T/(1+r)^T + TP(t)/(1+r)^T\}$$

Esprimendo il risultato in forma di sommatoria otteniamo la formula della Duration:

$$D_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T} [tC_t/(1+r)^t] + TP(T)/(1+r)^T}{\sum_{t=1}^{T} [C_t/(1+r)^t] + P(T)/(1+r)^T}$$

Come possiamo vedere la Duration di un titolo privo di rischio con cedola non coincide con il tempo alla scadenza del flusso di pagamento, infatti, la Duration considera tutte le poste e assegna dei pesi ai loro tempi di scadenza.

Così la Duration è calcolata come la media ponderata degli archi temporali che precedono l'ultima posta, utilizzando come pesi i rapporti tra il valore attuale di ciascun pagamento di cedola e il valore corrente del titolo, essa identifica l'effettiva lunghezza media del tempo richiesto per recuperare il costo attuale del titolo.
Un modo veloce per calcolare la Duration dei titoli con cedola costante, come formulata originariamente da Maculay, è il seguente:

$$D_1 = [R / (R - 1)] - \{[QR + T(1 + Q - QR)] / [R^T - 1 - Q + QR]\}$$

Dove:

$$R = (1 + r)$$
$$Q = [P(T)/C]$$

Osserviamo che la Duration è uguale alla scadenza solo nel caso dei titoli di puro sconto, mentre per i titoli con cedola la Duration è più breve della scadenza, infatti per un dato valore del titolo tanto maggiori sono la cedola e il rendimento alla scadenza quanto più breve è la Duration.
Inoltre per i titoli che si vendono sopra la pari o alla pari la Duration aumenta con la scadenza, ma ad un tasso decrescente e con un limite superiore pari a " $(r + p)/rp$ ", dove " p " è il numero di volte per anno che l'interesse viene pagato e capitalizzato.
Per i titoli emessi sotto la pari la Duration aumenta con la scadenza ad un punto massimo anteriore alla scadenza e poi decresce.
Comunque per i titoli a breve termine le differenze fra Duration e scadenza sono minime, ma ovviamente tenderanno ad essere sempre più grandi con l'aumento di quest'ultima.
Un'importante caratteristica della formula della Duration è che può essere usata anche per un portafoglio di titoli, la cui Duration sarà la media delle Duration dei titoli ponderata con i pesi dei titoli sul portafoglio.
Da tutto questo consegue che la Duration può essere vista come la misura del rischio tassi di interesse per un titolo privo di rischio:

$$\partial P(t) = -D_1(\partial r/r)P(t)$$

Tuttavia bisogna osservare che la Duration di Macaulay viene calcolata usando la curva dei rendimenti, conseguentemente non varia al variare dei tassi di interesse solo se si ipotizza uno spostamento parallelo della curva dei rendimenti, fermi restando tutti gli altri fattori, il che equivale ad ipotizzare che i tassi della struttura a termine siano perfettamente correlati con i tassi "spot".
Maculay, rifiutando l'idea che la curva dei rendimenti fosse il risultato della media dei futuri tassi "spot" attesi, ha derivato una relazione alternativa:

$$D_2 = [\sum tC(t) \exp -yt] / [\sum C(t) \exp -yt]$$

Dove:

$$C(T) = C + P(T)$$

$$y = \text{" tasso di rendimento composto continuo sul titolo "}$$

Possiamo facilmente notare che le due formule coincidono solo se i tassi d'interesse sono conosciuti e costanti lungo la vita del titolo.

Sia Hicks(1939),sia Ingersoll-Skelton-Weil(1978) hanno dimostrato la seguente relazione:

$$dP(t)/P(t) = -D_2dy$$

Per un dato cambiamento del tasso di rendimento del mercato, la percentuale del cambiamento nel prezzo del titolo sarà proporzionale alla sua Duration.
Tuttavia, questo risultato non ci permette di fare delle comparazioni fra la rischiosità dei diversi titoli, infatti, un titolo con una lunga Duration non sarà necessariamente influenzato di più di uno con breve Duration da una variazione dei tassi "spot", dato che può benissimo accadere che il titolo con bassa Duration subisca un cambiamento percentuale maggiore del prezzo.
In generale un determinato cambiamento nei tassi "spot" non comporta una variazione dello stesso ammontare dei tassi della curva dei rendimenti, questo perché la struttura a termine viene determinata solo parzialmente dai tassi "spot", infatti, come abbiamo visto essa dipenderà anche dalle preferenze del mercato, o alternativamente, dai fattori che determinano le scelte del mercato.
Questo significa che c'è più di un fattore che determina la curva dei rendimenti e che quindi l'immunizzazione contro un solo fattore non può eliminare tutto il rischio.
Quindi questa formulazione non dev'essere considerata una relazione dinamica utile per misurare il rischio tassi d'interesse, ma piuttòsto un'analisi di statica comparata di un solo cambiamento nel tempo dell'intera curva dei rendimenti.
Noi siamo interessati ad una misura dinamica della Duration in grado di valutare il rischio di un titolo anche quando "shocks" multipli influenzano i tassi di interesse e la curva dei rendimenti si sposta in modo non uniforme.
Per derivare una tale formula occorre prima specificare una coerente teoria sulla struttura a termine dei tassi d'interesse e successivamente evidenziare la relazione della stessa con i tassi d'interesse "spot".
In questa tesi presenteremo il modello sviluppato da Bryis, De Varenne(1994) anch'esso basato sul modello di Vasicek(1976) ed applicato ai problemi di immunizzazione delle compagnie assicurative, anche se bisogna osservare che gli stessi hanno derivato successivamente (1997) un modello basato sul lavoro di Heath, Jarrow, Morton(1992).
A questo punto possiamo mostrare come la Duration sia alla base dell'immunizzazione dei fondi di investimento da una variazione dei tassi d'interesse.
L'immunizzazione è una tecnica di "hedging" che ci permette di costruire un portafoglio di titoli in grado di replicare il valore di un altro portafoglio di titoli (the target).
Inoltre, l'immunizzazione ci permette di ottenere uno specifico rendimento obiettivo a fronte di variazioni dei tassi di interesse, infatti, Leibowitz(1981) con un semplice esempio ci dimostra che se l'orizzonte temporale dell'investitore viene posto uguale alla Duration del titolo la perdita o il guadagno in conto capitale saranno perfettamente controbilanciate dalla variazione dei redditi derivanti dal reinvestimento, il che implica che il valore attuale del flusso di pagamenti è immune da variazioni del tasso di interesse di mercato.
Un altro esempio di immunizzazione, proposto dallo stesso Leibowitz(1981), utilizza la posizione dello stato patrimoniale di un'azienda, in particolare si consideri un manager di portafoglio che opera in una banca con la seguente posizione iniziale:

	(Attività)	(Passività)
Valore portafoglio:	\$800	\$800
Rendimento portafoglio :	12%	8%
Duration portafoglio:	8 anni	3 anni

Sappiamo già che la variazione del valore dell'attivo ad una variazione dell'1% nei rendimenti viene data dalla seguente formula:

$$\partial A(t) = -D_A(\partial r/r)A(t) = -8(0{,}01/1{,}12)800 = -57{,}142$$

Mentre per la parte delle passività abbiamo:

$$\partial L(t) = -3(0{,}01/1{,}08)800 = -22{,}222$$

Come possiamo facilmente vedere la diminuzione di valore delle attività supera il calo nel valore delle passività, comportando un'erosione del valore del capitale proprio della banca.
Cambiando la Duration del portafoglio di attività, la banca può immunizzarsi da variazioni nei livelli del tasso d'interesse: $\partial A(t) = \partial L(t) \quad \Rightarrow \quad D_A = 3{,}11$
Come possiamo vedere per immunizzare il portafoglio è necessario una Duration del portafoglio di attività più breve, in particolare avere una Duration dell'attivo maggiore di 3,11 equivale a scommettere su un ribasso dei tassi di interesse, mentre avere una Duration minore equivale a scommettere su un rialzo degli stessi.
Redington(1952), nel suo lavoro sull'applicazione del concetto di Duration alle decisioni di investimento delle compagnie assicurative, ha proposto una regola di immunizzazione secondo cui non solo il valore attuale ma anche la Duration delle attività e delle passività devono essere posti uguali, tuttavia, lo stesso Redington ha notato che per le compagnie assicurative il concetto sarebbe molto complesso nelle sue applicazioni. Anche se bisogna osservare che lo stesso a proposto come misura di Duration la serie di Taylor al secondo grado combinando cosi sia la duration tradizionale che la convessità.
Comunque bisogna ricordare che questa soluzione, almeno in principio, vale solo per il breve periodo, infatti, come abbiamo già detto una variazione del tasso "spot" o il semplice passare del tempo possono influenzare la Duration sia dell'attivo sia del passivo, questo significa che è necessario un continuo riaggiustamento del portafoglio di attività per mantenere lo stato patrimoniale immunizzato.
Quanto frequentemente dovrà essere riaggiustato il portafoglio dipenderà dalla differenza fra i costi di revisione del portafoglio ed i benefici ottenibili da una maggiore immunizzazione.
L'attrazione per l'immunizzazione dai tassi di interesse è maggiore nelle imprese che sono molto esposte ai movimenti dei tassi di interesse, principalmente le istituzioni finanziarie quali banche, imprese d'investimento e compagnie di assicurazione.

La Duration delle polizze vita nel tempo continuo:

Quando calcoliamo la Duration di un'obbligazione raramente viene presa in considerazione la possibilità di fallimento, il che porta ad una errata valutazione dell'elasticità delle passività rispetto ai tassi di interesse.
Inoltre, nel caso delle polizze vita con partecipazione agli utili interviene anche il meccanismo del bonus ad influenzare l'elasticità delle passività.
Il nostro modello ci permette di calcolare l'esatta elasticità tenendo conto sia della posizione corta sulla Put sia della posizione lunga sulla Call.
A questo punto poniamo le seguenti misure di elasticità:

$$\eta_p(t,\tau) = -[1/P(t,\tau)][\partial P(t,\tau)/\partial r_t]$$

$$\eta_A(t,\tau) = -(1/A_t)(\partial A_t/\partial r_t)$$

$$\eta_L(t,\tau) = -(1/L_t)(\partial L_t/\partial r_t)$$

Da cui calcolando le derivate parziali di $P(t,\tau)$, A_t ed L_t , rispetto al tasso "spot" otteniamo:

$$\eta_p(t,\tau) = B(t,\tau)$$

$$\eta_A(t,\tau) = -(\rho\sigma_A/\delta)$$

$$\eta_L(t,\tau) = \eta_p(t,\tau) - (A_t/L_t)[\eta_p(t,\tau) - \eta_A][N(-d_1) + \beta\alpha N(d_3)]$$

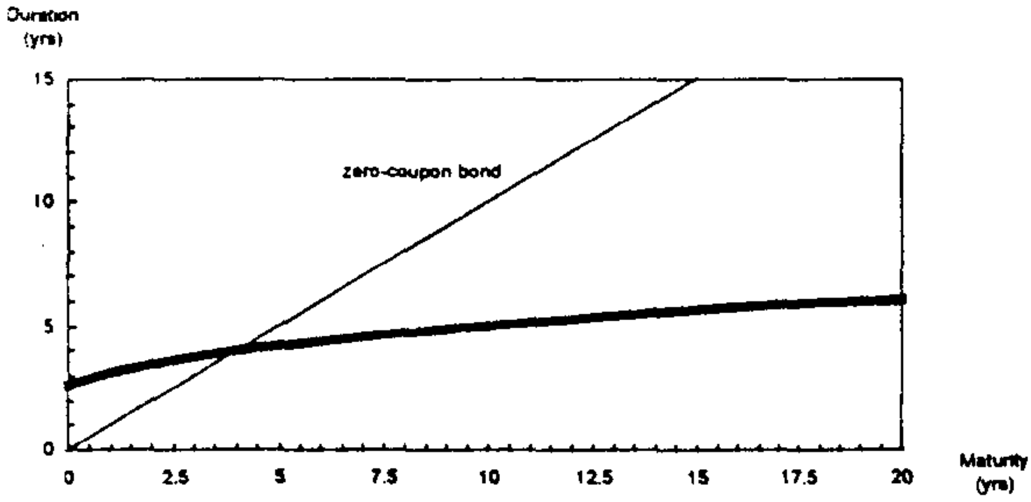
Possiamo notare che la misura di elasticità delle passività proposta approssima l'elasticità delle passività di un modello multiperiodale, mentre, l'elasticità dell'attivo corrisponde al Beta dell'attivo rispetto al tasso d'interesse.
Dall'elasticità delle passività possiamo ricavare molti casi, in particolare se poniamo l'ipotesi che nessun bonus venga distribuito ($\beta = 0$) otteniamo l'elasticità di un'obbligazione di puro sconto,
inoltre se poniamo anche la varianza dell'attivo essere nulla ($\sigma_A= 0$) , l'elasticità delle passività diviene esattamente uguale all'elasticità di un titolo di puro sconto con la stessa data di scadenza.
Come possiamo vedere l'elasticità delle polizze vita con partecipazione agli utili è composta essenzialmente di tre termini, l'elasticità di un titolo di puro sconto privo di rischio, l'inverso del tasso di indebitamento, e la differenza (Gap) fra l'elasticità del titolo di puro e l'elasticità dell'attivo.
Ora possiamo esprimere l'elasticità delle passività in termini di unità di tempo ed ottenere cosi la Duration effettiva (D_L) delle polizze vita con partecipazione agli utili. La Duration può essere vista come la soluzione alla seguente equazione:

$$\eta_L(t,\tau) = \eta_p(D_L)$$

Nel modello di Vasicek(1976) otteniamo la seguente soluzione:

$$D_L = \frac{\ln[1 - a\eta_L(t,\tau)]}{a}$$

Nel nostro modello la Duration di Macaulay delle polizze vita con partecipazione agli utili è esattamente uguale al tempo mancante alla scadenza, dato che non c'è alcun flusso cedolare fino alla data di scadenza.
A questo punto mostreremo la differenza tra la Duration effettiva e la Duration di Macaulay per ogni data di scadenza usando i seguenti valori per i nostri parametri: $\alpha = 0{,}8$ $\delta = 0{,}01$ $\sigma_A = 0{,}2$ $\beta = 0{,}85$ $\rho = -0{,}2$ $A_t = 1$, mentre, " r^* " viene fissato in accordo alla condizione di equilibrio per ogni scadenza.



$\alpha = 0.8,\ \delta = 0.85,\ r_a = 0.1,\ \sigma_A = 0.2,\ \sigma = 0.01, \rho = -0.2$

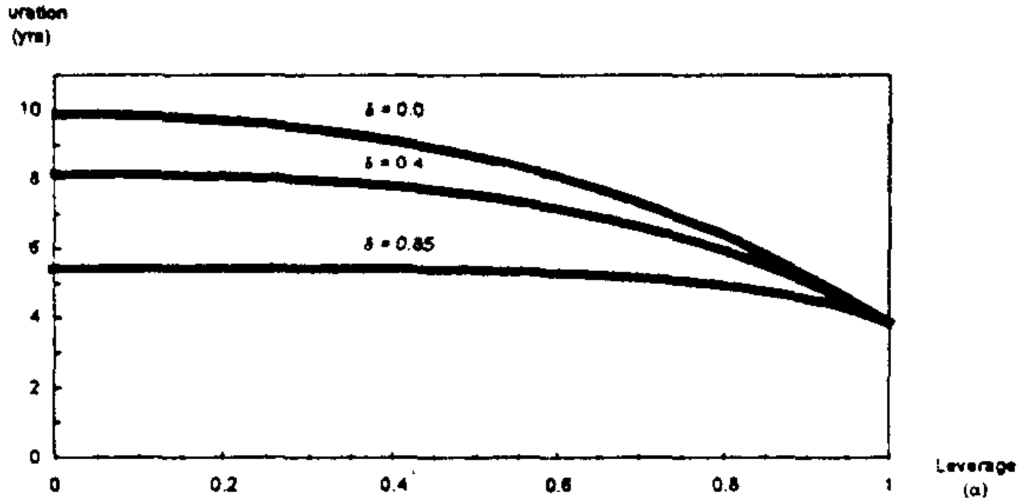
La retta a 45° rappresenta la Duration di Macaulay, o alternativamente, il tempo mancante alla scadenza delle polizze vita con partecipazione agli utili, mentre la curva rappresenta la Duration effettiva delle stesse.
Come possiamo vedere per date di scadenza superiore a 5 anni la Duration effettiva è minore del tempo mancante alla scadenza, ed in particolare ad una data di scadenza di 20 anni corrisponde una Duration effettiva di 6,23 anni.
Questo è dovuto all'effetto della posizione corta sull'opzione Put e della posizione lunga sull'opzione Call, infatti entrambe riducono l'elasticità delle polizze vita con partecipazione agli utili e conseguentemente la Duration effettiva delle stesse.
Tuttavia, per date di scadenza inferiori a cinque anni la Duration effettiva è maggiore del tempo mancante alla scadenza, questo è dovuto al fatto che in caso di correlazione negativa e di breve tempo mancante alla scadenza il "Gap" fra l'elasticità del titolo di puro e l'elasticità dell'attivo diviene negativo, il che implica che la Duration dell'attivo è maggiore del tempo mancante alla scadenza.
Quando il tempo mancante alla scadenza è nullo la Duration effettiva non è nulla, ma bensì uguale a 3 anni, il che appare piuttòsto strano.
Tuttavia, se ricordiamo che la Duration effettiva delle polizze vita con partecipazione agli utili è guidata dalla Duration dell'attivo attraverso il meccanismo del bonus capiamo come questo sia possibile.
Infatti, se consideriamo che il bonus sia nullo la Duration effettiva diviene nulla dato che:

$$\lim_{\tau \to 0} (-d_1) = -\infty \qquad \Rightarrow \qquad N[-\infty] = 0$$

Le compagnie assicurative sovente insistono sul lungo tempo mancante alla scadenza delle polizze vita,il messaggio portato dal nostro modello è piuttòsto diverso:

" breve significa lungo , lungo significa breve "

Concludiamo notando che per una determinata data di scadenza la Duration effettiva è una funzione decrescente del tasso di indebitamento " α ", questo perché per bassi valori dello stesso l'influenza dell'opzione Put viene in parte neutralizzata, e del coefficiente di partecipazione agli utili " β ", sempre perché per bassi valori dello stesso l'influenza dell'opzione Call viene in parte neutralizzata. Ma vediamolo graficamente:



$T = 10, r_0 = 0.1, \sigma_A = 0.2, \sigma = 0.01, \rho = -0.2$

Infatti, per " $\alpha = 0$ " e " $\beta = 0$ " la Duration effettiva è uguale al tempo mancante alla scadenza, mentre, per " α " molto vicino a zero e " $\beta = 0,85$ " , la Duration effettiva è all'incirca il 60% del tempo mancante alla scadenza, o alternativamente, il 60% della Duration delle polizze vita senza bonus (obbligazioni).

Immunization:

Uno dei principali obiettivi dell'asset-liability management è quello di garantire che il capitale proprio sia immune da un inatteso cambiamento nei tassi di interesse di mercato.
Infatti gli azionisti non hanno bisogno di un tale veicolo per speculare sul futuro corso dei tassi di interesse dato che possono farlo in modo più efficiente comprando o vendendo titoli, o alternativamente, comprando o vendendo contratti "futures" sui tassi di interesse.
Una delle ipotesi del nostro modello è che il teorema di Modigliani-Miller sia valido, questo implica che il valore di mercato del capitale proprio è uguale alla differenza fra il valore di mercato dell'attivo e il valore di mercato del passivo, conseguentemente l'elasticità del capitale proprio è direttamente influenzato dall'elasticità dell'attivo, dall'elasticità del passivo e dall'effetto della leva finanziaria, precisamente abbiamo:

$$\eta_A(t,\tau) = (E_t/A_t)\,\eta_E(t,\tau) + (L_t/A_t)\,\eta_L(t,\tau)$$

Da cui:

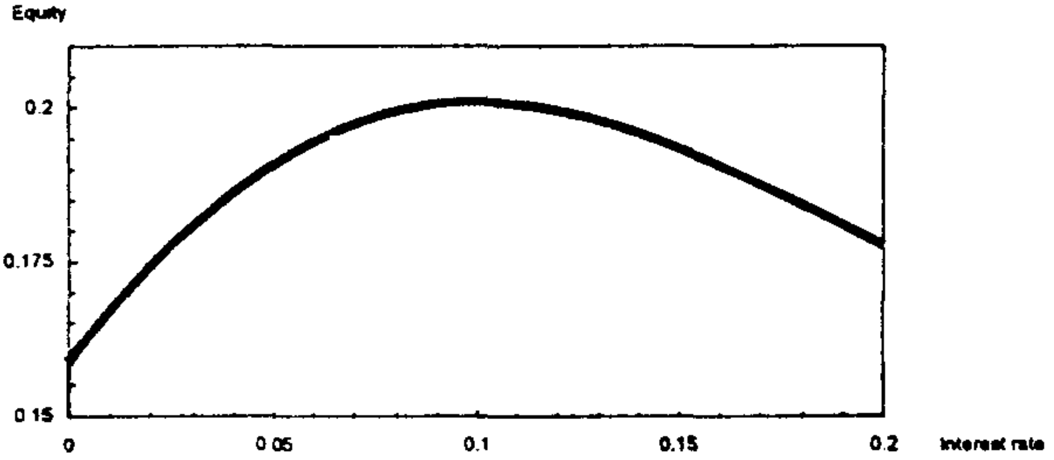
$$\eta_E(t,\tau) = (A_t/E_t)\,\eta_A(t,\tau) - (L_t/E_t)\,\eta_L(t,\tau)$$

Dalle precedenti equazioni possiamo ricavare che l'elasticità del capitale proprio è nulla quando:

$$A_t\,\eta_A(t,\tau) \;=\; L_t\,\eta_L(t,\tau)$$

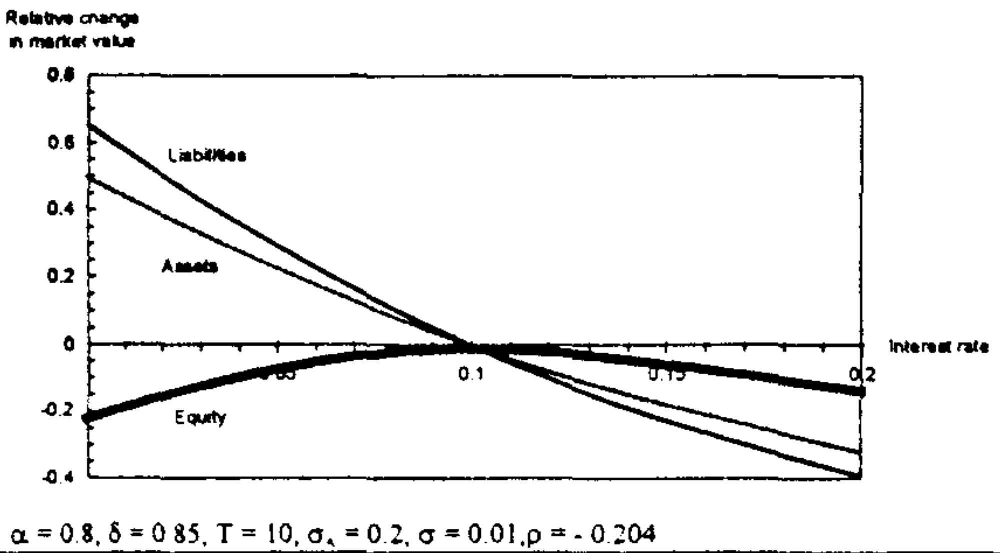
Il che equivale ad uguagliare la variazione relativa del valore di mercato dell'attivo alla variazione relativa del valore di mercato del passivo.
A questo punto possiamo osservare che una variazione dei tassi di interesse influenza sia il valore delle attività sia il valore delle passività, tuttavia, le passività saranno più convesse delle attività, questo è dovuto alla presenza sia dell'opzione Put sia dell'opzione Call, infatti, anche se immaginiamo che l'attivo sia investito in obbligazioni con pari rischio di insolvenza l'effetto della posizione lunga sulla Call renderà comunque le passività più convesse delle attività.
Questo risultato è dovuto al fatto che al crescere (decrescere) dei tassi di interesse il valore dell'attivo diminuisce (aumenta) rendendo l'opzione Put più "in the money" (out of money), il che comporta che il valore dell'opzione aumenta (diminuisce) e cosi facendo amplifica la variazione di valore del titolo di puro sconto privo di rischio.
Stesso discorso può essere fatto per l'opzione Call che al crescere (decrescere) dei tassi di interesse sarà più "out of money" (in the money), il che comporta una diminuzione (aumento) del suo valore.
Tuttavia, bisogna osservare che questa relazione è sicuramente vera solo se noi consideriamo che: $\eta_p(t,\tau) > \eta_A(t,\tau)$, e che il valore totale dei titoli in portafoglio sia minore o uguale a: $L^*P(t,\tau)$, mentre, per valori maggiori non possiamo dire nulla sullo "spread" fra le variazioni relative senza un'implementazione numerica del modello.

Comunque, dati tutti i parametri del modello,se noi calcoliamo il valore di " ρ^* " che rende nulla l'elasticità del capitale proprio " $\eta_E(t,\tau) = 0$ ", dato il tasso "spot" iniziale R(t,t) , ed esso è tale che per " $A_t = 1$ " risulta essere " $\rho^* \leq \alpha$ " , allora otteniamo il seguente prospetto:



$\alpha = 0.8, \delta = 0.85, T = 10, \sigma_A = 0.2, \sigma = 0.01, \rho = -0.204$

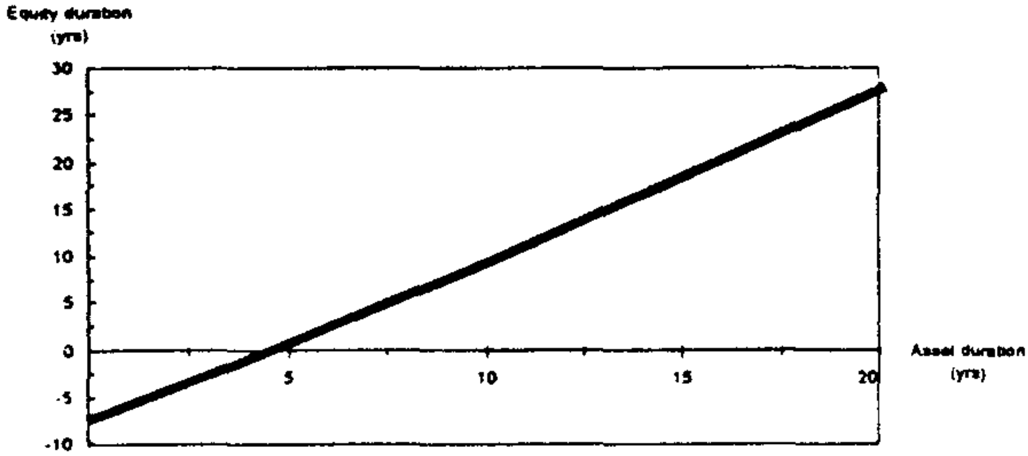
Come possiamo facilmente vedere il capitale proprio equivale ad una posizione corta su uno "straddle" scritto sul tasso "spot", ovviamente il grado di concavità sarà dato dai parametri del modello, mentre il punto di massimo, se poniamo: " $\rho = \rho^*$ ", sarà sempre dato dal valore attuale del capitale proprio " E_t ".
Questo risultato come abbiamo già accennato è dovuto al maggiore grado di convessità delle passività rispetto alle attività, infatti, nella parte crescente della curva abbiamo che: " $A_t\, \eta_A(t,\tau) < L_t\, \eta_L(t,\tau)$ ", mentre, nella parte decrescente abbiamo che: " $A_t\, \eta_A(t,\tau) > L_t\, \eta_L(t,\tau)$ " , ovviamente nel punto di massimo le due grandezze si eguagliano.
Ma possiamo vederlo graficamente ponendo:



$\alpha = 0.8, \delta = 0.85, T = 10, \sigma_A = 0.2, \sigma = 0.01, \rho = -0.204$

Alternativamente, ricordando che il capitale proprio nel nostro modello equivale ad una posizione lunga su un'opzione Call e ad una posizione corta sempre su un'opzione Call, possiamo dire che nella parte crescente prevale l'effetto della posizione lunga, mentre nella parte decrescente prevale l'effetto della posizione corta.
A questo punto possiamo notare che il capitale proprio è immunizzato solo contro piccole variazioni del tasso "spot" iniziale, quindi, data l'ipotesi del nostro modello che il tasso "spot" segue un processo stocastico continuo, possiamo mantenere l'immunizzazione nel continuo variando continuamente il numero (ρ^*) di titoli detenuti in portafoglio man mano che il tasso "spot" cambia.
Tuttavia, se ammettiamo che il tasso "spot" possa avere dei punti di discontinuità con dei salti (Jump-process), l'efficacia dell'immunizzazione dipenderà negativamente dall'ampiezza del salto.
Inoltre, occorre osservare che alcuni parametri del modello vengono stimati sulla base delle preferenze del mercato dei titoli, conseguentemente un mutare delle stesse comporta una variazione della Duration e del valore di " ρ " che mi permette di immunizzare il capitale proprio, tuttavia, per piccoli cambiamenti nelle preferenze gli errori della stima sono trascurabili
A questo punto abbiamo ottenuto una misura dinamica della Duration, date le ipotesi che le contrattazioni avvengano continuamente e che non esistano opportunità di arbitraggio, che ci permette di mantenere l'immunizzazione nel continuo al variare del tasso "spot" e delle preferenze del mercato.
Un modo alternativo per rendere immune il valore del capitale proprio dalle variazioni dei tassi di interesse è quello di assumere una posizione lunga su uno "straggle" scritto sul tasso "spot" in modo tale da compensare la concavità dello stesso.
Tuttavia, come abbiamo già detto il grado di concavità del capitale proprio dipende dai parametri del modello, quindi, un perfetto bilanciamento della concavità tramite l'acquisto di una convessità è possibile solo se abbiamo effettuato una perfetta stima dei parametri.
Comunque bisogna sottolineare che questo tipo di approccio ha il problema di essere soggetto al rischio di un cambiamento nelle preferenze del mercato dei titoli, dato che eventuali mutamenti delle stesse si rifletteranno in modo asimmetrico sul valore dell'attivo e del passivo.
Bisogna osservare che in realtà le compagnie assicurative emettono debito con diverse scadenze, questo comporta che nel nostro modello il capitale proprio diventa un'opzione su un'opzione e cosi via, il che rende molto più complessa l'implementazione di un modello di valutazione.
Una soluzione alternativa consiste nel dividere il problema in tanti sotto problemi, in particolare possiamo cercare di replicare le passività per ogni data di scadenza senza tenere conto dell'effetto congiunto dei titoli detenuti in portafoglio. (single matching).
Concludiamo osservando che porre l'elasticità dell'attivo maggiore di quella che l'immunizzazione del capitale proprio richiede ($\rho > \rho^*$) equivale a scommettere su un ribasso del tasso "spot", viceversa, avere un'elasticità dell'attivo minore ($\rho < \rho^*$) equivale a scommettere su un rialzo dello stesso.

Ma possiamo vederlo anche graficamente se poniamo l'elasticità del capitale proprio in funzione dell'elasticità dell'attivo:



$\alpha = 0.8$, $\delta = 0.85$, $r_0 = 0.1$, $\sigma_A = 0.2$, $\sigma = 0.01$, $T = 10$

Naturalmente l'inclinazione della retta dipenderà dai valori dei parametri del nostro modello.

Conclusione:

Abbiamo sviluppato un modello dove teniamo conto di quattro tipi di rischio: ”il rischio delle attività finaziarie, il rischio dei tassi di interesse, il rischio assicurativo e il rischio di insolvenza”, che è basato sulla valutazione di mercato ed è indipendente dalla funzione di utilità dei risparmiatori.
Il modello ci permette di calcolare il valore delle polizze vita, nonché, l’adeguato livello di partecipazione agli utili (tasso di retrocessione) e del tasso di rendimento garantito data l’ipotesi di mercati efficienti con possibilità di contrattazione continua e privi di opportunità di arbitraggio.
Di conseguenza nel nostro modello le compagnie assicurative sono “ price-taker ” sia rispetto al coefficiente di partecipazione sia rispetto al tasso di rendimento garantito.
Abbiamo ottenuto anche una più accurata misura dell’elasticità e della Duration delle passività delle compagnie assicurative mostrando che sono significativamente diverse dalla Duration di Macaulay.
Inoltre abbiamo dimostrato che le polizze vita con partecipazione agli utili comportano che il capitale proprio equivale ad una posizione corta su uno “straddle” scritto sul tasso “spot”, e che è possibile mantenere l’immunizzazione dinamicamente tramite l’acquisto o la vendita dei titoli detenuti in portafoglio.
Bisogna osservare che il nostro modello si basa sull’ipotesi che il teorema di Modigliani-Miller sia valido, questo è particolarmente vero per tutte le istituzioni finanziarie, le quali hanno un’attivo composto principalmente da attività finanziarie facilmente liquidabili, il che riduce al minimo gli eventuali costi di insolvenza che si possono presentare.
Inoltre, le asimmetrie informative sono ridotte al minimo dato che le attività detenute in portafoglio vengono quotate giornalmente nei mercati finanziari, e questo rende il portafoglio di attività finanziarie molto più trasparente di quello di qualsiasi impresa che opera in attività reali.
Oltre tutto un portafoglio finanziario può essere perfettamente replicabile ragion per cui data l’ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio il valore dell’impresa deve essere esattamente uguale al valore totale delle attività finanziarie detenute in portafoglio.
Concludendo possiamo dire che il nostro modello ben si presta alla valutazione di tutte le istituzioni finanziarie soggette al rischio di insolvenza, ed in particolar modo può essere usato per il ramo vita delle compagnie assicurative.

Bibliografia

Babbel,D.F. : "Economic valuation models for insurers "
Wharton Financial Institutions Center, Working Paper 97-44, (1997)

Babbel, Santomero: " Risk management by insurers: an analiysis of the process, in investment management for insurers "
Fabozzi Associates, New Hope, Pennsylvania(1999)

Babbel,Stricker,Vanderhoff :(oct.1990) " Performance measurement for insurers "
Financial Institution Research, Goldman Sachs

Briys, Husson: " Assurance Dommages: Haut-il s'inquièter des deficits techniques " HEC foundation (University of France) (1984)

Briys, De Varenne: " Insurance " (2001)
John Wiley & Sons, LTD.(New York)

Briys, De Varenne: " Life insurance in a contingent claim framework: pricing and regulatory implications "
The Geneva papers on risk and insurance theory
(1994) vol.19, n°1,pag.53-72

Briys, De Varenne: " On the risk of insurance liabilities: Debunking some common pitfalls "
Journal of risk and insurance, (1997)vol.64, n°4, pag.673-694

Hicks,J. R. : " Value and Capital "(1939) Oxford: Clarendon Press.

Ingersoll, Skelton,Weil: " Duration forty years later "
Journal of financial and quantitative analysis (nov.1978)

Leibowitz, M. L. : " Specialized fixed income security strategies "
Altman,ed., Financial handbook, 5th ed.
New York, Wiley, (1981), section 19.

Macaulay, F. R. : " Some theoretical problems suggested by the movements of interest rates "
National Bureau of Economic Research, New York (1938)

Redington, F. M. : " Review of the principles of life office valuations "
Journal of the Institute of Actuaries (1952)
Vol.78, part.3, n°350, pag.286-340

Appendice

Introduzione:

Nel 1827, il botanico Robert Brown fu il primo ad osservare e descrivere il movimento di una piccola particella sospesa in un liquido risultante dagli impatti successivi e casuali delle vicine particelle ed a notare che la varianza cresceva nel tempo, da cui il termine moto Browniano.
Nel 1905, Albert Einstein ne propose una teoria matematica che fu sviluppata e presentata in modo più rigorosa da Norbert Wiener nel 1923.
Il primo modello stocastico dei prezzi facente uso di un moto di Brown fu sviluppato nel 1900 da Louis Bachelier nella sua straordinaria tesi alla Sorbone di Parigi, il quale ha modellato i prezzi nel continuo in modo tale che una qualche incertezza sull'immediato futuro fosse preservata.
Questo processo solitamente chiamato Martingala ha l'inconveniente di permettere ai prezzi di assumere anche valori negativi ma come vedremo questo problema è facilmente risolvibile.
Infatti, se consideriamo che essa modelli il tasso di rendimento piuttòsto che i cambiamenti aritmetici dei prezzi otteniamo un modello stocastico continuo che segue una distribuzione lognormale su ogni intervallo di tempo finito conosciuto con il nome di processo geometrico di Brown.
Un'altra caratteristica indesiderabile è data dal fatto che il processo non è derivabile rispetto al tempo e quindi non può essere manipolato con le usuali regole di calcolo, ma bensì dovremo fare uso del lemma di Ito, il quale ci permette di differenziare ed integrare le funzioni di un processo stocastico continuo.
Benché molti autori abbiano dato delle formali assunzioni matematiche ad un'equazione stocastica generalizzata, noi mostreremo come possa essere derivata dal limite continuo di una variabile casuale discreta cercando di rendere esplicite le assunzioni economiche implicite in quelle matematiche. La prima implicazione economica è che le contrattazioni avvengono continuamente nel tempo, il che può sembrare un'astrazione dalla realtà fisica, tuttavia, se l'ampiezzà dell'intervallo di tempo è molto corta o indeterminatamente piccola allora la soluzione continua è una buona approssimazione della soluzione discreta.

Martingala:

Le influenze che possono determinare fluttuazioni nel mercato sono innumerevoli, eventi passati, presenti e futuri, i quali sono riflessi nel prezzo di mercato.
Le fluttuazioni correnti sono funzione non solo delle precedenti fluttuazioni ma anche degli orientamenti correnti degli agenti, che a loro volta dipendono da un' infinita di fattori tali da rendere impossibile una loro predizione matematica.
Tuttavia possiamo notare che gli speculatori che operano nel mercato fanno uso di due tipi di probabilità:

1) Probabilità matematica determinabile a priori (oggettiva)
2) Probabilità dipendente dagli eventi futuri, impossibile da predire matematicamente (soggettiva)

L'ultima è la probabilità che gli speculatori tentano di predire.
In ogni istante i venditori credono in un calo del prezzo mentre i compratori in una crescita dello stesso, ne consegue chel'aggregato degli speculatori non crede né in una risalita né in una caduta del mercato poiché per ogni prezzo quotato ci sono esattamente tanti compratori quanti sono i venditori.
Ma se il mercato non crede né in una crescita né in una calo del prezzo corrente possiamo supporre una qualche fluttuazione di una data ampiezza a cui diamo una probabilità a priori.
Formalmente abbiamo nel discreto:

$$X(\tau) = X(o) + \varepsilon(\tau)$$

Dove: $\varepsilon(\tau)$ è una variabile casuale distribuita normalmente con media zero e varianza $\sigma^2(\tau)$ tale che:
$Cov(\varepsilon_\tau\, \varepsilon_S) = 0 \quad \forall \quad \tau \neq s$, il processo su ogni intervallo finito è indipendente da ogni altro.
Da cui notiamo che il valore atteso condizionato è:

$$E[X(\tau) \mid X(o)] = X(o) \qquad \forall \qquad \tau > 0$$

Questo è quello che viene definito Martingala e la sua interpretazione è abbastanza semplice, il valore atteso condizionato non viene influenzato né dai passati valori né da ogni altra corrente informazione, ma dipende solo dal valore corrente del prezzo.
Da un più attento esame possiamo notare che la Martingala è equivalente ad ipotizzare un mercato efficiente in cui tutte le informazioni disponibili sul passato, presente e futuro, sono incorporate velocemente nel prezzo corrente, ne consegue che i prezzi passati non hanno alcun valore previsionale, infatti, se cosi non fosse gli speculatori potrebbero battere il mercato tramite l'analisi tecnica delle serie storiche.
Si parla di Supermartingala quando:

$$E[X(\tau) \mid X(o)] \leq X(o)$$

Mentre abbiamo un Submartingala quando:

$$E[X(\tau) \mid X(o)] \geq X(o)$$

Detto anche con "drift" dato che: $E[\varepsilon(\tau)] = \mu(\tau)$.

A questo punto dobbiamo costruire un processo nel continuo come limite del processo discreto che abbia le stesse caratteristiche e soprattutto che sia indipendente dall'ampiezza dell'intervallo di tempo Δt.
Prendiamo un intervallo di tempo $[0, \tau]$ e lo dividiamo in " n " intervalli della stessa ampiezza otteniamo che: $\Delta t = (\tau / n)$
Da questo possiamo riscrivere il modello discreto nel seguente modo:

$$X(\tau) - X(o) = \sum_{K=0}^{n-1} X(t_k + \Delta t) - X(t_k) \tag{1.1}$$

Dove:

$$X(t_k + \Delta t) - X(t_k) = X(t_k+1) - X(t_k) - E_{t_k}[X(t_k+1) - X(t_k)] = \varepsilon(k)$$

$$E_{t_k}[X(t_k + \Delta t) - X(t_k)] = 0 \quad \text{per costruzione.}$$

Poniamo:

$$X(t_k+\Delta t) - X(t_k) = \frac{\sigma_k \, \varepsilon(k) \sqrt{\Delta t}}{\sqrt{(\sigma_k^2 \Delta t)}} \tag{1.2}$$

Dove:

$$\sigma_k^2 = E_{k-1}[\varepsilon^2(k)]/\Delta t$$

Da cui possiamo notare che per " $n \to \infty$ " e " Δt " che diventa infinitamente piccolo abbiamo, per il teorema del limite centrale, che:

$$dX(t) = \sigma(t)\, N[0,1]\sqrt{dt}$$

Dove:

$$\sigma(t)^2 = \sigma(\tau)^2/\tau \qquad \text{è la varianza istantanea.}$$

E che possiamo anche scrivere nel seguente modo:

$$dX(t) = \sigma(t)\, dw(t)$$

dove:

$$dw(t) = N[0,1]\sqrt{dt} \qquad \text{“processo di Wiener”}$$

da cui :

$$\Delta w(t) = N[0,1]\sqrt{\Delta t}$$

che è equivalente a :

$$\int_o^\tau dw(t) = w(\tau) - w(o) = N[0,1]\sqrt{(\tau - o)}$$

A questo punto occorre osservare che il processo di Wiener non è derivabile rispetto al tempo dato che la derivata parziale diventa infinita come " Δt " tende a zero:

$$\Delta w/\Delta t = N[0,1](\Delta t^{-1/2})$$

Notiamo che la 1.2 diventa al limite l'equazione differenziale stocastica:

$$dX(t) = \sigma(t)dw(t)$$
$$X(o) = a$$

Mentre la 1.1 diventa:

$$X(\tau) = X(o) + \int_0^\tau \sigma(t)\, dw(t)$$

Ricordiamo che l'integrale non è altro che una somma, nel senso che verrà precisato dal paragrafo successivo.
Notiamo le caratteristiche del differenziale stocastico:

$$E[dX] = 0$$
$$Var(dX) = \sigma^2(t)dt$$

La varianza cresce nel tempo mentre il valore atteso è nullo.
Inoltre possiamo notare che abbiamo conservato le caratteristiche del modello discreto:

$$E[X(\tau)] = X(o)$$
$$Var[X(\tau)] = \sigma^2(t)\tau = \sigma^2(\tau)$$

Equivalentemente avremo per un Submartingale la seguente equazione differenziale stocastica:

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dw(t)$$
$$X(t) = X(o)$$

Dove:

$$\mu(t) = \mu(\tau)/\tau \qquad \text{è la media istantanea.}$$

Che possiamo anche scrivere nel seguente modo:

$$X(\tau) = X(t) + \int_t^\tau \mu(s)\, ds + \int_t^\tau \sigma(s)\, dw(s)$$

Questa volta abbiamo fissato due punti nel tempo: $t < \tau$
Infatti, se pensiamo che il tempo è infinito ci rendiamo facilmente conto che parliamo sempre di una spezzata dello stesso, dove il momento iniziale coincide con ciò che noi consideriamo il tempo zero.

Notiamo che :

$$E[dX] = \mu(t)dt$$
$$Var[dX] = \sigma^2(t)dt$$

Da cui:

$$E[X(\tau)] = X(o) + \mu(t)\tau \; = X(o) + \mu(\tau)$$

$$Var[X(\tau)] = \sigma^2(t)\tau = \sigma^2(\tau)$$

Processo di Wiener:

Un processo stocastico “w(t)” viene chiamato un processo di Wiener se le seguenti condizioni valgono:

1) $w(o) = 0$
2) Il processo ” w ” ha incrementi indipendenti, se: $r < s \leq t < u$, abbiamo che $w(u) - w(t)$ ed $w(s) - w(u)$ sono variabili stocastiche indipendenti.
3) Per $s < t$ la variabile stocastica $w(t) - w(s)$ ha la distribuzione gaussiana $N[0 , t\text{-}s]$.
4) w(t) ha una traiettoria continua nel tempo.

Ricordando che il processo di Wiener non è differenziabile rispetto al tempo e quindi neanche integrabile, occorre definire il seguente integrale stocastico:

$$\int_t^{\tau} g(s)\, dw(s)$$

Infatti, anche se w(t) è continuo, esso è comunque funzione di una variazione infinita, e questo non ci consente di calcolare l’integrale separatamente per ogni singola traiettoria di w(t).
Tuttavia, possiamo dare una definizione generale di un integrale dalla forma:

$$\int_t^{\tau} g(s)\, dw(s)$$

per una grande classe di processi “g(s)”, chiamato integrale di Ito.
A questo proposito consideriamo come processo stocastico ”g(s)” e come dato il processo di Wiener ” w ” .
Per garantire l’esistenza dell’integrale stocastico dobbiamo imporre alcune condizioni di integrabilità su “g(s)” :

1) $\int_t^{\tau} E[g^2(s)]\, ds < \infty$
2) Il processo “g(s)” è adattato ad “ $\Im_{w,\tau}$ “, che denota l’informazione generata da “w(s)” nell’intervallo $[\, t , \tau\,]$.

Se supponiamo dapprima che “g(s)” sia semplice, tale che sia costante in ogni sottointervallo $[\, t_k , t_{k+1}\,]$ di una partizione dell’intervallo $[\, t , \tau\,]$, possiamo definire l’integrale stocastico nel seguente modo:

$$\int_t^{\tau} g(s)\, dw(s) = \sum_{k=0}^{n-1} g(t_k)\, [w(t_{k+1}) - w(t_k)]$$

A questo punto valgono le seguenti relazioni:

$$E\Big[\int g(s)\, dw(s) \Big] = 0$$

$$E\Big[\Big(\int g(s)dw(s)\Big)^2\Big] = \int E[g^2(s)]ds$$

$E[(\int dw)^2] = (\tau - t)$, che è equivalente a scrivere: $[dw]^2 \sim dt$

Comunque, se “g(s)” non è semplice lo possiamo approssimare con funzioni semplici i cui integrali convergono in probabilità.

Lemma di Ito:

Supponiamo di avere un processo stocastico $S(t)$ rappresentato dal seguente differenziale stocastico:

$$dS(t) = \alpha(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dw(t)$$
$$S(t) = S(o)$$

A questo punto definiamo un nuovo processo:

$$Z(t) = F(S(t),t)$$

possiamo chiederci a cosa somiglia la dinamica del processo $Z(t)$, ed a prima apparenza può sembrare abbastanza ovviò che eccetto per il caso in cui $F(S(t),t)$ è lineare in $S(t)$, $Z(t)$ non preserverà la stessa struttura del differenziale stocastico $dS(t)$.
Tuttavia per il modello nel tempo continuo $Z(t)$ continua a preservare la stessa struttura del differenziale stocastico $dS(t)$ e la sua forma è data dal differenziale stocastico $dF(S(t),t)$ il cui valore viene dato esplicitamente dal lemma di Ito.
Sebbene Ito abbia dato una formale teorizzazione del problema, noi lo deriveremo facendo uso delle serie di Taylor, le quali ci consentono di calcolare il valore di una funzione nell' intorno di un punto del suo dominio.
Se noi applichiamo la serie di Taylor abbiamo che:

$$dF(s,t) = (\partial F/\partial t)dt + (\partial F/\partial S)dS + (\tfrac{1}{2}) \big[(\partial^2 F/\partial S^2)(dS)^2 +$$
$$+ (\partial^2 F/\partial t^2)(dt)^2 + 2(\partial^2 F/\partial S\partial t)dtdS\big] + Q$$

Notiamo che:

$$dS^2 = \alpha^2 S(t)^2 dt^2 + 2\alpha\sigma S(t)^2 dt\, dw + \sigma^2 S(t)^2 dw^2$$

Ma dato che:

$$dw^2 \sim dt \Rightarrow dw \sim \sqrt{dt}$$

Abbiamo:

$$dS^2 = \alpha^2 S(t)^2 dt^2 + 2\alpha\sigma S(t)^2 dt^{3/2} + \sigma^2 S(t)^2 dt$$

ed:

$$dSdt = \alpha S(t)dt^2 + \sigma S(t)dt^{3/2}$$

A questo punto possiamo facilmente notare che tutti gli ordini superiori di " dt " convergono più velocemente a zero, compreso il termine di resto " Q " , per cui otteniamo:

$$dF(s,t) = (\partial F/\partial t)dt + (\partial F/\partial S)dS + \tfrac{1}{2} (\partial^2 F/\partial S^2)\sigma^2 S(t)^2 dt$$

ed infine sostituendo " dS " abbiamo:

$$dF(s,t) = [(\partial F/\partial t) + (\partial F/\partial S)\alpha S(t) + \tfrac{1}{2} (\partial^2 F/\partial S^2)\sigma^2 S(t)^2]\, dt + (\partial F/\partial S)\sigma S(t)\, dw(t)$$

Questo risultato è conosciuto come il lemma di Ito.
Da cui è facile ricavare che:

$$F(S(\tau),\tau) - F(S(t),t) = \int_t^\tau [(\partial F/\partial t) + \alpha S(t)(\partial F/\partial S) + (\tfrac{1}{2})\sigma^2 S(t)^2(\partial^2 F/\partial S^2)]\, ds + \int_t^\tau \sigma S(t)(\partial F/\partial S)\, dw(s)$$

Processo geometrico di Brown:

Come già accennato il Martingale presenta lo spiacevole inconveniente di permettere ai prezzi di assumere anche valori negativi.
Tuttavia, è possibile superare questo problema semplicemente ipotizzando che la Martingala modelli il tasso di rendimento piuttòsto che i cambiamenti aritmetici del prezzo.
Di conseguenza avremo un processo stocastico continuo, detto processo geometrico di Brown, rappresentato dalla seguente equazione differenziale stocastica:

$$dS(t)/S(t) = \alpha dt + \sigma dw(t)$$
$$S(t) = S(o)$$

Dove:

α : è il tasso di rendimento istantaneo.
σ^2 : è la varianza istantanea del tasso di rendimento.

A questo punto cerchiamo di investigare se esiste un processo S* che soddisfi l'equazione differenziale stocastica.
Il metodo standard per provare l'esistenza di una soluzione ad un'equazione differenziale stocastica è costruito su uno schema iterativo alla Cauchy-Picard.
L'idea è di definire una sequenza di processi stocastici $X_1, X_2, \ldots X_n$ daccordo con la precedente definizione, fatto questo ci si aspetta che la sequenza $\{X\}_{n=\infty}$ converga a qualche processo limite S* soluzione dell'equazione differenziale stocastica.
Tuttavia fare questo è estremamente complicato ed è raro che uno possa risolvere un'equazione differenziale stocastica in maniera esplicita.
Comunque un processo geometrico di Brown ha delle caratteristiche tali da permettere di ottenere la soluzione facendo uso del lemma di Ito.
Infatti:

$$\int_t^\tau dS(t)/S(t) = \alpha(\tau-t) + \sigma[w(\tau) - w(t)]$$

Dove:

$$w(t) = 0$$
$$w(\tau) = N[0,1]\sqrt{(\tau-t)}$$

Da cui si intuisce che S(t) è una funzione esponenziale del tempo,questo ci consente di valutare tramite il lemma di Ito l'integrale nel lato sinistro dell'equazione.
Poniamo:

$$F(S) = \ln S(t) \qquad dF(S) = \ln[dS(t)]$$

da cui:

$$dF(S) = (1/S)dS + (1/2)(-1/S^2)(dS)^2$$

dato che:

$$\partial F/\partial t = 0$$

e sostituendo per dS(t) abbiamo:

$$dF(S) = (\alpha - ½\, \sigma^2)dt + \sigma dw(t)$$

da cui:

$$F(S(\tau)) = F(S(t)) + \int_t^\tau dF(S)$$

sostituendo:

$$\ln S(\tau) = \ln S(t) + (\alpha - ½\, \sigma^2)(\tau\text{-}t) + \sigma W(\tau)$$

da cui risolvendo per " S " abbiamo:

$$\ln[S(\tau)/S(t)] = (\alpha - ½\, \sigma^2)(\tau\text{-}t) + \sigma W(\tau)$$

ed infine otteniamo la seguente soluzione:

$$S(\tau) = S(t) \exp[(\alpha - ½\, \sigma^2)(\tau\text{-}t) + \sigma\, W(\tau)]$$

A questo punto notiamo che:

$$S(\tau)/S(t) = \exp(y)$$

$$\ln[S(\tau)/S(t)] = y$$

dove:

$$y = N[(\alpha - ½\sigma^2)(\tau\text{-}t)\ ,\sigma^2(\tau\text{-}t)]$$

Da cui possiamo dedurre che i cambiamenti di $\Delta S(t)$ hanno una distribuzione log-normale.

Infine, concludiamo osservando che:

$$E[S(\tau)] = S(t) \exp[\alpha(\tau\text{-}t)]$$

Dato che se non applichiamo il Lemma di Ito il valore atteso del processo geometrico di Brown è dato da:

$$E[S(\tau)] = S(t) \exp[\alpha(\tau\text{-}t) + ½\sigma^2(\tau\text{-}t)]$$

Mentre abbiamo:

$$Var[S(\tau)] = S(t)^2 \exp 2\alpha(\tau\text{-}t)\ \{[\exp \sigma^2(\tau\text{-}t)] - 1\}$$

Feynman-Kaç:

In questo paragrafo esamineremo le connessioni che esistono tra un'equazione differenziale stocastica ed alcune equazioni differenziali parziali paraboliche.
Consideriamo il seguente problema parabolico solitamente chiamato problema di Cauchy:

$$\partial F/\partial t + \mu(t)(\partial F/\partial S) + ½\, \sigma(t)(\partial^2 F/\partial S^2) = 0$$

$$F(S(\tau),\tau) = \Phi[S(\tau)]$$

Dove:

$$dS(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dw(t)$$
$$S(t) = S(o)$$

A questo punto il nostro interesse è trovare una formula stocastica rappresentativa che ci dia la soluzione in termini della soluzione del differenziale stocastico che gli è associato.
A questo proposito fissiamo un punto nel tempo " t " ed un punto nello spazio S(o) e definiamo il processo stocastico $S(\tau)$ nell'intervallo $[\, t\,,\, \tau\,]$ come soluzione dell'equazione differenziale stocastica.
Applicando il lemma di Ito al processo F(s,t) abbiamo:

$$F(S(\tau),\tau) = F(S(t),t) + \int_t^\tau [\partial F/\partial t + \mu(\partial F/\partial S) + ½\, \sigma^2(\partial F/\partial S)]ds + \int_t^\tau \sigma(\partial F/\partial S)\, dw(s)$$

Poiché per assunzione F(s,t) realmente soddisfa l'equazione differenziale parziale ne consegue che il primo integrale si annulla.
Se l'integrale stocastico è sufficientemente integrabile e ne prendiamo il valore atteso anche il secondo integrale si annulla lasciandoci con la seguente formula:

$$F(S(t),t) = E_{S(o),t}\{\Phi[S(\tau)]\}$$

Cosi abbiamo provato l'esistenza di una formula stocastica rappresentativa della soluzione del problema per un dato S(o) = S(t).
Tuttavia, per ottenere questo risultato abbiamo bisogno delle assunzioni di integrabilità dell'integrale stocastico, infatti, in generale un problema parabolico di questo tipo avrà infinite soluzioni, fra le quali comunque questa resta senz'altro la migliore.
A questo punto è interessante notare come il seguente problema parabolico possa essere ricondotto a quello appena visto facendo uso della tecnica del fattore integrante, la quale ci permette di moltiplicare l'intera equazione differenziale per "exp–[r(t-τ)] " e di considerare il processo:

$$Z(S(t),t) = F(S(t),t)\exp-[r(t-\tau)]$$

Di seguito abbiamo l’equazione differenziale ordinaria sottoposta a vincolo che dobbiamo cercare di risolvere.

$$\partial F/\partial t + \mu(t)(\partial F/\partial S) + ½\,\sigma(t)(\partial F/\partial S) - rF(S(t),t) = 0$$

$$F(S(\tau),\tau) = \Phi[S(\tau)]$$

Dove S(t) soddisfa la seguente equazione differenziale stocastica:

$$dS(t) = \mu(t)dt + \sigma dw(t)$$
$$S(o) = S(t)$$

Per definizione abbiamo: $F(S(t),t) = Z(S(t),t)\exp[r(t-\tau)]$, svolgendo le derivate parziali otteniamo:

$$(r)\exp[r(t-\tau)]Z(t) + \exp[r(t-\tau)](\partial Z/\partial t) + \mu\exp[r(t-\tau)](\partial Z/\partial S) +$$
$$+ ½\,\sigma^2\exp[r(t-\tau)](\partial^2 Z/\partial S^2) - (r)\exp[r(t-\tau)]Z(t) = 0$$

$$Z(S(\tau),\tau) = \Phi[S(\tau)]$$

Che semplificando diviene:

$$\partial Z/\partial t + \mu(\partial Z/\partial S) + ½\,\sigma^2(\partial^2 Z/\partial S^2) = 0$$

$$Z(S(\tau),\tau) = \Phi[S(\tau)]$$

Da cui otteniamo facilmente:

$$Z(S(t),t) = E\{\Phi[S(\tau)]\}$$

Ed infine risolvendo per $F(S(t),t)$ otteniamo la seguente soluzione:

$$F(S(t),t) = E\{\Phi[S(\tau)]\}\exp[r(t-\tau)] = E\{\Phi[S(\tau)]\}\exp -[r(\tau-t)]$$

Bibliografia:

Ito, Mckean : “ Diffusion processes and their sample paths ”
New York: Accademic Press,1964

Mckean : “ Stochastic Differential Equations ”
New York: Accademic Press,1969

Arnold : “ Stochastic Differential Equations ”
New York: John Wiley,1974

Øksendal,B. : “ Stochastic Differential Equations ” (4^{th} edn)
Springer Verlag,Berlin Heidelberg, (1995)

Louis Bachelier “ Theory of Speculation ” (1900), ristampato in:
Cootner “ the random charter of stock market prices ”
Cambridge, Mass, MIT. (1964)

Malliaris,A.G. : “ Ito’s calculus in financial decision making ”
S.I.A.M. review, Vol.25 n° 4 (October1983)

Malliaris,Brock : “ Stochastic Methods in Economics and Finance ”
North-Holland,(1982)

Merton,R. : “ On the mathematics and economics assumptions of continuous-time Models ” Massachusetts Institute of Technology (1982)