Some Trends in Research in Mathematical Economics

Kantorovich, Leonid and Katyshev, Pavel and Kiruta, Alexander and Polterovich, Victor

1982

УДК 519.86

О НЕКОТОРЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ ИССЛЕДОВАНИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКЕ

Л. В. Канторович, П. К. Катышев, А. Я. Кирута, В. М. Полтерович

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Интенсивное развитие математических методов исследования плановой экономики началось в Советском Союзе около двадцати лет назад [21, 22] (разумеется, оно опиралось также на более ранние советские и зарубежные разработки). Новые методы позволили использовать вычислительную технику в экономическом анализе и, что, быть может, более важно, способствовали формированию концепции оптимального планирования, ставшей органической частью советской экономической науки и оказавшей значительное влияние на практику хозяйствования.

С другой стороны, математические методы, развитие которых стимулировалось экономическими задачами, существенно обогатили прикладную математику, ориентированную ранее на решение вопросов естествознания и техники. Новый аппарат естественно вписался в общую структуру математической науки, нередко способствовал лучшему пониманию ее внутренних проблем. Сфера его приложений отнюдь не исчерпывается задачами экономического характера; автоматическое регулирование и математическая биология могут, среди прочих, служить примерами областей, где он применяется с успехом.

Несмотря на постоянное совершенствование математического аппарата экономики, многие экономические явления не поддаются моделированию современными средствами. Это делает актуальным дальнейшую разработку ряда математических направлений, порожденных экономической проблематикой.

При изучении микроэкономических моделей используется разнообразный математический инструментарий (теория экстремальных задач, случайные процессы, качественная теория дифференциальных уравнений, дифференциальная топология и т. д.). Особенно широко применяется выпуклый анализ. За последние годы здесь получен ряд новых результатов, приведших к созданию общей теории субдифференцирования нелинейных операторов. Систематическому изложению этой теории и некоторым ее приложениям посвящена статья А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе, помещаемая в настоящем сборнике

Значительная часть математико-экономических исследований группируется вокруг двух фундаментальных тем: экономическая динамика и экономическое равновесие.

Типичная модель экономической динамики (функционирующая в дискретном времени) задается так называемым технологическим отображением, сопоставляющим каждому состоянию экономики в момент t некоторое подмножество ее состояний в момент $t+1$. Итерируя технологическое отображение, получаем совокупность допустимых траекторий развития. Среди них тем или иным способом выделяются оптимальные траектории, исследование которых при экономически осмысленных предположениях и составляет предмет экономической динамики. Один из типичных и практически важных результатов устанавливает возможность приближенной замены статической задачи планирования гораздо более простой динамической задачей. Поток работ по данной проблематике систематизирован в статье А. М. Рубинова, публикуемой в настоящем томе.

Теория экономического равновесия первоначально предназначалась для объяснения процессов совершенной конкуренции. Однако впоследствии была осознана важность равновесного подхода для теории оптимального планирования (по этому поводу см., например, [13, 28, 33]).

Типичная модель равновесия включает множество участников (возможно, бесконечное); поведение каждого из них описывается некоторой экстремальной задачей, зависящей как от параметра от вектора цен, единого для всей системы. В состоянии равновесия цены должны быть выбраны так, чтобы нашлись решения экстремальных задач (векторы спроса — предложения), удовлетворяющие условию сбалансированности. Проблема существования равновесия, казалось бы, хорошо разработанная, в недавнее время вновь привлекла внимание специалистов. Было обнаружено, что традиционные условия ненасыщаемости, полноты и транзитивности предпочтений участников можно отбросить. Разнообразие моделей сделало актуальным унификацию и обобщение многочисленных теорем существования. В настоящем сборнике публикуется статья В. Л. Макарова, содержащая обзор результатов, полученных в этом направлении. Здесь же затронут вопрос об оптимальности равновесия.

В статье В. М. Полтеровича и В. А. Спивака излагаются факты, касающиеся структуры множества равновесных состояний, реакции равновесных систем на возмущения параметров, устойчивости равновесия (в разных смыслах). Из многих результатов по этим проблемам авторы отобрали лишь те, которые связаны с условием валовой заменимости (неубывание спроса на i-ый продукт по цене j-го при $i \neq j$). Недавно была предложена более общая формулировка этого довольно ограничительного, но традиционного для математической экономики предположения. Рассматриваемые в статье методы позволяют детально исследовать важный класс равновесных моделей, включающий линейные модели обмена.

В потоке математико-экономических работ, не охваченных четырьмя публикуемыми ниже обзорами, хотелось бы выделить три направления, развитие которых представляется особенно важным. Первое из них — теория полезности — закладывает фундамент математико-экономических построений. С его развитием в значительной степени связаны надежды на преодоление информационных трудностей, нередко возникающих при попытках практического применения результатов моделирования.

Второе направление — вероятностные микроэкономические модели — переживает период бурного развития. Использование теоретико-вероятностных методов явилось одним из важнейших факторов, определявших прогресс математической экономики в истекшее десятилетие.

Третье направление, возникшее менее десяти лет назад, касается глубинных оснований математической микроэкономики и уже привело к существенному обогащению ее проблематики. Речь идет о теории функционирования экономических систем, не предполагающей абсолютной гибкости цен. Такие понятия как дефицит, схема рационирования, эффективный спрос стали предметом точного анализа в рамках нового подхода.

Объем настоящей статьи не позволяет подробно остановиться на результатах, полученных в указанных трех направлениях. Ниже будет упомянута лишь небольшая часть публикаций и даны лишь очень краткие комментарии.

§ 2. ВЫБОР, ПРЕДПОЧТЕНИЕ, ПОЛЕЗНОСТЬ

Теория полезности — это теория численных представлений (включая оценивание и измерение) мотивов, целей, или побудительных причин, определяющих выбор среди возможных альтернатив.

Общее дескриптивное представление о выборе решений дает понятие пространства выбора (см. [62, 73]): это тройка $(X, \mathscr{B}, C)$, в которой X — множество всех альтернатив, $\mathscr{B}$ — семейство подмножеств X, описывающее различные возможные ограничения на выбор (например, в теории потребительского спроса $\mathscr{B}$ — это семейство бюджетных множеств, соответствующих различным ценам и доходам), а C — функция выбора, ставящая в соответствие любому $B \in \mathscr{B}$ его подмножество $C(B) \subseteq B$.

Вещественнозначная функция $u: X \to \mathbf{R}$ называется функцией полезности для функции выбора C, если для каждого $B \in \mathscr{B}$

$$C(B) = \{x \in B \mid u(x) = \max_{y \in B} u(y)\}. \tag{1}$$

Функции выбора, обладающие представлениями вида (1), М. Рихтер [73] называет полезностно-рациональными. Такое понятие рациональности составляет основу классической теории потребительского спроса, возникновение и развитие которой связано с именами Дж. Антонелли, В. Парето, Р. Аллена, Дж. Хикса, Хоутеккера, Е. Слуцкого, П. Самуэльсона и которая выросла теперь в весьма общую и разностороннюю аксиоматическую теорию выбора (см. сборник [69]).

Отношение предпочтения — это бинарное отношение на множестве альтернатив X, описывающее выбор при попарном сравнении альтернатив.

Символом $\succ$ обозначаем отношение строгого предпочтения: если $x \succ y$, x, $y \in X$, то $x \neq y$, и из пары (x, y) выбирается элемент x. Символом $\succcurlyeq$ обозначается отношение нестрогого предпочтения; оно предполагается, обычно, рефлексивным, и соотношение $x \succcurlyeq y$ означает, что из пары (x, y) либо выбирается альтернатива x, либо выбор произволен.

С любым пространством выбора можно связать выявленное отношение предпочтения $\succcurlyeq_0$ на X, полагая $x \succcurlyeq_0 y \leftrightarrow x \in C(B)$ и $y \in B$ для некоторого $B \in \mathscr{B}$. Функция $C(B)$ называется рациональной, если для каждого $B \in \mathscr{B}$ множество $C(B)$ состоит из всех наилучших в смысле $\succcurlyeq_0$ элементов B, т. е.

$$C(B) = \{x \in B \mid x \succcurlyeq_0 y \text{ для всех } y \in B\}.$$

Функция C называется регулярно рациональной [73], если на X существует такое совершенное упорядочение $\succcurlyeq$ (т. е. транзитивное, рефлексивное и полное бинарное отношение), что для каждого $B \in \mathscr{B}$ множество $C(B)$ состоит из всех наилучших в смысле предпочтения $\succcurlyeq$ элементов B (ясно, что $\succcurlyeq_0 \subseteq \succcurlyeq$, но обратного включения может и не быть).

Очевидно, что регулярная рациональность C необходима для существования представления (1). Гурвич и Рихтер (см. [73]) показали, что если в качестве области значений функции полезности вместо поля вещественных чисел взять некоторое его нестандартное расширение (поле гипервещественных чисел), то регулярная рациональность достаточна для существования представления (1). Если же ограничиться обычными вещественнозначными функциями полезности, то для существования представления (1) необходимо и достаточно, чтобы функция C была регулярно рациональной, а выявленное предпочтение $\succcurlyeq_0$

удовлетворяло бы некоторому условию порядковой сепарабельности (см. [24], стр. 35, определение 2.2.2).

Существуют различные варианты систем аксиом, обеспечивающих рациональность, регулярную рациональность и классическую рациональность функций выбора при различных предположениях о строении области X и семейства ограничений на выбор $\mathscr{B}$ (см., например, [1, 29, 69, 73]). Мы ограничимся здесь формулировкой двух теоретико-множественных аксиом, первая из которых была рассмотрена Миркиным [29] (ее можно назвать «аксиомой бинарности»), а вторая была введена Рихтером [72] под названием «аксиомы конгруэнции».

A1. Если $B\in\mathscr{B}$, $\{B_\alpha\}\subseteq\mathscr{B}$ и $B\subseteq\bigcup_\alpha B_\alpha$, то $\bigcap_\alpha C(B_\alpha)\subseteq C(B)$.

A2. Если $B_1,\ldots,B_n\in\mathscr{B}$ и $C(B_i)\cap B_{i+1}\neq\varnothing$ при $1\leqslant i\leqslant n-1$, то $B_1\cap C(B_n)\subseteq C(B_1)$.

Теорема. (а) Для рациональности функции выбора C необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла аксиоме A1.

(б) Предположим, что семейство $\mathscr{B}$ обладает следующим свойством: для любых $x, y\in X$ найдется такое $B\in\mathscr{B}$, что $x, y\in B$ и $\{x, y\}\cap C(B)\neq\varnothing$. Тогда для регулярной рациональности функции выбора C необходимо и достаточно, чтобы C удовлетворяла аксиомам A1 и A2.

Первое утверждение этой теоремы установлено в [29], а второе является незначительной модификацией теоремы 5.1 из работы Смита [77].

При менее общих предположениях можно было бы воспользоваться более простыми и интуитивно более оправданными аксиомами (см., например, [1, 29]).

Нерациональность выбора может быть интерпретирована просто как неопределенность предпочтения: мы сформулируем здесь один результат, поясняющий это утверждение. Предположим, что множество альтернатив X конечно и обозначим через L множество всех линейных упорядочений на X, т. е. транзитивных, полных и антисимметричных бинарных отношений ($x\succeq y$ или $y\succeq x$ для любых $x, y\in X$ и $(x\succeq y,\ y\succeq)\to x=y$. Для любого распределения вероятностей P на L и любых $B\in\mathscr{B}$, $x\in B$ положим

$$p(x\,|\,B)=P\{\succeq\in L\,|\,x\succeq y \text{ для всех } y\in B\},$$

и определим функцию выбора $M(\cdot,\ P)$, полагая для $B\in\mathscr{B}$

$$M(B,\ P)=\{x\in B\,|\,p(x\,|\,B)=\max_{y\in B} p(y\,|\,B)\}.$$

Множество $M(B, P)$ состоит из тех элементов B, которые с наибольшей вероятностью являются наилучшими в B.

Теорема [25]. Пусть $(X,\ \mathscr{B},\ C)$ — пространство выбора, в котором множество X конечно и $C(B)\neq\varnothing$ для любого непустого $B\in\mathscr{B}$. Тогда на L существует такое распределение вероятностей P, что $C(B)=M(B, P)$ для всех $B\in\mathscr{B}$.

Во многих работах задача о численном представлении предпочтений не связывается с рассмотрением функций выбора.

Пусть $\succ$ — строгое предпочтение на X; соответствующее отношение безразличия $\sim$ задается условием

$$x \sim y \leftrightarrow x \not\succ y \text{ и } y \not\succ x,$$

а отношение равноценности альтернатив $\approx$ определяется так:

$$x \approx y \leftrightarrow \text{для } \forall z \in X \ (z \sim x \leftrightarrow z \sim y).$$

Функцией полезности для отношения предпочтения $\succ$ называется такая вещественная функция u на X, что

$$x \succ y \rightarrow u(x) > u(y), \tag{2}$$

$$x \approx y \rightarrow u(x) = u(y). \tag{3}$$

Представление (2), (3) для отношения $\succ$ существует тогда и только тогда, когда отношение $\succ$ ациклично $x_1 \succ \ldots \succ x_n \rightarrow x_1 \neq x_n$ при любом $n \geqslant 2$), а пространство предпочтения $(X, \succ)$ обладает некоторым свойством порядковой сепарабельности ([24], гл. 1, теорема 2.2.4). Условия (2) и (3) влекут за собой условие

$$x \succ y \leftrightarrow u(x) > u(y) \tag{4}$$

тогда и только тогда, когда $\succ$ — слабое упорядочение, т. е. тогда и только тогда, когда оба отношения $\succ$ и $\sim$ транзитивны.

Условие (4) — это классическое определение функции полезности, которое, с общей точки зрения, впервые было исследовано, по-видимому, Парето и Фришем, хотя понятие функции полезности восходит, по крайней мере, к Бернулли и использовалось экономистами в 19 веке.

В случае, когда отношение безразличия $\sim$ нетранзитивно, наряду с односторонним представлением (2) рассматривают также представление

$$x \succ y \leftrightarrow u(x) > u(y) + \sigma(y), \tag{5}$$

где σ — неотрицательная функция, указывающая порог чувствительности при сравнении альтернатив

$$x \sim y \leftrightarrow -\sigma(x) \leqslant u(x) - u(y) \leqslant \sigma(y). \tag{6}$$

В случае, когда множество X не более чем счетно, для существования представления (5) необходимо и достаточно, чтобы $\succ$ было интервальным упорядочением ($x \prec y$ и $z \prec w \rightarrow x \prec w$ или $z \prec y$, (см. [39], § 24)); в общем случае к последнему условию надо добавить некоторое условие порядковой сепарабельности пространства $(X, \succ)$ (см. [24], гл. I, 2.2.6).

Теория классических представлений (4) и их более слабых вариантов (2), (2)—(3), (5) является наиболее разработанной и во многих отношениях наиболее интересной. Ей посвящены два подробных обзора Вилкаса [11, 12], книга [39] и, отчасти, книги [24, 27, 30, 35], а кроме того, основополагающие статьи по этой тематике, опубликованные за рубежом, обычно переводятся на русский язык (см., например, сборник [37]). Поэтому мы ограничимся здесь отдельными замечаниями о некоторых направлениях этой теории.

Прежде всего, необходимо отметить концепцию ожидаемой полезности фон Неймана—Моргенштерна [30] и Сэвиджа [75] (см. [39], гл. 8—14). Для представлений вида (4) и (2)—(3) ее развитие, в основном, было закончено в конце 60-х — первой половине 70-х годов в работах Фишберна (см. библиографию в его обзоре [55]).

Интересный круг работ связан с изучением представлений вогнутых отношений предпочтения на выпуклых подмножествах $X \subseteq \mathbf{R}^n$ ($\succsim$ на X называется вогнутым, если $x \succsim y$, $z \succsim y \to \alpha x + (1-\alpha) z \succsim y$ для всех $\alpha \in [0, 1]$) с помощью вогнутых функций полезности на X. Критерии существования таких представлений были установлены де Финетти (1949), Фенхелем (1956) и Рубинштейном [36]. Дебре [47] показал, что если $\succ$ обладает представлением (4) с вогнутой функцией u, то среди всех вогнутых функций, удовлетворяющих условию (4) для этого отношения предпочтения, существует единственная с точностью до положительного линейного преобразования наименее вогнутая функция (функция u называется не более вогнутой, чем v, если на образе u в $\mathbf{R}^1$ существует такая вогнутая функция w, что $v = w \circ u$).

Большое количество работ разных авторов посвящено вопросу о представлении отношения предпочтения на множестве альтернатив $X \subseteq \prod_{i=1}^{n} X_i$ с помощью функции полезности, которая явным образом выражается через функции $u_i(x_i)$, зависящие только от компонент $x_i \in X_i$. Начало было положено знаменитой теорией аддитивности Дебре, впоследствии развивавшейся многими авторами (см. [39], гл. 5 и 11). В частности, Тангян [38] показал, что в предположениях Дебре отношение предпочтения $\succsim$ на $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$, $n \geqslant 3$, можно восстановить однозначно, если для каждой пары индексов i, j указана кривая безразличия в $X_i \times X_j$, а для одной из пар задано поведение кривых безразличия в окрестности некоторой из них. Кини [64, 65, 37] построил теорию мультипликативных представлений функции полезности.

Предположение о транзитивности даже одного только отношения безразличия $\sim$ не соответствует экспериментальным данным о поведении людей. На самом деле, во многих экспериментах по попарному сравнению альтернатив нетранзитивными оказываются оба отношения $\succ$ и $\sim$; более того, отношение $\succ$ может иметь циклы [68]. Такое отношение нельзя задать с помощью обычной функции полезности. Но, очевидно, всегда найдется функция v на $X \times X$, удовлетворяющая условию

$$x \succ y \leftrightarrow v(x, y) > 0. \tag{7}$$

Тверски [79] предложил представление вида (7) для объяснения нетранзитивности предпочтений в экспериментах по многокритериальному сравнению альтернатив. Шейфер [76] применил (7) для построения теории потребительского спроса при нетранзитивном предпочтении. Е. Б. Яновская [40, 41, 24] использовала кососимметричную функцию $v(x, y) = -v(y, x)$ для построения общей теории принятия решений при нетранзитивности предпочтений, когда существование максимальных элементов не гарантировано даже для конечного множества альтернатив. В качестве $\succ$-оптимальных решений на $B \subseteq X$ берутся вероятностные меры, являющиеся оптимальными стратегиями в симметричной антагонистической игре $\Gamma_B = \langle B, B, v \rangle$ (при этом используются известные результаты о существовании решения в таких играх). В [23] этот подход использован для построения вероятностных функций группового выбора, удовлетворяющих всем надлежащим образом переформулированным аксиомам Эрроу.

Построению теории представлений вида (7), обобщающей традиционную теорию полезности, и ее применениям в теории игр посвящена большая часть книги [24]. В [24] теория ожидаемой полезности фон Неймана — Моргенштерна распространена на нетранзитивные предпочтения; показано, что при естественных условиях функция «ожидаемой сравнительной полезности» v единственна с точностью до умножения на положительную константу.

В заключение укажем на увеличивающийся поток работ, посвященных нечетким, или размытым отношениям предпочтения (см., например, [37, 48]), но это самостоятельная теория, о которой надо было бы писать отдельно.

§ 3. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКИ

Методы теории вероятностей давно используются в экономике (например, в математической теории страхования), но до недавнего времени область их применения была довольно узка. Однако в течение последнего десятилетия наметилась тенденция широкого проникновения этих методов в традиционную сферу детерминистского микроанализа (подробнее об этом см., например, [5]).

Введение фактора неопределенности, с одной стороны, потребовало пересмотра уже сложившихся концепций, а с другой — привело к возникновению новых проблем. Были построены и изучены стохастические варианты основных моделей математической экономики и предложены задачи со специфически вероятностной структурой, и, у которых, по существу, нет детерминированных аналогов.

Рассмотрим стохастическую модель экономической динамики. Пусть задан случайный процесс $\{s_t\}$, $t=\ldots, -1, 0, 1, \ldots$, описывающий экзогенные случайные факторы, от которых зависят параметры экономики. Обозначим через $s^t=(\ldots, s_{-1}, s_0, \ldots, s_t)$ «историю» процесса до момента t включительно. В известной детерминированной модели Гейла для каждого $t=1, 2, \ldots$ считается заданным технологическое множество Q_t, состоящее из пар (x, y) неотрицательных n-мерных векторов (x — затраты в момент $t-1$, а y — выпуск, получаемый в момент t). В стохастической модели затраты и выпуск являются случайными функциями, зависящими «неупреждающим» образом от процесса $\{s_t\}$, т. е. $x=x(s^{t-1})$, $y=y(s^t)$. Технологическое множество Q_t — это некоторое заданное подмножество в пространстве всех таких функций $(x(s^{t-1}), y(s^t))$. Последовательность $\xi=\{x_t, y_t\}_0^T$ $(T\leqslant\infty)$ называется планом на отрезке времени от 0 до T, если 1) $(x_t, y_{t+1})\in Q_{t+1}$, $0\leqslant t<T$, и 2) $y_t\geqslant x_t$, $0\leqslant t<T$; вектор $y_0=y_0(s^0)$ называется начальным вектором плана ξ. Первое условие означает технологическую допустимость производственного процесса (x_t, y_{t+1}), а второе — что затраты, совершаемые в любой момент времени, не должны превышать выпуска, полученного на предыдущем этапе. Кроме этого, на множестве Q_t задан функционал F_t (если $z=(x, y)\in Q_t$, то $F_t(z)$ интерпретируется как величина полезности, приносимой процессом z). Пусть $T<\infty$ и фиксирован вектор y_0. План, максимизирующий сумму $F_1(z_1)+\ldots+F_T(z_T)$ на множестве всех планов длины T с начальным вектором y_0, называется оптимальным. Бесконечный план $\bar\xi=\{\bar x_t, \bar y_t\}_0^\infty$ называется (сильно) оптимальным, если для любого плана $\xi=\{x_t, y_t\}_0^\infty$ с тем же начальным вектором существует N_0 (зависящее от ξ) такое, что при всех $N\geqslant N_0$ выполнено неравенство

$$\sum_1^N F_t(\bar z_t)\geqslant\sum_1^N F_t(z_t), \quad \bar z_t=(\bar x_{t-1}, \bar y_t), \quad z_t=(x_{t-1}, y_t).$$

В рамках этой модели рассматриваются вопросы существования конечных и бесконечных оптимальных планов и их асимптотического поведения (магистральные теоремы). Различные варианты стохастической модели Гейла изучались многими авторами (см., например, [14, 70, 3, 15]). Наиболее полные результаты получены для так называемой стационарной модели, т. е. в предположении, что случайный процесс $\{s_t\}$, технология Q_t и полезность F_t меняются во времени стационарным образом [16, 70, 53]. В этом случае удается доказать существование бесконечного стационарного плана, который по отношению к оптимальным планам играет роль магистрали:

любой бесконечный оптимальный план неограниченно приближается к нему с течением времени, а конечные оптимальные планы существенно отклоняются от него лишь в начале и в конце интервала планирования. Как и в детерминированном случае, основным инструментом исследования являются стимулирующие цены, но поскольку теперь затраты и выпуск рассматриваются как элементы пространства существенно ограниченных функций, то непосредственное применение теоремы Куна—Таккера дает существование таких цен в виде линейного функционала над этим пространством. Поэтому возникает дополнительная задача доказать существование стимулирующих цен интегрального типа, т. е. таких интегрируемых неотрицательных вектор-функций $p_t=p_t(s^t)$, что стоимость набора продуктов $x_t=x_t(s^t)$ есть Ep_tx_t, где E — символ математического ожидания по распределению процесса $\{s_t\}$. Подробное изложение результатов, касающихся стационарной модели Гейла, содержится в книге [2].

Особенностью стохастического варианта модели фон Неймана является предположение о том, что технологические множества Q_t являются конусами, тем самым допускается неограниченный эндогенный рост экономики. Последовательность функций $\{x_t\}_0^T$, $T\leqslant\infty$, называется траекторией, если $(x_t, x_{t+1})\in Q_{t+1}$, $0\leqslant t<T$. Траектория $\{x_t\}_0^T$ называется эффективной, если существуют такие цены $p_t=p_t(s^t)\geqslant 0$, что $p_tx_t>0$ и для любой траектории $\{x_t'\}_0^T$. имеем: $E(\eta_t'/\eta_t|s^{t-1})\leqslant 1$, где $\eta_t'=$ $=p_tx_t'/p_{t-1}x'_{t-1}$, $\eta_t=p_tx_t/p_{t-1}x_{t-1}$. Величины η_t и η_t' характеризуют темп роста продукции (измеренный в ценах $\{p_t\}_0^T$) на траекториях $\{x_t\}_0^T$ и $\{x_t'\}_0^T$. Таким образом, отношение темпа роста вдоль любой траектории к темпу роста вдоль эффективной в среднем не превосходит единицу.

В определении эффективной траектории не ставится в явном виде какая-либо экстремальная задача. Тем не менее справедлив следующий результат: среди всех траекторий фиксированной длины T и с фиксированным начальным состоянием x_0 существуют такие, которые максимизируют функционал $E\ln|x_T|$ и каждая из них является эффективной. Существование бесконечных эффективных траекторий устанавливается предельным переходом от конечного случая.

Доказывается, что бесконечная эффективная траектория $\{x_t\}_0^\infty$ обладает свойством слабой оптимальности, т. е. для любой другой траектории $\{x_t'\}_0^\infty$ $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\frac{|x_t'|}{|x_t|}<\infty$, иными словами, $\{x_t\}_0^\infty$ не может быть «бесконечно хуже» любой другой траектории.

В стационарной модели обобщается понятие неймановского луча с помощью введения определения сбалансированной траектории, которая соответствует развитию со стационарным темпом и стационарными пропорциями. Устанавливается существование сбалансированной эффективной траектории, темп роста которой в некотором смысле максимален и которая стимулируется стационарными ценами.

Изложенные выше результаты содержатся в [18, 17]. Иной подход к построению стохастической модели фон Неймана (основанный на использовании марковских стратегий) был предложен ранее в работе Раднера [71]. Там же содержится важная идея о том, что стохастическим аналогом неймановского луча является сбалансированная траектория, на которой достигается максимум математического ожидания логарифма темпа роста. Однако подход [71] не позволил получить существование стимулирующих цен.

Многие модели экономической динамики можно описывать с помощью следующей задачи оптимального управления.

$$E\sum_{t=0}^{\tau-1}\varphi^t(s^t, y_t, u_t)\to\max,$$

$$y_{t+1}=f^{t+1}(s^{t+1}, y_t, u_t),\quad t=0, 1, \ldots, \tag{8}$$

$$u_t\in U_t(s^t),\quad g^t(s^t, y_t, u_t)\leqslant 0.$$

Здесь $\{s_t\}$ — случайный процесс, y_t — вектор, характеризующий состояние системы в момент t, u_t — управление, f^t, φ^t, g^t — заданные функции, $U_t(s^t)$ — множество допустимых управлений, $y_0(s^0)$ — фиксированное начальное состояние. Для этой задачи доказывается стохастический принцип максимума, аналогичный принципу максимума Понтрягина в детерминированной теории оптимального управления. Возникающие при этом сопряженные переменные можно трактовать как цены, стимулирующие оптимальный план. При некоторых дополнительных ограничениях удается установить существование так называемых марковских оптимальных управлений, имеющих вид $u_t=u_t(s_t, y_t)$, т. е. зависящих только от текущих состояний системы. Благодаря возможности описания некоторых вариантов стохастической модели Гейла в виде (8), удается доказать существование стимулирующих цен, имеющих марковскую структуру.

Вывод принципа максимума для задачи типа (8), доказательство достаточности марковских управлений и применение к задачам математической экономики были сделаны Аркиным и Кречетовым, результаты изложены в работах [4, 2]. Общие задачи выпуклого стохастического программирования, примыкающие к (8), рассматривались в [74]. Отметим также, что задача (8) позволяет строить модель распределения ресурсов между факторами производства, находить в ней оптимальное управление, ввести понятие стохастического норматива эффективности [26].

В вероятностных обобщениях моделей экономического равновесия в последние годы выявились два направления. Первое получило название теории кратковременного равновесия. Основное ее отличие от классической модели Эрроу—Дебре состоит в предположении о «стохастическом» характере поведения участников экономики. А именно, считается, что каждый индивидуум имеет субъективный вероятностный прогноз будущих состояний экономики и поэтому оптимальный план действий в каждый момент времени он выбирает как на основе текущего положения, так и с учетом своей оценки будущего. Для доказательства существования равновесия, кроме стандартных требований непрерывности и выпуклости, необходимы условия согласованности индивидуальных прогнозов. Модель кратковременного равновесия допускает введение экзогенных случайных факторов, что позволяет изучать экономический рост. Основной вопрос, возникающий при этом, состоит в нахождении условий, обеспечивающих устойчивость процесса в каком-либо смысле (например, стационарность, эргодичность). По этой тематике имеется обширная литература, укажем лишь на [78, 58, 57, 59, 46]. В моделях такого рода важное значение приобретает та информация, на основе которой индивидуумы строят свои планы. Имеются примеры отсутствия равновесия в случае разной информированности участников (см., например, [60]).

Другой подход к стохастическому равновесию ближе к классической детерминированной теории (см., например, [52, 54]). Изложим кратко модель работы [54], основой для которой послужила работа [32]. Как и раньше, считается заданным случайный процесс $\{s_t\}$, от которого зависят параметры экономики. Сфера производства характеризуется технологическими множествами Q_t, а сфера потребления описывается с помощью многозначных отображений $C_t(p)$, ставящих в соответствие каждой неотрицательной интегрируемой вектор-функции $p=p(s^t)$ множество неотрицательных вектор-функций $c=c(s^t)$. Элементы множества $C_t(p)$ интерпретируются как наиболее предпочтительные наборы продуктов, если в момент t действуют цены p_t. При заданной системе цен $\{p_t\}_0^T$ оптимальным планом производства $\{x_t,\ y_t\}_0^T$ является тот, для которого при всех $t\geqslant 1$ выполняется неравенство $E(p_t y_t - p_{t-1}x_{t-1})\geqslant E(p_t y - p_{t-1}x)$ для любого $(x,\ y)\in Q_t$; иными словами, оптимальный план максимизирует в каждый момент времени среднюю прибыль, вычисленную в ценах $\{p_t\}_0^T$. Оптимальный план потребления по отношению к ценам $\{p_t\}_0^T$ — это последовательность функций $\{c_t\}_0^T$, для которых $c_t\in C_t(p_t)$, $t=0, 1, \ldots$. Равновесной траекторий на отрезке $T\leqslant\infty$ называется последовательность $\{p_t,\ x_t,\ y_t,\ c_t\}_0^T$, состоящая из оптимальных планов производства и потребления относительно $\{p_t\}_0^T$ и такая, что $c_t\leqslant y_t - x_t$, $p_t(y_t - x_t - c_t)=0$, $t\geqslant 0$. В работах [54, 19] доказывается существование равновесных траекторий на любом конечном отрезке времени и изучается их асимптотическое поведение (магистральные свойства, устойчивость к изменению горизонта планирования).

Известны несколько вероятностных моделей, основанных на схеме межотраслевого баланса. Кратко опишем одну из них, следуя работе [31]. В ней ставится задача максимизировать конечный выпуск в заданных пропорциях с учетом межотраслевого баланса и ограничений на валовые выпуски, при этом мощности отраслей (т. е. предельно возможные валовые выпуски) считаются случайными. При помощи методов предельных теорем теории вероятностей, удается найти распределение максимального значения критерия, когда число отраслей велико. В этой же модели возникает интересная задача о распределении капиталовложений в отрасли, причем в оптимальном решении часть вкладываемых ресурсов можно интерпретировать как средства, направляемые на повышение стабильности системы.

Модель производства, включающая научно-технический прогресс [6], является примером задачи, не имеющей, по существу, детерминированного аналога. В этой модели решается проблема об оптимальном распределении ресурсов между блоком производства и блоком науки. При этом считается, что научные открытия происходят в случайные моменты времени и влияют на производство, а вложение дополнительных средств в науку повышает вероятность возникновения открытия.

§ 4. РАВНОВЕСИЕ ПРИ НЕГИБКИХ ЦЕНАХ

Классические модели равновесия и, в частности, оптимизационные модели, явно или неявно предполагают возможность выбора любых неотрицательных цен на производственные ресурсы. В реальной действительности это допущение не выполняется, поэтому для балансировки спроса и предложения используются не только цены, но и ограничения на производимые и потребляемые блага. Естественно поставить вопрос о принципах, в соответствии с которыми назначаются (или должны назначаться) натуральные ограничения. Сложность проблемы состоит в необходимости компромисса между стремлением к оптимальному распределению ресурсов и желанием сохранить элементы информационной децентрализации, характерной для равновесных моделей.

Серьезное математико-экономическое исследование проблемы началось в семидесятых годах, хотя в экономических работах она затрагивалась и ранее. Одна из первых публикаций принадлежит Э. М. Браверману [7]. Рассматривая модель, близкую к нелинейному межотраслевому балансу (каждый участник производит только один товар), Э. М. Браверман использовал следующие два фундаментальных принципа.

I. Объемы благ, предлагаемых и спрашиваемых участником, можно ограничивать сверху, но не снизу.

II. Ни для одного из ресурсов нельзя устанавливать ограничения и на объемы спроса, и на объемы предложения (хотя бы и для разных участников).

Первый принцип устанавливает допустимые формы вмешательства во «внутренние дела» экономических агентов. Второй — обеспечивает при естественных условиях возможность выделить подмножество дефицитных ресурсов и гарантирует, что распределение благ не окажется «слишком плохим» (см. ниже).

Оба принципа были явным образом (и независимо от [7]) сформулированы в [44] (см. также [80, 50]).

В [50] рассматривается следующая ситуация. Пусть каждый из m участников характеризуется тройкой $(X_k, \succsim_k, w_k)$, где X_k — множество векторов благ, априори доступных для участника, k, $X_k \subset \mathbf{R}^n$, $\succsim_k$ — рефлексивное, транзитивное, полное отношение предпочтения на X_k, w_k — начальный вектор ресурсов, $k=1,2,\ldots,m$. Введем обозначения

$$P=\{p=(p_i)\in \mathbf{R}_+^n \mid \bar{p} \geqslant p \geqslant \underline{p}\},$$

$$\gamma_k(p, L_k, e_k)=\{x\in X_k \mid p(x-w_k)\leqslant 0,\ L_k \geqslant x-w_k \geqslant e_k\}.$$

Здесь P — множество допустимых цен; $\bar{p}=(\bar{p}_i)$, $\underline{p}=(\underline{p}_i)$ — n-мерные векторы, координаты которых — неотрицательные числа или $+\infty$. Первый продукт принят как масштаб ценности (деньги), так что $\bar{p}_1=\underline{p}_1=1$. Последовательность пар n-мерных векторов $\{L_k, e_k\}_1^m$ будем называть схемой рационирования. Следуя [50], назовем равновесием при негибких ценах набор векторов потребления $\{x_k\}_1^m$, вектор цен $p\in P$ и схему рационирования $\{L_k, e_k\}_1^m$, удовлетворяющие следующим условиям.

(a) $x_k=(x_{ki})$ — максимальный элемент для предпочтения $\succsim_k$ на $\gamma_k(p, L_k, e_k)$.

(b) $\sum\limits_k (x_k-w_k)=0$.

(c) $L_k \geqslant 0 \geqslant e_k$, $L_k=(L_{ki})$, $e_k=(e_{ki})$, $L_{k1}=+\infty$, $e_{k1}=-\infty$ $\forall k$.

(d) Не существует ресурса i и участников k, r таких, что

$$x_{ki}-w_{ki}=L_{ki}, \quad x_{ri}-w_{ri}=e_{ri}.$$

(e) Если $\bar{p}_i > p_i$, то $L_{ki}=+\infty$ $\forall k$; если $\underline{p}_i < p_i$, то $e_{ki}=-\infty$ $\forall k$.

Теорема [50]. Предположим, что 1) $X_k \subset \mathbf{R}_+^n$, X_k — выпукло, замкнуто, причем $x+\mathbf{R}_+^n \subset X_k$ $\forall x\in X_k$ и $\forall k$; 2) отношение предпочтения $\succsim_k$ является непрерывным, выпуклым на X_k; $x\succsim_k y$, если $x \geqslant y$, если же, сверх того $x_1 > y_1$, то $x \succ_k y$; 3) $w_k\in \operatorname{int} X_k$ $\forall k$. Тогда, если P не пусто, существует равновесие при негибких ценах такое, что $L_k=L_r$, $e_k=e_r$, $\forall k, r$.

Требование (с) относительно знаков L_h и условие (d) являются реализацией принципов I, II применительно к рассматриваемой модели. Кроме того, согласно (с), сбережения не должны подвергаться рационированию. Условие (e) означает, что рационирование допустимо лишь в том случае, когда исчерпаны возможности ценового регулирования.

Из приведенной теоремы следует существование бесконечно многих различных равновесий. Чтобы устранить неопределенность и более точно отразить реальность в [67, 61], были предложены более общие понятия схемы рационирования и, соответственно, переформулировано (c). Однако и в этих работах рационирование не зависит от спроса («заявок») участников, как это имеет место в некоторых реальных системах. Подход, разработанный в [44], лишен этого недостатка. Опубликован также ряд других моделей рационируемого равновесия, описывающих процессы экономического роста, монополистической конкуренции, учитывающих случайные факторы и т. п. Их сопоставлению и анализу посвящены обзорные работы [57, 49].

В рамках нового подхода началось изучение проблем единственности и сравнительной статики [66], рассматриваются также процедуры взаимодействия, обеспечивающие достижение равновесных состояний [45].

Для теории плановой экономики особенно важное значение имеет вопрос об оптимальности равновесия при негибких ценах. Остановимся на нем более подробно.

Назовем ресурс i дефицитным, если в состоянии равновесия $x_{hi}-w_{hi}=L_{hi}$ хотя бы для одного k и недифицитным — в противном случае. Из условий 1) и 2) теоремы существования легко следует, что равновесное распределение благ $\{x_h\}_1^m$ нельзя улучшить (в смысле Парето) путем парных обменов какого-либо дефицитного продукта на недефицитный. Вместе с тем, известно, что равновесие при негибких ценах, в отличие от классического, не обязано быть Парето — оптимальным не только на множестве

$$\mathcal{H}_0=\left\{\{x_k\}_1^m \,\middle|\, \sum_k (x_k-w_k)\leqslant 0,\ \ x_k\in X_k\right\},$$

но даже и на более узком множестве

$$\mathcal{H}_1=\mathcal{H}_0\cap\{\{x_k\}_1^m \mid \exists p\in P\colon\ px_k=0\ \forall k\}.$$

Возникает важный вопрос о характеризации оптимальных в том или ином смысле равновесных состояний. Для сравнительно простой производственной модели при $\bar{p}=\underline{P}$ эта проблема изучалась в [8—10] (ссылки на более ранние публикации см. в [8]). За исключением весьма специальных ситуаций, пока получены лишь необходимые условия оптимальности.

Если отказаться от принципа I, то нетрудно указать механизмы, обеспечивающие Парето-оптимальность на множестве $\mathcal{H}_1$

при $\bar{p}=\underline{P}$; при $\bar{p}\neq p$ задача конструирования такого механизма оказывается более сложной и пока не решена [51].

Для случая $\bar{p}=\underline{P}=p$ в [43, 34] изучался вопрос о существовании сбалансированного распределения ресурсов (см. (*в*)), Парето-оптимального на $\mathscr{H}_0$ и удовлетворяющего бюджетным равенствам: $px_k=pw_k$ $\forall k$. В [34] такое распределение названо p-оптимумом и доказана следующая теорема.

Теорема. Если $X_k=\mathbf{R}_+^n$, $w_k\in\mathbf{R}_+^n$, а предпочтение $\succ_k$ можно представить непрерывными, вогнутыми функциями, строго возрастающими по всем аргументам, то p-оптимум существует.

В [34] отмечено, что вместо вогнутости можно использовать более слабое предположение строгой квазивогнутости; указаны также достаточные условия единственности p-оптимума.

Новые концепции равновесия уже находят применение в конкретных расчетах (ссылки см. в [56]) и обещают в ближайшем будущем стать фундаментом математической микроэкономики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айзерман М. А., Малишевский А. В.*, Проблемы логического обоснования в общей теории выбора. Препринт. М., ИПУ, 1980, 71 с.
2. *Аркин В. И., Евстигнеев И. В.*, Вероятностные модели управления и экономической динамики. М., Наука, 1979, 176 с. (РЖМат, 1980, 3В892К)
3. —, *Кречетов Л. И.*, Стохастические множители Лагранжа в задачах управления и экономической динамики. В сб. «Вероятностные проблемы управления в экономике», М., Наука, 1977, 5—32
4. —, —, Марковские управления в задачах с дискретным временем. Стохастический принцип максимума. В сб. «Вероятностные процессы и управление». М., Наука, 1978, 8—41 (РЖМат, 1978, 10В68)
5. —, *Петраков Н. Я.*, Проблемы учета неполноты информации в системе оптимального функционирования экономики. В сб. «Вероятностные модели и управление экономическими процессами». М., ЦЭМИ АН СССР, 1978, 3—18
6. —, *Пресман Э. Л., Сонин И. М.*, Вероятностные модели экономической динамики с учетом управляемого научно-технического прогресса. В сб. «Моделирование научно-технического прогресса и управление экономическими процессами в условиях неполноты информации». М., ЦЭМИ АН СССР, 1976, 56—106 (РЖМат, 1977, 7В780)
7. *Браверман Э. М.*, Модель производства с неравновесными ценами. Экон. и мат. методы, 1972, *8*, № 2, 175—190 (РЖМат, 1972, 8В561)
8. —, *Левин М. И.*, Идентификация эффективных состояний сетей производственных элементов. I. Автомат. и телемех., 1978, № 6, 67—82 (РЖМат, 1978, 10В968)
9. —, —, Идентификация эффективных состояний сетей производственных элементов. II. Автомат. и телемех., 1978, № 7, 79—86 (РЖМат, 1978, 11В1001)
10. —, —, Идентификация эффективных состояний сетей производственных элементов. III. Автомат. и телемех., 1978, № 9, 90—101 (РЖМат, 1979, 1В967)
11. *Вилкас Э. И.*, Теория полезности и принятие решений. В сб. «Матема-

тические методы в социальных науках», вып. 1, Вильнюс, 1971, 13—60 (РЖМат, 1972, 11В382)
12. —, Теория полезности. В сб. «Теория вероятностей. Мат. статистика. Теор. кибернетика», т. *14* (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР», М., 1977, 123—151 (РЖМат, 1977, 7В689)
13. *Волконский В. А.*, Принципы оптимального планирования. М., Экономика, 1973, 239 с.
14. *Дынкин Е. Б.*, Некоторые вероятностные модели развивающейся экономики. Докл. АН СССР, 1971, *200*, № 3, 523—525 (РЖМат, 1972, 2В613)
15. *Евстигнеев И. В.*, Модели экономической динамики, учитывающие неопределенность в ходе производственного процесса. «Докл. АН СССР», 1975, *223*, № 3, 537—540 (РЖМат, 1975, 12В824)
16. —, Оптимальное экономическое планирование с учетом стационарных случайных факторов. Докл. АН СССР, 1972, *206*, № 5, 1040—1042 (РЖМат, 1973, 2В518)
17. —, Однородные выпуклые модели в теории управляемых случайных процессов. Докл. АН СССР, 1980, *253*, № 3, 524—527 (РЖМат, 1980, 11В98)
18. —, *Кабанов Ю. М.*, О вероятностой модификации модели фон Неймана—Гейла. Успехи мат. наук, 1980, *35*, № 4, 185—186 (РЖМат, 1980, 12В293)
19. —, *Катышев П. К.*, Равновесные траектории в вероятностных моделях экономической динамики (в печати)
20. *Канторович Л. В.*, О перемещении масс. Докл. АН СССР, 1942, *37*, № 7—8, 227—229
21. —, Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М. Изд-во АН СССР, 1959, 344 с.
22. —, *Макаров В. Л.* и др., Разработка математического аппарата для задач экономики. В сб. «Сибирское отделение за 20 лет. Фундаментальные исследования». Новосибирск. Наука, 1977, 12—16 (РЖМат, 1977, 12В816)
23. *Кирута А. Я.*, Аксиоматическая теория полезности для нетранзитивных предпочтений и групповой выбор решений. В сб. «Прикладной многомерный статистический анализ». М., Наука, 1978, 321—326
24. —, *Рубинов А. М.*, *Яновская Е. Б.*, Оптимальный выбор распределений в сложных социально-экономических задачах (вероятностный подход). Л., Наука, 1980, 166 с. (РЖМат, 1981, 3В668К)
25. —, *Шайдаева Д. М.*, Вероятностные модели выбора. В сб. «Тезисы докладов I Всесоюзного совещания по статистическому и дискретному анализу нечисловой информации, экспертным оценкам и дискретной оптимизации». Алма—Ата, 1981, (в печати)
26. *Кречетов Л. И.*, Стохастические нормативы эффективности в модели распределения ресурсов. В сб. «Теоретико-вероятностные методы в задачах управления экономическими процессами». М., ЦЭМИ АН СССР 1979, 63—96 (РЖМат, 1980, 7В465)
27. *Льюс Р. Д.*, *Райфа Х.*, Игры и решения. Введение и критический обзор. М., ИЛ, 1961, 642 с. (РЖМат, 1962, 2В445К)
28. *Макаров В. Л.*, *Рубинов А. М.*, Математическая теория экономической динамики и равновесия. М., Наука, 1973, 336 с. (РЖМат, 1974, 5В728)
29. *Миркин Б. Г.*, Проблема группового выбора. М., Наука, 1974, 256 с. (РЖМат, 1975, 3В632К)
30. *Нейман Дж. фон*, *Моргенштерн О.*, Теория игр и экономическое поведение. М., Наука, 1970, 707 с. (РЖМат, 1970, 12В439)
31. *Петраков Н. Я.*, *Ротарь В. И.*, К вопросу об экономико-математической модели управления, учитывающей фактор неопределенности, Экономика и матем. методы», 1978, *14*, № 3, 435—447 (РЖМат, 1978, 12В1460)

32. *Полтерович В. М.* Равновесные траектории экономического роста. В сб. «Методы функц. анализа в матем. экономике», М., Наука, 1978, 56—97 (РЖМат, 1978, 8В803)
33. —, Модели экономического равновесия как инструмент оптимального планирования. В сб. «Моделирование внутренних и внешних связей отраслевых систем». Новосибирск, Наука, 1978, 72—87 (РЖМат, 1978, 9В804)
34. —, Оптимальное распределение благ при неравновесных ценах. Эконом. и мат. методы, 1980, *16*, № 4, 746—759 (РЖМат, 1980, 11В765)
35. *Пфанцагль И.*, Теория измерений. М., Мир, 1976, 248 с. (РЖМат, 1976, 11В617)
36. *Рубинштейн Г. Ш.*, Характеристика насыщения класса выпуклых функций. *Оптимизация* 9(26). Новосибирск, 1973, 165—180 (РЖМат, 1973, 10В712)
37. Статистические модели и многокритериальные задачи принятия решений. М., Статистика, 1979, 183 с.
38. *Тангян А. С.*, Модель выявления потребительского предпочтения. Экон. и матем. методы, 1979, *15*, № 1, 128—134 (РЖМат, 1979, 6В863)
39. *Фишберн П.*, Теория полезности для принятия решений. М., Наука, 1978, 352 с. (РЖМат, 1978, 8В680)
40. *Яновская Е. Б.*, Ситуация равновесия в играх с неархимедовыми полезностями. В сб. «Математические методы в социальных науках», вып. 4. Вильнюс, 1974, 93—118 (РЖМат, 1974, 12В479)
41. —, Смешанное расширение бинарного отношения. В сб. «Математические методы в социальных науках», вып. 6. Вильнюс, 1975, 152—166 (РЖМат, 1976, 9В538)
42. *Allais M.*, Le comportement de l'homme devant le risque: Critique des postulats et axiomes de l'école Americaine. Econometrica, 1953, *21*, № 4, 503—546
43. *Balasco Y.*, Budget — Constrained Pareto-Efficient Allocations. J. Econ. Theory, 1979, *21*, № 3, 359—379
44. *Benassy J.-P.*, Neo-Keynesian Disequilibrium Theory in a Monetary Economy. Rev. Econ. Studies, 1975, *42(4)*, N 132, 503—523
45. *Böhm V.*, Disequilibrium Dynamics in a Simple Macroeconomic Model. J. Econ. Theory, 1978, *17*, N 2, 179—199 (РЖМат, 1979, 1В943)
46. *Blume L. E.*, The ergodic behavior of stochastic processes of economic equilibria. Econometrica, 1979, *47*, N 6, 1421—1432 (РЖМат, 1980, 6В731)
47. *Debreu G.*, Least concave utility functions. J. Math. Econ., 1976, *3*, N 2, 121—130
48. *Defays D.*, Analyse hierarchique des préférences et généralisations de la transitivité. Math. et sci. hum., 1978, *16*, N 61, 5—27 (РЖМат, 1979, 3В649)
49. *Drazen A.*, Recent Developments in Macroeconomic Disequilibrium Theory. Econometrica, 1980, *48*, N 2, 283—306
50. *Dreze J. H.*, Existence of an Exchange Equilibrium under Price Rigidities. Internat. Econ. Rev., 1975, *16*, N 2, 301—320
51. —, *Müller H.*, Optimality properties of rationaing schemes. J. Econ. Theory, 1980, *23*, N 2, 131—149
52. *Dynkin E. B.*, Economic equilibrium under uncertainty. In: Computing Equilibria: How and Why. I. Loś, M. W. Loś (eds.) 1976, 41—60
53. *Evstigneev L. V.*, Optimal stochastic programs and their stimulating asymptotic behaviour of equilibrium paths. Pr. IPI PAN, 1979, N 358, 23 pp. (РЖМат, 1980, 3В918)
54. —, *Katyshev P. K.*, Stochastic dynamic models of economic equilibrium: prices. Mathematical models in Economics. Amsterdam etc., North—Holland, 1974, 219—252 (РЖМат, 1975, 7В687)
55. *Fishburn P. C.*, Expected utility theories: a review note. Lect. Notes in

Econ. and Math. Syst., B.-H. — N. Y., 1977, *141*, 197—207 (РЖМат, 1977, 11B706)

56. *Gourieroux C., Laffont J. J., Monfort A.*, Disequilibrium Econometrics in Simultaneous Equations Systems. Econometrica, 1980, *48*, No. 1, 75—96
57. *Grandmont J. M.*, Temporary general equilibrium theory, Econometrica, 1977, *45*, N 3, 535—572 (РЖМат, 1977, 10B543)
58. —, *Hildenbrand W.*, Stochastic processes of temporary equilibria. I. Math. Econ., 1974, *1*, N 3, 247—277 (РЖМат, 1975, 7B696)
59. *Green J. R.*, Preexisting contracts and temporary general equilibrium. In: «Essays on economic behavior under uncertainty», eds. M. Balch, D. Mc Fadden, S. W. Yu. Amsterdam, North Hilland, 1974, 263—286
60. —, The non-existence of informational equilibria. Rev. Econ. Studies, 1977, 44 (3), No. 138, 451—463
61. *Greenberg J., Müller H.*, Equilibria under price rigidities and externalities. In: Moeschlin O., Pallaschke D. (eds). Game theory and related topics, Amsterdam, North-Holland, 1979, 291—299
62. *Herzberger H. G.*, Ordinal preferences and rational choice. Econometrica, 1973, *41*, N 2, 187—237 (РЖМат, 1974, 3B456)
63. *Jamison D. T., Lau L. J.*, Semiorders and the theory of choice. Econometrica, 1973, *41*, N 5, 901—912 (РЖМат, 1974, 11B728)
64. *Keeney R. L.*, Multiplicative utility functions. Operations Research, 1974, *22*, N 1, 22—34 (РЖМат, 1974, 10B532)
65. —, *Raiffa H.*, Decisions with multiple objectives. J. Wiley and Sons, N. Y., 1976, 568 с.
66. *Laroque G.*, The Fixed Price Equilibria: Some Results in Local Comparative Statics. Econometrica, 1978, *46*, N 5, 1127—1154 (РЖМат, 1979, 6B874)
67. —, *Polemarchakis H.*, On the structure of the set of fixed price equilibria. J. Mathematical Economics, 1978, *5*, N 1, 53—69 (РЖМат, 1979, 4B695)
68. *Marschak J.*, Decision making: economic aspects. «International Encyclopedia of the Social Sciences», 1968, vol. 4,
69. Preferences, utility and demand Eds. Chipman J. S., a. o., N. Y., Harcourt, Brace, Jovanovich, 1971, 510 с.
70. *Radner R.*, Optimal stationary consumption with stochastic production and resources. J. Econ. Theory, 1973, v. 6, N 1, 68—90
71. —, Balanced stochastic growth at the maximum rate. Z. Nationalökonomie, Suppl. N 1, 1971, 39—52
72. *Richter M. K.*, Rational choice. In: Preferences, utility and demand, eds Chipman J. S., a. o. N. Y. Harcourt, Brace, Iovanovich, 1971, 29—58
73. —, Duality and rationality. J. Econ. theory, 1979, *20*, N 2, 131—181
74. *Rockafellar R. T., Wets R. J.-B.*, Stochastic convex programming: Kuhn-Tucker conditions. J. Math. Econ., 1975, 2, 349—370 (РЖМат, 1976, 3B786)
75. *Savage L. J.*, The foundations of statistics. Wiley, New York, 1954, 294 с.
76. *Shafer W.*, The non-transitive consumer. Econometrica, 1974, *42*, N 5, 913—919
77. *Smith T. E.*, Rationality of indecisive choice functions on triadic choice domains. Theory and Decision, 1979, *10*, N 1—4, 113—129 (РЖМат, 1979, 12B751)
78. *Sonderman D.*, Temporary competitive equilibrium under uncertainty. Equilibrium and optimality. Ed. J. Dreze, London, Macmillan, 1974, 229—253
79. *Tversky A.*, Intransitivity of preferences. Psych. Rev., 1969, *76*, 31—48
80. *Younes V.*, On the Role of Money in the Process of Exchange and the Existence of a Non-Walrasian Equilibrium. Rev. Econ. Studies, 1975, *42* (4), N 132, 489—501