Macro-economic aggregates in real terms and price indices in the old and the new system of national accounts

Quaas, Georg

Universität Leipzig

October 2009

Realgrößen und Preisindizes im alten und im neuen VGR-System

Georg Quaas

Kurzfassung

2005 wurde in Deutschland das System der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen von der sogenannten Festpreisbasis (Preise eines bestimmten Jahres, zuletzt 1995) auf Vorjahrespreise als Grundlage für die Berechnung der Realwerte makro-ökonomischer Zeitreihen umgestellt. Verglichen mit dem vorangegangenen System bietet das neue ein breiteres Spektrum, theoretisch relevante Variable empirisch zu spezifizieren. So gibt es beispielsweise mindestens drei Möglichkeiten, um die Realwerte der Hauptaggregate einer Volkswirtschaft auszudrücken. Mindestens zwei von ihnen sind hinsichtlich der Subaggregate, die sie umfassen, nicht mehr additiv. Das ist aber nicht das einzige Problem: Die Vierteljahresdaten einer makro-ökonomischen Variablen werden nach der „Annual-Overlap-Method“ berechnet, die durch ein solches Standardprogramm für die Zeitreihenanalyse wie E-Views nicht immer auf einfache Weise gehandhabt werden können. Beide Probleme haben ernsthafte Besorgnis über die Anwendbarkeit ökonometrischer Modelle auf die neue Datenbasis ausgelöst. Der Schwerpunkt dieses Papiers wird auf die grundlegenden Eigenschaften der neuen Darstellungsmöglichkeiten von Realwerten makro-ökonomischer Aggregate gelegt. Es zeigt sich, dass die Nicht-Additivität einiger Größen insofern kein Problem darstellt, als die nicht additiven, verketteten Zeitreihen in additive, unverkettete Zeitreihen – und umgekehrt – umgewandelt werden können.

Summary

In 2005, Germany’s system of national accounts was altered from so called fixed prices (prices of a fixed year, in the end 1995) to prices of the preceding year as basis for calculating macroeconomic time series in real terms. Compared to the previous SNA, the new system offers a wider range of possibilities to interpret theoretically relevant variables empirically. There are, for instance, at least three possibilities to express the main aggregates of an economy in real terms. At least two of them are no longer additive in respect to the sub-aggregates they comprise. But this is not the only problem: Quarterly data of macro-economic variables are calculated by using the annual overlap method which cannot always easily handled by such a standard program for time-series analysis like E-Views. Both problems raised serious concerns about the applicability of econometric models to the new data basis. The focus of the paper is laid on the basic features of the new possibilities to express macro-economic aggregates in real terms. It turns out that the non-additivity of some variables is not a problem as far as non-additive chained time series can be altered to additive non-chained time series and vice versa.

Keywords:

System of National Accounts, econometric modelling, non-additivity, quarterly data, annual overlap method

JEL-Classification C8, E0

Kontakt:
Doz. Dr. Georg Quaas
Wirtschaftswiss. Fakultät
Universität Leipzig
Grimmaische Str.12
04109 LEIPZIG

Tel.: 0341-9733536
e-Mail: quaas@uni-leipzig.de
Homepage: www.georg-quaas.de, sowie: www.forschungsseminar.de

Inhaltsverzeichnis

Realgrößen und Preisindizes im alten und im neuen VGR-System

All' denjenigen gewidmet, die geglaubt, gehofft oder gefürchtet haben, dass mit der Revision der VGR im Jahr 2005 dem Bau ökonometrischer Volkswirtschaftsmodelle in Deutschland ein Ende gesetzt ist.

1 Einleitung

Das neue, im Jahr 2005 eingeführte System der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen (VGR) ist kein Mysterium. Neben den inhaltlichen Veränderungen der Definition von VGR-Größen, die Dienstleistungen der Banken abbilden, und neben dem Übergang von der Festpreis- zur Vorjahrespreisbasis, durch die längerfristige Entwicklungen verlässlicher dargestellt und – durch die zeitnahe Bewertung – Verzerrungen durch Substitutionseffekte und Veränderungen der Preisstruktur verringert werden sollen, entfalten die neuen VGR ein wesentlich breiteres Spektrum von Messgrößen, die verschiedene Aspekte (Komponenten, hier auch als Dimensionen bezeichnet) der Hauptaggregate darstellen. Der folgende Text konzentriert sich auf die Definition und Berechnung von Realwerten[1] im Rahmen der VGR 2005[2], spart also alle rechtlichen und inhaltlichen Fragen aus, die mit dem neuen System verbunden sind und die in der unten angegebenen Literatur breit erörtert werden (zur Geschichte vgl. Voy 2009a, insb. Speich 2009, S.139).

Anlass der Studie war ein Artikel von Tödter, der mit Blick auf die Erfahrungen mit verketteten Volumina in den USA die empirischen Wirtschaftsforscher und insbesondere die ökonometrische Zunft dieses Landes mit dem Hinweis erschreckte,[3] dass die Additivität der Realgrößen im Rahmen der neuen VGR nicht mehr gegeben ist: „Dagegen addieren sich die realen Komponenten des BIP auf Vorjahrespreisbasis nicht mehr zum realen BIP.“ (Tödter 2005, S.2) Das gilt in Bezug auf die Verketteten Volumenaggregate, wie Tödter an vielen Stellen ausdrücklich unterstreicht. Unverkettete Volumina, die man aus den veröffentlichten Größen berechnen oder sich vom Statistischen Bundesamt zusenden lassen kann, sind nicht betroffen. Obwohl Tödter von der Additivität

---

[1] Der Begriff der *Realwerte* wird hier im allgemeinen für deflationierte makroökonomische Größen verwendet. Die Realwerte des Bruttoinlandsproduktes, des Bruttonationaleinkommens und des Verfügbaren Einkommens, die in Abschnitt 4.10 kurz behandelt werden, gehören dazu, sind aber schon sehr spezielle Realwerte. An späterer Stelle erfolgt dann eine Einengung dieses Begriffes auf die Unverketteten Volumina. Was jeweils gemeint ist, dürfte aus dem Kontext hervorgehen.

[2] Diese Bezeichnung ist hier als Abkürzung für das in Deutschland seit 1999 auf der Grundlage der Vorgaben des Europäischen Systems der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung (ESVG) 1995 realisierte VGR-System nach der Revision von 2005 zu verstehen. Die ESVG 1995 ist im Amtsblatt der Europäischen Gemeinschaft vom 30.11.1996 in Form einer Verordnung der EG Nr. 2223/96 veröffentlicht worden.

[3] Zur Bedeutung der Additivität für ökonometrische Volkswirtschaftsmodelle siehe Anhang 7.4.

dieser Realwerte implizit Gebrauch macht, erwähnt er sie nicht. Da die Additivität der Hauptaggregate eine wesentliche Rolle in volkswirtschaftlichen ökonometrischen Modellen spielt, wäre es für den Modellbau und die darauf gestützten wissenschaftlichen Leistungen (Prognosen, Simulationen, Analysen) verheerend, wenn jene Behauptung für alle rechenbaren Realwerte richtig wäre.

Ein ähnlich einseitiger Eindruck wird jedoch auch in anderen Publikationen erweckt, so dass Tödters Artikel hier nur stellvertretend für eine in Deutschland unterschwellig vorhandene Haltung zur VGR 2005 steht. Frenkel und John schreiben in ihrem 2006 erschienenen Buch zur VGR: „Ein Nachteil ist … in der Eigenschaft zu sehen, dass sich mit Hilfe von Kettenindizes preisbereinigte Teilaggregate des Inlandsprodukts nicht zu dem Wert des preisbereinigten Gesamtaggregats addieren. Deswegen ist u. a. eine Ermittlung des preisbereinigten Außenbeitrages nicht mehr möglich.“ (Frenkel / John 2006, S.121.) Ähnlich äußert sich Brümmerhoff (2007, S.111 f.), aber auch Speich (2009, S.140.) – Um es noch einmal zu sagen: Zwar sind diese Aussagen nicht falsch, aber einseitig, wenn die Additivität der Unverketteten Volumina (in konstanten Vorjahrespreisen) nicht erwähnt wird. Als Gegenbeispiel lässt sich das Buch von Lequiller und Blades (2006, S.54 ff.) anführen, in dem darauf hingewiesen wird, dass eine vollständige Nicht-Additivität (wie beim Fisher-Index) nicht vorliegt. Am Beispiel des Interlink-Modells der OECD wird erläutert, wie dort das Problem mit Hilfe der Volumina in konstanten Vorjahrespreisen behandelt wird.

Bemerkenswert ist, dass *die Lösung dieses Problems* (der additiven Inkonsistenz einiger Realgrößen) auch in Deutschland schon lange bekannt und – wie angemerkt – vom Statistischen Bundesamt inzwischen praktisch umgesetzt worden ist: „Um diesem Mangel wenigstens zum Teil abzuhelfen, wird das Statistische Bundesamt ergänzend Absolutwerte des realen Bruttoinlandsprodukts *in konstanten Preisen des Vorjahres* ausweisen.“ (Nierhaus 2004a, S.31). Damit liegt eine Realgröße vor, die additiv ist und somit den üblichen Anforderungen des Modellbauers genügt. Nicht gelöst ist damit allerdings ein anderes Problem, das der Berechnung der Vierteljahreswerte nach dem Verfahren „Annual-Overlap“ in ökonometrischen Modellen. Dabei sind es vor allem technische Schwierigkeiten, die überwunden werden müssen (Quaas 2009b). Problematisch ist des Weiteren das „Informationsproblem“. Die Gefahr falscher Berechnungen und Interpretationen der nicht-additiven Realwerte bleibt weiter bestehen und kann nur durch weitere Aufklärung und durch immer bessere Darstellungen der Zusammenhänge gemildert werden.

Im folgenden werden die verschiedenen Aspekte, unter denen eine deflationierbare volkswirtschaftliche Größe im neuen System der VGR dargestellt werden kann, dargelegt.[4] Dabei wird deutlich, dass jedes Hauptaggregat nicht nur in eine Mengen- und eine Preiskomponente zerlegt werden kann, sondern ein wesentlich breiteres Spektrum von verschiedenen Dimensionen aufweist, die messtheoretisch und messtechnisch in einem engen Zusammenhang stehen. Mit der umfassenden formelmäßigen Darstellung dieser Zusammenhänge, die ähnlich wie im alten System der VGR das Umrechnen der zu einem Aggregat gehörigen verschiedenen Größen (Dimensionen) erlauben, soll gezeigt werden, dass das Problem der Additivität der Realwerte nicht nur zum Teil, sondern vollständig gelöst ist, wenn man die Unverketteten Volumina in konstanten Vorjahrespreisen in den Mittelpunkt des Realgrößenkonzepts stellt. Das ist vor allem für den Bau ökonometrischer Modelle von enormer praktischer Bedeutung, der vor erheblichen Problemen stehen würde, wenn die These der Nicht-Additivität für alle konstruierbaren Realgrößen gelten würde. Der mit den Unverketteten Volumina (Realgrößen in konstanten Vorjahrespreisen) verbundene Mangel der zeitlichen Unvergleichbarkeit (Nierhaus 2004a, S.32) kann jederzeit durch Umrechnung in die Verketteten Volumina bei der tabellenmäßigen Darstellung der Ergebnisse behoben werden – vorausgesetzt, dass die Additivität der Realgrößen im Kern beispielsweise eines ökonometrischen Modells oder einer Excel-Tabelle (siehe Anhang Tab.1 und 2) gesichert ist.

Implizit wird mit der folgenden Darstellung – angelehnt an die Terminologie des Statistischen Bundesamtes (StBA) – auch ein Vorschlag unterbreitet, wie die verschiedenen Dimensionen eines volkswirtschaftlichen Aggregats griffig (vor allem aber: verwechslungsfrei) bezeichnet und symbolisiert werden könnten.[5] Die klare formelmäßige Darstellung der verschiedenen Größen (Dimensionen), die ein volkswirtschaftliches Aggregat unter verschiedenen Aspekten erfassen, und vor allem ihrer Zusammenhänge ist eine Voraussetzung dafür, künftigen Fehlinterpretationen und falsche Berechnungen vorzubeugen. Dazu müssen alle Dimensionen, insbesondere die Unverketteten Volumina, explizit dargestellt werden. Für die Behandlung des Problems der Vierteljahreswerte für Realgrößen in ökonometrischen Modellen werden hier die Grundlagen zusammengestellt. Eine Erörterung der dabei auftretenden technischen Probleme im Rahmen ökonometrischer und nicht-ökonometrischer[6] Modelle ist an anderer Stelle erfolgt (Quaas 2009b).

---

[4] Die Schwierigkeiten der Deflationierung der Staatsproduktion beschreibt u.a. Brümmerhoff 2009, S.340 ff.

[5] Zu diesem Vorschlag gehört auch der Begriff der Dimension, der m. W. n. bislang in lockerer Weise zur Kennzeichnung anderer Aspekte der VGR verwendet wurde, z.B. für verschiedene Darstellungsebenen der VGR, die auf unterschiedlichen Darstellungseinheiten beruhen (Voy 2009c, S.287). Ähnlich unterscheidet Franz (1996, S.213) 3 „Bestimmungsdimensionen" der Regionalen Gesamtrechnungen, nämlich Wirtschaftszweige, Regionen und Statistische Einheiten. – Verwechslungen mit dem hier eingeführten Begriff der Dimension dürften nicht zu befürchten sein.

[6] Damit ist u. a. das Nelson-Winter-Modell gemeint.

2 Preis- und Mengenindizes nach Laspeyres und nach Paasche

Für die Darstellung der Änderungen, die die Umstellung der VGR im Jahre 2005 mit sich brachte, ist es nützlich, zunächst einige Eigenschaften der Preis- und Mengenindizes nach Laspeyres und nach Paasche in Erinnerung zu rufen.

2.1 Preisindizes nach Laspeyres[7]

Charakteristisch für den Laspeyres-Index ist, dass in der Basisperiode 0 ein aus *n* Gütern bestehendes Bündel (Aggregat) $q_1^0, q_2^0, ..., q_n^0$ gewählt wird, dass mit den Preisen $p_1, p_2, ..., p_n$ der Basisperiode 0 und der Berichtsperiode *y* bewertet wird.[8] Der Index ergibt sich dann als das Verhältnis der so ermittelten Werte:

$$L_P^0(0, y) = \frac{\sum_i q_i^0 p_i^y}{\sum_i q_i^0 p_i^0}.^9 \qquad (1)$$

Indizes werden oft in Prozent angegeben. Dazu müsste beispielsweise Gleichung (1) mit 100 multipliziert werden, während andere Gleichungen weiter unten durch 100 dividiert werden müssten. Um die abwechselnde Multiplikation und Division der Formeln mit und durch 100 zu vermeiden, werden sie hier als Dezimalzahl notiert.

Für den Vergleich zwischen zwei von der Basisperiode verschiedenen Perioden, bezeichnet durch *x* und *y*, lässt sich die obige Definition folgendermaßen verallgemeinern (vgl. Haslinger 1990, S.166):

$$L_P^0(x, y) = \frac{\sum_i q_i^0 p_i^y}{\sum_i q_i^0 p_i^x}. \qquad (2)$$

Hierbei werden die Preise der Berichtsperiode *y* mit den Preisen einer Referenzperiode *x* verglichen, während das Güterbündel aus der Basisperiode 0 stammt.

Mit Hilfe jener verallgemeinerten Definition lässt sich zeigen, dass man mit den Indizes von Laspeyres einen Kettenindex konstruieren kann, für den gilt:

---

[7] Eine leicht verständliche Einführung in das Thema „Preis- und Mengenindizes“ findet man u.a. bei Stobbe 1989, S.142 ff.

[8] Als Periode wird zunächst das Jahr angesehen. Weiter unten werden auch Quartale betrachtet. - Die Bezeichnung von Perioden mit den Symbolen *x* und *y* weicht von der üblicherweise verwendeten Notation mit *t*, *t'* etc. aus Gründen der leichteren Erkennbarkeit in Formeln mit doppelt hochgestellten Indizes ab.

[9] Die Summation erfolgt idealerweise über alle Güter, in praxi über die gewichteten Gütergruppen eines ausgewählten Warenkorbs.

$$L_P^0(0,1)\cdot L_P^0(1,2)\cdot \ldots \cdot L_P^0(x-1,x)=L_P^0(0,x). \tag{3}$$

Denn es ist:

$$\frac{\sum_i q_i^0 p_i^1}{\sum_i q_i^0 p_i^0}\cdot\frac{\sum_i q_i^0 p_i^2}{\sum_i q_i^0 p_i^1}\cdot\ldots\cdot\frac{\sum_i q_i^0 p_i^x}{\sum_i q_i^0 p_i^{x-1}}=\frac{\sum_i q_i^0 p_i^x}{\sum_i q_i^0 p_i^0}. \tag{4}$$

Offenbar ist die Konstruktion eines solchen Kettenindexes bei gegebener Basisperiode überflüssig, da er mit einem gewöhnlichen Preisindex ebenfalls zum Ausdruck gebracht werden kann.

Anwendung findet der Laspeyres-Preisindex u.a. bei der Darstellung der Veränderung von Tariflöhnen und –gehältern.

2.1.1 Anwendungsbeispiel Tariflöhne

Durch $q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0$ werde auf repräsentative Weise die Struktur der Arbeiter und Angestellten in den nachzuweisenden Wirtschaftszweigen im Jahr 2000 dargestellt, und durch die Preise p_i die in Tarifverträgen desselben Jahres festgelegten Grundlöhne und Endgehälter in der höchsten tariflichen Ortsklasse und Alterstufe (Definition des Bundesamtes). Dann ist $\sum_i q_i^0 p_i^0$ der durchschnittliche tarifliche Monatslohn (Lohnsumme) aus dem Jahr 2000. Berichtet wird das Verhältnis des Monatslohnes der Tarifabschlüsse aus dem Jahr *x*, der sich bei derselben Beschäftigtenstruktur ergeben würde, nämlich $\sum_i q_i^0 p_i^x$, zu dem aus dem Jahre 2000, also das Maß

$$ITL(0,x)=\frac{\sum_i q_i^0 p_i^x}{\sum_i q_i^0 p_i^0}. \qquad \text{(Index der tariflichen Stundenlöhne)}$$

Der Index ist so konstruiert, dass sich für das Jahr 2000 100 Prozent ergeben. Wegen Gleichung (4) gilt für die Indizes der zwischen *x* und 0 liegenden Referenzjahre

$$ITL(0,x)=ITL(0,1)\,ITL(1,2)\cdots ITL(x-1,x).$$

Offenbar ist

$$ITL\left(x-1,x\right)=\frac{\sum_i q_i^0 p_i^x}{\sum_i q_i^0 p_i^{x-1}}$$

die Veränderung der Tariflöhne im Vergleich zum Vorjahr. Das kann wie folgt demonstriert werden:
Für *x*-1 gilt:

$$ITL\left(0,x-1\right)=ITL\left(0,1\right)ITL\left(1,2\right)\cdots ITL\left(x-2,x-1\right).$$

Daher ergibt sich für

$$ITL\left(x-1,x\right)=\frac{ITL\left(0,x\right)}{ITL\left(0,x-1\right)},$$

d.h. die Veränderung des Indexes gegenüber dem Vorjahr.

Die vierteljährlichen Indizes der Tariflöhne zeigen die Abweichungen, die es innerhalb eines Jahres vom Jahresdurchschnitt gegeben hat. Als „Veränderung zum Vorjahr" werden nicht – wie man vermuten könnte – die Abweichungen vom Vorjahresdurchschnitt, sondern die Abweichung vom entsprechenden Quartal des Vorjahres (in Prozent) berichtet.

2.2 Mengenindex nach Laspeyres

Der Mengenindex nach Laspeyres lässt sich allgemein definieren durch:

$$L_M^0(x,y)=\frac{\sum_i q_i^y p_i^0}{\sum_i q_i^x p_i^0}. \tag{5}$$

Dabei bezeichnet der Index 0 die Basisperiode, *x* die Referenzperiode und *y* die Berichtsperiode. Charakteristisch für diesen Mengenindex ist, dass die Preise $p_1^0, p_2^0, \ldots, p_n^0$ der Basisperiode 0 dem Vergleich der Mengen aus der Periode *x* und *y* zugrunde liegen.

Die Mengenindizes nach Laspeyres lassen sich folgendermaßen miteinander verketten und durch einen einfachen Index ersetzen:

$$L_M^0\left(0{,}1\right)\cdot L_M^0\left(1{,}2\right)\cdot\ldots\cdot L_M^0\left(x-1,x\right)=L_M^0\left(0,x\right). \tag{6}$$

Der Beweis ist dem für die Kette der Preisindizes analog.

Offenbar ist die Konstruktion eines solchen Kettenindexes bei fixer Basisperiode 0 überflüssig, da er mit einem gewöhnlichen Preisindex ebenfalls zum Ausdruck gebracht werden kann.

Ähnlich wie in (6) werden in der VGR 2005 Kettenindizes für die Mengen konstruiert. Allerdings lassen sich letztere nicht durch Kürzen von Termen vereinfachen. Deshalb hat der Laspeyres-Kettenindex in der neuen VGR eine selbständige Bedeutung neben den Elementen (Kettengliedern), aus denen er sich aufbaut.

2.3 Preisindex nach Paasche

Im Unterschied zum Preisindex nach Laspeyres liegt beim Preisindex nach Paasche das Güterbündel der *Berichtsperiode y* dem Vergleich der Preise zugrunde:

$$P_P(x,y)=\frac{\sum_i q_i^y p_i^y}{\sum_i q_i^y p_i^x}. \tag{7}$$

Das eben genannte Charakteristikum hat zur Folge, dass die *Referenzperiode x* zugleich *Basisperiode* ist und dem entsprechend nicht mehr zwischen beiden unterschieden werden kann. Der hochgestellte Index ist dem entsprechend fortgelassen worden.

Man kann die Spezifik des Preisindex nach Paasche auch so ausdrücken: Der Wert eines Güterbündes der Berichtsperiode wird mit dem Wert, den dasselbe Güterbündel in der Referenzperiode (= Basisperiode) bei den dort geltenden Preisen hätte, ins Verhältnis gesetzt. Wird die Referenzperiode (= Basisperiode) fixiert, so spricht man auch von einer Festpreisbasis der entsprechenden Realwerte. Die Preisentwicklung gegenüber der Festpreisbasis wird dann als Paasche-Index mit wechselnder Gewichtung, weil aufgrund eines Warenkorbs aus der Berichtsperiode, angegeben.
Multipliziert man eine Folge von Preisindizes (7) nach dem Muster (4) miteinander, ergibt sich:

$$P_P(0,1)\cdot P_P(1,2)\cdot\ldots\cdot P_P(x-1,x)=\frac{\sum_i q_i^1 p_i^1}{\sum_i q_i^1 p_i^0}\cdot\frac{\sum_i q_i^2 p_i^2}{\sum_i q_i^2 p_i^1}\cdot\ldots\cdot\frac{\sum_i q_i^x p_i^x}{\sum_i q_i^x p_i^{x-1}}.$$

Andererseits ist

$$P_P(0,x)=\frac{\sum_i q_i^x p_i^x}{\sum_i q_i^x p_i^0}.$$

Wie man sieht, ist hier eine Verkettung zwar auch möglich, aber ungleich den Laspeyres-Indizes ist eine Reduktion auf einen einzigen Index, der Referenz- und Basisperiode ins Verhältnis setzt, nicht möglich; der Paasche-Index besteht den Zirkularitätstest nicht,[10] und es gilt:

$$P_P(0,1)\cdot P_P(1,2)\cdot\ldots\cdot P_P(x-1,x)\neq P_P(0,x). \tag{8}$$

2.4 Mengenindex nach Paasche

Der Unterschied zum Mengenindex nach Laspeyres besteht darin, dass die Preise der Berichtsperiode y dem Vergleich der Mengen zugrunde liegen:

$$P_M(x,y)=\frac{\sum_i q_i^y p_i^y}{\sum_i q_i^x p_i^y}. \tag{9}$$

Analog zu der obigen Darstellung des Preisindexes lässt sich auch für den Mengenindex zeigen, dass er den Zirkularitätstest nicht besteht.

2.5 Zusammenhänge zwischen Laspeyres- und Paasche-Indizes

(i) Wegen

$$\frac{\sum_i q_i^y p_i^y}{\sum_i q_i^x p_i^x}=\frac{\sum_i q_i^x p_i^y}{\sum_i q_i^x p_i^x}\cdot\frac{\sum_i q_i^y p_i^y}{\sum_i q_i^x p_i^y}$$

[10] Vgl. Haslinger 1990, S.162. - Mathematiker würden sagen, dass dieses Maß nicht transitiv ist.

gilt

$$V(x,y) = L_P^x(x,y) P_M(x,y). \tag{10}$$

M.a.W.: Multipliziert man den Preisindex nach Laspeyres $L_P^x(x,y)$ mit dem Mengenindex nach Paasche $P_M(x,y)$, so erhält man den Wertindex $V(x,y)$, der die Nominalgrößen der Perioden x und y miteinander in Beziehung setzt. Dividiert man umgekehrt den Wertindex V durch den Laspeyres-Preisindex L_P, so erhält man den Mengenindex nach Paasche P_M, der deshalb auch als *impliziter Mengenindex* bezeichnet wird.

(ii) Wegen

$$\frac{\sum_i q_i^y p_i^y}{\sum_i q_i^x p_i^x} = \frac{\sum_i q_i^y p_i^y}{\sum_i q_i^y p_i^x} \cdot \frac{\sum_i q_i^y p_i^x}{\sum_i q_i^x p_i^x}$$

gilt auch

$$V(x,y) = P_P(x,y) L_M^x(x,y). \tag{11}$$

M.a.W.: Dividiert man den Wertindex V, der die Nominalgrößen der Perioden x und y miteinander in Beziehung setzt, durch den Paasche-Preisindex P_P, so erhält man den (impliziten) Mengenindex nach Laspeyres L_M.

3 Preisindizes und Realgrößen nach dem alten System der VGR

Die *nominale* Größe eines beliebigen VGR-Aggregats G der Periode x wird wie folgt definiert:

$$G_{Nom}(y) = \sum_i q_i^y p_i^y. \tag{12}$$

Die dazugehörige *reale* Größe wurde nach den alten VGR auf die Preise eines Basisjahrs 0 (Festpreisbasis) bezogen:

$$G_{\mathrm{Re}al}(y) = \sum_i q_i^y p_i^0. \tag{13}$$

Der dazugehörige Preisindex

$$PI(0,y) = \frac{G_{Nom}(y)}{G_{Real}(y)} = \frac{\sum_i q_i^y p_i^y}{\sum_i q_i^y p_i^0} \tag{14}$$

ist ein Preisindex nach Paasche, der einen Mengenindex nach Laspeyres impliziert, d.h., der Wertindex ist gleich dem Produkt aus Preisindex (nach Paasche) und Mengenindex (nach Laspeyres):

$$V(0,y) = \frac{G_{Nom}(y)}{G_{Nom}(0)} = \frac{\sum_i q_i^y p_i^y}{\sum_i q_i^0 p_i^0} = \frac{\sum_i q_i^y p_i^y}{\sum_i q_i^y p_i^0} \frac{\sum_i q_i^y p_i^0}{\sum_i q_i^0 p_i^0} = PI(0,y)MI(0,y),$$

dabei ist

$$MI(0,y) = \frac{G_{Real}(y)}{G_{Nom}(0)} = \frac{\sum_i q_i^y p_i^0}{\sum_i q_i^0 p_i^0} \qquad (15)^{11}$$

das Pendant zu (5).

Vom Statistischen Bundesamt (im weiteren: StBA) wurden neben den nominalen Größen die Werte für den Preisindex und die Realgrößen ausgewiesen. Dieses System hat die Eigenschaft, dass Identitäten, die für nominale Größen aufgestellt werden, auch für Realgrößen gelten. Sei

$G(y) = G_1(y) + G_2(y)$ für alle Jahre y, (16)

so gilt:[12]

$$G_{Real}(y) = G_{1,Real}(y) + G_{2,Real}(y). \tag{17}$$

Ergänzend sei darauf hingewiesen, dass die impliziten Mengenindizes nach Laspeyres in diesem VGR-System selbstverständlich auch miteinander verkettet werden können. Es gilt:

---

[11] Mit der Einführung neuer Symbole für Mengen- und Preisindizes wird hier dem Umstand Rechnung getragen, dass das Europäisches System der VGR den Preisindex nach Paasche und den Mengenindex nach Laspeyres favorisiert.

[12] Der Beweis wird unten für Realgrößen – gemessen in Vorjahrespreisen – geführt; für Preise einer fixierten Basisperiode verläuft der Beweis analog.

$$MI(0,1)\cdot MI(1,2)\cdot \ldots \cdot MI(y-1,y)=MI(0,y). \tag{18}$$

Mit den Bezeichnungen für Nominal- und Realgrößen folgt daraus:

$$\frac{G_{\mathrm{Real}}(1)}{G_{Nom}(0)}\cdot\frac{G_{\mathrm{Real}}(2)}{G_{\mathrm{Real}}(1)}\cdot\ldots\cdot\frac{G_{\mathrm{Real}}(y)}{G_{\mathrm{Real}}(y-1)}=\frac{G_{\mathrm{Real}}(y)}{G_{Nom}(0)}. \tag{19}$$

Da im alten VGR-System die Realgrößen nicht mit Hilfe der Mengenindizes angegeben wurden, hat dieser Zusammenhang praktisch keine Rolle gespielt.

4. Preis- und Mengendarstellungen in den VGR 2005

Wie einleitend bereits angemerkt, weisen die Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen nach der Revision 2005 ein wesentlich breiteres Spektrum zur Darstellung von Realgrößen und ihrer Entwicklung auf. Die Grundlage dafür sind und bleiben die Preis- und Mengenindizes, auch wenn sie vom StBA nicht unter diesem Namen berichtet werden.

4.1 Mengenindex nach dem neuen System der VGR 2005

Aufbauend auf einer Entscheidung der EU-Kommission vom 30. November 1998, wonach die *reale* Größe eines beliebigen Aggregats *G* nicht wie in (13) in Preisen einer fixen Basisperiode, sondern in Vorjahrespreisen angegeben werden soll, wird in Deutschland der Mengenindex nach Laspeyres favorisiert - im Unterschied zu den statistischen Ämtern der USA und Kanadas, die sich für einen Fisher-Mengenindex entschieden haben (Nierhaus 2004b, S.14ff.). Die Umsetzung der Kommissionsentscheidung bedeutet, dass eine Realgröße in Vorjahrespreisen definiert wird durch die Formel:

$$G_{\mathrm{Real}}(y)=\sum_i q_i^y\, p_i^{y-1}.\text{[13]} \tag{20}$$

Damit ist beabsichtigt, die Realgrößen durch die zeitnahe Preisbewertung adäquater abzubilden und die Abhängigkeit der Veränderungsraten von der jeweiligen Festpreisbasis zu beseitigen (vgl. Nierhaus 2004b, 14f.). Der Mengenindex eine Größe *G* wird demnach definiert durch:

---

[13] Im neuen System der VGR gibt es mindestens 4 Möglichkeiten, Realgrößen (im weitesten Sinn) anzugeben: in Vorjahrespreisen, als Mengenindex, als Kettenindex und in Form der Verketteten Absolutwerte. Wenn im Folgenden kurz von „Realgrößen" – gegebenenfalls mit dem Zusatz: „in Vorjahrespreisen" – gesprochen wird, dann ist in der Regel (20) gemeint. Damit wird also eine Einengung des allgemeinen Begriffes der Realgröße auf die Unverketteten Volumina vorgenommen (siehe auch Fußnote 2). – Wie bereits gesagt, stellen die Realgrößen in Abschnitt 4.10 eine spezielle Gattung dar.

$$MI(G,y) = MI\left(G, y-1, y\right) = \frac{G_{\mathrm{Re}al}\left(y\right)}{G_{Nom}\left(y-1\right)} = \frac{\sum_i q_i^y p_i^{y-1}}{\sum_i q_i^{y-1} p_i^{y-1}}. \tag{21}$$

Wie man sieht, handelt sich um einen Mengenindex nach Laspeyres, bei dem das Basisjahr *y*-1 nicht fixiert wird, sondern ständig wechselt (Vorjahrespreisbasis).

Der (jährliche) Mengenindex wird vom Statistischen Bundesamt als prozentuale Veränderung eines (weiter unten beschriebenen) *Kettenindexes* berichtet.

4.2 Preisindex nach den VGR 2005

Es handelt sich um einen Preisindex nach Paasche:

$$PI\left(G,y\right) = \frac{G_{Nom}\left(y\right)}{G_{\mathrm{Re}al}\left(y\right)} = \frac{\sum_i q_i^y p_i^y}{\sum_i q_i^y p_i^{y-1}}, \tag{22}$$

bei dem die Preise der (Berichts-) Periode *y* mit denen des Vorjahres (Referenz- und Basisperiode) verglichen werden. Der (jährliche) Preisindex wird vom Statistischen Bundesamt als Veränderung gegenüber dem Vorjahr eines Kettenindexes für die Preise („Preisentwicklung", siehe unten) ausgewiesen.

4.3 Zusammenhang zwischen Mengen- und Preisindex in den VGR 2005

Multipliziert man (21) mit (22), so erhält man

$$MI\left(G,y\right)PI\left(G,y\right) = V\left(G,y,y-1\right). \tag{23}$$

Mengenindex multipliziert mit Preisindex ergibt den Volumen- oder Wertindex. Diese Beziehung wurde oben bereits abgeleitet.

4.4 Der Kettenindex für die Mengen

In den VGR 2005 wird aus dem Mengenindex ein Kettenindex gebildet, der sich multiplikativ aus den Indizes der einzelnen Jahre zusammensetzt und den wir hier mit *KI* bezeichnen.[14] Ein Kettenindex benötigt einen Fixpunkt: Für das Referenzjahr 2000 wird *KI* = 1 gesetzt.[15] Davon ausgehend gilt:

$$KI(y) = KI(y-1) \cdot MI(y) \text{ für } y > 2000. \qquad (24)$$

Diese Formel ist für die Konstruktion des Ketten-(Mengen)-Indexes „nach vorn" verwendbar. Für den zeitlich „rückwärts" gerichteten Index muss die Formel umgestellt werden:

$$KI(y-1) = \frac{KI(y)}{MI(y)} \text{ für } y \le 2000. \qquad (25)$$

Für *y* > 2000 gilt:

$$KI(G,y) = MI(G,2001) \cdot MI(G,2002) \cdot \ldots \cdot MI(G,y) \qquad (26)$$

oder

$$KI(G,y) = \frac{G_{Real}(2001)}{G_{Nom}(2000)} \cdot \frac{G_{Real}(2002)}{G_{Nom}(2001)} \cdot \ldots \cdot \frac{G_{Real}(y)}{G_{Nom}(y-1)}. \qquad (26')$$

Ein Vergleich mit (6) macht deutlich, wie sich die Umstellung von der Festpreisbasis auf die Vorjahresbasis auswirkt:

(i) Während in (6) die Bezugsbasis der einzelnen Mengenindizes in der Kette eine fixierte Basisperiode ist, ist es im Kettenindex (26) stets die Nominalgröße des Vorjahres;

(ii) da es aufgrund der Fixierung auf die Vorjahresbasis keinen verallgemeinerten Mengenindex $MI(G,0,x,y)$ und insbesondere keinen Mengenindex $MI(G,0,0,y)$ mehr gibt, der die Mengen in der Berichtsperiode *y* mit denen einer länger als 1 Jahr zurückliegenden Basisperiode vergleicht, tritt an seine Stelle der Kettenindex $KI(G,y) = KI(G,0,y)$, der sich formal zwar ähnlich aufbaut wie ein verketteter Laspeyres-Index – vergleiche Gl. (26) mit (18) – aber nicht zu einem zusammenfassenden Laspeyres-(Mengen-)Index von Berichts- und Basisperiode (2000) reduziert werden kann. Das ist der Grund,

[14] Da die Elemente des Ketten-(Mengen-)Indexes Laspeyres-Mengen-Indizes sind, darf man ihn auch als Laspeyres-Ketten-(Mengen-)Index bezeichnen. Dabei darf aber nicht übersehen werden, dass es auch einen Paasche-Kettenindex gibt (siehe 4.5).

[15] Für die Daten der „alten" Bundesrepublik ist das Basisjahr 1991. Im folgenden wird *KI* = *KI*(2000) dargestellt.

weshalb in den VGR 2005 der Kettenindex und die Faktoren, aus denen er besteht, streng auseinander gehalten werden müssen.[16]

Die obige Gleichung für die Konstruktion des Kettenindexes läßt sich wie folgt umformen:

$$MI(y) = \frac{KI(y)}{KI(y-1)}. \tag{27}$$

Daraus ergeben sich die Veränderungsraten einer Realgröße im Vorjahresvergleich:

$$PCHKI(y) = \frac{KI(y)}{KI(y-1)} \cdot 100 - 100. \tag{28}$$

Wie man leicht sieht, sind die Veränderungsraten des Kettenindexes *KI* gegenüber dem Vorjahr in Prozent (28) der Substanz nach mit den Mengenindizes nach Laspeyres (27) identisch.[17] Der Kettenindex *KI* wird vom Statistischen Bundesamt anstelle der alten Realgrößen für die wichtigsten Verwendungsaggregate veröffentlicht – neben den dazugehörigen Veränderungsraten (hier: *PCHKI*) und dem Beitrag dieser Aggregate zum BIP (siehe unten).

4.5 Der Index für die Preisentwicklung

Aus den Preisindizes nach Paasche (25) wird ebenfalls ein Kettenindex gebildet, den wir hier in Anlehnung an seine Bezeichnung in den Tabellen des StBA „Preisentwicklung" (*PE*) nennen. Die Konstruktion erfolgt analog zu der des Kettenindexes für die Mengen:

$$PE(y) = PE(y-1) \cdot PI(y) \text{ für } y > 2000. \tag{29}$$

Dabei wird hier wieder $PE(2000) = 1$ gesetzt, um nicht ständig in Prozentpunkten umrechnen zu müssen.

Analog gilt:

[16] Tödter (2005:1-4) beispielsweise unterlässt es, Mengen- und Preisindizes explizit zu definieren. Das macht seine Formeln zwar nicht falsch, aber schwer überprüfbar. Die wesentlichen Formeln aus Tödters Arbeit werden im Rahmen dieser Darstellung rekonstruiert. Eine zusammenfassende Darstellung findet man im Anhang 7.3.

[17] Das gilt nur für Jahresdaten.

$$PE(y-1) = \frac{PE(y)}{PI(y)} \text{ für } y \leq 2000. \tag{30}$$

Die Preisentwicklung wird vom StBA für die Hauptaggregate der BIP-Verwendung veröffentlicht.

4.6 Folgerungen / Implizite Größen / Wichtige Beziehungen

Das System der VGR 2005 hat folgende Eigenschaften, von denen sich einige z.B. für die Berechnung der nicht berichteten Größen eignen:

Eigenschaft (i)

Die Mengenindizes eines Aggregats *G* erhält man aus den veröffentlichten Kettenindizes wie folgt:

$$MI(G,y) = \frac{KI(G,y)}{KI(G,y-1)}. \tag{27}$$

Wie bereits bemerkt, ist der Mengenindex mit der Veränderung des Kettenindexes (Vorjahresvergleich) identisch, die unter dieser Bezeichnung vom StBA berichtet wird. Um es noch einmal zu betonen: Diese Aussage wird hier nur für jährliche Daten gemacht.

Eigenschaft (ii)

Aus den Mengenindizes (27) lassen sich hilfsweise die im allgemeinen nicht berichteten Realgrößen – ausgedrückt in Vorjahrespreisen – errechnen:

$$G_{\mathrm{Re}al}(y) = G_{Nom}(y-1) \cdot MI(G,y), \tag{31}$$

also beispielsweise

BIP(2004) real = BIP(2003) nominal * Mengenindex (2004).

Da der Kettenindex gerundet berichtet wird, ergeben sich bei der Berechnung der Realgrößen mit Hilfe von (27) und (31) Abweichungen von den durch das StBA auf Nachfrage mitgeteilten exakten Realgrößen (gemessen in Vorjahrespreisen). Allerdings sind diese Daten nur für die Hauptaggregate erhältlich. Die offizielle Bezeichnung dieser preisbereinigten Größe ist „Unverkettete Volumenangaben in Vorjahrespreisen“.

Mit Hilfe der Gleichung (23) kann man (31) auch so schreiben:

$$G_{\mathrm{Re}al}(y) = \frac{G_{Nom}(y)}{PI(G,y)}. \tag{32}$$

Eigenschaft (iii)

Da die Realwerte in Vorjahrespreisen dem Laspeyres-Ansatz für die Mengenindizes entsprechen, gelten die VGR-Identitäten auch für diese Realgrößen, das heißt, die Summe der realen Teilaggregate muss mit der Größe des realen Gesamtaggregats übereinstimmen.

Beweis: Sei auf nominaler Ebene stets

$$G_{Nom}(y) = G_{1,Nom}(y) + G_{2,Nom}(y), \tag{33}$$

d.h. für alle Zeitperioden y (und damit auch für die unterschiedlichen Preisstrukturen der verschiedenen Jahre), also

$$\sum_{i=1}^{n} q_i^y p_i^y = \sum_{i=1}^{k} q_i^y p_i^y + \sum_{i=k+1}^{n} q_i^y p_i^y \text{ für alle Jahre } y,$$[18]

dann gilt für den Mengenindex:

$$MI(G,y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i^y p_i^{y-1}}{\sum_{i=1}^{n} q_i^{y-1} p_i^{y-1}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} q_i^y p_i^{y-1} + \sum_{i=k+1}^{n} q_i^y p_i^{y-1}}{\sum_{i=1}^{n} q_i^{y-1} p_i^{y-1}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{k} q_i^y p_i^{y-1}}{\sum_{i=1}^{k} q_i^{y-1} p_i^{y-1}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} q_i^{y-1} p_i^{y-1}}{\sum_{i=1}^{n} q_i^{y-1} p_i^{y-1}} + \frac{\sum_{i=k+1}^{n} q_i^y p_i^{y-1}}{\sum_{i=k+1}^{n} q_i^{y-1} p_i^{y-1}} \cdot \frac{\sum_{i=k+1}^{n} q_i^{y-1} p_i^{y-1}}{\sum_{i=1}^{n} q_i^{y-1} p_i^{y-1}}$$

[18] Der Beweis wird hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit für überlappungsfrei verschiedene Aggregate geführt. Güter derselben Art, die Teil verschiedener Aggregate sind, werden mit unterschiedlichen Indizes versehen. M.a.W.: Überlappungen hinsichtlich der Art der Güter sind möglich.

$$= MI\left(G_1, y\right) \cdot SH\left(G_1, y-1\right) + MI\left(G_2, y\right) \cdot SH\left(G_2, y-1\right).$$

D.h., der Mengenindex eines Totalaggregats ist gleich der Summe der zum Vorjahreszeitpunkt mit den Anteilen von G_1 bzw. G_2 an G gewichteten Mengenindizes der Teilaggregate (vgl. Nierhaus 2005, S.12). Bedenkt man, dass

$SH(G, y-1) = 1$, lässt sich die linke Seite wie folgt erweitern:

$$MI\left(G, y\right) \cdot SH\left(G, y-1\right) = MI\left(G_1, y\right) \cdot SH\left(G_1, y-1\right) + MI\left(G_2, y\right) \cdot SH\left(G_2, y-1\right).$$

Multiplizieren wir die letzte Gleichung mit dem Volumen von *G* zum Zeitpunkt *y*-1, so erhält man:

$$MI\left(G, y\right) \cdot G\left(y-1\right) = MI\left(G_1, y\right) \cdot G_1\left(y-1\right) + MI\left(G_2, y\right) \cdot G_2\left(y-1\right)$$

oder

$$G_{\mathrm{Re}al}\left(y\right) = G_{1,\mathrm{Re}al}\left(y\right) + G_{2,\mathrm{Re}al}\left(y\right), \tag{34}$$

was zu beweisen war.

Die hin und wieder geäußerte Meinung, die Realgrößen nach den VGR 2005 seien nicht additiv (z.B. Tödter 2005:1-2), ist für die Unverketteten Volumina (in konstanten Vorjahrespreisen) also nicht richtig.

4.6.1 Die Additivität der unverketteten Volumenangaben: Exkurs für Kenner der Matrizenrechnung

Mit Hilfe der Matrizenrechnung kann der Beweis formal allgemeiner und wesentlich kürzer geführt werden – er läuft im Grunde auf eine Trivialität hinaus:

Sei $Q\left(y\right) = \left[q_1^y q_2^y \ldots q_n^y\right]$ der (Zeilen-)Vektor, der das Aggregat $q_1^y, q_2^y, \ldots, q_n^y$ als *n*-Tupel darstellt, und $P\left(y\right) = \left(p_1^y, p_2^y, \ldots, p_n^y\right)$ der entsprechende (Spalten-)Vektor der Preise. Die Additivität der Nominalgröße für beliebige Zeitperioden setzt voraus, dass $Q\left(y\right)$ in (mindestens) zwei Teilaggregate $Q_1\left(y\right)$ und $Q_2\left(y\right)$ zerfällt:

$$Q(y)=Q_1(y)+Q_2(y).$$

Gl. (33) ergibt sich dann durch rechte Multiplikation dieser Gleichung mit dem Preisvektor $P(y)$:

$$G_{Nom}(y)=Q(y)P(y)=Q_1(y)P(y)+Q_2(y)P(y)=G_{1,Nom}(y)+G_{2,Nom}(y).$$

Ersetzt man den Preisvektor $P(y)$ durch den Vektor der Preise des Vorjahres $P(y-1)$, so führt die rechte Multiplikation dagegen zu:

$$G_{\mathrm{Re}al}(y)=Q(y)P(y-1)=Q_1(y)P(y-1)+Q_2(y)P(y-1)=G_{1,\mathrm{Re}al}(y)+G_{2,\mathrm{Re}al}(y).$$

W. z. b. w.

Eigenschaft (iv)

Aus (27) und (31) folgt für die Realgrößen:

$$G_{\mathrm{Re}al}(y)=G_{Nom}(y-1)\frac{KI(G,y)}{KI(G,y-1)}. \tag{35}$$

Eigenschaft (v)

Aus (29) folgt

$$PI(y)=\frac{PE(y)}{PE(y-1)}, \tag{36}$$

d.h. der Preisindex ist – wie oben bereits festgestellt – der Substanz nach mit der Veränderung der *Preisentwicklung* gegenüber dem Vorjahr identisch und wird unter dieser Bezeichnung vom StBA berichtet. Die Identität gilt allerdings nur für die jährlichen Indizes.

Eigenschaft (vi)

Der Preisindex (nach Pasche) und der Mengenindex (nach Laspeyres) können sinnvoll miteinander multipliziert werden:

$$PI(y)MI(y) = \frac{G_{Nom}(y)}{G_{Real}(y)} \cdot \frac{G_{Real}(y)}{G_{Nom}(y-1)} = \frac{G_{Nom}(y)}{G_{Nom}(y-1)} = V(y, y-1). \quad (37)$$

Diese Formel lässt sich u.a. für Proberechnungen benutzen oder für die Bestimmung des Preisindexes (Mengenindexes) aus dem Mengenindex (Preisindex).

Eigenschaft (vii)

Peter von der Lippe legte in einer Diskussion zu den neuen VGR wert auf die Feststellung, dass nur der Paasche-Preisindex additive Volumina (Realgrößen) liefert (von der Lippe 2007, 62 ff.). Da sowohl die alten als auch die neuen VGR auf einem Preisindex nach Paasche beruhen, müssen die Unterschiede zwischen den beiden Systemen also woanders gesucht werden, z.B. zwischen Vorjahres- und Festpreisbasis.

Es gelte (33), d.h. wir betrachten ein Aggregat, das aus zwei Teilaggregaten besteht, und teilen durch den Vorjahrespreisindex des Gesamtaggregats:

$$\frac{G(y)}{PI(y)} = \frac{G_1(y)}{PI(y)} + \frac{G_2(y)}{PI(y)}.$$

In der Tat wäre der Nachweis der Additivität der Realgrößen kein Kunststück, wenn die beiden Terme auf der rechten Seite mit den Realgrößen der Teilaggregate identisch wären. Das sind sie aber nicht. Vielmehr muss jedes Teilaggregat durch seinen eigenen Preisindex geteilt werden. Trotzdem soll gelten, dass die linke gleich der rechten Seite ist:

$$\frac{G(y)}{PI(y)} = \frac{G_1(y)}{PI_1(y)} + \frac{G_2(y)}{PI_2(y)}.$$

Das ist aber nur der Fall, wenn

$$\frac{1}{PI(y)} = \frac{SH(G_1, y)}{PI_1(y)} + \frac{SH(G_2, y)}{PI_2(y)}$$

ist, „so dass der Gesamt(Preisindex) … ein mit aktuellen … Wertanteilen … gewogenes harmonisches Mittel der (sektoralen) Teil-Preisindizes sein muss, also *nur* ein direkter Paasche Preisindex … sein kann [Formeln wegen abweichender Notation weggelassen – G.Q.].“ (von der Lippe 2007, S. 64.)

4.7 Die Verketteten Absolutwerte (Volumina)

Die vom Statistischen Bundesamt berichteten Verketteten Absolutwerte ergeben sich durch Multiplikation des Ketten-(Mengen-)Indexes mit dem Volumen von 2000 (dem derzeitigen Referenzjahr) in laufenden Preisen, also durch Multiplikation mit der Nominalgröße vom Jahr 2000:

$$G_{Abs}(y) = KI(G, y)G_{Nom}(2000). \tag{38}$$

Durch wiederholte Anwendung der Gl. (37)

$$PI(y)MI(y) = V(y, y-1)$$

erhält man:

$$\frac{G_{Nom}(y)}{G_{Nom}(2000)} = MI(y)PI(y)MI(y-1)PI(y-1)\cdots MI(2001)PI(2001),$$

woraus

$$\frac{G_{Nom}(y)}{PI(y)PI(y-1)\cdots PI(2001)} = MI(y)MI(y-1)\cdots MI(2001)G_{Nom}(2000)$$

oder nach Zusammenfassung und Vertauschung der beiden Seiten

$$G_{Abs}(y) = \frac{G_{Nom}(y)}{PE(y)} \tag{39}$$

folgt.

Die Konstruktion der Verketteten Absolutwerte erlaubt, eine gewisse Analogie zwischen (39) und den Realwerten im vorangegangenen VGR-System zu ziehen, beispielsweise gilt auf Preisbasis 1995 aufgrund von (14):

$$G_{\mathrm{Re}al}(1995, y) = \frac{G_{Nom}(y)}{PI(1995, y)}. \tag{40}$$

Wie man sieht, hat die „alte“ Gleichung (40) zur Umrechnung von Nominalwerten in Realwerten eine ähnliche Struktur wie die „neue“ Gleichung (39) zur Umrechnung von Nominalwerten in Verkettete Absolutwerte. Das gilt aber auch für die „neue“ Gl. (32), die der Umrechnung von Nominalwerten in

Unverkettete Volumina dient. Die beiden Gleichungen (39) und (32) erfordern wohlgemerkt unterschiedliche Ausdrücke für die Veränderung der Preise. Damit wird noch einmal unterstrichen, wie wichtig es ist, in der VGR 2005 den Kettenindex *PE* von den Elementen *PI* zu unterscheiden, aus denen er besteht.[19]

Setzt man die Definitionsgleichung (24) für den Ketten-(Mengen-)Index in (38) ein, erhält man die Rekursionsformel für Verkettete Absolutwerte:

$$G_{Abs}(y) = KI(G, y-1)G_{Nom}(2000)MI(y) = G_{Abs}(y-1)MI(y)\ . \tag{41}$$

Aus (31) und (41) folgt eine interessante Strukturidentität:

$$\frac{G_{Abs}(y)}{G_{Abs}(y-1)} = \frac{G_{\mathrm{Re}al}(y)}{G_{Nom}(y-1)}\,. \tag{42}$$

Sie ist – bis auf die unterschiedliche Notation – identisch mit Formel (3) bei Tödter (2005, S.3).

Der (unverkettete) Realwert verhält sich also zum Nominalwert des Vorjahres wie der (verkettete) Absolutwert zum (verketteten) Absolutwert des Vorjahres.

Aus (29) folgt für $y > 2000$:

$$PE(y) = PE(y-1)PI(y) = PE(y-1)\frac{G_{Nom}(y)}{G_{\mathrm{Re}al}(y)}. \tag{43}$$

Fasst man (43) und (39) zusammen, erhält man – wenngleich in anderer Notation – Formel (4) aus Tödter (2005, S.3):

$$PE(y) = \frac{G_{Nom}(y)}{G_{Abs}(y)} = PE(y-1)PI(y) = PE(y-1)\frac{G_{Nom}(y)}{G_{\mathrm{Re}al}(y)}. \tag{44}$$

Daraus ergeben sich weitere Beziehungen, z.B. der Zusammenhang zwischen Unverketteten Realwerten und den Verketteten Absolutwerten:

$$G_{Abs}(y) = \frac{G_{\mathrm{Re}al}(y)}{PE(y-1)}. \tag{45}$$

[19] Zur Verwendung der unterschiedlichen Real- und Preisgrößen in Schätzgleichungen vgl. Quaas 2009a.

Für 2001 (und nur für dieses Jahr) gilt, dass beide Größen gleich sind, da $PE(2000)=1$ ist:

$$G_{Abs}(2001)=\frac{G_{Real}(2001)}{PE(2000)}=G_{Real}(2001). \quad (46)$$

Für 2000 ist:

$$G_{Abs}(2000)=G_{Nom}(2000). \quad (47)$$

Sowohl die Nominal- als auch die Realgrößen der alten VGR hatten die Eigenschaft der Additivität. Man beachte, dass diese Eigenschaft für verkettete Absolutwerte nicht mehr gilt. Aus

$$G(y)=G_1(y)+G_2(y) \quad (48)$$

folgt im allgemeinen *keine* analoge Gleichung für die Verketteten Absolutwerte, sondern

$$G(y)_{Abs}\neq G_1(y)_{Abs}+G_2(y)_{Abs}. \quad (49)$$

Sei beispielsweise

$$G(2000)=G_1(2000)+G_2(2000)$$

und

$$y>2000.$$

Multiplizieren der Summengleichung mit dem Ketten-(Mengen-)Index ergibt auf der linken Seite die Verketteten Absolutwerte und ansonsten:

$$G(2000)KI(G,y)=G_1(2000)KI(G,y)+G_2(2000)KI(G,y)=$$

$$=SH(G_1,2000)G_{Nom}(2000)KI(G,y)+SH(G_2,2000)G_{Nom}(2000)KI(G,y)$$

$$= SH\left(G_1,2000\right)\cdot G_{Nom}\left(2000\right)\cdot\frac{G_{\mathrm{Re}al}\left(2001\right)}{G_{Nom}\left(2000\right)}\cdot\frac{G_{\mathrm{Re}al}\left(2002\right)}{G_{Nom}\left(2001\right)}\cdot\ldots\cdot\frac{G_{\mathrm{Re}al}\left(y\right)}{G_{Nom}\left(y-1\right)}+$$
$$+SH\left(G_2,2000\right)\cdot G_{Nom}\left(2000\right)\cdot\frac{G_{\mathrm{Re}al}\left(2001\right)}{G_{Nom}\left(2000\right)}\cdot\frac{G_{\mathrm{Re}al}\left(2002\right)}{G_{Nom}\left(2001\right)}\cdot\ldots\cdot\frac{G_{\mathrm{Re}al}\left(y\right)}{G_{Nom}\left(y-1\right)}$$
$$= SH\left(G_1,2000\right)\cdot G_{\mathrm{Re}al}\left(2001\right)\cdot\frac{G_{\mathrm{Re}al}\left(2002\right)}{G_{Nom}\left(2001\right)}\cdot\ldots\cdot\frac{G_{\mathrm{Re}al}\left(y\right)}{G_{Nom}\left(y-1\right)}+$$
$$+SH\left(G_2,2000\right)\cdot G_{\mathrm{Re}al}\left(2001\right)\cdot\frac{G_{\mathrm{Re}al}\left(2002\right)}{G_{Nom}\left(2001\right)}\cdot\ldots\cdot\frac{G_{\mathrm{Re}al}\left(y\right)}{G_{Nom}\left(y-1\right)}$$
$$= G_{\mathrm{Re}al}\left(2001\right)\cdot\frac{G_{\mathrm{Re}al}\left(2002\right)}{G_{Nom}\left(2001\right)}\cdot\ldots\cdot\frac{G_{\mathrm{Re}al}\left(y\right)}{G_{Nom}\left(y-1\right)}. \tag{50}$$

Wie man sieht, sind zwar für y = 2001 die Verketteten Absolutwerte den Realwerten (Unverketteten Volumen) gleich und damit additiv. Diese Eigenschaft geht aber für $y > 2001$ verloren, da dann die Faktoren

$$\frac{G_{\mathrm{Re}al}\left(2002\right)}{G_{Nom}\left(2001\right)}\cdot\ldots\cdot\frac{G_{\mathrm{Re}al}\left(y\right)}{G_{Nom}\left(y-1\right)}$$

von 1 verschieden sind.

Auf welche Weise die Verketteten Absolutwerte aggregiert werden können, zeigt folgende Überlegung. Es gelte die Nominalgleichung (48) bzw. (33) und damit auch die entsprechende Gleichung für die Realwerte (34). Der Term für die Absolutwerte des Volumenaggregats $G_{Abs}\left(y\right)$ wird zuerst bearbeitet, indem er mit der Preisentwicklung des Vorjahres multipliziert wird. Nach (45) gilt:

$$PE\left(y-1\right)G_{Abs}\left(y\right)=G_{\mathrm{Re}al}\left(y\right). \tag{51}$$

Analog erhält man für die beiden Teilaggregate:

$$PE_1\left(y-1\right)G_{1,Abs}\left(y\right)=G_{1,\mathrm{Re}al}\left(y\right) \tag{52}$$

und

$$PE_2\left(y-1\right)G_{2,Abs}\left(y\right)=G_{2,\mathrm{Re}al}\left(y\right). \tag{53}$$

Wegen (34) gilt dann aber auch:

$$PE(y-1)G_{Abs}(y) = PE_1(y-1)G_{1,Abs}(y) + PE_2(y-1)G_{2,Abs}(y). \qquad (54)$$

Man beachte, dass die beiden Teilaggregate ihre eigenen Paasche-Kettenindizes (Maße für die Preisentwicklung) haben. - Teilen durch die allgemeine Preisentwicklung ergibt nach einfachen Umformungen:

$$\begin{aligned}
G_{Abs}(y) &= \frac{PE_1(y-1)}{PE(y-1)}G_{1,Abs}(y) + \frac{PE_2(y-1)}{PE(y-1)}G_{2,Abs}(y) \\
&= \frac{PE_1(y-1)}{PE(y-1)}\left(\sum\frac{G_{1,\mathrm{Re}al}(y)}{PE_1(y-1)}\right) + \frac{PE_2(y-1)}{PE(y-1)}\left(\sum\frac{G_{2,\mathrm{Re}al}(y)}{PE_2(y-1)}\right) \\
&= \frac{\sum G_{1,\mathrm{Re}al}(y)}{PE(y-1)} + \frac{\sum G_{2,\mathrm{Re}al}(y)}{PE(y-1)} = \frac{1}{PE(y-1)}\left(\sum G_{1,\mathrm{Re}al}(y) + \sum G_{2,\mathrm{Re}al}(y)\right) \\
&= \frac{1}{PE(y-1)}\sum G_{\mathrm{Re}al}(y)
\end{aligned} \qquad (55)$$

Folglich gilt die Verketteten Absolutwerte: Die Teilaggregate müssen mit ihrer speziellen Preisentwicklung aus dem Vorjahr – relativiert an der allgemeinen Preisentwicklung bis zum Vorjahr – gewichtet werden, um additiv das Gesamtaggregat zu ergeben.

Der Rechengang (55) ließe sich auf die erste Zeile verkürzen. Er ist hier so ausführlich dargestellt worden, um die Parallelität zu einer Formel von Tödter (2005, S.4) herzustellen. Grundlegend für den Rechengang in (55) ist die Additivität der Realgrößen.

Die Verketteten Volumina der Hauptaggregate erhält man (wie die Unverketteten Realwerte) vom Statistischen Bundesamt auf Anforderung (Zusatztabellen).

4.8 Wachstumsbeiträge der Teilaggregate des BIP

Grundlage für die Berechnung der Wachstumsbeiträge der Teilaggregate (Verwendung des BIP) sind die Verketteten Volumina, da nur sie intertemporär vergleichbare Realwerte liefern. Der Wachstumsbeitrag eines Teilaggregats *G* zum realen Wachstum des BIP ergibt sich aus der Formel

$$G\_GC(y) = \frac{G_{VV}(y) - G_{VV}(y-1)}{BIP_{VV}(y-1)} \cdot 100 . \qquad \text{(„Growth contribution“) (56)}$$

4.9 Umbasieren

Wir bezeichnen mit $PE(x,y)$ den (verallgemeinerten) Preis-(Ketten-)Index des Jahres y (Preisentwicklung) mit der Bezugsbasis x. Aus der Definition des Kettenindexes folgt, dass $PE(x,x)=1$ ist. Bislang wurde der Index für das Referenzjahr $x=2000$ dargestellt, also $PE(y)=PE(2000,y)$. Für $y>2000$ gilt:

$$PE(2000,y)=\prod_{t=2001}^{y} PI(t), \tag{57}$$

und für $y<2000$:

$$PE(2000,y)=\prod_{t=y+1}^{2000}\frac{1}{PI(t)}. \tag{58}$$

Sei nun $x>2000$ das Bezugsjahr für einen weiteren Kettenindex, für den gilt:

$$PE(x,y)=\prod_{t=x+1}^{y} PI(t) \text{ für } y>x \text{ und} \tag{59}$$

$$PE(x,y)=\prod_{t=y+1}^{x}\frac{1}{PI(t)} \text{ für } y<x. \tag{60}$$

Je nach Lage des Berichtszeitpunktes y zu den beiden Referenzjahren x und 2000 kann man drei Fälle unterscheiden:

Fall 1, $y>x>2000$:

$$PE(x,y)=\prod_{t=x+1}^{y} PI(t)=\frac{\prod_{t=2001}^{y} PI(t)}{\prod_{t=2001}^{x} PI(t)}=\frac{PE(2000,y)}{PE(2000,x)}.$$

Fall 2, $x>y>2000$:

$$PE(x,y)=\prod_{t=y+1}^{x}\frac{1}{PI(t)}=\frac{1}{\prod_{t=y+1}^{x}PI(t)}=\frac{1}{\frac{\prod_{t=2001}^{x}PI(t)}{\prod_{t=2001}^{y}PI(t)}}=\frac{\prod_{t=2001}^{y}PI(t)}{\prod_{t=2001}^{x}PI(t)}=\frac{PE(2000,y)}{PE(2000,x)}$$

Fall 3, $x>2000>y$:

$$PE(x,y)=\prod_{t=y+1}^{x}\frac{1}{PI(t)}=\prod_{t=2001}^{x}\frac{1}{PI(t)}\prod_{t=y+1}^{2000}\frac{1}{PI(t)}=\frac{\prod_{t=y+1}^{2000}\frac{1}{PI(t)}}{\prod_{t=2001}^{x}PI(t)}=\frac{PE(2000,y)}{PE(2000,x)}.$$

In allen Fällen gilt also:

$$PE(x,y)=\frac{PE(2000,y)}{PE(2000,x)}.$$

Auf völlig analoge Weise erhält man für den Ketten-(Mengen-)Index:

$$KI(x,y)=\frac{KI(2000,y)}{KI(2000,x)}.$$

4.10 Realwerte der Volkswirtschaft[20]

Vom StBA werden für das Bruttoinlandsprodukt, das Bruttonationaleinkommen und das Verfügbare Einkommen Realwerte berichtet, deren Berechnung Besonderheiten aufweist.[21] So wird der Realwert des BIP aus dem nominalen BIP dividiert durch den Preisindex der inländischen Verwendung berechnet. Mit dem „Preisindex“ ist nicht der schlichte Preisindex nach Paasche gemeint, sondern der daraus gebildete Kettenindex, der hier als „Preisentwicklung“ *PE* bezeichnet worden ist. Außerdem wird von den so berechneten Größen dann noch ein Index gebildet, dessen Referenzjahr 2000 ist. Der Realwert des Bruttonationaleinkommens ergibt sich aus dem Realwert des BIP plus dem Realwert der Primäreinkommen mit der Übrigen Welt. Schließlich erhält man den Realwert des Verfügbaren Einkommen der Volkswirtschaft aus dem Realwert des Bruttonationaleinkommens plus dem Realwert der laufenden Transfers mit der Übrigen Welt abzüglich der Abschreibungen in Vorjahrespreisen. Die Berechnung dieser Größen dürfte keine prinzipiellen Schwierigkeiten machen, wenn insbesondere der Preisindex *PE* der inländischen

[20] Zur Berechnung der Realwerte nach ESVG 1995 vgl. Mayer 2001, S.1033 f.
[21] Zur Geschichte dieser Realgrößen vgl. Räth et al. 2009, S.217-220.

Verwendung des BIP bekannt ist (vgl. StBA 2009d, Tab. 1.6). Man beachte, dass auch bei den letzten beiden Größen eine Umwandlung in Indexzahlen erfolgen muss.

5 Vierteljahresdaten

Bei der Berechnung der Vierteljahresdaten wenden die Statistischen Ämter in Deutschland das sog. „Annual-Overlap-Verfahren" an. Dabei werden – wie bei alternativen Methoden auch – grundsätzlich nur Jahreswerte verkettet (Nierhaus 2004b, S.16). Auf der Grundlage der verketteten Jahreswerte ergeben sich die jeweiligen Vierteljahreswerte. Der Einfachheit halber wird die Folge der dabei entstehenden Größen hier ebenfalls als Kettenindex bezeichnet. Im folgenden wird dargestellt, wie die Berechnung dieses „Kettenindexes" für die Mengen und des „Kettenindexes" für die Preise bei gegebenen vierteljährlichen Daten für eine Größe in aktuellen Preisen (Nominalgröße) und in Vorjahrespreisen (Realgröße) vorgenommen wird.

Grundlage der folgenden Maße sind die nominalen und die realen Vierteljahresdaten einer makroökonomischen Größe. Die Summe der Vierteljahreswerte ergibt in beiden Fällen den Jahreswert, insbesondere gilt also:

$$\sum_{q=1}^{4} G_{\mathrm{Re}al}\left(y,q\right) = G_{\mathrm{Re}al}\left(y\right). \tag{61}$$

Diese Beziehung bedeutet, dass die Realgröße des q-ten Quartals des Jahres y nicht aus der Preisstruktur des entsprechenden Vorjahresquartals ermittelt wird, sondern aus den (durchschnittlichen) Vorjahrespreisen. Damit übertragt sich die Additivität der (unverketteten) Realwerte auf die zeitlich aufeinander folgenden Quartalswerte.

Der Durchschnitt der Vorjahrespreise ist definiert durch (Tödter 2005, S.22):

$$p_i^{y-1} = \frac{\sum_{q=1}^{4} p_i^{y-1,q} q_i^{y-1,q}}{\sum_{q=1}^{4} q_i^{y-1,q}}.$$ [22]

[22] Man beachte, dass hier q ohne Index das Quartal und q mit Index i ein Güteraggregat bezeichnen.

5.1 Preisindex für Vierteljahresdaten

Der vierteljährliche Preisindex nach Paasche ergibt sich analog zu dem Preisindex der Jahresrechnung (22):

$$PI(y,q) = \frac{G_{Nom}(y,q)}{G_{\mathrm{Re}al}(y,q)} = \frac{\sum_i q_i^{y,q} p_i^y}{\sum_i q_i^{y,q} p_i^{y-1}} \quad . \tag{62}$$

Daraus erhält man den (Ketten-)Index für die vierteljährliche Preisentwicklung *PE* durch Multiplikation mit dem Kettenindex der jährlichen Preisentwicklung bis zum Vorjahr:

$$PE(y,q) = PI(y,q)PE(y-1). \tag{63}$$

Ist die jährliche Preisentwicklung bekannt, so lässt sich die vierteljährliche problemlos aus der Zeitreihe für den vierteljährlichen Preisindex *PI* berechnen.

5.2 Mengenindex und Kettenindex der Mengen für Vierteljahresdaten

Der Mengenindex nach Laspeyres *MI* ist als Verhältnis der vierteljährlichen Realgröße zum Viertel der Nominalgröße des Vorjahres definiert worden (Nierhaus 2004 b, S.17, Gl. 6):

$$MI(y,q) = \frac{G_{\mathrm{Re}al}(y,q)}{G_{Nom}(y-1)/4}. \tag{64}$$

Der vierteljährliche Kettenindex *KI* der Mengen ergibt sich dann aus dem vierteljährlichen Mengenindex *MI* durch Multiplikation mit dem jährlichen Kettenindex des Vorjahres:

$$KI(y,q) = MI(y,q)KI(y-1). \tag{65}$$

5.3 Vierteljährige Verkettete Volumina

Analog zu den Jahresdaten und insbesondere zur Gl. (43) ergeben sich die vierteljährigen Absolutwerte durch

$$G_{Abs}(y,q) = \frac{G_{Real}(y,q)}{PE(y-1)}. \tag{66}$$

Das kann man folgendermaßen nachvollziehen. Aufgrund der Gl. (38), die die Verketteten Absolutwerte für jährliche Daten definiert, also

$$G_{Abs}(y) = KI(G,y)G_{Nom}(2000), \tag{38}$$

könnte man folgende Definition für die vierteljährlichen Absolutwerte vorschlagen:

$$G_{Abs}(y,q) = KI(y,q)G_{Nom}(2000).$$

Dabei würde aber der Vorjahreswert durch den vierteljährlichen Mengenindex *MI* auf ein Vierteljahr übertragen – das ergäbe einen etwa viermal höheren Wert. Dem Gewicht eines Quartals angemessener ist deshalb die Definition:

$$G_{Abs}(y,q) = \frac{1}{4}KI(y,q)G_{Nom}(2000). \tag{67}$$

Auf Hilfe von (65) kann man die so definierten Verketteten Absolutwerte umschreiben:

$$\begin{aligned} G_{Abs}(y,q) &= \frac{1}{4}KI(y,q)G_{Nom}(2000) = \frac{1}{4}MI(y,q)KI(y-1)G_{Nom}(2000) \\ &= \frac{1}{4}MI(y,q)G_{Abs}(y-1) = \frac{1}{4}MI(y,q)\frac{G_{Nom}(y-1)}{PE(y-1)} = \frac{G_{Real}(y,q)}{PE(y-1)} \end{aligned} \tag{68}$$

In den letzten beiden Schritten ist

$$G_{Abs}(y) = \frac{G_{Nom}(y)}{PE(y)} \tag{39}$$

und die Definition (64) benutzt worden. Die linke und die rechte Seite ergeben (66).

5.4 Folgerungen / Implizite Größen / Wichtige Beziehungen

Eigenschaft (i)

Der Durchschnitt der vierteljährlichen Preisindizes *PI* eines Jahres ist *nicht* identisch mit dem Preisindex desselben Jahres:

$$\frac{1}{4}\sum_q PI(y,q) = \frac{1}{4}\sum_q \frac{G_{Nom}(y,q)}{G_{Real}(y,q)} \neq \frac{\sum_q G_{Nom}(y,q)}{\sum_q G_{Real}(y,q)} = PI(y). \qquad (69)^{23}$$

Der rechte Teil der Formel kann zur Berechnung der jährlichen Preisindizes aus den vierteljährlichen Real- und Nominalwerten dienen. Sind die Realwerte nicht gegeben, können sie aus den vierteljährlichen Preisindizes und Nominalwerten generiert werden.

Eigenschaft (ii)

Der Durchschnitt des vierteljährlichen Preisindexes (der Preisentwicklung) *PE* eines Jahres ist *nicht* identisch mit dem Wert der Preisentwicklung des betreffenden Jahres (Gl. 70):

$$\frac{1}{4}\sum_q PE(y,q) = \frac{1}{4}\sum_q PI(y,q)PE(y-1) = PE(y-1)\frac{1}{4}\sum_q PI(y,q) \neq PI(y)PE(y-1) = PE(y)$$

Eigenschaft (iii)

Die Veränderung der Werte der Preisentwicklung im Vorjahresvergleich wird bei Vierteljahresdaten in Bezug auf das entsprechende Vorjahresquartal definiert:

$$PCHPE(y,q) = \frac{PE(y,q)}{PE(y-1,q)} = \frac{PI(y,q)PE(y-1)}{PI(y-1,q)PE(y-2)} = \frac{PI(y,q)\cdot PI(y-1)}{PI(y-1,q)} \qquad (71)$$
$$= PCHPI(y,q)PI(y-1)$$

[23] In einer früheren Fassung dieses Texts (Arbeitspapier Nr. 82 der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Universität Leipzig vom Oktober 2009) hatte sich in diese Formel ein Fehler eingeschlichen: Nominal- und Realgrößen waren vertauscht worden. Den Hinweis darauf verdanke ich Frau Ina Zimmer.

Es handelt sich um ein Maß, das sowohl von der jährlichen Veränderung des Vierteljahrespreisindexes als auch vom Vorjahrespreisindex abhängt.

Eigenschaft (iv)

Der Durchschnitt der vierteljährlichen Mengenindizes *MI* eines Jahres ist identisch mit dem Mengenindex des Jahres:

$$\frac{1}{4}\sum_q MI(y,q) = \frac{1}{4}\sum_q \frac{G_{\mathrm{Re}al}(y,q)}{G_{Nom}(y-1)/4} = \frac{\sum_q G_{\mathrm{Re}al}(y,q)}{G_{Nom}(y-1)} = \frac{G_{\mathrm{Re}al}(y)}{G_{Nom}(y-1)} = MI(y). \quad (72)$$

Eigenschaft (v)

Der Durchschnitt des vierteljährlichen Kettenindexes *KI* eines Jahres ist identisch mit dem Kettenindex des betreffenden Jahres:

$$\frac{1}{4}\sum_q KI(y,q) = KI(y-1)\frac{1}{4}\sum_q MI(y,q) = MI(y)\,KI(y-1) = KI(y). \quad (73)$$

Eigenschaft (vi)

Die Veränderung des Kettenindexes *KI* im Vorjahresvergleich wird bei Vierteljahresdaten in Bezug auf das entsprechende Vorjahresquartal definiert und berichtet:

$$PCHKI(y,q) = \frac{MI(y,q)\,KI(y-1)}{MI(y-1,q)\,KI(y-2)} = \frac{MI(y,q)\,MI(y-1)}{MI(y-1,q)}. \quad (74)$$

Im Falle von vierteljährlichen Daten ist die Veränderung des Kettenindexes gegenüber dem Vorjahr (genauer gesagt: gegenüber dem entsprechenden Vorjahresquartal) also nicht mit dem Mengenindex identisch, sondern mit dem Mengenindex des Vorjahres multipliziert mit der jährlichen Veränderung des entsprechenden vierteljährlichen Mengenindexes.

Eigenschaft (vii)

Die Summe der Quartalswerte eines Jahres für die Verketteten Absolutwerte ergibt den Jahreswert:

$$\sum_{q=1}^{4} G_{Abs}(y,q) = \sum_{q=1}^{4}\left[\frac{1}{4} KI(y,q) G_{Nom}(2000)\right]$$
$$= \frac{1}{4} G_{Nom}(2000) \sum_{q=1}^{4} KI(y,q) = KI(y) G_{Nom}(2000) = G_{Abs}(y) \tag{75}$$

Eigenschaft (viii)

Das Verhältnis der Unverketteten Realwerte innerhalb eines Jahres entspricht dem Verhältnis der Verketteten Volumina zueinander:

Sei $q \neq \hat{q}$, dann gilt wegen (66):

$$\frac{G_{Abs}(y,q)}{G_{Abs}(y,\hat{q})} = \frac{\dfrac{G_{\mathrm{Re}al}(y,q)}{PE(y-1)}}{\dfrac{G_{\mathrm{Re}al}(y,\hat{q})}{PE(y-1)}} = \frac{G_{\mathrm{Re}al}(y,q)}{G_{\mathrm{Re}al}(y,\hat{q})}, \tag{76}$$

man erhält also „einen reinen (mit denselben Preisen bewerteten) Volumenvergleich…“ (Tödter 2005, S.17.)

Eigenschaft (ix)

Sei $q \neq \hat{q}$ wir betrachten nun zwei aufeinander folgende Jahre. Aus (68) folgt:

$$\frac{G_{Abs}(y,q)}{G_{Abs}(y-1,\hat{q})} = \frac{MI(y,q) KI(y-1) G_{Nom}(2000)}{MI(y-1,\hat{q}) KI(y-2) G_{Nom}(2000)} = \frac{MI(y,q) MI(y-1)}{MI(y-1,\hat{q})}. \tag{77}$$

Jetzt werden noch (64) und (22) berücksichtigt:

$$\frac{G_{Abs}(y,q)}{G_{Abs}(y-1,\hat{q})} = \frac{G_{\mathrm{Re}al}(y,q) \dfrac{G_{Nom}(y-2)}{4} G_{\mathrm{Re}al}(y-1)}{\dfrac{G_{Nom}(y-1)}{4} G_{\mathrm{Re}al}(y-1,\hat{q}) G_{Nom}(y-2)}$$
$$= \frac{G_{\mathrm{Re}al}(y,q) G_{\mathrm{Re}al}(y-1)}{G_{\mathrm{Re}al}(y-1,\hat{q}) G_{Nom}(y-1)} = \frac{G_{\mathrm{Re}al}(y,q)}{G_{\mathrm{Re}al}(y-1,\hat{q}) PI(y-1)}.$$

Bedenkt man die Definition des Kettenindexes *PE* (siehe Gl. 29), so erhält man

$$\frac{G_{Abs}(y,q)}{G_{Abs}(y-1,\hat{q})}=\frac{PE(y-2)G_{\mathrm{Re}al}(y,q)}{PE(y-1)G_{\mathrm{Re}al}(y-1,\hat{q})}. \tag{78}$$

Insbesondere gilt für den Übergang vom 4. Quartal des Jahres *t*-1 zum 1. Quartal des Jahres *t*:

$$\frac{G_{Abs}(t,1)}{G_{Abs}(t-1,4)}=\frac{PE(t-2)G_{\mathrm{Re}al}(t,1)}{PE(t-1)G_{\mathrm{Re}al}(t-1,4)}. \tag{79}$$

Tödter (2005, S.17) kritisiert: „Durch den Wechsel vom vierten zum ersten Quartal wird der Volumenvergleich durch die zwischen den Jahren *t*-1 und *t*-2 erfolgten relativen Preiswechsel verfälscht.“ Dabei müsste man das Verhältnis der (unverketteten) Realwerte zueinander, also

$$\frac{G_{\mathrm{Re}al}(t,1)}{G_{\mathrm{Re}al}(t-1,4)},$$

als die unverfälschte, „wahre“ Rate ansehen. Dagegen definiert Nierhaus (2004b, S.17)

$$\frac{G_{\mathrm{Re}al}(t,1)}{G_{Nom}(t-1,4)}$$

als „wahre“ (unverzerrte) Rate der Mengenänderung zwischen viertem und nachfolgendem ersten Quartal.

Wie dem auch sei, allgemein kommt es durch den Faktor

$$\frac{PE(t-2)}{PE(t-1)}$$

zu einem Sprung der Verketteten Volumina aufeinanderfolgender Jahre, der durch die ständige Veränderung der Preisbasis im neuen System der VGR verursacht wird.

6 Die wichtigsten Dimensionen eines volkswirtschaftlichen Aggregats nach den VGR 2005

Die folgende Tabelle fasst die verschiedenen Aspekte, unter denen jedes deflationierbare Aggregat betrachtet werden kann, zusammen. Die Zuordnung zu theoretischen Konzepten ist fließend: Beispielsweise beschreibt der Kettenindex (4) das reale Wachstum ebenso wie eine (wachsende) Realgröße. Die letzte Spalte listet auf, ob sich die Zusammensetzung eines Aggregats aus Teilaggregaten in der jeweiligen Variable widerspiegelt oder nicht.

Tabelle 1: Dimensionen makroökonomischer Aggregate in den VGR 2005

Makroökonomische Bedeutung	**Vom StBA berichtet als**	**Definition**	**Aggregative Eigenschaften**
Nominalgröße	mit Namen versehene Größe	(1) Mengen bewertet in jeweiligen Preisen	Additiv[24]
Realgröße	*Unverkettete Volumenangaben*[25]	(2) Mengen bewertet in Vorjahrespreisen	Additiv
	Verkettete Volumenangaben	(3) Wert der Größe (1) vom Jahr 2000 multipliziert mit dem Kettenindex (4)	Nicht additiv[26]
	Größe, preisbereinigt	(4) Kettenindex in Prozent auf Basis von (5)	Nicht additiv
Wachstum	Veränderung des Kettenindexes (4) gegenüber dem Vorjahr in Prozent[27]	(5) Mengenindex nach Laspeyres aufgrund von (2) und (1)	Nicht additiv[28]
	Veränderung der Größe (1) gegenüber dem Vorjahr in Prozent	(6) Vorjahresvergleich innerhalb der Zeitreihe (1)	Nicht additiv
Inflation	Veränderung des Kettenindexes (8) gegenüber dem Vorjahr in Prozent[29]	(7) Preisindex nach Paasche aufgrund von (1) und (2)	Nicht additiv[30]
	Preisentwicklung	(8) Kettenindex in Prozent aufgrund von (7)	Nicht additiv

Tabelle 1: Dimensionen eines Aggregats

Man erkennt leicht, dass (1) und (2) systematisch und unter dem messtechnischen Gesichtspunkt der Genauigkeit betrachtet die Basis für alle anderen Größen darstellen. Da beide Variablen hinsichtlich der Teilaggregate additiv sind und mit ihnen das entsprechende volkswirtschaftliche Aggregat sowohl nominal als auch real erfaßt wird, ist die Datenlage durchaus mit der vor der Revision 2005 vergleichbar (Quaas 2009a, S.102).

---

[24] Eine makroökonomische Größe heißt „additiv", wenn ohne Ausnahme gilt, dass der einem Gesamtaggregat zugeordnete Wert dieser Größe gleich der Summe der allen seinen Teilaggregaten zugeordneten Werten ist. – Mit dieser Definition möchte ich Tödters Charakteristik positiv formulieren und auf Indizes ausdehnen (vgl. Tödter 2007, S.80). – Zu eng ist die folgende Definition: „Additivität heißt, dass Aggregate, wenn sie einzeln deflationiert werden, sich zum selben Wert addieren wie das deflationierte Gesamtaggregat." (Reich 1998, S.76.) Demnach wäre eine nominale Größe dann nicht additiv, wenn die dazugehörige reale Größe desselben Aggregats jene Definition nicht erfüllt – was bezogen auf die Verketteten Volumina der VGR 2005 ab 2002 immer der Fall ist.

[25] Kursiv: Daten auf Nachfrage vom StBA erhältlich.

[26] Abgesehen vom ersten Jahr nach dem Referenzjahr und von der unterjährigen Additivität der Verketteten Absolutwerte. Siehe Eigenschaft (vii) des Abschnittes 5.4 zu den vierteljährlichen Daten.

[27] Das gilt nur für jährliche Daten. Im Falle von vierteljährlichen Daten ist die Veränderung des Kettenindexes gegenüber dem Vorjahr (genauer gesagt: gegenüber dem entsprechenden Vorjahresquartal) nicht mit dem Mengenindex identisch, sondern mit dem Mengenindex des Vorjahres multipliziert mit der jährlichen Veränderung des entsprechenden vierteljährlichen Mengenindexes (siehe Gl. 74).

[28] Zur unterjährigen Additivität des Mengenindexes und des darauf aufbauenden Kettenindexes siehe Eigenschaften (iv) und (v) des Abschnittes zu den vierteljährlichen Daten.

[29] Siehe Fußnote 26, Analoges gilt hier. (Siehe für Vierteljahresdaten Gl. 71.)

[30] Der Preisindex eines Gesamtaggregats kann als harmonisches Mittel der Preisindizes seiner Teilaggregate – gewogen mit den (in Nominalgrößen gemessenen) Anteilen am Gesamtaggregat – dargestellt und insofern auch „additiv" genannt werden, aber nicht in dem hier definierten Sinn (vgl. von der Lippe 2007, S.63 f.).

Wie in dieser Studie gezeigt worden ist, stehen die hier dargestellten acht Dimensionen eines volkswirtschaftlichen Aggregats in einem systematischen Zusammenhang, ähnlich wie in der alten VGR eine Nominalgröße mit der Mengen- und der Preiskomponente zusammenhängt. Es handelt sich um eine Gesamtheit von Dimensionen, die durch Identitäten widerspruchsfrei miteinander zusammenhängen und insofern ein in sich konsistentes System bilden.[31]

In der VGR 2005 stehen für jedes Hauptaggregat somit mindestens drei Größen zur Verfügung, die als Realgrößen interpretiert werden können. Das entsprechende Aggregat in konstanten Vorjahrespreisen (2), ein Mengenindex nach Laspeyres (5), der vom StBA in Form eines Kettenindexes berichtet wird, und die auf diesen Kettenindex aufbauenden Verketteten Volumenangaben (Absolutwerte, 3). Während Tödters Hinweis auf die Nicht-Additivität für die beiden zuletzt genannten Größen gilt, sind die Unverketteten Volumina (2) additiv in dem Sinne, dass die Teilaggregate des Bruttoinlandsprodukt eines Jahres (auch die Vierteljahreswerte eines Jahres) wie gewohnt addiert werden können. Der intertemporale Vergleich von Realgrößen verschiedener Jahre muss dagegen mit den Verketteten Volumina durchgeführt werden, die sich mit Hilfe der oben abgeleiteten Formeln berechnen lassen. Die dabei im Rahmen der VGR 2005 bzw. der ESVG 1995 entstehende Asymmetrie zwischen räumlichen und zeitlichen Vergleichen ist offenbar der Preis, den man für die zeitnahere (genauere) Abbildung der realen Entwicklung zahlen muss (vgl. Reich 1998, S.54).

Sind die Realgrößen Verkettete Volumina und sollen sie nach den allgemein bekannten Identitäten addiert werden, müssen sie zunächst in Unverkettete Volumina umgewandelt werden. Diese werden addiert und dann in die Verketteten Volumina zurück transformiert. Das ist auch das Vorgehen, das im Interlink-Modell der OECD befolgt wird (vgl. Lequiller / Blades 2006, S.56). Entscheidend dafür sind „volume terms expressed in prices of the preceding period“. “This is a valid process because volumes expressed in prices of the preceding year are additive, at least for countries that use chained Lapeyres indices (most OECD countries). It is a very good approximation for the few countries that use Fisher indices (USA, Canada).” (Ebd., S.57.)

[31] Demnach wird jedes volkswirtschaftliche Aggregat, an dem sinnvoll eine Deflationierung vorgenommen werden kann, nicht einfach nur durch *eine* Größe ausgedrückt, die der quantitative Ausdruck eines volkswirtschaftlichen Begriffes und damit Teil des Systems der Gesamtbegriffe der VGR (Voy 2009b) ist, sondern in der VGR 2005 durch mindestens acht Größen, die untereinander selbst ein System darstellen. Ähnliches kann man natürlich auch zu deflationierbaren Aggregaten der alten VGR sagen - nur sprang das dort nicht besonders ins Auge.

7 Anhang

Im Anhang werden (aktuelle) beobachtete und aufgrund der obigen Formeln berechnete Werte für die verschiedenen Dimensionen des BIP anhand von Jahresdaten (7.1) und Vierteljahresdaten (7.2) zum Nachvollzug der Formeln geliefert.

Für alle, die Tödters Schrift gelesen haben, und einen Vergleich mit den hier entwickelten Formelapparat vornehmen wollen, weise ich auf die Tabelle 7.3 hin, die ausgewählte Formeln gegenüber stellen.

Schließlich wird im Anhang 7.4 das Problem verdeutlicht, das sich in ökonometrischen Volkswirtschaftsmodellen bei vollständig nicht-additiven Realwerten, die in den USA und Kanada verwendet werden, entstünde, und das einige Autoren meinten, auch in den VGR der Bundesrepublik nach 2005 zu erkennen.

7.1 Tabelle A1: Jahreswerte des Bruttoinlandsprodukts 1991 – 2008 in verschiedenen Dimensionen, berichtet und berechnet

Jahr	BIP	BIPKI	BIPKIVR	BIPPE	BIPPEVR	BIPVP	BIPVV	BIPMI*	BIPKI*	BIPPI*	BIPPE*	BIPVV*
1991	1534,60	85,36		87,16			1760,55		0,8536		0,8717	1760,51
1992	1646,62	87,26	2,2	91,50	5,0	1568,73	1799,74	1,0222	0,8726	1,0497	0,9150	1799,66
1993	1694,37	86,56	-0,8	94,91	3,7	1633,42	1785,30	0,9920	0,8656	1,0373	0,9491	1785,24
1994	1780,78	88,86	2,7	97,16	2,4	1739,42	1832,74	1,0266	0,8886	1,0238	0,9717	1832,70
1995	1848,45	90,54	1,9	98,98	1,9	1814,49	1867,39	1,0189	0,9054	1,0187	0,9899	1867,39
1996	1876,18	91,44	1,0	99,49	0,5	1866,76	1885,95	1,0099	0,9144	1,0050	0,9949	1885,89
1997	1915,58	93,09	1,8	99,77	0,3	1909,98	1919,98	1,0180	0,9308	1,0029	0,9978	1919,87
1998	1965,38	94,98	2,0	100,33	0,6	1954,44	1958,96	1,0203	0,9497	1,0056	1,0034	1958,81
1999	2012,00	96,89	2,0	100,68	0,3	2004,96	1998,36	1,0201	0,9689	1,0035	1,0069	1998,26
2000	2062,50	100,00	3,2	100,00	-0,7	2076,68	2062,50	1,0321	1,0000	0,9932	1,0000	2062,50
2001	2113,16	101,24	1,2	101,21	1,2	2088,07	2088,08	1,0124	1,0124	1,0120	1,0120	2088,07
2002	2143,18	101,24	0,0	102,64	1,4	2113,10	2088,08	1,0000	1,0124	1,0142	1,0264	2088,01
2003	2163,80	101,02	-0,2	103,85	1,2	2138,50	2083,54	0,9978	1,0102	1,0118	1,0386	2083,45
2004	2210,90	102,24	1,2	104,85	1,0	2189,96	2108,70	1,0121	1,0224	1,0096	1,0485	2108,64
2005	2243,20	103,03	0,8	105,56	0,6	2227,50	2124,58	1,0075	1,0300	1,0070	1,0559	2124,47
2006	2321,50	106,08	3,0	106,11	0,5	2313,07	2191,82	1,0311	1,0621	1,0036	1,0597	2190,64
2007	2422,90	108,69	2,5	108,08	1,9	2382,38	2245,86	1,0262	1,0900	1,0170	1,0778	2248,09
2008	2491,40	110,07	1,3	109,75	1,5	2458,68	2274,11	1,0148	1,1061	1,0133	1,0921	2281,29

Legende zur Tabelle A1

BIP, Bruttoinlandsprodukt – Nominalgröße in Mrd. €, Quelle: StBA 2009a, Tab. 2.1.1, Sp.1, Bezeichnung: Bruttoinlandsprodukt in jeweiligen Preisen, Ursprungswerte. – Oder: StBA 2009d, Tab. 1.1, Sp.1, Ursprungswerte. Und an vielen anderen Stellen.
BIPKI, Bruttoinlandsprodukt – Ketten-(Mengen-)Index (2000=100): StBA 2009a, Tab. 2.1.4, Sp.4, Bruttoinlandsprodukt – preisbereinigt – insgesamt – Kettenindex. Oder: StBA 2009d, Tab. 1.1, Sp. 5.
BIPKIVR, Bruttoinlandsprodukt – Veränderungsraten des Ketten-Indexes in %: StBA 2009a, Tab. 2.1.1, Sp.6, Bruttoinlandsprodukt – preisbereinigt verkettet – Ursprungswerte – Veränderung gegenüber dem Vorjahr. Sowie in Tab. 2.1.4, Sp.4, Veränderung gegenüber dem Vorjahr. Oder: StBA 2009d, Tab. 1.1, Sp. 6.
BIPPE, Bruttoinlandsprodukt – Preisentwicklung (2000=100): StBA 2009a, Tab. 3.3.1, Z.69, Preisentwicklung. Oder: StBA 2009d, Tab. 3.3, Sp.1.
BIPPEVR, Bruttoinlandsprodukt – Veränderungsraten der Preisentwicklung in %: StBA 2009d, Tab. 3.3, Sp.1, Bruttoinlandsprodukt, Preisentwicklung Veränderung gegenüber dem entsprechenden Vorjahreszeitraum in %.
BIPVP, Bruttoinlandsprodukt in Vorjahrespreisen in Mrd. €: StBA 2009b, Tab. 3.2, Sp.1, Unverkettete Volumenangaben in Vorjahrespreisen.
BIPVV, Bruttoinlandsprodukt – Verkettete Volumina (Absolutwerte) in Mrd. €: StBA 2009c, Tab. 1.2, Sp.1, Bruttoinlandsprodukt – preisbereinigt – Verkettete Volumenangaben.
BIPMI*, Bruttoinlandsprodukt – Mengenindex nach Laspeyres, berechnet aufgrund der Realwerte (Unverkettete Volumina) und der Nominalwert nach Formel (21), hier in Kurzfassung:

$$MI(G,y) = \frac{G_{Real}(y)}{G_{Nom}(y-1)}$$

BIPKI*, Bruttoinlandsprodukt – Ketten-(Mengen-)Index (2000=1), berechnet aufgrund der Mengenindizes mit Hilfe der Formeln (24) und (25), im Kern also mit
$KI(y) = KI(y-1) \cdot MI(y)$.

BIPPI*, Bruttoinlandprodukt – Preisindex nach Paasche, berechnet aufgrund der Realwerte (Unverkettete Volumina) und der Nominalwert nach Formel (22), hier in Kurzfassung:
$PI(G, y) = \frac{G_{Nom}(y)}{G_{\mathrm{Re}al}(y)}$.

BIPPE*, Bruttoinlandsprodukt – Preisentwicklung (2000=1), Kettenindex der Preisindizes, berechnet aufgrund der Preisindizes aufgrund der Formeln (29) und (30), also im Kern aufgrund von
$PE(y) = PE(y-1) \cdot PI(y)$.

BIPVV*, Bruttoinlandsprodukt – Verkettete Volumina, berechnet aufgrund des Nominalwertes von 2000 und der Ketten-(Mengen)Indizes nach Formel (38), also nach
$G_{Abs}(y) = KI(G, y) G_{Nom}(2000)$.

7.2 Tabelle A2: Vierteljahreswerte des Bruttoinlandsprodukts 1997:4 – 2004:4 in verschiedenen Dimensionen, berichtet und berechnet

Jahr	Q	BIP	BIPKI	BIPKIVR	BIPPE	BIPPEVR	BIPVP	BIPVV	BIPY	BIPVPY	BIPMIY*	BIPKIY	BIPMI*	BIPKI*	BIPPIY*	BIPPEY	BIPPI*	BIPPE*	BIPVV*
1997	4	498,67	95,39	2,1	101,38	0,1	489,33	491,85	1915,58	1909,98		93,09			1,0029	99,77	1,0191		491,85
1998	1	473,09	92,69	4,4	98,99	0,1	476,83	477,93					0,9957	92,69			0,9922	98,99	477,93
1998	2	484,41	94,19	0,7	99,75	0,7	484,57	485,67					1,0119	94,19			0,9997	99,74	485,67
1998	3	498,43	96,29	1,7	100,39	0,7	495,38	496,50					1,0344	96,29			1,0062	100,38	496,50
1998	4	509,45	96,74	1,4	102,13	0,7	497,66	498,82	1965,38	1954,44	1,0203	94,98	1,0392	96,74	1,0056	100,33	1,0237	102,13	498,82
1999	1	481,42	93,54	0,9	99,82	0,8	483,89	482,32					0,9848	93,54			0,9949	99,82	482,32
1999	2	494,87	95,71	1,6	100,27	0,5	495,1	493,50					1,0076	95,71			0,9995	100,28	493,50
1999	3	510,19	98,32	2,1	100,64	0,2	508,61	506,96					1,0351	98,32			1,0031	100,64	506,96
1999	4	525,52	100,01	3,4	101,91	-0,2	517,36	515,68	2012	2004,96	1,0201	96,89	1,0529	100,01	1,0035	100,68	1,0158	101,91	515,68
2000	1	500,93	97,68	4,4	99,46	-0,4	507,11	503,66					1,0082	97,68			0,9878	99,45	503,66
2000	2	510,69	99,85	4,3	99,19	-1,1	518,36	514,85					1,0305	99,85			0,9852	99,19	514,85
2000	3	521,21	101,09	2,8	99,99	-0,6	524,8	521,25					1,0433	101,09			0,9932	99,99	521,25
2000	4	529,67	101,40	1,4	101,30	-0,6	526,41	522,84	2062,5	2076,68	1,0321	100,00	1,0465	101,40	0,9932	100,00	1,0062	101,30	522,84
2001	1	513,01	99,59	2,0	99,90	0,4	513,52	513,51					0,9959	99,59			0,9990	99,90	513,51
2001	2	521,43	100,90	1,1	100,23	1,0	520,25	520,27					1,009	100,90			1,0023	100,23	520,27
2001	3	532,61	102,07	1,0	101,20	1,2	526,32	526,30					1,0207	102,07			1,0120	101,20	526,30
2001	4	546,11	102,40	1,0	103,43	2,1	527,98	528,00	2113,16	2088,07	1,0124	101,24	1,024	102,40	1,012	101,21	1,0343	103,43	528,00
2002	1	516,66	98,54	-1,1	101,68	1,8	514,21	508,10					0,9733	98,54			1,0048	101,69	508,10
2002	2	528,97	101,14	0,2	101,43	1,2	527,76	521,50					0,999	101,14			1,0023	101,44	521,50
2002	3	546,30	103,03	0,9	102,83	1,6	537,63	531,25					1,0177	103,03			1,0161	102,84	531,25
2002	4	551,25	102,24	-0,2	104,57	1,1	533,5	527,18	2143,18	2113,1	1	101,24	1,0099	102,24	1,0142	102,64	1,0333	104,58	527,18
2003	1	523,00	98,67	0,1	102,80	1,1	522,17	508,77					0,9746	98,67			1,0016	102,80	508,77
2003	2	531,80	100,21	-0,9	102,92	1,5	530,35	516,71					0,9898	100,21			1,0027	102,92	516,71
2003	3	552,00	102,64	-0,4	104,30	1,4	543,19	529,24					1,0138	102,64			1,0162	104,30	529,24
2003	4	557,00	102,56	0,3	105,32	0,7	542,79	528,83	2163,8	2138,5	0,9978	101,02	1,0131	102,56	1,0118	103,85	1,0262	105,33	528,83
2004	1	537,30	100,29	1,6	103,90	1,1	537,04	517,12					0,9928	100,29			1,0005	103,90	517,12
2004	2	547,10	101,85	1,6	104,17	1,2	545,4	525,16					1,0082	101,85			1,0031	104,17	525,16
2004	3	560,10	103,24	0,6	105,22	0,9	552,86	532,33					1,022	103,24			1,0131	105,21	532,33
2004	4	566,40	103,58	1,0	106,05	0,7	554,66	534,08	2210,9	2189,96	1,0121	102,24	1,0253	103,58	1,0096	104,85	1,0212	106,05	534,08

Legende zur Tabelle A2

Q, Quartal.
BIP, Bruttoinlandsprodukt – Nominalgröße in Mrd. €, Quelle: StBA 2009d, Tab. 1.1, Sp.1, Bezeichnung: Bruttoinlandsprodukt in jeweiligen Preisen, Ursprungswerte. – Sowie an vielen anderen Stellen.
BIPKI, Bruttoinlandsprodukt – Ketten-(Mengen-)Index (2000=100): StBA 2009d, Tab. 1.1, Sp.5, Bezeichnung: preisbereinigt, Ursprungswerte.
BIPKIVR, Bruttoinlandsprodukt – Veränderungsraten des Ketten-Indexes in %: StBA 2009d, Tab.1.1, Sp.6, preisbereinigt, Ursprungswerte, Veränderung gegenüber dem Vorjahresquartal.
BIPPE, Bruttoinlandsprodukt – Preisentwicklung (2000=100): StBA 2009d, Tab. 3.3, Sp.1, Bezeichnung: Verwendung des Bruttoinlandsprodukts, Preisentwicklung.
BIPPEVR, Bruttoinlandsprodukt – Veränderungsraten der Preisentwicklung in %: StBA 2009d, Tab. 3.3, Sp.1, Bruttoinlandsprodukt, Preisentwicklung Veränderung gegenüber dem entsprechenden Vorjahreszeitraum in %.
BIPVP, Bruttoinlandsprodukt in Vorjahrespreisen in Mrd. €: StBA 2009b, Tab.3.2, Sp.1, Unverkettete Volumenangaben in Vorjahrespreisen.
BIPVV, Bruttoinlandsprodukt – Verkettete Volumina (Absolutwerte) in Mrd. €: StBA 2009c, Tab.
1.2, Sp.1, Bruttoinlandsprodukt – preisbereinigt – Verkettete Volumenangaben.
BIPY, Bruttoinlandsprodukt **Jahreswerte** – Nominalgröße in Mrd. €, Quelle: StBA 2009d, Tab.1.1, Sp.1, Bezeichnung: Bruttoinlandsprodukt in jeweiligen Preisen, Ursprungswerte.
BIPVPY, Bruttoinlandsprodukt **Jahreswerte** in Vorjahrespreisen in Mrd. €: StBA 2009b, Tab.3.2, Sp.1, Unverkettete Volumenangaben in Vorjahrespreisen.
BIPMIY*, Bruttoinlandsprodukt – Jährlicher Mengenindex nach Laspeyres, berechnet aufgrund der Realwerte (Unverkettete Volumina) und der Nominalwert nach Formel (21).
BIPKIY, Bruttoinlandsprodukt – Jährlicher Ketten-(Mengen-)Index (2000=100): StBA 2009d, Tab.1.1, Sp.5, Bezeichnung: preisbereinigt, Ursprungswerte.
BIPMI*, Bruttoinlandsprodukt – Mengenindex nach Laspeyres, berechnet aufgrund der Realwerte (Unverkettete Volumina) und der Nominalwert nach Formel (64), hier noch einmal:

$$MI(y,q) = \frac{G_{Real}(y,q)}{G_{Nom}(y-1)/4}$$

BIPKI*, Bruttoinlandsprodukt – Ketten-(Mengen-)Index (2000=1), berechnet aufgrund der Mengenindizes mit Hilfe der Formel (65), also mit

$$KI(y,q) = MI(y,q)\,KI(y-1).$$

BIPPIY*, Bruttoinlandprodukt – Jährlicher Preisindex nach Paasche, berechnet aufgrund der jährlichen Realwerte (Unverkettete Volumina) und der jährlichen Nominalwert nach Formel (22).
BIPPEY, Bruttoinlandsprodukt – Jährliche Preisentwicklung (2000=100): StBA 2009d, Tab.3.3, Sp.1.
BIPPI*, Bruttoinlandprodukt – Preisindex nach Paasche, berechnet aufgrund der Realwerte (Unverkettete Volumina) und der Nominalwert nach Formel (62), hier in Kurzfassung:

$$PI(y,q) = \frac{G_{Nom}(y,q)}{G_{Real}(y,q)}.$$

BIPPE*, Bruttoinlandsprodukt – Preisentwicklung (2000=1), Kettenindex der Preisindizes, berechnet aufgrund der Preisindizes aufgrund der Formel (63):

$$PE(y,q) = PI(y,q)\,PE(y-1).$$

BIPVV*, Bruttoinlandsprodukt – Verkettete Volumina, in Mrd. €, berechnet aufgrund des Nominalwertes von 2000 und der Ketten-(Mengen)Indizes nach Formel (67), also nach
$G_{Abs}\left(y,q\right)=\frac{1}{4}KI\left(y,q\right)G_{Nom}\left(2000\right)$.

7.3 Tabelle A3: Darstellung einiger Formeln aus Tödter 2005 in anderer Notation

Tödters Notation	**Interpretation im erweiterten Rahmen**[32]
$\sum p_t q_t$	$G_{Nom}(t)$ Gl.(12)
$\sum p_{t-1} q_t$	$G_{\mathrm{Re}al}(t)$ Gl.(20)
$Q_t = Q_{t-1}\dfrac{\sum p_{t-1}q_t}{\sum p_{t-1}q_{t-1}}$ Gl.(3)	$G_{Abs}(t) = G_{Abs}(t-1)\dfrac{G_{\mathrm{Re}al}(t)}{G_{Nom}(t-1)}$ Gl.(42)
$Q_t = Q_{t-1}\sum \upsilon_{t-1}\dfrac{q_t}{q_{t-1}} = \sum \dfrac{p_{t-1}}{P_{t-1}} q_t$ Gl.(3') [33]	$G_{Abs}(t) = G_{Abs}(t-1)\sum \upsilon_{t-1}\dfrac{q_t}{q_{t-1}} = \dfrac{G_{\mathrm{Re}al}(t)}{PE_G(t-1)}$ Gl.(45)
mit $\upsilon_t = p_t q_t / \sum p_t q_t$ S.3	mit $\upsilon_t = p_t q_t / G_{nom}(t)$
→ $1 = \sum \upsilon_{t-1}\dfrac{q_t/q_{t-1}}{Q_t/Q_{t-1}}$	→ $1 = \sum \upsilon_{t-1}\dfrac{q_t/q_{t-1}}{G_{Abs}(t)/G_{Abs}(t-1)}$
$Q_t = \dfrac{P^A_{t-1}}{P_{t-1}}Q^A_t + \dfrac{P^B_{t-1}}{P_{t-1}}Q^B_t$ $= \dfrac{P^A_{t-1}}{P_{t-1}}\left(\sum \dfrac{p^A_{t-1}}{P^A_{t-1}}q^A_t\right) + \dfrac{P^B_{t-1}}{P_{t-1}}\left(\sum \dfrac{p^B_{t-1}}{P^B_{t-1}}q^B_t\right)$ S.4 $= \sum \dfrac{p_{t-1}}{P_{t-1}}q_t$	$G_{Abs}(y) = \dfrac{PE_A(y-1)}{PE(y-1)}G_{A,Abs}(y) + \dfrac{PE_B(y-1)}{PE(y-1)}G_{B,Abs}(y)$ $= \dfrac{PE_A(y-1)}{PE(y-1)}\left(\sum \dfrac{G_{A,\mathrm{Re}al}(y)}{PE_A(y-1)}\right) + \dfrac{PE_B(y-1)}{PE(y-1)}\left(\sum \dfrac{G_{B,\mathrm{Re}al}(y)}{PE_B(y-1)}\right)$ $= \dfrac{1}{PE(y-1)}\sum G_{\mathrm{Re}al}(y)$
$P_t = \dfrac{N_t}{Q_t} = \dfrac{\sum p_t q_t}{Q_t} = P_{t-1}\dfrac{\sum p_t q_t}{\sum p_{t-1} q_t}$ Gl.(4)	$PE_G(t) = \dfrac{G_{Nom}(t)}{G_{Abs}(t)} = PE_G(t-1)\dfrac{G_{Nom}(t)}{G_{\mathrm{Re}al}(t)}$ Gl.(44)
→ $Q_t = \sum \dfrac{p_{t-1}}{P_{t-1}} q_t$	→ $G_{Abs}(t) = \dfrac{G_{\mathrm{Re}al}(t)}{PE_G(t-1)}$ Gl.(45)
→ $\Delta Q_t = \sum \dfrac{p_{t-1}}{P_{t-1}}\Delta q_t$	→ $\Delta G_{Abs}(t) = \dfrac{\Delta G_{\mathrm{Re}al}(t)}{PE_G(t-1)}$
$1 = \sum \dfrac{p_{t-1}}{P_{t-1}}\dfrac{q_t}{Q_t}$ Gl.(6)	$1 = \dfrac{G_{\mathrm{Re}al}(t)}{PE_G(t-1)G_{Abs}(t)}$
$\dfrac{\Delta Q_t}{Q_{t-1}} = \sum \dfrac{p_{t-1}}{P_{t-1}}\dfrac{\Delta q_t}{Q_{t-1}} = \sum \upsilon_{t-1}\dfrac{\Delta q_t}{q_{t-1}}$ Gl.(6)	$\dfrac{\Delta G_{Abs}(t)}{G_{Abs}(t-1)} = \dfrac{\Delta G_{\mathrm{Re}al}(t)}{PE_G(t-1)G_{Abs}(t-1)} = \sum \upsilon_{t-1}\dfrac{\Delta q_t}{q_{t-1}}$

Die Darstellung der Realgröße „Verkettete Volumina" auf S.4 (Tödter 2005) als gewichtete Summe der Verketteten Volumina zweier Teilaggregate beruht – wie die rechte Spalte zeigt – auf der Additivität der Realgröße „Unverkettete Volumina". In Tödters Darstellung wird das nicht deutlich, da die Realgröße der „Unverketteten Volumina" (zweite Zeile) zwar verwendet, aber nicht explizit definiert worden ist.

[32] „Erweitert" um die explizite Formulierung der Unverketteten Volumina als Realwerte.
[33] Tödters „Schlussfolgerung", dass im letzten Teil der Formel die einfache Addition durch eine gewichtete ersetzt wird, gilt nur für die Verketteten Volumina. Wenn P_{t-1} vor die Summe gezogen wird, stehen in der Summe die additiven Unverketteten Volumina.

7.4 Zur Bedeutung der Additivität für ökonometrische Volkswirtschaftsmodelle

Ökonometrische Makromodelle umfassen Gleichungen mit stochastischem Term (Verhaltensgleichungen, institutionelle Gleichungen, technologische Gleichungen) und ohne einen solchen (Definitionen, Gleichgewichtsbedingungen, Identitäten, vgl. Intriligator 1978, S.28ff.). Beispielsweise besteht das Bruttoinlandsprodukt verwendungsseitig aus Teilaggregaten, die durch die folgende Identität zusammengefasst werden:

$$BIP = CPRI + CST + IB + EX - IM \qquad (*)$$

Legende:
BIP = Bruttoinlandsprodukt
CPRI = Privater Konsum
CST = Staatskonsum
IB = Bruttoinvestitionen
EX = Exporte
IM = Importe

Nach der alten VGR konnte man diese Gleichung problemlos auch für die entsprechenden Realgrößen notieren. Dann ergibt sich das reale BIP aus den realen Teilaggregaten, die im Modell durch *Verhaltensgleichungen* bestimmt werden. Diese wiederum konkretisieren einschlägige ökonomischen Theorien, indem letztere nach entsprechender Operationalisierung auf volkswirtschaftliche Daten bezogen und – vermittelt über eine Schätzung grundlegender Parameter mit Hilfe statistischer Methoden – konkretisiert werden. So wurden beispielsweise im RWI-Konjunkturmodell (mindestens bis zur Version 61) die *realen* Teilaggregate des BIP in der Regel durch theoretisch mehr oder weniger gut fundierte Verhaltensgleichungen bestimmt, während sich das Gesamtaggregat des BIP aus der Identität (*) – formuliert für die Realgrössen – ergab.[34] Unter Hinzuziehung der Preisindizes der Teilaggregate, die in der Regel ebenfalls mit Hilfe von Verhaltensgleichungen bestimmt wurden, konnten dann zunächst die nominalen Teilaggregate und mit ihnen schließlich das Gesamtaggregat nominal und real aufgrund der BIP-Identität (*) berechnet werden. Ähnlich ist auch das Bundesbankmodell konstruiert (Tödter 2005, S. 22 und 25). Eine schematische Darstellung dieses Aufbauprinzips läßt sich der Abbildung 1 entnehmen.

[34] Eine Beschreibung der Nachfolgeversionen des RWI-Modells, die im Rahmen der VGR 2005 funktionieren, ist bei Klinger und Ulrich (2009) zu finden. Auf Grund der allgemeinen Charakteristik, dass die „Einzelgleichungen mit Ursprungswerten“ (S.86) geschätzt werden, wird leider nicht klar, ob und, wenn ja, um welche Art Realwerte es sich handelt. Die pauschale Bemerkung, „das neue Modell enthält die verketteten Preisindizes auf Vorjahrespreisbasis nach der Revision der VGR 2005“ (ebd.), dürfte für jedes aktuelle Modell zutreffen und sagt ebenfalls nichts über die Art der Realwerte im Kern des Modells aus. Man erfährt auch nicht, wie das Problem der Additivität gelöst worden ist.

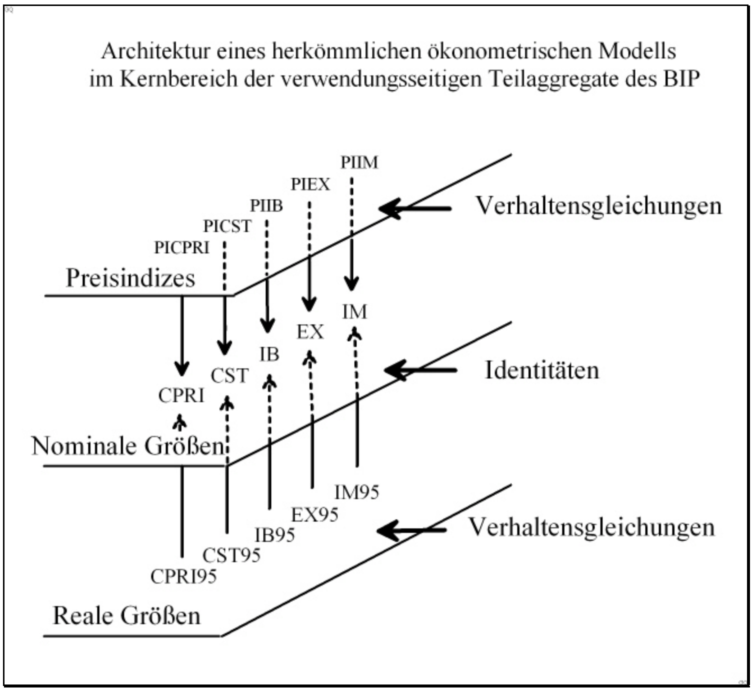

Abbildung 1

Wie man anhand des Schemas leicht erkennt, spielen die Verhaltensgleichungen für die Teilaggregate des BIP und die Verhaltensgleichungen der dazugehörigen Priese eine tragende Rolle im Modell, während die (additiven) Nominalgrößen davon abgeleitet sind. Verwendet man im Rahmen der VGR 2005 die Verketteten Volumenangaben als Realgrößen, so führt diese Modellarchitektur zu keinem exakten Ergebnis, da eine zu (*) analoge Identität für die Verketteten Volumina nicht existiert. Somit scheint es, dass man entweder die traditionelle Modellstruktur aufgeben oder auf Exaktheit verzichten muss. Die Architektur der Modelle ist zumindest hinsichtlich der Interpretation der Realgrößen als in der Regel theoretisch relevante Größen gut begründet, so dass einige den zweiten Weg wählen: „The less scrupulous (or those in a hurry) simply ignore the problem of non-additivity and continue to use these identities as if they were still valid.“ (Lequiller / Blades 2006, S.56.) Im Hinblick auf einen wesentlichen Zweck ökonometrischer Modelle, nämlich exakte Aussagen über den wichtigsten Indikator der volkswirtschaftlichen Entwicklung zu machen, ist diese Lösung des Problems hier verworfen worden.

7.5 Datenquellen

StBA (Statistisches Bundesamt) 2009a: Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen, Fachserie 18, Reihe 1.4, Inlandsproduktberechnung, Detaillierte Jahresergebnisse, Stand Mai 2009 (File 2180140088005.xls).

StBA 2009b: Zusatztabellen 2009-Q2, Unverkettete Volumenangaben in Vorjahrespreisen. Stand August 2009.

StBA 2009c: Zusatztabellen 2009-Q2, Verkettete Volumenangaben und Wachstumsbeiträge. Stand August 2009.

StBA 2009d: Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen, Fachserie 18, Reihe 1.2, Inlandsproduktberechnung, Vierteljahresergebnisse, Stand: August 2009. (File: 2180120093225.xls)

StBA 2005a, Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen, Fachserie 18, Reihe S.21, Revidierte Ergebnisse 1970 bis 2004. Stand Februar 2005. (File 2189021049005.xls)

StBA 2006: Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen, Fachserie 18, Reihe S.29, Inlandsproduktberechnung, Revidierte Jahresergebnisse 1970-1991. Stand: August 2006. (File: 2189029919005.xls)

StBA 2005b: Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen, Fachserie 18, Reihe S.26, Revidierte Jahresergebnisse 1991-2004. Stand: Mai 2005. (File: 2189026049005.xls)

StBA 2008: Verdienste und Arbeitskosten. Stand: Januar 2008. (File: 5622203083215.xls)

7.6 Verwendete Literatur

Albert Braakmann, Norbert Hartmann, Norbert Räth, Wolfgang Strohm: Revision der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen 2005 für den Zeitraum 1991 bis 2004. Publikation auf www.destatis.de

Brümmerhoff, Dieter 2007: Volkswirtschaftliche Gesamtrechnungen. München.

Brümmerhoff, Dieter 2009: Geschichte des Staates in den deutschen Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen. In: Voy 2009, S.329-353.

Fachausschuss Volkswirtschaftliche Gesamtrechnungen, Sitzung am 26. November 2003. TOP 2.1.1 Einführung der Vorjahrespreisbasis. http://www.destatis.de/download/d/vgr/Einfuehrung_der_Vorjahrespreisbasis.pdf)

Franz, Alfred 1996: Regionale Gesamtrechnungen: Dürfte man, was man tut? Tut man, was man dürfte? In: Reich et al. 1996, S.205-235.

Frenkel, Michael / John, Klaus Dieter 2006: Volkswirtschaftliche Gesamtrechnung. München.

Haslinger, Franz 1990: Volkswirtschaftliche Gesamtrechnung. 5. Auflage. München / Wien.

Intriligator, Michael D. 1978: Econometric Models, Techniques and Applications. Amsterdam / Oxford.

Klinger, Sabine / Ulrich, Jens 2009: Aus Fehler lernen. Zur Treffsicherheit der Fortentwicklung des IAB-RWI-Konjunkturmodells. In: Wagner 2009, S.85-98.

Lequiller, Francois / Blades, Derek 2006 : Understanding National Accounts. OECD Publishing.

Mayer, Helmut 2001: Preis- und Volumenmessung in den Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen. Anforderungen und Perspektiven. In: Statistisches Bundesamt (Hrsg.): Wirtschaft und Statistik 12/2001. S.1032-1043.

Nierhaus, Wolfgang 2004a: Wirtschaftswachstum in den VGR: Zur Einführung der Vorjahrespreisbasis in der deutschen Statistik. In: ifo Schnelldienst 5/2004 – 57. Jahrgang, S.28-34.

Nierhaus, Wolfgang 2004b: Zur Einführung der Vorjahrespreisbasis in der deutschen Statistik: Besonderheiten der Quartalsrechnung. In: ifo Schnelldienst 15/2004 – 57. Jahrgang, S.14-21.

Nierhaus, Wolfgang 2005: Vorjahrespreisbasis: Rechenregeln für die Aggregation. In: ifo Schnelldienst 22/2005 – 58. Jahrgang. S.12-16.

Quaas, Georg 2009a: Die Konsumfunktion in ökonometrischen Modellen für Deutschlands Volkswirtschaft auf Basis der VGR 2005. In: Wagner 2009, S.99-110.

Quaas, Georg 2009b: Die Umsetzung der Annual-Overlap-Methode in ökonometrischen Modellen – eine Analyse der programmtechnischen Möglichkeiten von E-Views. MPRA-Paper #19435, publiziert am 18.12.2009. http://mpra.ub.uni-muenchen.de/19435/

Räth, Norbert / Struck, Bernd / Voy Klaus 2009: Zur Geschichte der Deflationierung in den Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen. In: Voy 2009. S.209-230.

Reich, Utz-Peter 1998: Der zeitliche Vergleich von Aggregaten der VGR. In: Reich et al. 1998, S.53-90.

Reich, Utz-Peter / Stahmer, Carsten / Voy, Klaus (Hrsg.) 1996: Kategorien der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen. Band 1. Marburg.

Reich, Utz-Peter / Stahmer, Carsten / Voy, Klaus (Hrsg.) 1998: Kategorien der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen. Band 2. Marburg.

Speich, Wolf-Dietmar 2009: Die Entwicklung des Darstellungsprogramms der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen. In: Voy 2009. S.113-145.

Stobbe, Alfred 1989: Volkswirtschaftliches Rechnungswesen. Berlin / Heidelberg etc.

Tödter, Karl-Heinz 2005: Umstellung der deutschen VGR auf Vorjahrespreisbasis. Konzept und Konsequenzen für die aktuelle Wirtschaftsanalyse sowie die ökonometrische Modellierung. Diskussionspapier Reihe 1: Volkswirtschaftliche Studien Nr.31/2005.

Tödter, Karl-Heinz 2006: Volumenanteile und Wachstumsbeiträge der Vorjahrespreismethode mit Verkettung. In: Allgemeines Statistisches Archiv, Bd.90 (2006), S.457-463.

Tödter, Karl-Heinz 2007: Replik zur Kritik an "Volumenanteile und Wachstumsbeiträge der Vorjahrespreismethode mit Verkettung". In: AStA Wirtschafts- und Sozialstatistisches Archiv, Jg. 1 (2007), Heft 1, S.79-84.

von der Lippe, Peter 2007: Zur Interpretation der "Vorjahrespreismethode" der Deflationierung. Einige Anmerkungen zu einem Aufsatz von K.-H. Tödter. AStA Wirtschafts- und Sozialstatistisches Archiv, Jg. 1 (2007), Heft 1, S.61-71.

Voy, Klaus (Hrsg.) 2009a: Kategorien der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen. Band 4. Zur Geschichte der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen nach 1945. Marburg.

Voy, Klaus (Hrsg.) 2009c: Entfaltung und Integration der Ebenen des Kernsystems der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen. In: Voy 2009a, S.249-302.

Wagner, Adolf (Hrsg.) 2009: Empirische Wirtschaftsforschung heute. Stuttgart.