



Munich Personal RePEc Archive

Forecast variance in econometric models

Calzolari, Giorgio

Universita' di Padova, Dipartimento di Scienze Statistiche

June 1987

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/23866/>
MPRA Paper No. 23866, posted 14 Jul 2010 09:18 UTC

Giorgio Calzolari

La varianza
delle previsioni
nei modelli econometrici

INDICE

Nota sull'autore	7
PARTE PRIMA: PREVISIONI UNIPERIODALI	9
1. MODELLO LINEARE IN FORMA STRUTTURALE	11
2. FORMA RIDOTTA E PREVISIONI UNIPERIODALI	17
3. VARIANZA DELLE PREVISIONI: METODO ANALITICO TRADIZIONALE	21
3.1. Prodotto di Kronecker	23
3.2. Operatore vec	24
3.3. Lemma (Nissen)	24
3.4. Derivate prime degli elementi della matrice inversa	26
3.5. Osservazioni e richiami	28
3.6. Lemma (Slutsky)	31
3.7. Lemma	32
3.8. Il metodo di Goldberger, Nagar e Odeh	33
3.9. Un problema pratico	38
4. VARIANZA DELLE PREVISIONI: METODO ANALITICO ALTERNATIVO	41
4.1. Nota	45
4.2. Un caso particolare: il modello di regressione	47

5. MODELLI NON LINEARI	55
6. ERRORE DI PREVISIONE NEI MODELLI NON LINEARI	59
6.1. La componente dovuta all'errore di stima	59
6.2. La componente dovuta ai disturbi strutturali	62
6.3. Simulazione stocastica	63
6.4. Simulazione stocastica con variabili antitetiche	67
6.5. Simulazione stocastica con variabili di controllo	73
7. RISULTATI SPERIMENTALI SUL MODELLO	83
8. RISULTATI SPERIMENTALI SU ALTRI MODELLI	95
8.1. Il modello Klein-I	95
8.2. Il modello Girshick - Haavelmo	104
8.3. Una versione non lineare del modello Klein-I	114
8.4. Un modello IS-LM per l'economia italiana	129
8.5. Il modello ISPE per l'economia italiana	143
PARTE SECONDA: PREVISIONI MULTIPERIODALI	149
9. MODELLO LINEARE DINAMICO	151
10. SIMULAZIONE DINAMICA E PREVISIONI MULTIPERIODALI	155
11. VARIANZA DELLE PREVISIONI: METODO ANALITICO TRADIZIONALE	159
11.1. Il metodo di Schmidt	161
11.2. Nota sulle dimensioni delle matrici	171
12. VARIANZA DELLE PREVISIONI: METODO ANALITICO ALTERNATIVO	173

12.1. Risultati sperimentali sul modello	181
13. ERRORE DI PREVISIONE NEI MODELLI DINAMICI NON LINEARI	193
13.1. La componente dovuta all'errore di stima	196
13.2. La componente dovuta ai disturbi strutturali: simulazione stocastica	198
13.3. Variabili antitetiche e variabili di controllo	200
13.4. Nota	209
13.5. Risultati sperimentali	211
BIBLIOGRAFIA	221

Nota sull'autore

Giorgio Calzolari, nato a Ferrara nel 1946, laureato in Ingegneria all'Università di Bologna nel 1969, e' all'IBM Italia dal 1971 presso il Centro Scientifico di Pisa. E' stato professore a contratto presso le Università di Perugia e di Padova. I suoi interessi di ricerca riguardano principalmente la stima e la simulazione dei modelli econometrici, l'incertezza nelle previsioni e nelle azioni di politica economica, l'applicazione dei metodi Monte Carlo ai modelli econometrici. Alcuni suoi contributi sono stati pubblicati da riviste internazionali di econometria (*Econometrica*, *Journal of Econometrics*, *International Economic Review*, *Journal of Economic Dynamics and Control*, *Economics Letters*, *International Journal of Forecasting*).

Centro Scientifico IBM
via S.Maria 67
56100 Pisa
☎ 050-47383

Giugno 1987

**PARTE PRIMA: PREVISIONI
UNIPERIODALI**

1. MODELLO LINEARE IN FORMA STRUTTURALE

Un modello econometrico lineare, nella forma strutturale, puo' essere rappresentato ricorrendo alla seguente notazione matriciale

$$(1.1) \quad Ay_t + Bx_t = u_t \quad t = 1, 2, \dots, T$$

dove y_t e u_t sono vettori ($m \times 1$) di variabili endogene e di errori casuali al tempo t , x_t e' un vettore ($n \times 1$) di variabili predeterminate, A e B sono matrici ($m \times m$) e ($m \times n$) di coefficienti e T e' la lunghezza del periodo campionario (cioe' il numero di dati disponibili per ogni variabile).

Si assume che i vettori degli errori u_t abbiano media zero, matrice di covarianza Σ , finita e costante nel tempo, e che vettori relativi a periodi diversi siano tra loro indipendenti. Se il vettore delle variabili predeterminate contiene variabili casuali, si assume che i vettori u_t e x_t contemporanei siano indipendenti (nel caso del modello lineare, entrambe le ipotesi di indipendenza potrebbero essere sostituite da ipotesi piu' deboli di non correlazione, o di non correlazione asintotica; l'ipotesi forte di indipendenza permetterebbe, pero', di estendere la trattazione anche a modelli non lineari).

Come esempio semplice di modello econometrico lineare si puo' considerare il seguente modello per l'economia italiana

$$(1.2) \quad \begin{cases} C_t = a_1 + a_2 Y_t + a_3 C_{t-1} + u_{1,t} \\ I_t = a_4 + a_5 (Y_t - Y_{t-1}) + a_6 I_{t-1} + u_{2,t} \\ M_t = a_7 + a_8 I_t + a_9 (Y - D)_t + u_{3,t} \\ Y_t = C_t + I_t + Z_t - M_t \end{cases}$$

recentemente impiegato in alcuni studi sugli errori di previsione dovuti ai dati provvisori (Di Fonzo, 1986, Rettore e Trivellato, 1986, Trivellato e Rettore, 1986; il modello e' analogo a quello usato nei lavori di Denton e Oksanen, 1972, 1973, con la variante di considerare valori espressi a prezzi costanti, anziche' a prezzi correnti).

Le variabili endogene (vettore y_t) sono 4: C_t = consumi finali interni delle famiglie e delle istituzioni sociali private, I_t = investimenti fissi lordi, M_t = importazioni di beni e servizi, Y_t = prodotto interno lordo ai prezzi di mercato.

Le variabili predeterminate (vettore x_t) sono 5, due delle quali sono esogene e tre sono endogene ritardate di un periodo: il termine costante (= 1 in tutti i periodi), la variabile Z_t , definita come somma di consumi finali interni delle amministrazioni pubbliche, esportazioni di beni e servizi, e variazione delle scorte, C , I e Y ritardate di un periodo (i dati sono annuali)

$$(1.3) \quad y_t = \begin{bmatrix} C_t \\ I_t \\ M_t \\ Y_t \end{bmatrix} \quad x_t = \begin{bmatrix} 1 \\ Z_t \\ C_{t-1} \\ I_{t-1} \\ Y_{t-1} \end{bmatrix}$$

Il vettore degli errori al tempo t , u_t , e' composto di tre disturbi casuali, $u_{1,t}$, $u_{2,t}$, $u_{3,t}$, e di un termine identicamente nullo

$$(1.4) \quad u_t = \begin{bmatrix} u_{1,t} \\ u_{2,t} \\ u_{3,t} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice di varianza - covarianza del vettore u_t sarà, pertanto, una matrice di dimensioni (4×4) , con una riga (l'ultima) ed una colonna (l'ultima) composte solo di elementi uguali a zero

$$(1.5) \quad \Sigma = E(u_t u_t') = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & 0 \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \sigma_{2,3} & 0 \\ \sigma_{3,1} & \sigma_{3,2} & \sigma_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per rappresentare il modello nella forma (1.1), occorre introdurre le matrici di coefficienti A e B , di dimensioni, rispettivamente, (4×4) e (4×5)

$$(1.6) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & 0 & -a_5 \\ 0 & a_9 - a_8 & 1 & -a_9 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(1.7) \quad B = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & -a_3 & 0 & 0 \\ -a_4 & 0 & 0 & -a_6 & a_5 \\ -a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le matrici A e B sono matrici sparse e alcuni dei loro elementi sono noti (ad esempio alcuni elementi valgono 1 o -1); altri elementi, invece, sono soltanto indicati (a_1, a_2, \dots); altre particolari "restrizioni" tra gli elementi delle due matrici sono messe in evidenza nelle equazioni (1.6) e (1.7) (ad esempio, a_5 compare sia nella matrice A , sia nella matrice B).

Il valore dei coefficienti a_1, a_2, \dots non e' noto: in base alla teoria econometrica tradizionale si ammette, per ipotesi, che tali coefficienti abbiano un valore fisso (non stocastico), ma incognito, e che si possa ottenere una loro stima ($\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots$) mediante l'applicazione di opportuni metodi ai dati campionari delle variabili y_t e x_t .

I metodi di stima appositamente concepiti per i modelli econometrici in forma strutturale (sistemi di equazioni simultanee), quali ad esempio il metodo dei minimi quadrati a due o a tre stadi, o il metodo delle variabili strumentali e della massima verosimiglianza ad informazione limitata o completa, assicurano, sotto ipotesi sufficientemente generali, due proprieta' (si veda, ad esempio, Dhrymes, 1970, pp. 179, 190, 196): consistenza delle stime

$$(1.8) \quad \underset{T \rightarrow \infty}{plim} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

e normalita' asintotica (convergenza in distribuzione, si veda Dhrymes, 1970, paragrafo 3.3, o Rao, 1973, 2c.4)

$$(1.9) \quad \sqrt{T} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 - a_1 \\ \hat{a}_2 - a_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} N(0, \Psi).$$

Introducendo le stime $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots$ nelle matrici A e B , si ottengono le corrispondenti matrici \hat{A} e \hat{B}

$$(1.10) \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\hat{a}_2 \\ 0 & 1 & 0 & -\hat{a}_5 \\ 0 & \hat{a}_9 - \hat{a}_8 & 1 & -\hat{a}_9 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(1.11) \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} -\hat{a}_1 & 0 & -\hat{a}_3 & 0 & 0 \\ -\hat{a}_4 & 0 & 0 & -\hat{a}_6 & \hat{a}_5 \\ -\hat{a}_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

I residui della stima delle equazioni strutturali, \hat{u}_t , si ottengono introducendo nel sistema (1.1) le matrici \hat{A} e \hat{B}

$$(1.12) \quad \hat{u}_t = \hat{A}y_t + \hat{B}x_t \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

2. FORMA RIDOTTA E PREVISIONI UNIPERIODALI

Siano A e \hat{A} non singolari. Si indica con

$$(2.1) \quad \Pi = -A^{-1}B$$

la matrice ($m \times n$) dei coefficienti di forma ridotta (4×5 nel modello dato), e con

$$(2.2) \quad \hat{\Pi} = -\hat{A}^{-1}\hat{B}$$

la sua stima. Si ha allora, da (1.1)

$$(2.3) \quad y_t = \Pi x_t + A^{-1}u_t.$$

La (2.3) e' detta *forma ridotta ristretta* (o vincolata, o derivata) del modello dato.

Sia h il periodo di tempo in cui si effettua la previsione. Se potessimo conoscere i valori "veri" dei coefficienti a_1, a_2, \dots (e quindi A, B e Π), la previsione fornita dal modello sarebbe

$$(2.4) \quad \bar{y}_h = \Pi x_h$$

dove i valori delle variabili in x_h si suppongono noti (predeterminati, appunto), mentre i termini di errore sono posti uguali al loro valor medio (zero; \bar{y}_h e' il *valor medio condizionato* di y nel periodo h).

In realta', non si conoscono i coefficienti a_1, a_2, \dots , ma solo le loro stime $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots$ (e quindi \hat{A}, \hat{B} e $\hat{\Pi}$). La previsione effettivamente fornita dal modello sara', dunque, la *stima del valor medio condizionato* di y nel periodo h

$$(2.5) \quad \hat{y}_h = \hat{\Pi}x_h.$$

Se la struttura del modello e' corretta e se i valori di tutte le variabili predeterminate, x_h , sono noti (ipotesi che manterremo sempre in cio' che segue), il valore "vero" delle variabili endogene nel periodo h e' dato da:

$$(2.6) \quad y_h = \Pi x_h + A^{-1}u_h.$$

Il vettore degli errori di previsione puo' essere, dunque, rappresentato come segue:

$$(2.7) \quad \hat{y}_h - y_h = (\hat{y}_h - \bar{y}_h) + (\bar{y}_h - y_h) = (\hat{\Pi} - \Pi)x_h - A^{-1}u_h.$$

Supponiamo ora che la previsione si riferisca ad un periodo di tempo esterno al periodo campionario di stima (ad esempio, un anno successivo al 1979 poiche', nel modello dato, la stima e' stata ottenuta sulla base dei dati 1961-1979) e che in tale periodo siano noti i valori di tutte le variabili predeterminate x_h . In tal caso, il vettore casuale u_h , che e' per ipotesi indipendente dai vettori u_t degli anni precedenti, e' anche indipendente dalle stime $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots$ (ottenute utilizzando i dati del campione che sono, al piu', correlati con le u_t del solo periodo campionario); dunque u_h e' anche indipendente da \hat{A} e \hat{B} , e quindi da $\hat{\Pi}$. Essendo per ipotesi noto x_h , ed essendo Π e A matrici non stocastiche, i due termini sul lato destro della equazione (2.7) sono indipendenti. Il vettore degli errori di previsione risulta, dunque,

decomposto nella somma algebrica dei due vettori casuali indipendenti $(\hat{\Pi} - \Pi)x_h$ e $-A^{-1}u_h$.

3. VARIANZA DELLE PREVISIONI: METODO ANALITICO TRADIZIONALE

Il calcolo della matrice di covarianza della seconda componente di errore nella (2.7), quella cioè dovuta alla presenza dei disturbi casuali u_h , è molto semplice. Se u_h ha media zero e matrice di covarianza Σ , allora $-A^{-1}u_h$ ha media zero e matrice di covarianza $A^{-1}\Sigma A'^{-1}$, una stima della quale è immediatamente ottenibile come

$$(3.1) \quad \hat{A}^{-1} \hat{\Sigma} \hat{A}'^{-1}$$

dove $\hat{\Sigma}$ viene, a sua volta, calcolata dai residui della stima delle equazioni strutturali

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \hat{\Sigma} &= T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t \hat{u}_t' = \\ &= T^{-1} \sum_{t=1}^T [\hat{A}y_t + \hat{B}x_t][\hat{A}y_t + \hat{B}x_t]'. \end{aligned}$$

La matrice $A^{-1}\Sigma A'^{-1}$ coincide con la matrice di covarianza delle equazioni di forma ridotta; trattandosi di un modello lineare, la matrice è costante al variare del periodo di previsione.

È possibile arrivare ad una stima uguale a quella fornita dalla (3.1) con la seguente tecnica di simulazione.

Si prende il modello con coefficienti stimati, e lo si risolve su tutto il periodo campionario, dopo aver posto uguali a zero i termini di errore (simulazione deterministica); se sono presenti variabili endogene

ritardate (modello dinamico) vanno trattate come variabili predeterminate (simulazione statica). Otterremo allora i vettori soluzione \hat{y}_t , nei periodi $t = 1, 2, \dots, T$

$$(3.3) \quad \hat{y}_t = -\hat{A}^{-1}\hat{B}x_t \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

Esplicitando y_t dalla (1.12), possiamo rappresentare i valori storici delle variabili come

$$(3.4) \quad y_t = -\hat{A}^{-1}\hat{B}x_t + \hat{A}^{-1}\hat{u}_t \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

Possiamo ora calcolare, in ogni periodo, l'errore di simulazione $\hat{y}_t - y_t$, e quindi l'errore quadratico medio di simulazione su tutto il periodo campionario, in forma di matrice (*M.S.E.* = *mean squared error*)

$$(3.5) \quad \begin{aligned} M.S.E. &= T^{-1} \sum_{t=1}^T (\hat{y}_t - y_t)(\hat{y}_t - y_t)' = \\ &= T^{-1} \sum_{t=1}^T (\hat{A}^{-1}\hat{u}_t)(\hat{A}^{-1}\hat{u}_t)' = T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{A}^{-1}\hat{u}_t\hat{u}_t'\hat{A}^{-1} \end{aligned}$$

da cui si ottiene la (3.1).

Si noti che questo metodo alternativo permette di calcolare la matrice di varianza - covarianza della forma ridotta semplicemente risolvendo il modello nel periodo campionario; se la soluzione del modello viene effettuata con tecniche numeriche (ad esempio col metodo di Gauss - Seidel), non e' necessario disporre delle matrici \hat{A} e $\hat{\Sigma}$ in forma esplicita, e questo puo' essere comodo quando, come nel caso di modelli di grandi dimensioni, sia molto piu' semplice scrivere il sistema di equazioni in una forma simile alla (1.2) piuttosto che nella forma (1.1).

Ad ogni modo, il calcolo della matrice di varianza - covarianza della componente del vettore degli errori di previsione dovuta ai termini di errore casuale risulta piuttosto semplice, sia che si applichi la (3.1), sia

che si preferisca ricorrere al calcolo della matrice degli errori quadratici medi nel periodo campionario (eq. 3.5).

Piu' complesso e', invece, il calcolo della matrice di covarianza della prima componente di errore, quella dovuta all'errore nella stima dei coefficienti. In questo capitolo e nel capitolo successivo verra' ricavata una approssimazione asintotica (piu' esattamente una approssimazione del primo ordine asintoticamente esatta) di tale matrice. Per fare questo occorre premettere alcune definizioni e lemmi.

3.1. Prodotto di Kronecker

Siano date due matrici: P , di dimensioni $(m \times n)$, e Q , di dimensioni $(r \times s)$. Si dice prodotto di Kronecker la matrice di dimensioni $(mr \times ns)$ cosi' composta:

$$P \otimes Q = \begin{bmatrix} p_{1,1}Q & p_{1,2}Q & \dots & p_{1,n}Q \\ p_{2,1}Q & p_{2,2}Q & \dots & p_{2,n}Q \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{m,1}Q & p_{m,2}Q & \dots & p_{m,n}Q \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} p_{1,1}q_{1,1} & p_{1,1}q_{1,2} & \dots & p_{1,2}q_{1,1} & p_{1,2}q_{1,2} & \dots \\ p_{1,1}q_{2,1} & p_{1,1}q_{2,2} & \dots & p_{1,2}q_{2,1} & p_{1,2}q_{2,2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots \\ p_{2,1}q_{1,1} & p_{2,1}q_{1,2} & \dots & p_{2,2}q_{1,1} & p_{2,2}q_{1,2} & \dots \\ p_{2,1}q_{2,1} & p_{2,1}q_{2,2} & \dots & p_{2,2}q_{2,1} & p_{2,2}q_{2,2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

Si noti che, a differenza del prodotto matriciale "righe per colonne", il prodotto di Kronecker puo' sempre essere eseguito, quali che siano le dimensioni delle due matrici.

3.2. Operatore *vec*

Una matrice P di dimensioni $(m \times n)$ viene trasformata dall'operatore *vec* in un vettore colonna. Tale vettore viene ottenuto riportando consecutivamente le colonne della matrice

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p_{m,1} & p_{m,2} & \cdots & p_{m,n} \end{bmatrix}; \quad \text{vec } P = \begin{bmatrix} p_{1,1} \\ p_{2,1} \\ \cdots \\ p_{m,1} \\ p_{1,2} \\ p_{2,2} \\ \cdots \\ p_{m,2} \\ \cdots \\ p_{1,n} \\ p_{2,n} \\ \cdots \\ p_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Le dimensioni del vettore risultante sono, ovviamente, $(mn \times 1)$.

3.3. Lemma (Nissen)

Siano P, Q ed R tre matrici dimensionalmente compatibili per eseguire il prodotto PQR . Si ha allora (Nissen, 1968):

$$(3.3.1) \quad \text{vec}(PQR) = (R' \otimes P) \text{vec } Q.$$

Innanzitutto si verifica facilmente che il vettore risultante sul lato sinistro della (3.3.1) ha le medesime dimensioni del vettore risultante sul lato destro. Se ad esempio P, Q ed R hanno rispettivamente dimensioni $(m \times n)$, $(n \times k)$, $(k \times s)$, le tre matrici sono dimensionalmente compatibili per eseguire i prodotti sia sul lato destro che sul lato sinistro della (3.3.1) e in entrambi i casi il risultato sarà un vettore $(ms \times 1)$. L'uguaglianza, poi, si dimostra sviluppando esplicitamente i prodotti e verificando che ogni elemento del vettore sul lato sinistro è uguale al corrispondente elemento del vettore sul lato destro. Ci si limiterà a verificare l'uguaglianza per il primo elemento.

Indichiamo con $P_{1\cdot}$ la prima riga della matrice P (vettore riga), e con $P_{\cdot 1}$ la prima colonna (vettore colonna). Il primo elemento del vettore sul lato sinistro della (3.3.1) vale

$$\begin{aligned}
 (3.3.2) \quad [\text{vec}(PQR)]_1 &= (PQR)_{1,1} = (PQ)_{1\cdot} R_{\cdot 1} = \\
 &= (P_{1\cdot} Q) R_{\cdot 1} = [P_{1\cdot} Q_{\cdot 1}, P_{1\cdot} Q_{\cdot 2}, P_{1\cdot} Q_{\cdot 3}, \dots] R_{\cdot 1} = \\
 &= [p_{1,1}q_{1,1} + p_{1,2}q_{2,1} + p_{1,3}q_{3,1} + \dots, p_{1,1}q_{1,2} + p_{1,2}q_{2,2} + \\
 &+ p_{1,3}q_{3,2} + \dots, p_{1,1}q_{1,3} + p_{1,2}q_{2,3} + p_{1,3}q_{3,3} + \dots, \dots] \begin{bmatrix} r_{1,1} \\ r_{2,1} \\ r_{3,1} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Il primo elemento del vettore sul lato destro della (3.3.1) vale

$$\begin{aligned}
 (3.3.3) \quad [(R' \otimes P) \text{vec} Q]_1 &= \\
 &= (R' \otimes P)_{1\cdot} \text{vec} Q = [(R')_{1\cdot} \otimes P_{1\cdot}] \text{vec} Q = \\
 &= [r_{1,1}p_{1,1}, r_{1,1}p_{1,2}, r_{1,1}p_{1,3}, \dots, r_{2,1}p_{1,1}, r_{2,1}p_{1,2}, r_{2,1}p_{1,3}, \dots, \\
 & r_{3,1}p_{1,1}, r_{3,1}p_{1,2}, r_{3,1}p_{1,3}, \dots, \dots] [q_{1,1}, q_{2,1}, q_{3,1}, \dots, \\
 & q_{1,2}, q_{2,2}, q_{3,2}, \dots, q_{1,3}, q_{2,3}, q_{3,3}, \dots, \dots]'.
 \end{aligned}$$

Le due somme ottenute sviluppando i prodotti riga per colonna sul lato destro delle (3.3.2) e (3.3.3) differiscono, evidentemente, solo per l'ordine degli addendi.

3.4. Derivate prime degli elementi della matrice inversa

Sia A una matrice quadrata non singolare, $a_{p,q}$ il suo elemento p,q -esimo, A^{-1} la matrice inversa e $a^{i,k}$ l'elemento i,k -esimo dell'inversa. Si ha allora

$$(3.4.1) \quad \frac{\partial a^{i,k}}{\partial a_{p,q}} = -a^{i,p} a^{q,k}.$$

Come regola mnemonica per ricordare la posizione degli indici nella formula, Theil (1971, p. 33) suggerisce di pensare al noto segnale stradale "divieto di inversione di marcia ad U".

La dimostrazione si basa sul fatto che, essendo $A^{-1}A = I$, la derivata della matrice $A^{-1}A$ rispetto allo scalare $a_{p,q}$ e' la matrice nulla:

$$(3.4.2) \quad \frac{\partial(A^{-1}A)}{\partial a_{p,q}} = 0$$

da cui

$$(3.4.3) \quad \left[\frac{\partial A^{-1}}{\partial a_{p,q}} \right] A + A^{-1} \left[\frac{\partial A}{\partial a_{p,q}} \right] = 0$$

e quindi

$$(3.4.4) \quad \frac{\partial A^{-1}}{\partial a_{p,q}} = - A^{-1} \left[\frac{\partial A}{\partial a_{p,q}} \right] A^{-1}.$$

Tutti gli elementi della matrice $\partial A/\partial a_{p,q}$ sono evidentemente uguali a zero, ad eccezione dell'elemento p,q -esimo che vale 1. Si ha pertanto

$$(3.4.5) \quad \frac{\partial A}{\partial a_{p,q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{riga } p$$

↑
colonna q

da cui

$$(3.4.6) \quad A^{-1} \frac{\partial A}{\partial a_{p,q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & a^{1,p} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a^{2,p} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a^{3,p} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

↑
colonna q

e quindi

$$(3.4.7) \quad \frac{\partial A^{-1}}{\partial a_{p,q}} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & a^{1,p} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a^{2,p} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a^{3,p} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} A^{-1}.$$

↑
colonna q

La derivata $\partial a^{i,k}/\partial a_{p,q}$ e' l'elemento i,k - esimo della matrice (3.4.7), ed e' quindi uguale al prodotto della riga i della prima matrice per la colonna k della seconda matrice sul lato destro della (3.4.7)

$$(3.4.8) \quad \frac{\partial a^{i,k}}{\partial a_{p,q}} = - [0 \ 0 \ \dots \ a^{i,p} \ \dots \ 0 \ 0] [A^{-1}]_{\cdot k} = - a^{i,p} a^{q,k}$$

\uparrow
 colonna q

che e' il risultato cercato.

3.5. Osservazioni e richiami

In questo paragrafo vengono richiamati alcuni concetti relativi alla convergenza in probabilita' e alla convergenza in distribuzione delle successioni di variabili casuali, che saranno impiegati nel seguito della trattazione. I simboli utilizzati non hanno, nella maggior parte dei casi, relazione con gli stessi simboli impiegati negli altri paragrafi.

3.5.1. Convergenza in probabilita' (Rao, 1973, 2c.2) di una successione di variabili casuali (o successione di vettori di variabili casuali) $x_1, x_2, \dots, x_T, \dots$ ad una costante (o vettore di costanti)

$$plim_{T \rightarrow \infty} x_T = c.$$

3.5.2. Convergenza in probabilita' (Rao, 1973, 2c.2) di una successione di variabili casuali (o successione di vettori di variabili casuali) $x_1, x_2, \dots, x_T, \dots$ ad una variabile casuale (o vettore di variabili casuali)

$$plim_{T \rightarrow \infty} x_T = x.$$

- 3.5.3.** Convergenza in distribuzione (Dhrymes, 1970, paragrafo 3.3, o Rao, 1973, 2c.4) di una successione di variabili casuali (o successione di vettori di variabili casuali) $x_1, x_2, \dots, x_T, \dots$ ad una variabile casuale (o vettore di variabili casuali)

$$x_T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} x.$$

Di particolare interesse e' il caso di convergenza in distribuzione ad una variabile casuale (o vettore di variabili casuali) con distribuzione normale (o normale multivariata)

$$x_T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} x \sim N(0, \Psi)$$

o semplicemente

$$x_T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} N(0, \Psi).$$

In tal caso si dice anche che la variabile casuale x_T (o vettore di variabili casuali; generalmente si tratta della stima di un parametro o di un vettore di parametri ottenuta da un campione di T osservazioni) e' asintoticamente distribuita come una normale (o normale multivariata) con media zero e varianza (o matrice di covarianza) Ψ .

- 3.5.4.** La convergenza in probabilita' implica convergenza in distribuzione (Rao, 1973, 2c.4.12); non e' necessariamente vero il viceversa.
- 3.5.5.** Se la successione di variabili casuali $\{x_T\}$ converge in probabilita' alla costante c , e la successione $\{y_T\}$ converge in distribuzione alla variabile casuale y , allora la successione $\{x_T y_T\}$ converge in distribuzione alla variabile casuale cy . Se $c = 0$, allora la successione $\{x_T y_T\}$ converge in probabilita' a zero (Rao, 1973, 2c.4.x).
- 3.5.6.** Se la successione di variabili casuali $\{y_T\}$ converge in distribuzione, e la successione $\{x_T - y_T\}$ converge in probabilita'

a zero, allora anche la successione $\{x_T\}$ converge alla stessa distribuzione a cui converge $\{y_T\}$ (Rao, 1973, 2c.4.12).

- 3.5.7.** Sia \hat{a}_T la stima del vettore dei coefficienti strutturali di un sistema di equazioni, ottenuta applicando uno dei metodi "classici" di stima (2SLS, 3SLS, LIML, FIML, LIVE, FIVE, ecc.) ad un campione di osservazioni di lunghezza T ; sia poi a_0 il vettore dei "veri" coefficienti. Sotto ipotesi opportune (si veda, ad esempio, Dhrymes, 1970, pp. 179, 190, 196), la successione di vettori di variabili casuali $\{\sqrt{T}(\hat{a}_T - a_0)\}$, per $T \rightarrow \infty$, converge in distribuzione ad una normale multivariata $N(0, \Psi)$. Ciò implica, tra le altre cose, la consistenza della stima, cioè $\text{plim}(\hat{a}_T - a_0) = 0$ (e quindi $\text{plim} \hat{a}_T = a_0$). Infatti $(\hat{a}_T - a_0)$ è uguale al prodotto del vettore di variabili casuali $\sqrt{T}(\hat{a}_T - a_0)$, che converge in distribuzione, e della variabile $1/\sqrt{T}$, che converge a zero.
- 3.5.8.** I metodi "classici" di stima forniscono anche una stima della matrice di covarianza dei coefficienti strutturali. Ad esempio, per il metodo di massima verosimiglianza ad informazione completa (FIML) la stima della matrice di covarianza può essere ottenuta invertendo la matrice delle derivate seconde (Hessiano) della funzione di verosimiglianza concentrata (col segno cambiato) rispetto ai coefficienti strutturali. Non si tratta mai di una stima della matrice Ψ , si tratta invece in ogni caso di una stima consistente della matrice Ψ divisa per la lunghezza del periodo campionario, e verrà indicata nel seguito con $\hat{\Psi}/T$ (si veda, ad esempio, Christ, 1966, p. 379). La cosa risulta piuttosto ovvia se si pensa alla stima della media di una variabile casuale normale univariata $x \sim N(m, \sigma^2)$, sulla base di T estrazioni indipendenti della variabile stessa, x_1, x_2, \dots, x_T ; la stima della media, \hat{m}_T , è data da $\hat{m}_T = (x_1 + x_2 + \dots + x_T)/T$; la varianza della stima è σ^2/T ; $\sqrt{T}(\hat{m}_T - m)$ è distribuita come una normale con media 0 e varianza σ^2 .

Per grandi campioni si dira', pertanto, che $\hat{a}_T - a_0$ e' un vettore di variabili casuali la cui distribuzione e' prossima ad una normale multivariata, con media zero e matrice di covarianza Ψ/T (oppure che \hat{a}_T e' un vettore di variabili casuali la cui distribuzione e' prossima ad una normale multivariata, con media a_0 e matrice di covarianza Ψ/T). Si dice anche che $\hat{\Psi}/T$ e' la stima della matrice di covarianza asintotica di \hat{a}_T .

3.6. Lemma (Slutsky)

Se la successione di variabili casuali (o vettori di variabili casuali) $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_T, \dots$ per $T \rightarrow \infty$ converge in probabilita' alla costante (o vettore di costanti) a_0 , e g e' una funzione continua (o vettore di funzioni continue), allora la successione $g(\hat{a}_1), g(\hat{a}_2), \dots, g(\hat{a}_T), \dots$ converge in probabilita' a $g(a_0)$.

Questo lemma e' dovuto a Slutsky (1925) nel caso in cui g sia una funzione razionale (si veda Cramér, 1946, 20.6); e' comunque facilmente estendibile al caso piu' generale di funzioni continue (si veda Rao, 1973, 2c.4.14). La dimostrazione puo' essere data nel modo seguente.

Essendo g funzione continua, per ogni $\delta > 0$ esiste un intorno Ia_0 del punto a_0 tale che $|g(a) - g(a_0)| < \delta$ per ogni a appartenente ad Ia_0 . Data la convergenza in probabilita' della successione $\{\hat{a}_T\}$, per ogni intorno del punto a_0 e per ogni $\epsilon > 0$, esiste un intero N tale che, per ogni $T > N$, la probabilita' che \hat{a}_T appartenga all'intorno e' $> 1 - \epsilon$. Se in particolare scegliamo l'intorno Ia_0 di cui sopra, quando \hat{a}_T appartiene ad Ia_0 , allora $|g(\hat{a}_T) - g(a_0)| < \delta$. Per ogni $\delta, \epsilon > 0$ si ha, dunque, $p[|g(\hat{a}_T) - g(a_0)| < \delta] \geq p[\hat{a}_T \in Ia_0] > 1 - \epsilon$, e quindi, per $T \rightarrow \infty$, $plim g(\hat{a}_T) = g(a_0)$.

3.7. Lemma

Sia $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_T, \dots$ una successione di variabili casuali tale che, per $T \rightarrow \infty$, $\sqrt{T}(\hat{a}_T - a_0)$ converge in distribuzione ad una normale $N(0, \sigma^2)$. Sia g una funzione continua, con derivata prima continua e diversa da zero in a_0 . Allora $\sqrt{T}[g(\hat{a}_T) - g(a_0)]$ converge in distribuzione ad una normale con media zero e varianza $[g'(a_0)\sigma]^2$.

Per dimostrare questo lemma (si veda Rao, 1973, 6a.2.i, o Zacks, 1971, pp. 248-249) si sviluppa $g(\hat{a}_T)$ con la formula di Taylor, troncata al primo ordine

$$(3.7.1) \quad \sqrt{T}[g(\hat{a}_T) - g(a_0)] = \sqrt{T}g'(a_0)(\hat{a}_T - a_0) + \sqrt{T}r_T$$

dove il resto r_T va a zero piu' rapidamente di $(\hat{a}_T - a_0)$, al convergere di \hat{a}_T ad a_0 (infinitesimo di ordine superiore, Ghizzetti, 1960-61, p. 248), e dunque $r_T/(\hat{a}_T - a_0)$ converge a zero se \hat{a}_T converge ad a_0 . Poiche' \hat{a}_T converge ad a_0 in probabilita' per $T \rightarrow \infty$ (osservazione 3.5.7), anche $r_T/(\hat{a}_T - a_0)$ converge a zero in probabilita'. Si ha dunque

$$(3.7.2) \quad \begin{aligned} \sqrt{T}[g(\hat{a}_T) - g(a_0)] - g'(a_0)\sqrt{T}(\hat{a}_T - a_0) &= \\ &= \sqrt{T}(\hat{a}_T - a_0) \left[\frac{r_T}{\hat{a}_T - a_0} \right] \end{aligned}$$

dove il secondo membro e' il prodotto della variabile casuale $\sqrt{T}(\hat{a}_T - a_0)$, che converge in distribuzione ad una normale, con una variabile casuale che converge a zero in probabilita': dunque converge a zero in probabilita' (osservazione 3.5.5). Da cio' segue che il primo termine sul lato sinistro della (3.7.2) converge alla stessa distribuzione asintotica del secondo termine, che e' ovviamente $N\{0, [g'(a_0)\sigma]^2\}$.

Il lemma puo' essere esteso al caso di vettori di variabili casuali nel modo seguente (δ - method, Rao, 1973, 6a.2.iii).

Sia $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_T, \dots$ una successione di vettori di variabili casuali tale che, per $T \rightarrow \infty$, $\sqrt{T}(\hat{a}_T - a_0)$ converge in distribuzione ad una normale

multivariata $N(0, \Psi)$. Sia g un vettore di funzioni continue, con derivate prime continue e non tutte nulle in a_0 . Allora $\sqrt{T}[g(\hat{a}_T) - g(a_0)]$ converge in distribuzione ad una normale multivariata con media zero e matrice di covarianza $G\Psi G'$, dove G e' la matrice Jacobiana $\partial g/\partial a'$ calcolata in a_0 .

3.8. Il metodo di Goldberger, Nagar e Odeh

Applicando il lemma 3.3 alla prima componente del vettore degli errori di previsione (2.7) si ottiene

$$(3.8.1) \quad \begin{aligned} \hat{y}_h - \bar{y}_h &= (\hat{\Pi} - \Pi)x_h = I_m(\hat{\Pi} - \Pi)x_h = \\ &= \text{vec} [I_m(\hat{\Pi} - \Pi)x_h] = (x_h' \otimes I_m)[\text{vec } \hat{\Pi} - \text{vec } \Pi] \end{aligned}$$

dove I_m e' la matrice unitaria ($m \times m$). Dato x_h , il calcolo delle varianze o della matrice di covarianza di $\hat{y}_h - \bar{y}_h$ richiede il calcolo preliminare della matrice di covarianza del vettore ($\text{vec } \hat{\Pi} - \text{vec } \Pi$). Una stima della matrice di covarianza (asintotica) di tale vettore puo' essere ottenuta nel modo seguente (Goldberger, Nagar e Odeh, 1961).

Ordiniamo tutti gli elementi delle matrici A e B in un unico vettore colonna di dimensioni $(mm + mn) \times 1$ (36×1 nel modello dato)

$$(3.8.2) \quad \gamma = \begin{bmatrix} \text{vec } A \\ \text{vec } B \end{bmatrix}.$$

Analogamente a (1.9), si avra' per la stima $\hat{\gamma}$ (convergenza in distribuzione)

$$(3.8.3) \quad \sqrt{T}[\hat{\gamma} - \gamma] \xrightarrow{T \rightarrow \infty} N(0, \Phi).$$

La matrice Φ e' una matrice di dimensioni $(mm + mn) \times (mm + mn)$ "molto sparsa" data la presenza in A e B di vari elementi noti a priori; gli elementi diversi da zero in Φ sono gli stessi della matrice Ψ (eq. 1.9), o sono comunque ottenibili dagli elementi di Ψ (la matrice Φ e' praticamente la Ψ della equazione 1.9, ma opportunamente "espansa").

Ad esempio, nel modello (1.2), la matrice Φ ha dimensioni 36×36 . I primi 6 elementi di $vec A$ (e quindi di γ) sono noti a priori (eq. 1.6), quindi le prime sei righe e sei colonne di Φ contengono solo zeri. Il primo elemento diverso da zero e' il settimo della diagonale principale, e riguarda la varianza di $\hat{a}_9 - \hat{a}_8$; si tratta, piu' precisamente, della varianza asintotica di $\sqrt{T}[(\hat{a}_9 - \hat{a}_8) - (a_9 - a_8)]$. Tale elemento puo' quindi essere calcolato facilmente dalle varianze di \hat{a}_9 e \hat{a}_8 e dalla covarianza tra \hat{a}_9 e \hat{a}_8 (piu' precisamente dagli elementi $\psi_{8,8}$, $\psi_{8,9} = \psi_{9,8}$ e $\psi_{9,9}$ della matrice Ψ).

Gli elementi successivi (dall'ottavo al dodicesimo di $vec A$ (e quindi γ) sono noti a priori, quindi tutte le righe e colonne dall'ottava alla dodicesima contengono solo zeri.

Il tredicesimo elemento della diagonale principale della matrice Φ e' la varianza asintotica di $\sqrt{T}[(-\hat{a}_2) - (-a_2)]$, ed e' quindi uguale al secondo elemento diagonale di Ψ ($\psi_{2,2}$). Gli altri elementi della tredicesima riga riguardano le covarianze tra $-\hat{a}_2$ e gli altri elementi del vettore $\hat{\gamma}$; gli elementi che precedono il termine diagonale sono tutti nulli, tranne il settimo, che puo' essere calcolato dagli elementi $\psi_{2,8} = \psi_{8,2}$ e $\psi_{2,9} = \psi_{9,2}$ della matrice Ψ ; l'elemento della tredicesima riga che segue il termine diagonale (quattordicesimo) e' uguale a $\psi_{2,5}$; il successivo (quindicesimo) e' uguale a $\psi_{2,9}$; il successivo (sedicesimo) e' uguale a zero, trattandosi della covarianza con una costante (1); il successivo (diciassettesimo, si passa alla covarianza tra un elemento di \hat{A} e uno di \hat{B}) e' uguale a $\psi_{2,1}$; e cosi' via.

Calcoliamo ora le derivate prime dei coefficienti di forma ridotta (elementi della matrice Π) rispetto ai coefficienti di forma strutturale (elementi delle matrici A e B). Dalla (2.1) si ricava

$$(3.8.4) \quad \pi_{ij} = - \sum_{k=1}^m a^{i,k} b_{kj}$$

e applicando il lemma 3.4 si ha

$$(3.8.5) \quad \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial a_{p,q}} = a^{i,p} \sum_{k=1}^m a^{q,k} b_{kj} = -a^{i,p} \pi_{qj}$$

$$(3.8.6) \quad \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial b_{p,q}} = \begin{cases} 0 & (\text{se } j \neq q) \\ -a^{i,p} & (\text{se } j = q). \end{cases}$$

Ordiniamo ora gli elementi della matrice Π in un vettore $\text{vec } \Pi$ di dimensioni $mn \times 1$, e ordiniamo in una matrice jacobiana di dimensioni $mn \times (mm + mn)$ le derivate prime degli elementi di $\text{vec } \Pi$ rispetto a tutti gli elementi di A e B (cioè' gli elementi del vettore γ), ricavate nelle equazioni (3.8.5) e (3.8.6)

$$(3.8.7) \quad J = \frac{\partial(\text{vec } \Pi)}{\partial \gamma'} = \frac{\partial(\text{vec } \Pi)}{\partial[(\text{vec } A)'; (\text{vec } B)']} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\begin{array}{cccccccc}
\frac{\partial \pi_{1,1}}{\partial a_{1,1}} & \frac{\partial \pi_{1,1}}{\partial a_{2,1}} & \dots & \frac{\partial \pi_{1,1}}{\partial a_{1,2}} & \frac{\partial \pi_{1,1}}{\partial a_{2,2}} & \dots & \frac{\partial \pi_{1,1}}{\partial b_{1,1}} & \frac{\partial \pi_{1,1}}{\partial b_{2,1}} & \dots & \frac{\partial \pi_{1,1}}{\partial b_{1,2}} & \frac{\partial \pi_{1,1}}{\partial b_{2,2}} & \dots \\
\frac{\partial \pi_{2,1}}{\partial a_{1,1}} & \frac{\partial \pi_{2,1}}{\partial a_{2,1}} & \dots & \frac{\partial \pi_{2,1}}{\partial a_{1,2}} & \frac{\partial \pi_{2,1}}{\partial a_{2,2}} & \dots & \frac{\partial \pi_{2,1}}{\partial b_{1,1}} & \frac{\partial \pi_{2,1}}{\partial b_{2,1}} & \dots & \frac{\partial \pi_{2,1}}{\partial b_{1,2}} & \frac{\partial \pi_{2,1}}{\partial b_{2,2}} & \dots \\
\frac{\partial \pi_{3,1}}{\partial a_{1,1}} & \frac{\partial \pi_{3,1}}{\partial a_{2,1}} & \dots & \frac{\partial \pi_{3,1}}{\partial a_{1,2}} & \frac{\partial \pi_{3,1}}{\partial a_{2,2}} & \dots & \frac{\partial \pi_{3,1}}{\partial b_{1,1}} & \frac{\partial \pi_{3,1}}{\partial b_{2,1}} & \dots & \frac{\partial \pi_{3,1}}{\partial b_{1,2}} & \frac{\partial \pi_{3,1}}{\partial b_{2,2}} & \dots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
\frac{\partial \pi_{1,2}}{\partial a_{1,1}} & \frac{\partial \pi_{1,2}}{\partial a_{2,1}} & \dots & \frac{\partial \pi_{1,2}}{\partial a_{1,2}} & \frac{\partial \pi_{1,2}}{\partial a_{2,2}} & \dots & \frac{\partial \pi_{1,2}}{\partial b_{1,1}} & \frac{\partial \pi_{1,2}}{\partial b_{2,1}} & \dots & \frac{\partial \pi_{1,2}}{\partial b_{1,2}} & \frac{\partial \pi_{1,2}}{\partial b_{2,2}} & \dots \\
\frac{\partial \pi_{2,2}}{\partial a_{1,1}} & \frac{\partial \pi_{2,2}}{\partial a_{2,1}} & \dots & \frac{\partial \pi_{2,2}}{\partial a_{1,2}} & \frac{\partial \pi_{2,2}}{\partial a_{2,2}} & \dots & \frac{\partial \pi_{2,2}}{\partial b_{1,1}} & \frac{\partial \pi_{2,2}}{\partial b_{2,1}} & \dots & \frac{\partial \pi_{2,2}}{\partial b_{1,2}} & \frac{\partial \pi_{2,2}}{\partial b_{2,2}} & \dots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots &
\end{array} \right] = \\
&= - \left[\begin{array}{cccccccc}
a^{1,1} \pi_{1,1} & a^{1,2} \pi_{1,1} & \dots & a^{1,1} \pi_{2,1} & a^{1,2} \pi_{2,1} & \dots & a^{1,1} & a^{1,2} & \dots & 0 & 0 & \dots \\
a^{2,1} \pi_{1,1} & a^{2,2} \pi_{1,1} & \dots & a^{2,1} \pi_{2,1} & a^{2,2} \pi_{2,1} & \dots & a^{2,1} & a^{2,2} & \dots & 0 & 0 & \dots \\
a^{3,1} \pi_{1,1} & a^{3,2} \pi_{1,1} & \dots & a^{3,1} \pi_{2,1} & a^{3,2} \pi_{2,1} & \dots & a^{3,1} & a^{3,2} & \dots & 0 & 0 & \dots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
a^{1,1} \pi_{1,2} & a^{1,2} \pi_{1,2} & \dots & a^{1,1} \pi_{2,2} & a^{1,2} \pi_{2,2} & \dots & 0 & 0 & \dots & a^{1,1} & a^{1,2} & \dots \\
a^{2,1} \pi_{1,2} & a^{2,2} \pi_{1,2} & \dots & a^{2,1} \pi_{2,2} & a^{2,2} \pi_{2,2} & \dots & 0 & 0 & \dots & a^{2,1} & a^{2,2} & \dots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots &
\end{array} \right] = \\
&= - [\Pi'; I_n] \otimes A^{-1}
\end{aligned}$$

dove I_n e' la matrice unitaria di dimensioni $n \times n$. Essendo gli elementi di Π funzioni continue e differenziabili degli elementi delle matrici A e B (o del vettore γ), ed essendo la stima $\hat{\gamma}$ distribuita asintoticamente come $N(\gamma, \Phi)$ (eq. 3.8.3), si ha per il lemma 3.7

$$(3.8.9) \quad \Omega = J \Phi J' = \{[\Pi'; I_n] \otimes A^{-1}\} \Phi \{[\Pi'; I_n]' \otimes A'^{-1}\}.$$

Ω e' la matrice di covarianza $mn \times mn$ di una distribuzione normale multivariata alla quale, al crescere di T , converge la distribuzione di $\sqrt{T}(\text{vec } \hat{\Pi} - \text{vec } \Pi)$. Per ottenere la matrice di covarianza di una distribuzione multinormale che approssima la distribuzione di $(\text{vec } \hat{\Pi} - \text{vec } \Pi)$ (la cosiddetta matrice di covarianza asintotica) bastera' dividere Ω per la lunghezza del periodo campionario T . La stima della matrice di covarianza asintotica, $\hat{\Omega}/T$, si ottiene sostituendo a tutti gli elementi non noti della (3.8.9) le corrispondenti stime, e dividendo quindi per T . Ricordiamo (osservazione 3.5.8) che la matrice di covarianza fornita dai tradizionali metodi di stima dei coefficienti strutturali e' $\hat{\Psi}/T$ (da cui poi, con opportuna espansione, si ricava la corrispondente $\hat{\Phi}/T$); in altre parole tale matrice, cosi' come viene calcolata nella fase di stima dei coefficienti strutturali, e' gia' utilizzabile senza dover essere ulteriormente divisa per T .

Impiegando $\hat{\Omega}/T$ come stima della matrice di covarianza asintotica di $(\text{vec } \hat{\Pi} - \text{vec } \Pi)$, dalla (3.8.1) si ricava immediatamente la stima della matrice di covarianza asintotica della componente dell'errore di previsione dovuta all'errore nella stima dei coefficienti

$$(3.8.10) \quad (x_h' \otimes I_m) (\hat{\Omega}/T) (x_h \otimes I_m).$$

L'espressione della componente del vettore degli errori di previsione $(\hat{y}_h - \bar{y}_h)$ ricavata nell'equazione (3.8.1), come pure la stima della matrice di covarianza (3.8.10), valgono anche nel caso in cui la stima della matrice Π non venga derivata dalle stime delle matrici di coefficienti strutturali A e B . Valgono, cioe', sia per il modello di regressione multivariato (si veda, a questo proposito, l'articolo di Hooper e Zellner, 1961), sia per il modello simultaneo, qualora la stima dei coefficienti di forma ridotta venga effettuata senza tener conto delle restrizioni imposte dalla forma strutturale (*unrestricted reduced form*).

3.9. Un problema pratico

La formula (3.8.10) risolve il problema in maniera analitica, fornendo una approssimazione del primo ordine, asintoticamente esatta, alla matrice di varianza-covarianza della componente dell'errore di previsione dovuta all'errore nella stima dei coefficienti strutturali. Il suo impiego, però, presenta seri inconvenienti non appena si passi da modelli piccoli, come il modello dato, a modelli anche solo di medie dimensioni.

Si noti innanzitutto che le dimensioni della matrice $\hat{\Phi}/T$ sono $(mm + mn) \times (mm + mn)$, e aumentano quindi molto rapidamente all'aumentare delle dimensioni del modello. Come già osservato, si tratta di una matrice fortemente sparsa; utilizzando opportuni algoritmi per il trattamento di matrici sparse, le sue dimensioni possono essere ridotte a quelle della matrice $\hat{\Psi}/T$ (9×9 , nel modello dato, anziché 36×36 ; per modelli di dimensioni maggiori ovviamente l'ingombro di memoria sarà maggiore, ma sempre accettabile, trattandosi di fatto della stima della matrice di covarianza dei soli coefficienti strutturali incogniti).

Il problema cambia aspetto non appena si passa dalla matrice $\hat{\Phi}/T$ alla matrice $\hat{\Omega}/T$. Si noti infatti che, mentre le matrici A e B sono matrici sparse, la matrice Π è, di regola, una matrice piena (nella forma ridotta di un sistema simultaneo, ogni variabile endogena dipende da tutte, o quasi tutte, le variabili predeterminate); la stima della matrice di covarianza asintotica del vettore ($\text{vec } \hat{\Pi} - \text{vec } \Pi$), cioè $\hat{\Omega}/T$, è pertanto una matrice piena (nel senso che tutti o quasi tutti i suoi termini sono diversi da zero, non nel senso di matrice di rango pieno). Le dimensioni di tale matrice sono $mn \times mn$. Ad esempio le dimensioni di questa matrice sono 20×20 nel modello dato; non si tratta certo di una matrice di grandi dimensioni, tuttavia è già una matrice notevolmente complessa se si tiene conto che il modello contiene solo 4 variabili endogene, e quindi il risultato che si va cercando è semplicemente la stima di una matrice di covarianza di dimensioni 4×4 .

Si pensi ora di passare ad un modello di medie dimensioni, con una cinquantina di equazioni e una sessantina di variabili predeterminate, (ad esempio il modello dell'economia italiana sviluppato dall'ISPE; si vedano Sartori, 1978, Bianchi et alii, 1982, e l'esempio nel paragrafo 8.5; ovviamente il discorso intende solo dare un'idea delle dimensioni delle matrici coinvolte nel calcolo, dato che, trattandosi di un modello non lineare, la formula di cui sopra non puo' essere applicata, a meno di una preventiva linearizzazione del modello). In tal caso $\hat{\Omega}/T$ sarebbe una matrice piena di dimensioni 3000×3000 circa.

Se passiamo poi ad un modello medio-grande, come ad esempio il modello dell'economia francese descritto in Brillet (1981) (225 equazioni, comprese le definizionali, e circa 200 variabili predeterminate, esogene ed endogene ritardate effettivamente presenti nelle equazioni strutturali del modello), ci troviamo di fronte ad una matrice piena, all'incirca di dimensioni 45000×45000 . Se volessimo, dunque, calcolare la matrice di covarianza degli errori di previsione delle 225 variabili endogene del modello, dovremmo eseguire il calcolo preliminare degli oltre 2 miliardi di elementi della matrice $\hat{\Omega}/T$; e non e' certo di grande aiuto il considerare che, trattandosi di una matrice simmetrica, il calcolo si ridurrebbe a poco piu' di un miliardo di elementi.

In definitiva, per ottenere la stima della matrice di covarianza $m \times m$ degli errori di previsione di tutte le variabili endogene, il metodo analitico tradizionale richiede il calcolo preliminare di una matrice piena, di dimensioni $mn \times mn$; spesso si tratta di dimensioni troppo elevate per poter eseguire il calcolo in tempi ragionevoli e con un accettabile ingombro di memoria.

4. VARIANZA DELLE PREVISIONI: METODO ANALITICO ALTERNATIVO

Si possono superare le difficoltà derivanti dalle dimensioni della matrice $\hat{\Omega}/T$ nel modo seguente (Calzolari, 1981). Sia $a = (a_1, a_2, \dots, a_s)'$ il vettore ($s \times 1$) dei coefficienti strutturali che devono essere stimati (e sia \hat{a} la stima di tale vettore); sia inoltre $C = [A; B]$, matrice di dimensioni $[m \times (m+n)]$, e siano $C_0, C_1, C_2, \dots, C_s$, ciascuna di dimensioni $[m \times (m+n)]$, matrici tali che

$$(4.1) \quad C = C_0 + C_1 a_1 + C_2 a_2 + \dots + C_s a_s.$$

Le matrici C_0, C_1, C_2, \dots includono solo elementi noti a priori, e non elementi da stimare. La loro struttura è molto semplice (a parte C_0 , che però non entrerà nel procedimento); ad esempio, nel modello in esame, la matrice C_1 , di dimensioni (4×9) , è composta di tutti zeri, ad eccezione di un elemento della prima riga (il quinto), che vale -1:

$$(4.2) \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lo stesso dicasi per C_2 , dove l'unico elemento diverso da zero è il quarto elemento della prima riga, che vale -1; e così via; C_3 è anch'essa composta di tutti zeri, ad eccezione di due elementi della terza riga (a_3 moltiplica, infatti, la somma algebrica di due variabili). Si ha allora:

$$(4.3) \quad \begin{cases} \text{vec } C = \text{vec } C_0 + (\text{vec } C_1)a_1 + \dots + (\text{vec } C_s)a_s \\ \text{vec } \hat{C} = \text{vec } C_0 + (\text{vec } C_1)\hat{a}_1 + \dots + (\text{vec } C_s)\hat{a}_s \end{cases}$$

ossia, introducendo i vettori a e \hat{a}

$$(4.4) \quad \begin{cases} \text{vec } C = \text{vec } C_0 + [\text{vec } C_1; \text{vec } C_2; \dots; \text{vec } C_s]a \\ \text{vec } \hat{C} = \text{vec } C_0 + [\text{vec } C_1; \text{vec } C_2; \dots; \text{vec } C_s]\hat{a} \end{cases}.$$

Osserviamo poi che, data la consistenza delle stime \hat{a} (e quindi di \hat{A} e \hat{B}), si ha

$$(4.5) \quad \underset{T \rightarrow \infty}{plim} \hat{\Pi} = \Pi$$

$$(4.6) \quad \underset{T \rightarrow \infty}{plim} \hat{y}_h = \bar{y}_h.$$

Si puo', ora, sviluppare la (3.8.1) nel modo seguente:

$$(4.7) \quad \hat{y}_h - \bar{y}_h = (\hat{\Pi} - \Pi)x_h = -[\hat{A}^{-1}\hat{B}x_h - A^{-1}Bx_h] =$$

(si sottrae e si aggiunge, dentro parentesi, $A^{-1}\hat{B}x_h$)

$$\begin{aligned} &= -[-A^{-1}\hat{B}x_h + A^{-1}\hat{B}x_h + \hat{A}^{-1}\hat{B}x_h - A^{-1}Bx_h] = \\ &= -[A^{-1}\hat{A}(-\hat{A}^{-1}\hat{B})x_h + A^{-1}\hat{B}x_h - A^{-1}A(-\hat{A}^{-1}\hat{B})x_h - A^{-1}Bx_h] = \\ &= -[A^{-1}\hat{A}\hat{\Pi}x_h + A^{-1}\hat{B}x_h - A^{-1}A\hat{\Pi}x_h - A^{-1}Bx_h] = \\ &= -\left\{ A^{-1}[\hat{A}; \hat{B}]\begin{bmatrix} \hat{\Pi}x_h \\ x_h \end{bmatrix} - A^{-1}[A; B]\begin{bmatrix} \hat{\Pi}x_h \\ x_h \end{bmatrix} \right\} = \end{aligned}$$

$$= - A^{-1}(\hat{C} - C) \begin{bmatrix} \hat{\Pi} x_h \\ x_h \end{bmatrix} = - A^{-1}(\hat{C} - C) \begin{bmatrix} \hat{\Pi} \\ I_n \end{bmatrix} x_h =$$

(I_n e' la matrice unitaria $n \times n$, e si usa la formula del lemma 3.3)

$$= - \left\{ [x'_h(\hat{\Pi}'; I_n)] \otimes A^{-1} \right\} (\text{vec } \hat{C} - \text{vec } C) =$$

(si introducono le matrici C_0, C_1, \dots e si applica la (4.4) per calcolare $\text{vec } \hat{C} - \text{vec } C$)

$$= - \left\{ [x'_h(\hat{\Pi}'; I_n)] \otimes A^{-1} \right\} [\text{vec } C_1; \text{vec } C_2; \dots; \text{vec } C_s] (\hat{a} - a) =$$

(si usa di nuovo, ma in senso inverso, l'uguaglianza del lemma 3.3)

$$\begin{aligned} &= - \left\{ A^{-1} C_1 \begin{bmatrix} \hat{\Pi} \\ I_n \end{bmatrix} x_h; A^{-1} C_2 \begin{bmatrix} \hat{\Pi} \\ I_n \end{bmatrix} x_h; \dots; A^{-1} C_s \begin{bmatrix} \hat{\Pi} \\ I_n \end{bmatrix} x_h \right\} (\hat{a} - a) = \\ &= - A^{-1} \left\{ C_1 \begin{bmatrix} \hat{y}_h \\ x_h \end{bmatrix}; C_2 \begin{bmatrix} \hat{y}_h \\ x_h \end{bmatrix}; \dots; C_s \begin{bmatrix} \hat{y}_h \\ x_h \end{bmatrix} \right\} (\hat{a} - a) = \\ &= - A^{-1} \hat{F}_h (\hat{a} - a) \end{aligned}$$

dove si e' posto

$$(4.8) \quad \hat{F}_h = \left\{ C_1 \begin{bmatrix} \hat{y}_h \\ x_h \end{bmatrix}; C_2 \begin{bmatrix} \hat{y}_h \\ x_h \end{bmatrix}; \dots; C_s \begin{bmatrix} \hat{y}_h \\ x_h \end{bmatrix} \right\}.$$

Ricordando le equazioni (4.5) e (4.6), ed il lemma 3.6, si ricava immediatamente che

$$(4.9) \quad \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \hat{F}_h = \bar{F}_h = \left\{ C_1 \begin{bmatrix} \bar{y}_h \\ x_h \end{bmatrix}; C_2 \begin{bmatrix} \bar{y}_h \\ x_h \end{bmatrix}; \dots; C_s \begin{bmatrix} \bar{y}_h \\ x_h \end{bmatrix} \right\}.$$

Moltiplichiamo la (4.7) per \sqrt{T}

$$(4.10) \quad \sqrt{T}(\hat{y}_h - \bar{y}_h) = [-A^{-1}\hat{F}_h]\sqrt{T}(\hat{a} - a).$$

Dunque, la componente in esame del vettore degli errori di previsione (moltiplicata per \sqrt{T}) e' il prodotto di due termini. Il primo, cioe' la matrice $-A^{-1}\hat{F}_h$, al crescere di T converge in probabilita' alla matrice composta di termini noti e di costanti $-A^{-1}\bar{F}_h$; il secondo, cioe' il vettore $\sqrt{T}(\hat{a} - a)$, converge in distribuzione ad una normale multivariata $N(0, \Psi)$ (eq. 1.9). Il prodotto dei due termini, pertanto, converge in distribuzione (osservazione 3.3.5) ad una normale multivariata

$$(4.11) \quad \sqrt{T}(\hat{y}_h - \bar{y}_h) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} N(0, A^{-1}\bar{F}_h\Psi\bar{F}_h'A^{-1}).$$

Analogamente a quanto visto in precedenza, introducendo la matrice fornita dal metodo di stima utilizzato, $\hat{\Psi}/T$, e le stime dei coefficienti strutturali in \bar{F}_h ed A , si ottiene la matrice

$$(4.12) \quad \hat{A}^{-1}\hat{F}_h(\hat{\Psi}/T)\hat{F}_h'\hat{A}^{-1}.$$

La (4.12) fornisce la stima della matrice di covarianza (asintotica) della componente dell'errore di previsione dovuta all'errore nella stima dei coefficienti $(\hat{y}_h - \bar{y}_h)$. Tale espressione non richiede il calcolo preliminare della matrice $\hat{\Omega}/T$, non comporta alcun allargamento delle dimensioni del problema e, soprattutto, e' di applicabilita' piuttosto semplice. Osserviamo, infatti, la matrice \hat{F}_h ; ha dimensioni $m \times s$ (4×9 nel caso del modello dato) ed e' cosi' composta: la colonna k -esima, una volta scritto il modello nella forma (1.1), e' composta di tutti zeri, ad eccezione dell' i -esimo elemento, se il coefficiente a_k compare nella i -esima equazione strutturale; in tal caso questo i -esimo elemento e' uguale al valore della variabile (nel periodo di previsione h) che moltiplica a_k nella i -esima equazione. Ad esempio, nel modello in esame, scritto nella forma (1.1), cioe' dopo aver portato a sinistra tutti

i termini della (1.2) ad eccezione dei termini di errore, la seconda colonna di \hat{F}_h consiste di 3 elementi tutti uguali a zero (dal secondo al quarto), mentre il primo elemento e' uguale al valore calcolato della variabile endogena $-Y$ nel periodo di previsione, $-\hat{Y}_h$: e' questa, infatti, la variabile che moltiplica a_2 nella prima equazione. L'ultima colonna (la nona) consiste di 3 elementi uguali a zero e di un elemento (il terzo) uguale al valore di $-(Y - I)$ calcolato nel periodo di previsione, $-(\hat{Y} - \hat{I})_h$: e' questa, infatti, la variabile che moltiplica a_9 nella terza equazione

$$(4.13) \quad \hat{F}_h =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -\hat{Y}_h & -C_{h-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -(\hat{Y}_h - Y_{h-1}) & -I_{h-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\hat{I}_h & -(\hat{Y} - \hat{I})_h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il calcolo della matrice di covarianza (asintotica) della componente dell'errore di previsione dovuta agli errori nella stima dei coefficienti diventa cosi' possibile anche per modelli lineari di dimensioni medio-grandi.

4.1. Nota

Dalle uguaglianze precedenti si puo' ricavare una ulteriore considerazione.

Si osservi innanzitutto che, derivando il vettore $(Ay + Bx)$ rispetto al vettore y' , si ottiene la matrice A .

Si nota poi dalla (4.1) che ogni matrice C_k e' ottenibile come derivata prima della matrice $C = [A ; B]$ rispetto al coefficiente strutturale incognito a_k

$$(4.1.1) \quad C_k = \frac{\partial C}{\partial a_k} = \frac{\partial [A; B]}{\partial a_k}.$$

Dalla definizione di C si ha

$$(4.1.2) \quad A\bar{y}_h + Bx_h = [A; B] \begin{bmatrix} \bar{y}_h \\ x_h \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \bar{y}_h \\ x_h \end{bmatrix}.$$

Di conseguenza, la matrice \bar{F}_h della equazione (4.9) e'

$$(4.1.3) \quad \bar{F}_h = \frac{\partial [A\bar{y}_h + Bx_h]}{\partial a'}$$

considerando \bar{y}_h e x_h dati. Si pongano ora uguali a zero nella (1.1) i termini di errore u_i ; in tal caso \bar{y}_h e' il vettore di variabili endogene che risolve il sistema (si ricordi la definizione di \bar{y}_h nella equazione 2.4). Si osservi, poi, che oltre ad A e B , anche \bar{y}_h e' funzione del vettore a (eq. 2.4, dove Π si ricava da A e B ed e', quindi, funzione di a). Si ottiene, dunque

$$(4.1.4) \quad A\bar{y}_h + Bx_h \equiv 0$$

identicamente per ogni a . Il primo membro della (4.1.4) e' funzione di a tramite A , B e \bar{y}_h ; derivando rispetto ad a si ha, quindi,

$$(4.1.5) \quad \frac{\partial(A\bar{y}_h + Bx_h)}{\partial a'} + \frac{\partial(A\bar{y}_h + Bx_h)}{\partial \bar{y}_h'} \cdot \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a'} = 0$$

cioe'

$$(4.1.6) \quad \bar{F}_h + A \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a'} = 0$$

da cui

$$(4.1.7) \quad -A^{-1}\bar{F}_h = \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a'}.$$

Dunque il prodotto $-A^{-1}\bar{F}_h$ della (4.11) e' uguale alla matrice jacobiana $\partial \bar{y}_h / \partial a'$, di dimensioni $m \times s$; la sua stima, $-\hat{A}^{-1}\hat{F}_h$, e' uguale alla stessa matrice jacobiana calcolata in corrispondenza alla soluzione del modello, con coefficienti stimati, nel periodo di previsione ($\partial \hat{y}_h / \partial \hat{a}'$).

Anche nel caso di modelli non lineari la matrice jacobiana $\partial \hat{y}_h / \partial \hat{a}'$ puo' essere calcolata senza particolari difficoltà. E' pertanto ragionevole pensare di poter estendere ai modelli non lineari il metodo di calcolo delle varianze degli errori di previsione (almeno per quanto riguarda la componente dovuta agli errori nella stima dei coefficienti) fin qui applicato ai modelli lineari. La trattazione risulta alquanto semplificata se ci si limita ad una rappresentazione del modello in forma implicita, e si ricorre, per il calcolo delle matrici jacobiane, alle tecniche di simulazione, come sara' chiarito nei prossimi capitoli.

4.2. Un caso particolare: il modello di regressione

Le espressioni ricavate nei capitoli 3 e 4 per la matrice di covarianza del vettore degli errori di previsione rimangono, ovviamente, valide nel caso particolare del modello di regressione lineare. Indichiamo il modello con la seguente notazione scalare

$$(4.2.1) \quad y_t = a_1 + a_2 z_t + u_t$$

ed eseguiamo la stima dei coefficienti a_1 e a_2 applicando il metodo dei minimi quadrati ordinari (si veda, ad esempio, Contini, 1973, pp. 81-82)

$$(4.2.2) \quad \hat{a}_1 = \frac{\sum_{t=1}^T z_t^2 \sum_{t=1}^T y_t - \sum_{t=1}^T z_t \sum_{t=1}^T z_t y_t}{T \sum_{t=1}^T z_t^2 - \left[\sum_{t=1}^T z_t \right]^2}$$

$$(4.2.3) \quad \hat{a}_2 = \frac{T \sum_{t=1}^T z_t y_t - \sum_{t=1}^T z_t \sum_{t=1}^T y_t}{T \sum_{t=1}^T z_t^2 - \left[\sum_{t=1}^T z_t \right]^2}$$

Dai residui \hat{u}_t , ricaviamo la stima della varianza dei disturbi strutturali (per analogia con il sistema di equazioni simultanee, eq. 3.2, possiamo limitarci a dividere per T , senza *correzione per i gradi di liberta'*; la stima risulta comunque consistente, anche se non corretta)

$$(4.2.4) \quad \hat{\sigma}^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{a}_1 - \hat{a}_2 z_t)^2$$

che impieghiamo poi per ricavare la stima della matrice di covarianza (2×2) dei coefficienti \hat{a}_1 e \hat{a}_2 ; sempre per analogia con il sistema di equazioni simultanee, indicando con $\hat{\Psi}/T$ la stima di tale matrice, avremo

$$(4.2.5) \quad \frac{\hat{\Psi}_{1,1}}{T} = \frac{\sum_{t=1}^T z_t^2}{T \sum_{t=1}^T z_t^2 - \left[\sum_{t=1}^T z_t \right]^2} \hat{\sigma}^2$$

$$(4.2.6) \quad \frac{\hat{\Psi}_{1,2}}{T} = \frac{\hat{\Psi}_{2,1}}{T} = \frac{-\sum_{t=1}^T z_t}{T \sum_{t=1}^T z_t^2 - \left[\sum_{t=1}^T z_t \right]^2} \hat{\sigma}^2$$

$$(4.2.7) \quad \frac{\hat{\Psi}_{2,2}}{T} = \frac{T}{T \sum_{t=1}^T z_t^2 - \left[\sum_{t=1}^T z_t \right]^2} \hat{\sigma}^2.$$

Impieghiamo ora il modello con i coefficienti stimati \hat{a}_1 e \hat{a}_2 per prevedere y al tempo h , supponendo noto il valore di z_h . Nel modello (4.2.1), con z esogena, la forma ridotta coincide con la forma strutturale. Cio' significa che $\pi_{1,1} = a_1$ e $\pi_{1,2} = a_2$. Possiamo allora applicare la decomposizione (2.7) dell'errore di previsione, ottenendo

$$(4.2.8) \quad \hat{y}_h - y_h = [(\hat{a}_1 - a_1); (\hat{a}_2 - a_2)] \begin{bmatrix} 1 \\ z_h \end{bmatrix} - u_h.$$

La stima della varianza della componente u_h e' data dall'equazione (4.2.4). La stima della varianza della componente dovuta all'errore nella stima dei coefficienti e' data da

$$(4.2.9) \quad \frac{\hat{\Psi}_{1,1}}{T} + 2 \frac{\hat{\Psi}_{1,2}}{T} z_h + \frac{\hat{\Psi}_{2,2}}{T} z_h^2.$$

E' facile, a questo punto, rendersi conto che la (4.2.9) coincide sia con la (3.8.10), sia con la (4.12). Nel primo caso, infatti, basta osservare che la matrice I_m ha dimensioni 1×1 e che, coincidendo per il modello (4.2.1) la forma ridotta con la forma strutturale, si ha $\Omega = \Psi$ (e quindi anche $\hat{\Omega}/T = \hat{\Psi}/T$). Nel secondo caso, invece, basta osservare che per il modello (4.2.1) la matrice \hat{A} e' la matrice unitaria di dimensioni 1×1 , mentre $\hat{F}_h = x_h' = [1; z_h]$.

Possiamo ora impiegare le stime delle varianze ricavate in questo paragrafo per costruire gli intervalli di confidenza delle previsioni.

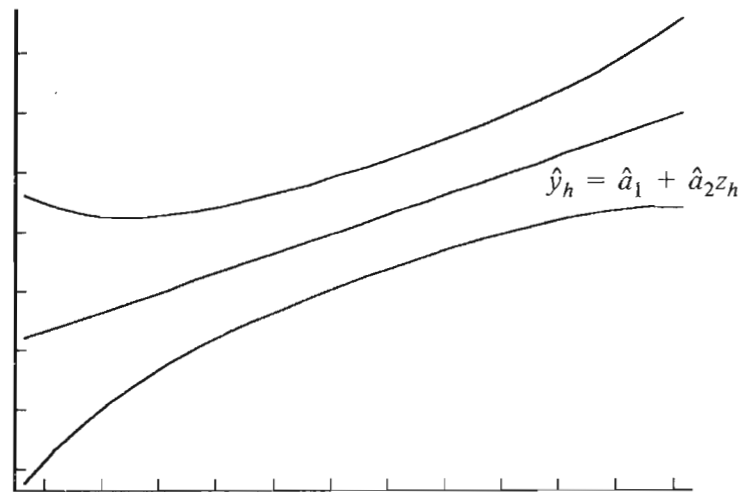


Fig. 1

La stima della varianza dell'errore di previsione $(\hat{y}_h - y_h)$ e' data dalla somma delle espressioni (4.2.4) e (4.2.9)

$$(4.2.10) \quad \hat{\sigma}_h^2 = \hat{\sigma}^2 + \frac{\hat{\Psi}_{1,1}}{T} + 2\frac{\hat{\Psi}_{1,2}}{T}z_h + \frac{\hat{\Psi}_{2,2}}{T}z_h^2.$$

Dato un valore di z_h , possiamo associare alla previsione \hat{y}_h un intervallo di confidenza pari, ad esempio, a $\pm 2\hat{\sigma}_h$. Se rappresentiamo graficamente la previsione e gli estremi dell'intervallo di confidenza al variare di z_h , otteniamo una fascia di confidenza come quella riportata nella figura 1.

E' facile vedere che l'ampiezza dell'intervallo di confidenza e' minima in corrispondenza di un valore di z_h pari al valor medio della variabile z nel periodo campionario. Derivando, infatti, la (4.2.10) rispetto a z_h , dato che $\hat{\sigma}^2$ e $\hat{\Psi}$ non dipendono da z_h , otteniamo

$$(4.2.11) \quad \frac{\partial \hat{\sigma}_h^2}{\partial z_h} = 2 \frac{\hat{\Psi}_{1,2}}{T} + 2 \frac{\hat{\Psi}_{2,2}}{T} z_h$$

e uguagliando a zero la derivata otteniamo per z_h il valore

$$(4.2.12) \quad z_h = - \frac{\hat{\Psi}_{1,2}}{\hat{\Psi}_{2,2}}$$

Sostituendo nella (4.2.12) le espressioni di $\hat{\Psi}_{1,2}$ e di $\hat{\Psi}_{2,2}$ date dalle equazioni (4.2.6) e (4.2.7) otteniamo

$$(4.2.13) \quad z_h = T^{-1} \sum_{t=1}^T z_t$$

Che si tratti di un minimo della funzione risulta evidente passando alla condizione del secondo ordine. Derivando, infatti, ulteriormente la (4.2.11) rispetto a z_h si ottiene $2\hat{\Psi}_{2,2}/T$, che e' ovviamente positivo.

Espressioni simili a quelle ricavate in questo paragrafo per la varianza dell'errore di previsione nel modello di regressione lineare, come pure rappresentazioni grafiche degli intervalli di confidenza simili a quella riportata in figura 1, sono piuttosto frequenti nei libri di testo: si vedano, ad esempio, Contini (1973, p. 260), Grassini (1971, pp. 46-48), Intriligator (1978, p. 111), Klein (1974, p. 261),

Makridakis e Wheelwright (1978, p. 177), Malinvaud (1968, p. 99), Theil (1971, p. 136), Zaghini (1970, p. 84).

L'estensione delle formule di questo paragrafo al modello di regressione lineare multipla e' piuttosto semplice.

Sia X la matrice $T \times n$ contenente i valori degli n regressori esogeni, y il vettore $T \times 1$ di osservazioni sulla variabile endogena, u il vettore $T \times 1$ di disturbi additivi non osservabili e a il vettore $n \times 1$ di coefficienti incogniti. Il modello e' rappresentabile nella forma

$$(4.2.14) \quad y = Xa + u$$

e la stima dei coefficienti con il metodo dei minimi quadrati ordinari e' data da

$$(4.2.15) \quad \hat{a} = (X'X)^{-1}X'y$$

(si veda, ad esempio, Contini, 1973, p. 82). Ricavando dai T residui della regressione la stima della varianza dei disturbi, $\hat{\sigma}^2$, avremo, per la stima della matrice di covarianza ($n \times n$) dei coefficienti, la nota espressione

$$(4.2.16) \quad \frac{\hat{\Psi}}{T} = \frac{\hat{\Omega}}{T} = (X'X)^{-1}\hat{\sigma}^2.$$

Impieghiamo il modello (4.2.14), con i coefficienti stimati, per prevedere la variabile y al tempo h (esterno al periodo campionario), supponendo noto il vettore x_h ($n \times 1$). La stima della varianza dell'errore di previsione sara', al solito, pari alla somma di due termini

$$(4.2.17) \quad \hat{\sigma}_h^2 = x_h'(X'X)^{-1}x_h\hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}^2$$

il primo dei quali si ottiene sostituendo l'equazione (4.2.16) nella (3.8.10) (o nella 4.12).

Il calcolo della varianza (4.2.17) richiede, in pratica, un procedimento in due fasi. In una prima fase occorre calcolare i coefficienti, i residui, la varianza degli errori e la matrice di covarianza dei coefficienti applicando il metodo dei minimi quadrati ordinari alle osservazioni del periodo campionario $1, 2, \dots, T$. Nella seconda fase si introducono i valori delle variabili esogene nel periodo di previsione, e si calcolano \hat{y}_h e $\hat{\sigma}_h^2$. E' possibile eseguire lo stesso calcolo in un solo passo, applicando il metodo dei minimi quadrati ordinari alle variabili X e y opportunamente *allungate* con i valori delle esogene nel periodo di previsione. Si tratta dell'algoritmo delle *variabili costruite*, proposto da Salkever (1976), e successivamente ripreso ed esteso da Fuller (1980), Pagan e Nicholls (1984), Amirkhalkhali e Naini (1985) (si veda anche il lavoro di Giannini e Mosconi, 1986, per una estensione di tale metodo ai modelli autoregressivi vettoriali, *VAR*).

5. MODELLI NON LINEARI

Un modello econometrico non lineare puo' essere rappresentato nel modo seguente:

$$(5.1) \quad f(y_t, x_t, a) = u_t \quad (t = 1, 2, \dots, T)$$

dove:

$$(5.2) \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_m \end{bmatrix}; \quad y_t = \begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{m,t} \end{bmatrix}; \quad x_t = \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n,t} \end{bmatrix};$$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_s \end{bmatrix}; \quad u_t = \begin{bmatrix} u_{1,t} \\ u_{2,t} \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{m,t} \end{bmatrix}.$$

La notazione (5.1) e' molto generale: ovviamente include, come caso particolare, la notazione (1.1) impiegata per i modelli lineari; si presta, inoltre, a rappresentare modelli lineari nei coefficienti e non lineari nelle variabili, come ad esempio il modello che verra' descritto nel paragrafo 8.3; puo' essere altresì impiegata per rappresentare, con semplice trasformazione, modelli lineari nelle variabili, ma non lineari nei coefficienti, quali ad esempio modelli lineari con errori autoregressivi;

puo' infine rappresentare modelli che siano non lineari nelle variabili come nei coefficienti.

Il vettore f e' un vettore di operatori funzionali; le funzioni sono supposte continue e derivabili rispetto agli elementi di y_t , x_t , a , con derivate prime continue; y_t , x_t e u_t sono, come nel caso lineare, i vettori delle variabili endogene e predeterminate e degli errori casuali al tempo $t = 1, 2, \dots, T$; a e' il vettore di tutti i coefficienti strutturali del modello che devono essere stimati (non sono, cioe', inclusi in a tutti gli altri coefficienti noti a priori).

Come nel caso lineare, si ammette di avere a disposizione un vettore \hat{a} , stima consistente di a , tale che $\sqrt{T}(\hat{a} - a) \sim N(0, \Psi)$ asintoticamente (si vedano, ad esempio, Amemiya, 1977 e Gallant, 1977). Sia h il periodo, non appartenente all'intervallo campionario di stima, in cui viene fatta la previsione uniperiodale; in assenza di errori, il modello fornirebbe, come previsione, il vettore \bar{y}_h tale che

$$(5.3) \quad f(\bar{y}_h, x_h, a) = 0.$$

In altri termini, \bar{y}_h e' la soluzione deterministica del modello nel periodo di previsione h , dati i "veri" coefficienti strutturali, a , ed il vettore delle variabili predeterminate, x_h . Non essendo, pero', noto il vettore a e disponendo, invece, soltanto della stima \hat{a} , la previsione fornita dal modello e' in realta' il vettore \hat{y}_h , soluzione deterministica del modello, dati x_h ed \hat{a} ; tale, cioe', che

$$(5.4) \quad f(\hat{y}_h, x_h, \hat{a}) = 0.$$

La soluzione del modello (5.1) puo' essere scritta come:

$$(5.5) \quad y_t = y(x_t, a, u_t)$$

dove, ovviamente, il vettore di operatori funzionali y non e' di solito rappresentabile analiticamente se il modello non e' lineare.

Nel sistema (5.5) non compaiono variabili endogene correnti sul lato destro delle equazioni. Possiamo allora riferirci alla (5.5) come alla *forma ridotta* del modello. Occorre però notare che, a differenza del modello lineare (eq. 2.3), i disturbi di forma ridotta non sono additivi, nella rappresentazione (5.5). Altri autori, allora, preferiscono indicare la (5.5) semplicemente come *soluzione* del modello, riservando la definizione di *forma ridotta* ad un sistema che non presenti variabili endogene correnti sul lato destro delle equazioni e che, al tempo stesso, presenti termini di disturbo (a media zero) additivi (si vedano, a questo proposito, Faliva, 1987, cap. 4, o Howrey e Kelejian, 1971, p. 306). Comunque si definisca il sistema (5.5), in questo contesto è importante osservare che, nonostante il vettore di funzioni y non sia rappresentabile in forma analitica esplicita, le sue derivate parziali possono essere calcolate analiticamente, in un punto soluzione. Basta infatti (si veda il paragrafo 6.1) calcolare, in un punto soluzione, le matrici jacobiane $\partial f/\partial y'$ e $\partial f/\partial a'$, matrici che sono perfettamente calcolabili poiché coinvolgono soltanto derivate parziali delle funzioni della forma strutturale, f (note).

Dalla equazione (5.5) segue che la previsione in assenza di errori, \bar{y}_h , e la previsione effettiva, \hat{y}_h , sono rappresentabili come

$$(5.6) \quad \bar{y}_h = y(x_h, a, 0)$$

$$(5.7) \quad \hat{y}_h = y(x_h, \hat{a}, 0)$$

mentre il valore "vero" delle variabili endogene nel periodo di previsione, y_h , è rappresentabile come

$$(5.8) \quad y_h = y(x_h, a, u_h).$$

6. ERRORE DI PREVISIONE NEI MODELLI NON LINEARI

Il vettore degli errori di previsione al tempo h , $(\hat{y}_h - y_h)$, può essere espresso come

$$(6.1) \quad \hat{y}_h - y_h = (\hat{y}_h - \bar{y}_h) + (\bar{y}_h - y_h).$$

E' evidente dalle equazioni (5.6), (5.7) e (5.8) che, analogamente a quanto si e' visto per il modello lineare, la prima componente $(\hat{y}_h - \bar{y}_h)$ dipende solamente dall'errore nella stima dei coefficienti strutturali, la seconda $(\bar{y}_h - y_h)$ dipende soltanto dal vettore dei disturbi strutturali u_h ; trattandosi di disturbi al di fuori del periodo campionario utilizzato per la stima dei coefficienti, e supponendo noti i valori di tutte le variabili predeterminate nel periodo di previsione, le due componenti sono indipendenti. Le varianze (o la matrice di covarianza) degli errori di previsione possono, pertanto, essere calcolate come somma delle varianze (o matrici di covarianza) delle due componenti.

6.1. La componente dovuta all'errore di stima

Una stima della matrice di covarianza della componente dovuta agli errori nei coefficienti può essere ottenuta ricorrendo ad una approssimazione asintoticamente esatta (Bianchi e Calzolari, 1980; si veda anche Amemiya, 1983, p. 384), che estende ai modelli non lineari

quanto visto nei capitoli 3 e 4. Essendo infatti la forma strutturale del modello continua e differenziabile, anche la forma ridotta, per quanto non rappresentabile analiticamente, sarà, almeno localmente, continua e differenziabile (teorema di Dini sulle funzioni implicite, si veda, ad esempio, Ghizzetti, 1961-62, pp. 337-339). E' allora possibile applicare il lemma 3.7 sulla distribuzione asintotica di funzioni di variabili normali multivariate: poiche' il vettore $\sqrt{T}(\hat{a} - a)$ e' distribuito asintoticamente come $N(0, \Psi)$, allora la componente dell'errore di previsione $\sqrt{T}(\hat{y}_h - \bar{y}_h) = \sqrt{T}[y(x_h, \hat{a}, 0) - y(x_h, a, 0)]$ (ottenuta con la sostituzione della (5.6) e della (5.7) a \bar{y}_h e \hat{y}_h rispettivamente) e' asintoticamente distribuita come $N(0, G_h \Psi G_h')$, dove G_h e' la matrice $m \times s$ delle derivate prime $\partial y / \partial a'$ calcolate nel punto $(x_h, a, 0)$. Analogamente a quanto osservato nel paragrafo 4.1, considerando nella (5.3) il vettore \bar{y}_h come funzione di a , si ha, *identicamente* per ogni a ,

$$(6.1.1) \quad f(\bar{y}_h, x_h, a) \equiv 0$$

da cui

$$(6.1.2) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{y}_h'} \cdot \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a'} + \frac{\partial f}{\partial a'} = 0.$$

La matrice G_h e', pertanto, esprimibile come

$$(6.1.3) \quad G_h = \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a'} = - \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}_h'} \right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial a'}$$

dunque e' calcolabile analiticamente nel punto soluzione del sistema, essendo esprimibile attraverso derivate prime delle funzioni f , che sono note (forma strutturale). Si noti la corrispondenza con il caso lineare, dove $f(\bar{y}_h, x_h, a) = A\bar{y}_h + Bx_h$. In tal caso $\partial f / \partial \bar{y}_h' = A$, e $\partial f / \partial a' = \bar{F}_h$ (eq. 4.1.3), dunque l'equazione (6.1.3) coincide con la (4.1.7).

Calcolando la matrice jacobiana $(\partial y/\partial a')$ nel punto $(x_h, \hat{a}, 0)$ si ottiene \hat{G}_h , una stima consistente di G_h ; gli elementi diagonali di $\hat{G}_h(\hat{\Psi}/T)\hat{G}_h'$ sono le stime delle varianze asintotiche degli elementi di $(\hat{y}_h - \bar{y}_h)$.

Il calcolo della matrice \hat{G}_h puo' anche essere eseguito applicando tecniche numeriche di derivazione (*simulazione analitica*; il termine, preso dal lavoro di Howrey e Klein, 1972, indica che si tratta di un metodo analitico, il cui impiego, pero', risulta agevolato dall'impiego di tecniche di simulazione numerica). Il metodo piu' semplice consiste nel calcolare ogni derivata prima $\partial y_h/\partial a_k$, nel punto $(x_h, \hat{a}, 0)$, come $\Delta\hat{y}_h/\Delta\hat{a}_k$, prendendo convenienti valori di $\Delta\hat{a}_k$. Questo metodo richiede, per il calcolo completo della matrice \hat{G}_h , $s + 1$ soluzioni del modello nel periodo di previsione h (una soluzione di controllo ed s soluzioni disturbate, con $\Delta\hat{a}_k$, una per ogni coefficiente strutturale stimato). Si puo', naturalmente, ricorrere a tecniche di derivazione numerica piu' sofisticate e precise (e piu' laboriose, si veda, ad esempio, Oliver, 1980), ma gia' col metodo piu' semplice si possono ottenere risultati esatti fino a 4 - 5 cifre decimali.

Il metodo sin qui descritto non e' il solo che puo' essere utilizzato per calcolare la matrice di covarianza di questa componente dell'errore di previsione. Altri metodi, che non verranno esaminati in questa sede, sono stati proposti nella letteratura (si vedano, ad esempio, Cooper e Fischer, 1974, Fair, 1980, Freedman e Peters, 1984, Haitovsky e Wallace, 1972, Peters e Freedman, 1985, Schink, 1971). Non si tratta, pero', di metodi analitici. Tutti questi metodi alternativi, infatti, richiedono l'impiego di tecniche di simulazione stocastica, parametrica (*Monte Carlo*), o non parametrica (*bootstrap*). Per una rassegna di questi metodi e dei possibili inconvenienti derivanti dalla loro applicazione all'analisi di questa componente dell'errore di previsione, si vedano Bianchi e Calzolari (1982, 1983), Mairesse (1982) e Ahlstedt (1986).

6.2. La componente dovuta ai disturbi strutturali

Abbandonare i metodi analitici e ricorrere alla simulazione stocastica diventa, però, inevitabile quando si passi a calcolare la matrice di covarianza della componente di errore dovuta ai disturbi casuali u_h . Una differenza sostanziale rispetto all'altra componente di errore è che, mentre la componente dovuta all'errore nella stima dei coefficienti è una variabile casuale asintoticamente degenere (dato che $\hat{y}_h - \bar{y}_h$ converge in probabilità a zero), la componente dovuta ai disturbi strutturali u_h non degenera all'aumentare di T . Trattandosi di funzione non lineare del vettore casuale u_h , nonostante sia $E(u_h) = 0$, sarà generalmente (si vedano, ad esempio, Howrey e Kelejian, 1971, p. 309, o Mariano e Brown, 1983)

$$(6.2.1) \quad E[(\bar{y}_h - y_h) | x_h, a, \Sigma] \neq 0.$$

Oltre alla matrice di covarianza interessera', quindi, anche calcolare la media di questa componente del vettore degli errori di previsione. Approssimazioni del valor medio condizionato e della matrice di covarianza di $(\bar{y}_h - y_h)$ possono essere ottenute tramite simulazione stocastica. Per il momento si suppone di avere a disposizione i "veri" parametri strutturali del modello, ossia il vettore a e la matrice di covarianza Σ dei disturbi strutturali u_h ; si ammette anche che i disturbi casuali u_h abbiano distribuzione normale multivariata

$$(6.2.2) \quad u_h \sim N(0, \Sigma).$$

In realtà non disponiamo dei valori veri di a e Σ , ma solo di stime \hat{a} e $\hat{\Sigma}$. Il procedimento che verrà descritto nei tre paragrafi che seguono, allora, fornirà una stima dei momenti (primo e secondo) della distribuzione di $\bar{y}_h - y_h$.

6.3. Simulazione stocastica

La letteratura econometrica degli ultimi anni presenta diversi esempi di applicazione della simulazione stocastica, che mirano a studiare il comportamento dei modelli in presenza dei termini di disturbo strutturale (si vedano, ad esempio, Bianchi et al., 1976, Calzolari e Corsi, 1977, Corker et al., 1983, Fair, 1980, Fisher e Salmon, 1986, Hall, 1986).

Il procedimento di simulazione stocastica di un modello econometrico si articola nelle fasi seguenti.

- 1) Si risolve deterministicamente il modello al tempo h , ottenendo il vettore \bar{y}_h (eq. 5.3 e 5.6).
- 2) Si genera un vettore di disturbi strutturali pseudo - casuali, \tilde{u}_h , con distribuzione normale, media zero e matrice di covarianza Σ (usando, ad esempio, i metodi di Nagar, 1969, o di McCarthy, 1972).
- 3) Si introduce il vettore \tilde{u}_h nel modello e lo si risolve, sempre al tempo h , ottenendo il vettore \tilde{y}_h ; con la notazione di forma ridotta (5.5), il vettore soluzione puo' essere rappresentato come $\tilde{y}_h = y(x_h, a, \tilde{u}_h)$.
- 4) Si calcola (e si memorizza) il vettore delle differenze $\bar{y}_h - \tilde{y}_h$.
- 5) Si ripete R volte il procedimento dalla fase 2 alla fase 4 (1000 volte, ad esempio) raccogliendo tutti i vettori $\bar{y}_h - \tilde{y}_h$. R e' detto "numero di replicazioni". I vettori \tilde{u}_h sono generati indipendentemente nelle varie replicazioni.

Se indichiamo con l'indice r il vettore delle endogene calcolato nella r -esima replicazione, la media campionaria

$$(6.3.1) \quad \tilde{m}_R = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R (\bar{y}_h - \tilde{y}_h^{(r)})$$

e la matrice di covarianza campionaria

$$(6.3.2) \quad \tilde{V}_R = \frac{1}{R-1} \sum_{r=1}^R [(\bar{y}_h - \tilde{y}_h^{(r)}) - \tilde{m}_R][(\bar{y}_h - \tilde{y}_h^{(r)}) - \tilde{m}_R]'$$

dei vettori $\bar{y}_h - \tilde{y}_h^{(r)}$ sono valori approssimati del vettore medio e della matrice di covarianza della componente dell'errore di previsione in esame. L'approssimazione, ovviamente, migliora all'aumentare del numero di replicazioni; si ha infatti

$$(6.3.3) \quad \underset{R \rightarrow \infty}{plim} \tilde{m}_R = m = E[(\bar{y}_h - y_h) | x_h, a, \Sigma]$$

$$(6.3.4) \quad \underset{R \rightarrow \infty}{plim} \tilde{V}_R = V = V[(\bar{y}_h - y_h) | x_h, a, \Sigma]$$

purche' siano soddisfatte le condizioni richieste dalla legge dei grandi numeri (si veda, ad esempio, Rao, 1973, 2c.3.4). Le equazioni (6.3.3) e (6.3.4) valgono purche' i vettori pseudo-casuali \tilde{y}_h generati dal procedimento di simulazione stocastica abbiano le stesse proprieta' del vettore casuale y_h ; il che significa che i vettori dei disturbi generati \tilde{u}_h devono avere la stessa distribuzione dei disturbi strutturali u_h , ossia $N(0, \Sigma)$, secondo l'ipotesi (6.2.2).

Nulla vieta, naturalmente, di generare i disturbi strutturali con una distribuzione diversa dalla normale multivariata, se si ritiene che l'ipotesi (6.2.2) non valga. Esempi di questo tipo sono tuttavia piuttosto rari nella letteratura econometrica. Ad esempio, Sterbenz (1981) propone un metodo di generazione dei vettori \tilde{u}_h che, oltre a mantenere la media (zero) e la matrice di covarianza (Σ), mantiene anche i momenti terzi dei residui delle equazioni strutturali (non necessariamente uguali a zero, come per la distribuzione normale; alcuni risultati sperimentali derivanti dall'impiego di questa tecnica sono descritti in Sterbenz e Calzolari, 1987).

In ogni caso si tratta di metodi "non robusti", poiche' non e' detto che le equazioni (6.3.3) e (6.3.4) valgano qualora la distribuzione dei vettori generati \tilde{u}_h non coincida con quella degli errori strutturali u_h . E' allora possibile ricorrere a tecniche non parametriche come il metodo "residual-based" sviluppato in Brown e Mariano (1984).

In questa sede ci limiteremo al caso in cui si suppone valida l'ipotesi (6.2.2), sempre supponendo di disporre dei "veri" valori dei coefficienti strutturali, a , e della "vera" matrice di covarianza, Σ . Eliminiamo, per semplicità di notazione, l'indice di tempo h e, sempre per semplicità di notazione, indichiamo con y (e con \bar{y} e \tilde{y}) una sola variabile endogena, anziché l'intero vettore. Indichiamo poi con m la media condizionata di $(\bar{y} - y)$, e con v la varianza condizionata di $(\bar{y} - y)$ (o anche semplicemente di y , non essendo \bar{y} un vettore di variabili casuali); osserviamo, poi, che disponendo dei "veri" a e Σ , v è altresì la varianza condizionata di \tilde{y} (e di $\bar{y} - \tilde{y}$), così come m è anche la media condizionata di $(\bar{y} - \tilde{y})$. Limitandoci a considerare una variabile endogena alla volta, \tilde{m}_R e \tilde{v}_R indicheranno i valori calcolati con il procedimento di simulazione stocastica (equazioni 6.3.1 e 6.3.2, applicate ad una sola variabile). Poiché \tilde{m}_R è ottenuto come media di R repliche indipendenti, la sua varianza è v/R . In altre parole, il calcolo della media di $\bar{y} - y$ mediante la simulazione stocastica è affetto da una imprecisione, misurabile con la varianza v/R (o con lo scarto quadratico medio $\sqrt{v/R}$). Si tratta di una "varianza sperimentale" (v , infatti, misura la variabilità tra le diverse repliche); in linea di principio può, quindi, essere ridotta a piacere semplicemente aumentando il numero di repliche. In pratica le cose vanno un po' diversamente; in molti casi, infatti, il numero di repliche necessarie affinché \tilde{m}_R e \tilde{v}_R siano ragionevolmente vicine a m e v può risultare talmente elevato da rendere proibitivo il costo del calcolo.

Prendiamo, ad esempio, il caso della variabile C (consumi) nel piccolo modello non lineare che verrà esaminato nel paragrafo 8.3. Per tale variabile i valori di m e v si ricavano dalla tabella 22 (dalla terza e dalla seconda parte della tabella, rispettivamente; naturalmente stiamo sempre supponendo che i "veri" a e Σ siano disponibili, e che, quindi, i valori riportati in tabella, che per il momento supporremo di aver calcolato con un metodo esatto, siano i "veri" m e v): $m = 0.00397$ e $v = 3.31$.

Un esperimento di simulazione stocastica con 100 repliche ($R = 100$) produrrebbe un valore della media \tilde{m}_R assai poco accurato. Il suo errore quadratico medio, infatti, sarebbe $\sqrt{v/R} = \sqrt{0.0331}$

= 0.182 , troppo grande se confrontato con un valore di m pari ad appena 0.004.

A poco servirebbe aumentare a 10000 il numero di replicazioni (con un tempo di calcolo, e quindi un costo, 100 volte maggiore); avremmo $\sqrt{v/R} = \sqrt{0.000331} = 0.0182$, che e' sempre troppo grande; \tilde{m}_R potrebbe assumere anche valori negativi con elevata probabilita', e non riusciremmo nemmeno a sapere se m e' positivo, negativo, o uguale a zero.

Per cominciare ad avere qualche indicazione attendibile circa il "segno" di m dovremmo effettuare almeno *un milione* di replicazioni. In tal caso, infatti, avremmo $\sqrt{v/R} = 0.00182$, e la probabilita' di ottenere dall'esperimento un valore di \tilde{m}_R col segno sbagliato (negativo) comincerebbe ad essere sufficientemente piccola. Ma nemmeno un milione di replicazioni sarebbe sufficiente a darci un valore attendibile della prima cifra decimale di m . Essendo affetto da un errore quadratico medio pari a 0.00182, \tilde{m}_R potrebbe assumere con elevata probabilita' valori compresi tra 0.001 e 0.007 . Occorrerebbero diverse *decine di milioni* di replicazioni perche' \tilde{m}_R potesse darci, con una certa sicurezza, la prima cifra decimale di m : un risultato piuttosto povero, se si pensa al costo certamente non trascurabile dell'esperimento (costo sicuramente proibitivo per modelli di grandi dimensioni).

Per ottenere risultati piu' precisi, a parita' di costo, occorre *ridurre la varianza sperimentale*. Per i metodi Monte Carlo sono state sviluppate diverse tecniche di riduzione della varianza (si veda, ad esempio, Moy, 1971). Tra queste, due si sono dimostrate particolarmente efficaci, oltre che semplici da applicare, negli esperimenti di simulazione stocastica con modelli econometrici (si veda, ad esempio, Hendry, 1984): la tecnica delle *variabili antitetiche* e la tecnica delle *variabili di controllo*.

6.4. Simulazione stocastica con variabili antitetiche

L'impiego delle variabili antitetiche nella simulazione stocastica si dimostra particolarmente utile per il calcolo della media della componente dell'errore di previsione dovuto ai disturbi strutturali. Il procedimento si articola nelle fasi seguenti.

- 1) Si risolve deterministicamente il modello nel periodo di previsione ottenendo il vettore \bar{y}_h .
- 2) Si genera un vettore di disturbi strutturali pseudo-casuali, \tilde{u}_h , con distribuzione normale, media zero e matrice di covarianza Σ (usando le tecniche già ricordate nel paragrafo precedente).
- 3) Si introduce il vettore \tilde{u}_h nel modello e lo si risolve, sempre nel periodo di previsione; indichiamo con \tilde{y}_h^+ il vettore soluzione; con la notazione di forma ridotta (5.5), tale vettore può essere rappresentato come $\tilde{y}_h^+ = y(x_h, a, \tilde{u}_h)$.
- 4) Si introduce lo stesso vettore di disturbi strutturali, ma col segno opposto, $-\tilde{u}_h$, e si risolve il modello, sempre nel periodo di previsione, ottenendo un vettore che indicheremo con \tilde{y}_h^- ; con la notazione di forma ridotta (5.5), il vettore soluzione può essere rappresentato come $\tilde{y}_h^- = y(x_h, a, -\tilde{u}_h)$.
- 5) Si calcola la media aritmetica tra i due vettori \tilde{y}_h^+ e \tilde{y}_h^- :

$$\bar{y}_h = (\tilde{y}_h^+ + \tilde{y}_h^-) / 2$$
.
- 6) Si calcola (e si memorizza) il vettore delle differenze $\bar{y}_h - \tilde{y}_h^-$.
- 7) Si ripete R volte il procedimento dalla fase 2 alla fase 6 raccogliendo tutti i vettori $\bar{y}_h - \tilde{y}_h^-$.

Ogni replicazione comporta, dunque, una generazione di disturbi strutturali pseudo-casuali e due soluzioni del modello nel periodo di previsione. Nelle varie replicazioni, i vettori \tilde{u}_h sono generati indipendentemente.

Come nell'ultima parte del paragrafo precedente, limitiamoci a prendere in esame una variabile endogena alla volta, ed eliminiamo per

semplicita' l'indice di tempo h . Adottando la notazione scalare, y indichera' la variabile endogena in esame, anziche' l'intero vettore, mentre m e v saranno, rispettivamente, la media e la varianza condizionata di tale variabile. Indichiamo, poi, con l'indice r i valori calcolati nella r -esima replicazione. Un valore approssimato della media della componente dell'errore di previsione in esame e' dato dalla media campionaria

$$(6.4.1) \quad \tilde{m}_R^a = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R (\bar{y} - \tilde{y}^{(r)}) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \left(\bar{y} - \frac{\tilde{y}^{(r)+} + \tilde{y}^{(r)-}}{2} \right).$$

Anche per \tilde{m}_R^g l'approssimazione migliora all'aumentare del numero di replicazioni (R). In particolare, analogamente a \tilde{m}_R (eq. 6.3.3) si avra'

$$(6.4.2) \quad \text{plim}_{R \rightarrow \infty} \tilde{m}_R^a = m = E[(\bar{y}_h - y_h) \mid x_h, a, \Sigma].$$

Si tratta ora di verificare se l'approssimazione data da \tilde{m}_R^g sia migliore o peggiore di quella data da \tilde{m}_R . A questo scopo confrontiamo il valor medio \tilde{m}_R^g , appena calcolato mediante l'uso delle variabili antitetiche, con il valor medio \tilde{m}_R ottenuto mediante semplice simulazione stocastica (eq. 6.3.1), a parita' di numero di replicazioni (R). Poiche' \bar{y} non e' una variabile casuale, e poiche' i disturbi strutturali introdotti nelle R replicazioni sono indipendenti, la varianza di \tilde{m}_R sara' v/R , come gia' osservato nel paragrafo precedente. La varianza di $\tilde{y}^{(r)+}$ sara' uguale a v , come pure la varianza di $\tilde{y}^{(r)-}$; non sara', ovviamente, uguale a zero la loro covarianza. Indicando con c la covarianza tra $\tilde{y}^{(r)+}$ e $\tilde{y}^{(r)-}$ avremo, per la varianza di \tilde{m}_R^g , il valore

$$(6.4.3) \quad V(\tilde{m}_R^a) = \frac{1}{R} \cdot \frac{v + v + 2c}{4} = \frac{v + c}{2R} \leq \frac{v}{R}$$

dove la disuguaglianza deriva dalla nota proprieta' della covarianza, che non puo' assumere un valore maggiore di v . A parita', dunque, di numero di replicazioni (R), si ha sempre

$$(6.4.4) \quad V(\tilde{m}_R^a) \leq V(\tilde{m}_R).$$

L'impiego delle variabili antitetiche comporta, dunque, una riduzione della varianza sperimentale. In altre parole, il metodo di calcolo della media basato sulla simulazione stocastica con variabili antitetiche risulta piu' accurato del metodo basato sulla simulazione stocastica semplice, a parita' di numero di replicazioni.

Questa considerazione, pero', non e' affatto sufficiente. Per eseguire, infatti, una replicazione di simulazione stocastica con variabili antitetiche, occorre risolvere due volte il sistema di equazioni; nel caso di simulazione stocastica semplice, invece, il sistema viene risolto una volta sola. Il tempo di calcolo necessario ad effettuare una replicazione viene in parte speso per generare il vettore di disturbi pseudo-casuali, ed in parte per risolvere il sistema di equazioni. Nella maggior parte delle applicazioni pratiche, la seconda componente e' decisamente preponderante; a parita' di numero di replicazioni, pertanto, il tempo di calcolo (e quindi il costo) risulta, per la simulazione con variabili antitetiche, quasi doppio che per la simulazione stocastica semplice.

Perche' il metodo risulti conveniente occorrera', quindi, non soltanto che il valore di c si mantenga abbastanza lontano da quello di v (si veda l'equazione 6.4.3), ma che sia addirittura negativo. Se, infatti, $c < 0$, si ha

$$(6.4.5) \quad V(\tilde{m}_R^a) = \frac{v + c}{2R} < \frac{v}{2R} = V(\tilde{m}_{2R}).$$

In questo caso, cioe', ci si attende un risultato piu' accurato da un esperimento di simulazione con variabili antitetiche (R replicazioni), che da un esperimento di (circa) uguale costo, basato sulla simulazione stocastica semplice ($2R$ replicazioni). E' questa la condizione che si incontra nella maggior parte delle applicazioni pratiche.

Ad esempio, nel caso limite di un modello lineare, si avrebbe ad ogni replicazione $\bar{y} - \tilde{y}^{(r)} = -(\bar{y} - \tilde{y}^{(r+)})$; si tratterebbe, cioe', di un caso di perfetta correlazione negativa tra le due soluzioni con disturbi antitetici, e si avrebbe, quindi, $c = -v$. Per ogni valore di R si avrebbe

$V(\tilde{m}_R^g) = 0$, ed infatti ogni replicazione fornirebbe sempre lo stesso valore della variabile endogena ($= \bar{y}$). Applicando, invece, la simulazione stocastica semplice, si continuerebbe ad avere $V(\tilde{m}_R) = v/R$, ossia una varianza sperimentale diversa da zero (in particolare, ricordando i simboli utilizzati per i modelli lineari, v sarebbe uguale al termine diagonale, corrispondente alla variabile endogena in esame, della matrice di covarianza di forma ridotta $A^{-1}\Sigma A'^{-1}$).

Nel caso di un modello non lineare si avra', ovviamente, $c \neq -v$. Se pero' il comportamento *locale* (nell'intorno, cioe', del punto soluzione \bar{y}) del modello non si discosta eccessivamente da un comportamento lineare, e se i disturbi strutturali non hanno varianze troppo elevate (e quindi, nella maggior parte dei casi, la soluzione di una replicazione di simulazione stocastica si discosta poco da \bar{y}), e' ragionevole attendersi un valore di c molto piu' vicino a $-v$ che a v (o, quanto meno, un valore negativo di c); e' quindi ragionevole prevedere un guadagno, in termini di efficienza del calcolo, dall'impiego delle variabili antitetiche.

Si tratta, ovviamente, di considerazioni puramente qualitative, sostenibili soltanto se sorrette da adeguati risultati sperimentali. E i risultati sperimentali suggeriscono che, per la maggior parte dei modelli econometrici non lineari, utilizzati nella pratica a fini previsivi, si tratta di considerazioni valide.

Il modello del paragrafo 8.3, gia' richiamato nel paragrafo precedente, ci fornisce un esempio piuttosto convincente. Per la variabile C (consumi), ad una varianza $v = 3.31$, corrisponde una covarianza (tra $\tilde{y}^{(v)+}$ e $\tilde{y}^{(v)-}$) $c = -3.3087$, un valore, quindi, molto vicino a $-v$. La varianza di \tilde{m}_R^g risulta, pertanto, pari a $0.000667/R$, circa *cinquemila* volte piu' piccola della varianza di \tilde{m}_R : tenendo conto che \tilde{m}_R^g "costa" quasi il doppio di \tilde{m}_R (in tempo di calcolo), si puo' dire che le variabili antitetiche aumentano l'efficienza sperimentale di circa *duemilacinquecento* volte (per questa particolare variabile, in questo particolare modello). Per il modello dell'economia italiana discusso nel paragrafo 8.5, l'efficienza sperimentale per la variabile $PILL$ (prodotto interno lordo) aumenta di circa *seicento* volte; di un fattore *cinquantamila* si puo' parlare per la stessa variabile nel modello Klein - Goldberger, esaminato in Calzolari (1979).

Anche se risultati come questi non sono, ovviamente, generalizzabili, sono tuttavia sufficientemente indicativi delle dimensioni del *guadagno* ottenibile con l'impiego delle variabili antitetiche.

In alcuni casi particolari si possono, naturalmente, ricavare informazioni quantitative per via analitica. Un esempio interessante e' dato dal modello di regressione *lineare - nei - logaritmi* (un tipo di *non-linearita'* che si incontra molto spesso nei modelli econometrici)

$$(6.4.6) \quad \ln y = a_1 + a_2 \ln x + u \quad u \sim N(0, \sigma^2)$$

la cui forma ridotta e'

$$(6.4.7) \quad y = e^{a_1} x^{a_2} e^u.$$

Ricordando l'espressione della media e della varianza di una variabile *log-normale* (si veda, ad esempio, Johnson e Kotz, 1970, p. 115)

$$(6.4.8) \quad E(e^u) = E(e^{-u}) = e^{\sigma^2/2}$$

$$(6.4.9) \quad V(e^u) = e^{\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$

e osservando che la covarianza tra e^u ed e^{-u} vale

$$(6.4.10) \quad C(e^u, e^{-u}) = E(e^u e^{-u}) - E(e^u) E(e^{-u}) = 1 - e^{\sigma^2}$$

avremo i seguenti valori di v e c

$$(6.4.11) \quad v = e^{2a_1} x^{2a_2} V(e^u) = e^{2a_1} x^{2a_2} e^{\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

$$(6.4.12) \quad c = e^{2a_1} x^{2a_2} C(e^u, e^{-u}) = e^{2a_1} x^{2a_2} (1 - e^{\sigma^2}).$$

La covarianza c ha sempre valore negativo (se $\sigma \neq 0$), e quindi l'impiego delle variabili antitetiche aumenta sempre l'efficienza del calcolo. Sostituendo, inoltre, v e c nell'equazione (6.4.3), otteniamo

$$(6.4.13) \quad V(\tilde{m}_R^a) = e^{2a_1} x^{2a_2} \frac{e^{2\sigma^2} + 1 - 2e^{-\sigma^2}}{2R}$$

che è funzione monotona crescente di σ^2 . L'efficienza del calcolo, quindi, sarà tanto maggiore quanto più piccola è la varianza degli errori (σ^2).

Ad una conclusione completamente diversa si arriverebbe se il modello in esame fosse del tipo

$$(6.4.14) \quad y = f(x, a, u^2).$$

In questo caso si avrebbe, ad ogni replicazione, $\tilde{y}^{(r)+} = \tilde{y}^{(r)-}$, ed il valore della covarianza c sarebbe uguale a quello della varianza v . Quindi l'impiego delle variabili antitetiche provocherebbe soltanto una perdita di efficienza.

Mentre equazioni del tipo (6.4.6) sono di uso piuttosto frequente, di regola non si incontrano nei modelli econometrici equazioni del tipo (6.4.14). Tuttavia non si può escludere l'eventualità che, nella forma ridotta di un modello non lineare, una variabile endogena sia funzione, tra l'altro, del quadrato di uno dei disturbi strutturali; si pensi, ad esempio, al prodotto di due variabili endogene, ciascuna delle quali sia funzione degli elementi del vettore u . L'esperienza pratica suggerisce, però, che questo non è l'effetto dominante. Di regola la covarianza c ha valore negativo e le variabili antitetiche aumentano, quindi, l'efficienza del calcolo.

È forse superfluo osservare che le stesse ragioni, che consigliano di impiegare le variabili antitetiche per calcolare la media in modo efficiente, ne sconsigliano l'uso per calcolare la varianza delle variabili endogene (o della componente dell'errore di previsione in esame). È ovvio, infatti, che se *localmente* il modello non si discosta troppo da un

comportamento lineare, $\bar{y}^{(v)}$, ai fini del calcolo della varianza, aggiunge ben poca informazione a quella già ottenuta dal calcolo di $\bar{y}^{(v)+}$; l'efficienza risulterebbe praticamente dimezzata rispetto alla simulazione stocastica semplice.

6.5. Simulazione stocastica con variabili di controllo

Anche impiegando le variabili di controllo, ci si attende un guadagno, in termini di efficienza del calcolo, quando il comportamento *locale* del modello non si discosta eccessivamente da un comportamento lineare.

Calcoliamo, innanzitutto, la matrice delle derivate prime delle variabili endogene rispetto al vettore dei disturbi strutturali, nel punto corrispondente alla soluzione deterministica del modello nel periodo di previsione. Impiegando la notazione di forma ridotta (5.5), si tratta della matrice jacobiana

$$(6.5.1) \quad \left[\frac{\partial y}{\partial u'} \right]_{(x_h, a, u_h = 0)}$$

Una volta calcolata la soluzione deterministica del modello nel periodo di previsione, \bar{y}_h , il calcolo delle derivate prime può essere effettuato sia per via analitica, sia per via numerica. Possiamo infatti procedere nel modo seguente.

Sostituendo a y_h la sua espressione di forma ridotta (equazione 5.5, calcolata nel periodo di previsione, h), ed inserendo tale espressione nella forma strutturale (equazione 5.1, sempre calcolata nel periodo h), avremo

$$(6.5.2) \quad f[y(x_h, a, u_h), x_h, a] \equiv u_h$$

identicamente per ogni u_h . Derivando rispetto a u_h' avremo, quindi

$$(6.5.3) \quad \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y}{\partial u'} = I_m$$

dove I_m e' la matrice unitaria $m \times m$. L'equazione (6.5.3) vale, in particolare, se le derivate sono calcolate in corrispondenza della soluzione deterministica del modello. Avremo, quindi

$$(6.5.4) \quad \left[\frac{\partial y}{\partial u'} \right]_{(x_h, a, u_h = 0)} = \left[\frac{\partial f}{\partial y'} \right]_{(\bar{y}_h, x_h, a)}^{-1}$$

Le derivate sul lato destro della (6.5.4) sono calcolabili analiticamente, essendo nota la forma strutturale del modello (vettore di funzioni f).

Si puo', ovviamente, anche procedere per via numerica, calcolando le derivate $\partial y/\partial u'$ come rapporti incrementali. Il metodo piu' semplice consiste nel risolvere il modello m volte (oltre alla soluzione deterministica, che corrisponde ad $u_h = 0$), ogni volta assegnando un piccolo valore al disturbo di una delle m equazioni strutturali. Assegnamo, per esempio, un valore $\Delta u_{k,h} \neq 0$ al disturbo della k -esima equazione strutturale (mentre vengono posti uguali a zero i disturbi di tutte le altre equazioni) e risolviamo il modello ottenendo il vettore $y_h^{(k)}$. Il rapporto tra il vettore $(y_h^{(k)} - \bar{y}_h)$ e lo scalare $\Delta u_{k,h}$ ci fornisce, con una certa approssimazione, il vettore delle derivate prime delle m variabili endogene rispetto al disturbo strutturale della k -esima equazione, ossia la k -esima colonna della matrice richiesta.

Come gia' fatto nei paragrafi precedenti, eliminiamo per semplicita' di notazione, l'indice h e consideriamo una sola variabile endogena. Se y indica la variabile endogena in esame, $\partial y/\partial u$ indica il vettore $m \times 1$ delle derivate prime di tale variabile rispetto agli m disturbi strutturali; sempre per semplicita' di notazione, eviteremo di ripetere in ogni formula che tali derivate vengono calcolate in corrispondenza della soluzione deterministica del modello, come pure, calcolando medie, varianze e covarianze, eviteremo di ripetere che si tratta di medie, varianze e covarianze condizionate.

Introduciamo, ora, la variabile di controllo. Deve trattarsi di una variabile casuale correlata positivamente con la variabile endogena y ; ma, a differenza di y , deve avere media e varianza facilmente calcolabili. A tale scopo possiamo impiegare la variabile y_l , variabile endogena del modello linearizzato nell'intorno del punto soluzione

$$(6.5.5) \quad y_l = \bar{y} + \frac{\partial y}{\partial u'} u.$$

In altre parole, la variabile di controllo y_l si ricava dai primi termini dello sviluppo di Taylor di y nell'intorno di $u = 0$. Ad ogni vettore u di disturbi strutturali nel periodo di previsione possiamo ora far corrispondere due valori della variabile endogena in esame: il valore y , che si ottiene risolvendo il modello nel periodo di previsione dopo avere introdotto il vettore u , e il valore della variabile di controllo y_l , che si ottiene introducendo il vettore u nella equazione (6.5.5).

Mentre il metodo di riduzione della varianza sperimentale basato sulle variabili antitetiche risulta conveniente solamente per il calcolo delle medie degli errori di previsione, il metodo basato sulle variabili di controllo risulta conveniente anche per il calcolo delle varianze. Tratteremo separatamente i due problemi del calcolo delle medie e delle varianze.

La media della componente dell'errore di previsione, relativamente alla variabile endogena in esame, può essere espressa nel modo seguente

$$(6.5.6) \quad E(\bar{y} - y) = E[(\bar{y} - y_l) + (y_l - y)] = E(\bar{y} - y_l) + E(y_l - y).$$

Dalla definizione di y_l (equazione 6.5.5), poiché le derivate che compaiono nell'equazione non sono variabili casuali, ricaviamo che $E(\bar{y} - y_l) = 0$. Avremo, quindi, dalla (6.5.6)

$$(6.5.7) \quad E(\bar{y} - y) = E(y_l - y).$$

Eseguiamo ora la simulazione stocastica del modello (R repliche) come descritto nel paragrafo 6.3; nella r -esima replicazione, però, in corrispondenza del vettore di disturbi pseudo-casuali $\tilde{u}^{(r)}$ calcoliamo, oltre ad $\tilde{y}^{(r)}$ (risolvendo il modello vero e proprio), anche il valore della variabile di controllo $\tilde{y}_l^{(r)}$ (inserendo $\tilde{u}^{(r)}$ nell'equazione 6.5.5). Ricordando l'equazione (6.5.7), potremo calcolare un valore approssimato della media della componente dell'errore di previsione in esame come media campionaria

$$(6.5.8) \quad \tilde{m}_R^c = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R (\tilde{y}_l^{(r)} - \tilde{y}^{(r)}).$$

Calcoliamo, cioè, la media sulla base delle differenze tra i corrispondenti valori di y e y_l , invece che sulla base delle differenze tra y e \bar{y} . Analogamente a \tilde{m}_R e \tilde{m}_R^g , avremo per \tilde{m}_R^c

$$(6.5.9) \quad \underset{R \rightarrow \infty}{plim} \tilde{m}_R^c = m = E[(\bar{y}_h - y_h) | x_h, a, \Sigma].$$

Anche in questo caso è interessante verificare se la tecnica delle variabili di controllo permette una migliore approssimazione nel calcolo della media, a parità di costo del calcolo. Occorre allora confrontare, in termini di varianza, il valore calcolato mediante l'impiego della variabile di controllo (\tilde{m}_R^c), con il valore calcolato impiegando le variabili antitetiche (\tilde{m}_R^g , eq. 6.4.1), e con il valore calcolato con la semplice simulazione stocastica (\tilde{m}_R , eq. 6.3.1), a parità di numero di repliche (R). La varianza di \tilde{m}_R^c è data da

$$(6.5.10) \quad V(\tilde{m}_R^c) = \frac{1}{R} \cdot [V(y_l) + V(y) - 2C(y_l, y)].$$

L'equazione (6.5.10) si presta ad alcune semplici considerazioni qualitative. Se il comportamento del modello nell'intorno della soluzione deterministica (al variare di u) non si discosta troppo da un comportamento lineare, i valori numerici delle due varianze e della

covarianza che compaiono sul lato destro dell'equazione saranno abbastanza simili (uguali, nel caso di perfetta linearita'). Il valore numerico risultante dalla somma algebrica dei tre termini sara', pertanto, piuttosto piccolo (zero, nel caso di perfetta linearita').

Piu' in generale possiamo dire che, se le varianze della variabile di controllo y_l e della variabile y hanno lo stesso ordine di grandezza (oppure, se la varianza di y_l e' minore di quella di y), e se le due variabili sono correlate positivamente, l'impiego delle variabili di controllo riduce la varianza sperimentale nel calcolo della media, rispetto alla semplice simulazione stocastica (la varianza risultante dall'equazione 6.5.10 e' minore di $v/R = V(y)/R$, che e' la varianza di \tilde{m}_R).

Anche nel caso delle variabili di controllo, l'esempio del modello *lineare - nei - logaritmi* (eq. 6.4.6) ci permette di ricavare, per via analitica, informazioni quantitative circa il guadagno in termini di efficienza del calcolo. Dalla forma ridotta (eq. 6.4.7) ricaviamo la soluzione deterministica \bar{y} , la derivata di y rispetto a u , e la variabile di controllo y_l

$$(6.5.11) \quad \bar{y} = e^{a_1} x^{a_2}$$

$$(6.5.12) \quad \left[\frac{\partial y}{\partial u} \right]_{(u=0)} = e^{a_1} x^{a_2}$$

$$(6.5.13) \quad y_l = e^{a_1} x^{a_2} (1 + u).$$

La varianza della variabile di controllo e' data da

$$(6.5.14) \quad V(y_l) = e^{2a_1} x^{2a_2} \sigma^2$$

e la covarianza tra y_l e y e' data da

$$\begin{aligned}
 (6.5.15) \quad C(y_b, y) &= e^{2a_1} x^{2a_2} \{E[(1+u)e^u] - E(e^u)\} = \\
 &= e^{2a_1} x^{2a_2} E(ue^u) = e^{2a_1} x^{2a_2} \sigma^2 e^{\sigma^2/2}.
 \end{aligned}$$

Introducendo questi valori di $V(y_i)$ e $C(y_b, y)$ nell'equazione (6.5.10) otteniamo, per la varianza di \tilde{m}_R^c , l'espressione

$$\begin{aligned}
 (6.5.16) \quad V(\tilde{m}_R^c) &= \frac{1}{R} \cdot [V(y_i) + V(y) - 2C(y_b, y)] = \\
 &= \frac{1}{R} \cdot [V(y) + e^{2a_1} x^{2a_2} \sigma^2 (1 - 2e^{\sigma^2/2})]
 \end{aligned}$$

dove l'ultimo termine tra parentesi tonde e' sempre negativo. In questo caso, dunque, l'impiego della variabile di controllo aumenta l'efficienza del calcolo della media rispetto alla simulazione stocastica semplice.

Sostituiamo ora, nell'equazione (6.5.16), a $V(y)$ la sua espressione ($= v$, eq. 6.4.11)

$$(6.5.17) \quad V(\tilde{m}_R^c) = \frac{e^{2a_1} x^{2a_2}}{R} \cdot [e^{\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) + \sigma^2 (1 - 2e^{\sigma^2/2})]$$

e confrontiamo la varianza di \tilde{m}_R^c con la varianza di \tilde{m}_R^g (eq. 6.4.13), a parita' di numero di replicazioni (R). Le due espressioni sono diverse, e non immediatamente confrontabili. Possiamo, allora, effettuare lo sviluppo di Taylor di entrambe le espressioni, considerate come funzione di σ^2 . Entrambe le funzioni valgono ovviamente zero nel punto iniziale $\sigma^2 = 0$. Anche le derivate prime valgono entrambe zero, nel punto iniziale. Le derivate seconde sono diverse da zero, ma hanno lo stesso valore nel punto iniziale. Solo dal terzo ordine in poi abbiamo valori diversi delle derivate in corrispondenza di $\sigma^2 = 0$. E' quindi ragionevole attenderci valori molto simili di $V(\tilde{m}_R^g)$ e di $V(\tilde{m}_R^c)$, almeno per valori non troppo elevati di σ^2 .

L'esperienza pratica conferma che, a parita' di numero di replicazioni, la varianza della media, calcolata con le variabili di

controllo, e' praticamente uguale alla varianza della media calcolata con le variabili antitetiche. Il guadagno, in termini di efficienza del calcolo, risulta allora circa doppio. Infatti, per una replicazione di simulazione stocastica con variabili di controllo, occorre risolvere il modello una volta, mentre con le variabili antitetiche il modello va risolto due volte.

Nel valutare l'efficienza del calcolo quando si usano le variabili di controllo bisognerebbe, pero', tener conto del tempo necessario al calcolo delle derivate prime. Il calcolo delle derivate viene fatto all'inizio, prima delle replicazioni di simulazione stocastica. L'operazione ha, quindi, un costo fisso, che non aumenta all'aumentare del numero di replicazioni, e che puo' diventare trascurabile se il numero di replicazioni e' sufficientemente elevato. Si puo' quindi concludere dicendo che il guadagno in efficienza di calcolo dovuto all'impiego delle variabili di controllo e', nella maggior parte delle applicazioni pratiche, *quasi doppio* del guadagno ottenibile con le variabili antitetiche.

Le variabili di controllo offrono un ulteriore vantaggio sulle variabili antitetiche: oltre al calcolo della media, si prestano anche al calcolo della varianza della componente dell'errore di previsione in esame (Calzolari e Sterbenz, 1986). Osserviamo, innanzitutto, che

$$(6.5.18) \quad \begin{aligned} V(\bar{y} - y) &= V[(\bar{y} - y_l) + (y_l - y)] = \\ &= V(\bar{y} - y_l) + V(y_l - y) + 2C[(\bar{y} - y_l), (y_l - y)]. \end{aligned}$$

Poiche', per definizione di y_l (eq. 6.5.5), si ha $E(\bar{y} - y_l) = 0$, la covarianza che compare nell'equazione (6.5.18) sara' semplicemente la media del prodotto

$$(6.5.19) \quad \begin{aligned} C[(\bar{y} - y_l), (y_l - y)] &= E[(\bar{y} - y_l)(y_l - y)] = \\ &= E\left\{\left[\frac{\partial y}{\partial u'} u\right](y - y_l)\right\}. \end{aligned}$$

Il primo termine sul lato destro dell'equazione (6.5.18) si calcola facilmente, ricordando che $\bar{y} - y_l = -(\partial y / \partial u') u$ e che la matrice di covarianza del vettore u , Σ , si suppone nota

$$(6.5.20) \quad V(\bar{y} - y_l) = \frac{\partial y}{\partial u'} \Sigma \frac{\partial y}{\partial u}.$$

Sostituendo queste ultime equazioni nella (6.5.18), otteniamo

$$(6.5.21) \quad V(\bar{y} - y) = \frac{\partial y}{\partial u'} \Sigma \frac{\partial y}{\partial u} + \\ + V(y_l - y) + 2 E \left\{ \left[\frac{\partial y}{\partial u'} u \right] (y - y_l) \right\}.$$

Osservando l'equazione (6.5.21), notiamo che la varianza della componente dell'errore di previsione dovuta ai disturbi strutturali e' data dalla somma di tre termini. Il primo, ossia la varianza della variabile di controllo, e' calcolabile analiticamente. Il secondo e terzo termine, invece, possono essere calcolati dai risultati della simulazione stocastica. Il valore approssimato della varianza, ottenibile con R repliche di simulazione stocastica con variabili di controllo, sara' pertanto il seguente

$$(6.5.22) \quad \bar{v}_R^c = \frac{\partial y}{\partial u'} \Sigma \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{1}{R-1} \sum_{r=1}^R [(\hat{y}_l^{(r)} - \hat{y}^{(r)}) - \bar{m}_R^c]^2 + \\ + \frac{2}{R} \sum_{r=1}^R \left\{ \left[\frac{\partial y}{\partial u'} \hat{u}^{(r)} \right] (\hat{y}^{(r)} - \hat{y}_l^{(r)}) \right\}.$$

Se il modello fosse lineare ($y_l = y$, e quindi anche $\hat{y}_l^{(r)} = \hat{y}^{(r)}$), il secondo e terzo termine sul lato destro dell'equazione (6.5.21) sarebbero uguali a zero (e ad ogni repliche di simulazione stocastica sarebbero uguali

a zero i termini da inserire nelle due sommatorie dell'equazione 6.5.22). E' ragionevole pensare che, se *localmente* il modello non si discosta troppo da un comportamento lineare, il primo termine sul lato destro dell'equazione (6.5.22) debba essere decisamente preponderante; la varianza sperimentale nel calcolo di \tilde{v}_R^{ξ} , essendo dovuta unicamente agli altri due termini, dovrebbe pertanto risultare piuttosto bassa.

Un metodo per calcolare la varianza sperimentale di \tilde{v}_R^{ξ} e' descritto in Calzolari e Sterbenz (1986), dove si riportano anche i risultati sperimentali per il modello Klein - Goldberger. In tale modello, calcolando la varianza del prodotto nazionale lordo (o dell'errore di previsione di tale variabile), le variabili di controllo riducono la varianza sperimentale di circa *diecimila* volte, rispetto alla simulazione stocastica semplice. Di un fattore *duecento* si puo' parlare per il prodotto interno lordo (*PILL*) nel modello dell'economia italiana che sara' discusso nel paragrafo 8.5. Nel piccolo modello descritto nel paragrafo 8.3, l'efficienza del calcolo aumenta di circa *mille* volte per la variabile *C* (consumi).

Come gia' osservato per il calcolo della media, risultati come questi non sono, ovviamente, generalizzabili, ma sono tuttavia indicativi delle dimensioni del *guadagno* ottenibile con l'impiego delle variabili di controllo.

7. RISULTATI SPERIMENTALI SUL MODELLO

I metodi descritti nei capitoli 3 e 4 sono stati applicati al modello (1.2), stimato con il metodo della massima verosimiglianza ad informazione completa (FIML). La stima è relativa al periodo 1961-1979. I valori storici delle variabili nel periodo di stima sono riportati in tabella 1 (compresi i dati relativi al 1960 per le variabili che, nel modello, compaiono ritardate di un periodo).

Sempre in tabella 1 sono riportati i valori della variabile esogena Z nei primi anni fuori campione (1980-1983, per le previsioni *ex-post*), come pure i valori osservati *ex-post* delle variabili endogene nello stesso periodo.

La stima dei coefficienti strutturali (vettore \hat{a}) è riportata in tabella 2. La stima della matrice di covarianza asintotica dei coefficienti strutturali, $\hat{\Psi}/T$, è stata ottenuta invertendo la matrice delle derivate seconde (matrice hessiana), cambiate di segno, della funzione di verosimiglianza (*concentrated log-likelihood*) rispetto ai 9 coefficienti strutturali incogniti (vettore a), calcolate in \hat{a} . Tale stima è riportata in tabella 3. Nella tabella 4 viene riportata la stima della matrice di covarianza degli errori strutturali ($\hat{\Sigma}$). La previsione è relativa al primo anno fuori campione, 1980. I risultati del calcolo delle varianze degli errori di previsione sono riportati in tabella 5.

Come alternativa al metodo descritto nel capitolo 4, possiamo calcolare la matrice di covarianza della componente dell'errore di previsione, dovuta all'errore nella stima dei coefficienti, applicando il metodo di Goldberger, Nagar e Odeh (paragrafo 3.8). I risultati numerici ovviamente non cambiano rispetto a quelli già riportati nella tabella 5 (come pure non cambiano se si applica, con le dovute cautele, il metodo numerico del paragrafo 6.1). In tal caso, però, occorre

calcolare preliminarmente la matrice $\hat{\Omega}/T$. Per completezza di esposizione, tale matrice viene riportata in tabella 6, mentre le matrici \hat{A}^{-1} e $\hat{\Pi}$, impiegate nel calcolo, vengono riportate nelle tabelle 7 e 8.

I risultati sulle previsioni e sulle loro varianze, riportati nella tabella 5, si prestano ad alcune considerazioni.

- 1) Confrontando le diagonali delle due matrici di covarianza, notiamo che, per ogni variabile, la varianza della componente di errore dovuta ai disturbi strutturali e' maggiore della varianza della componente dovuta all'errore di stima (piu' esattamente, la stima dell'una e' maggiore della stima dell'altra). E' questa la situazione che si incontra forse piu' frequentemente nelle applicazioni pratiche. Il caso opposto si incontra piu' di rado (un esempio e' dato dal modello esaminato nel paragrafo 8.2; si vedano, al riguardo, i risultati riportati nella tabella 18). Nei modelli di maggiori dimensioni, spesso coesistono variabili per le quali risulta dominante l'una o l'altra componente (si veda, ad esempio, il modello del paragrafo 8.5 e, in particolare, le variabili *PVAP* e *TD* nella tabella 30).
- 2) Le formule sviluppate nei paragrafi precedenti non danno alcuna informazione circa l'importanza relativa delle due componenti nelle applicazioni pratiche. La stima della matrice di covarianza della componente di errore dovuta ai disturbi strutturali (equazione 3.1) non dipende ne' dal valore delle variabili predeterminate nel periodo di previsione (x_h), ne' dalla lunghezza del periodo di stima (T). Sia x_h che T , invece, influiscono direttamente sull'altra matrice di covarianza (equazioni 3.8.10, o 4.12). In particolare, il contributo all'errore di previsione che deriva dall'errore nella stima dei coefficienti sara' tanto piu' piccolo (asintoticamente nullo) quanto piu' lungo e' il periodo di stima. Tale contributo potrebbe diventare, invece, molto rilevante in corrispondenza di valori eccezionali delle variabili predeterminate nel periodo di previsione (x_h), come gia' osservato per il modello di regressione lineare (paragrafo 4.2) e come si puo' rilevare dall'equazione (3.8.10).

- 3) La matrice $\hat{\Psi}/T$ è stata ottenuta dalla matrice delle derivate seconde (matrice hessiana) della funzione di verosimiglianza, come, ad esempio, in Chernoff e Divinsky (1953). Si incontrano spesso nella letteratura stime diverse della matrice di covarianza dei coefficienti FIML. Ad esempio, una diversa matrice $\hat{\Psi}/T$ può essere ottenuta da una stima diretta della matrice di informazione (si vedano, ad esempio, Hendry, 1971, e Hausman, 1974). Una stima ancora diversa può essere ricavata dalle derivate prime della funzione di verosimiglianza, costruendo la matrice dei prodotti esterni, come in Berndt et al. (1974). Stime diverse di questa matrice possono produrre (e producono, in particolare, anche per questo modello) risultati numerici molto diversi per la stima della matrice di covarianza della componente dovuta agli errori nella stima dei coefficienti. Per una trattazione più dettagliata di questo problema e delle conseguenze nelle applicazioni pratiche, si rimanda a Calzolari e Panattoni (1984 e 1987).

Tabella 1

Valori storici della variabili

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>
1960	21688.	8206.		36093.	
1961	23317.	9155.	4114.	39055.	10697.
1962	24974.	10049.	4738.	41478.	11193.
1963	27189.	10861.	5777.	43805.	11532.
1964	28070.	10229.	5396.	45030.	12127.
1965	29105.	9369.	5502.	46502.	13530.
1966	31226.	9774.	6287.	49285.	14572.
1967	33421.	10921.	7141.	52823.	15622.
1968	35089.	12100.	7540.	56280.	16631.
1969	37382.	13038.	8999.	59712.	18291.
1970	40154.	13434.	10431.	62883.	19726.
1971	41342.	13001.	10679.	63916.	20252.
1972	42755.	13120.	11897.	65963.	21985.
1973	45184.	14134.	13142.	70601.	24425.
1974	46399.	14607.	13425.	73525.	25944.
1975	45796.	12745.	12134.	70851.	24444.
1976	47430.	13044.	14005.	75011.	28542.
1977	48477.	12998.	13983.	76435.	28943.
1978	49927.	12985.	15122.	78488.	30698.
1979	52559.	13742.	17206.	82337.	33242.
1980	54806.	15033.	18632.	85558.	34351.
1981	55094.	15130.	17645.	85707.	33128.
1982	55377.	14343.	17918.	85262.	33460.
1983	55207.	13792.	17845.	85127.	33973.

Tabella 2

Stima dei coefficienti strutturali. Metodo di massima verosimiglianza ad informazione completa (FIML). Periodo di stima 1961-1979.

$\hat{a}_1 = 932.093$	$\hat{a}_2 = .188302$	$\hat{a}_3 = .707929$
$\hat{a}_4 = 1306.04$	$\hat{a}_5 = .181901$	$\hat{a}_6 = .876254$
$\hat{a}_7 = -7359.45$	$\hat{a}_8 = .238980$	$\hat{a}_9 = .294750$

Tabella 3

$\hat{\Psi}/T$: stima della matrice di covarianza asintotica dei 9 coefficienti strutturali incogniti del modello, ottenuta dalla matrice hessiana della funzione di verosimiglianza. La matrice (simmetrica) e' rappresentata a blocchi di dimensioni (3 × 3).

Covarianze tra i coefficienti della equazione 1

	\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{a}_3
\hat{a}_1	.124049e+7		
\hat{a}_2	-148.076	.219752e-1	
\hat{a}_3	211.167	-.322575e-1	.475191e-1

Covarianze tra i coefficienti delle equazioni 2 e 1

	\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{a}_3
\hat{a}_4	540579.	-46.3153	61.9999
\hat{a}_5	-102.219	.138566e-1	-.200995e-1
\hat{a}_6	-24.0721	.106899e-2	-.111059e-2

Covarianze tra i coefficienti della equazione 2

	\hat{a}_4	\hat{a}_5	\hat{a}_6
\hat{a}_4	893635		
\hat{a}_5	-94.5722	.223842e-1	
\hat{a}_6	-55.2806	.340410e-2	.399031e-2

Covarianze tra i coefficienti delle equazioni 3 e 1

	\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{a}_3
\hat{a}_7	383286.	-38.1185	52.6714
\hat{a}_8	-39.1737	.503007e-2	-.724012e-2
\hat{a}_9	1.95543	-.464136e-3	.713168e-3

Covarianze tra i coefficienti delle equazioni 3 e 2

	\hat{a}_4	\hat{a}_5	\hat{a}_6
\hat{a}_7	377429.	-78.1287	-15.6570
\hat{a}_8	-44.4421	.110363e-1	.149276e-2
\hat{a}_9	3.32473	-.113148e-2	-.484675e-4

Covarianze tra i coefficienti della equazione 3

	\hat{a}_7	\hat{a}_8	\hat{a}_9
\hat{a}_7	.150985e + 7		
\hat{a}_8	-190.451	.288140e-1	
\hat{a}_9	16.4994	-.323214e-2	.462498e-3

Tabella 4Stima della matrice di covarianza dei disturbi strutturali ($\hat{\Sigma}$)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	282553.			
<i>I</i>	157384.	235537.		
<i>M</i>	107816.	54597.2	272286.	
<i>Y</i>	.0	.0	.0	.0

Tabella 5

Stima delle matrici di covarianza delle due componenti dell'errore di previsione al 1980.

Componente relativa all'errore nella stima dei coefficienti ($\times 10^{-3}$)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	177.			
<i>I</i>	100.	94.2		
<i>M</i>	64.2	32.8	69.2	
<i>Y</i>	213.	161.	27.8	347.

Componente relativa ai disturbi strutturali ($\times 10^{-3}$)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	458.			
<i>I</i>	331.	408.		
<i>M</i>	232.	176.	268.	
<i>Y</i>	557.	562.	140.	979.

Valori calcolati delle endogene (previsioni), valori osservati *ex-post* e stima dello scarto quadratico medio delle previsioni ($\times 10^{-3}$)

	Valore calcolato	Valore osservato	Stima scarto quad. medio
<i>C</i>	54.229	54.806	.797
<i>I</i>	13.913	15.033	.708
<i>M</i>	17.049	18.632	.580
<i>Y</i>	85.444	85.558	1.15

Tabella 6

$\hat{\Omega}/T$: stima della matrice di covarianza asintotica dei coefficienti di forma ridotta. La matrice (simmetrica, di dimensioni 20×20) e' rappresentata a blocchi di dimensioni 4×4 . Ogni blocco contiene le covarianze dei coefficienti di forma ridotta relativi ad una coppia di variabili predeterminate.

$\hat{\Omega}_{1,1} / T$ (variabili predeterminate I,1)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	.121454e + 7			
<i>I</i>	.139282e + 7	.247917e + 7		
<i>M</i>	379827.	407957.	473182.	
<i>Y</i>	.222753e + 7	.346404e + 7	314602.	.537697e + 7

$\hat{\Omega}_{2,1} / T$ (variabili predeterminate Z,1)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	191.265	231.794	53.7317	369.327
<i>I</i>	152.506	281.565	32.9266	401.144
<i>M</i>	75.4303	113.374	11.4284	177.376
<i>Y</i>	268.340	399.985	75.2299	593.095

$\hat{\Omega}_{2,2} / T$ (variabili predeterminate Z_t, Z_t)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	.477579e-1			
<i>I</i>	.377033e-1	.475560e-1		
<i>M</i>	.185875e-1	.186131e-1	.828501e-2	
<i>Y</i>	.668737e-1	.666462e-1	.289156e-1	.104604

 $\hat{\Omega}_{3,1} / T$ (variabili predeterminate C_{t-1}, I)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	-101.671	-95.0760	-31.6100	-165.137
<i>I</i>	68.8560	156.576	11.8206	213.611
<i>M</i>	-7.78852	13.3697	-9.88558	15.4668
<i>Y</i>	-25.0262	48.1299	-9.90385	33.0075

 $\hat{\Omega}_{3,2} / T$ (variabili predeterminate C_{t-1}, Z_t)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	-.230570e-1	-.136538e-1	-.798089e-2	-.287299e-1
<i>I</i>	.173107e-1	.270110e-1	.968963e-2	.346321e-1
<i>M</i>	-.151840e-2	.276381e-2	.409142e-3	.836266e-3
<i>Y</i>	-.422790e-2	.105934e-1	.129960e-2	.506590e-2

 $\hat{\Omega}_{3,3} / T$ (variabili predeterminate C_{t-1}, C_{t-1})

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	.125254e-1			
<i>I</i>	-.490716e-2	.162909e-1		
<i>M</i>	.179573e-2	.243012e-2	.103055e-2	
<i>Y</i>	.582252e-2	.895359e-2	.319530e-2	.115808e-1

$\hat{\Omega}_{4,1} / T$ (variabili predeterminate $I_{t-1}, 1$)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	161.465	186.333	57.3178	290.480
<i>I</i>	108.851	209.690	20.8697	297.672
<i>M</i>	104.269	175.242	-31.8203	311.331
<i>Y</i>	166.047	220.782	110.008	276.821

 $\hat{\Omega}_{4,2} / T$ (variabili predeterminate I_{t-1}, Z_t)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	.429375e-1	.328882e-1	.161596e-1	.596662e-1
<i>I</i>	.358451e-1	.467576e-1	.177727e-1	.648300e-1
<i>M</i>	.235245e-1	.285687e-1	.126844e-1	.394088e-1
<i>Y</i>	.552581e-1	.510772e-1	.212479e-1	.850874e-1

 $\hat{\Omega}_{4,3} / T$ (variabili predeterminate I_{t-1}, C_{t-1})

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	-.207720e-1	.148418e-1	-.176669e-2	-.416350e-2
<i>I</i>	-.118971e-1	.269526e-1	.296180e-2	.120937e-1
<i>M</i>	-.905679e-2	.159834e-1	.234382e-2	.458279e-2
<i>Y</i>	-.236123e-1	.258109e-1	-.114871e-2	.334740e-2

 $\hat{\Omega}_{4,4} / T$ (variabili predeterminate I_{t-1}, I_{t-1})

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	.398028e-1			
<i>I</i>	.330973e-1	.520904e-1		
<i>M</i>	.172753e-1	.255510e-1	.302012e-1	
<i>Y</i>	.556248e-1	.596367e-1	.126250e-1	.102636

$\hat{\Omega}_{5,1} / T$ (variabili predeterminate Y_{t-1}, I)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	-54.9132	-81.2595	-16.4886	-119.684
<i>I</i>	-141.670	-280.503	-29.8785	-392.294
<i>M</i>	-48.4939	-89.8109	.845402	-139.150
<i>Y</i>	-148.089	-271.951	-47.2126	-372.828

 $\hat{\Omega}_{5,2} / T$ (variabili predeterminate Y_{t-1}, Z_t)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	-.138928e-1	-.136599e-1	-.593910e-2	-.216136e-1
<i>I</i>	-.351543e-1	-.477339e-1	-.180738e-1	-.648144e-1
<i>M</i>	-.111322e-1	-.145050e-1	-.587653e-2	-.197607e-1
<i>Y</i>	-.379149e-1	-.468889e-1	-.181364e-1	-.666673e-1

 $\hat{\Omega}_{5,3} / T$ (variabili predeterminate Y_{t-1}, C_{t-1})

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	.599631e-2	-.705872e-2	-.118410e-3	-.944006e-3
<i>I</i>	.118435e-1	-.277332e-1	-.331499e-2	-.125747e-1
<i>M</i>	.399370e-2	-.830969e-2	-.109538e-2	-.322061e-2
<i>Y</i>	.138461e-1	-.264823e-1	-.233802e-2	-.102981e-1

 $\hat{\Omega}_{5,4} / T$ (variabili predeterminate Y_{t-1}, I_{t-1})

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	-.125262e-1	-.134203e-1	-.768458e-2	-.182619e-1
<i>I</i>	-.305995e-1	-.472659e-1	-.281140e-1	-.497514e-1
<i>M</i>	-.893654e-2	-.135234e-1	-.114126e-1	-.110473e-1
<i>Y</i>	-.341891e-1	-.471628e-1	-.243859e-1	-.569660e-1

$\hat{\Omega}_{5,5} / T$ (variabili predeterminate Y_{t-1}, Y_{t-1})

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	.448476e-2			
<i>I</i>	.132739e-1	.483355e-1		
<i>M</i>	.396007e-2	.145224e-1	.501066e-2	
<i>Y</i>	.137986e-1	.470869e-1	.134719e-1	.474137e-1

Tabella 7

Matrice \hat{A}^{-1}

1.20593	.217414	-.205929	.205929
.198929	1.21002	-.198929	.198929
.311247	.272836	.688753	.311247
1.09361	1.15460	-1.09361	1.09361

Tabella 8

Stima della matrice dei coefficienti di forma ridotta ristretta $\hat{\Pi}$ ($\times 10$)

	1	Z_t	C_{t-1}	I_{t-1}	Y_{t-1}
<i>C</i>	29235.1	2.05929	8.53712	1.90510	-.395478
<i>I</i>	32297.7	1.98929	1.40827	10.6029	-2.20104
<i>M</i>	-44223.9	3.11247	2.20341	2.39073	-.496291
<i>Y</i>	105757.	10.9361	7.74199	10.1172	-2.10023

8. RISULTATI SPERIMENTALI SU ALTRI MODELLI

In questo capitolo vengono riportati i risultati sperimentali ottenuti dalla applicazione dei metodi precedentemente descritti a cinque modelli, due lineari e tre non lineari.

8.1. Il modello Klein-I

Come primo modello lineare si considera il modello Klein-I (si veda Klein, 1950, pp. 65-66), relativo all'economia americana nel periodo 1921-1941.

$$(8.1.1) \quad \left[\begin{array}{l} C_t = a_1 + a_2 P_t + a_3 P_{t-1} + a_4 (W1 + W2)_t + u_{1,t} \\ I_t = a_5 + a_6 P_t + a_7 P_{t-1} + a_8 K_{t-1} + u_{2,t} \\ W1_t = a_9 + a_{10} (Y + T - W2)_t + \\ \quad + a_{11} (Y + T - W2)_{t-1} + a_{12} t + u_{3,t} \\ Y_t = C_t + I_t + G_t - T_t \\ P_t = Y_t - W1_t - W2_t \\ K_t = K_{t-1} + I_t \end{array} \right.$$

Le variabili endogene (vettore y_t) sono 6: C_t = consumi, I_t = investimenti netti, $W1_t$ = salari del settore privato, Y_t = prodotto nazionale, P_t = profitti, K_t = stock di capitale alla fine dell'anno t .

Le variabili predeterminate (vettore x_t) sono 8, 5 delle quali sono esogene e 3 sono endogene ritardate di un periodo: il termine costante (= 1 in tutti i periodi), P_{t-1} , $W2_t$ = salari nel settore pubblico, K_{t-1} , T_t = imposte, $(W1 + T)_{t-1}$, t = tempo (anni), G_t = domanda di beni dal settore pubblico e dall'estero. Si noti che la variabile predeterminata che moltiplica a_{11} (terza equazione) e' uguale a $P_{t-1} + (W1 + T)_{t-1}$ (l'uguaglianza si ricava dalla quinta equazione).

Il vettore degli errori al tempo t , u_t , e' composto di tre disturbi casuali, $u_{1,t}$, $u_{2,t}$ e $u_{3,t}$, e di tre termini identicamente nulli.

Per rappresentare il modello nella forma (1.1), introduciamo le matrici di coefficienti A e B , di dimensioni, rispettivamente, (6×6) e (6×8)

$$(8.1.2) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a_4 & 0 & -a_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a_{10} & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(8.1.3) \quad B = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_3 & -a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_5 & -a_7 & 0 & -a_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_9 & -a_{11} & a_{10} & 0 & -a_{10} & -a_{11} & -a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si applica quanto descritto in precedenza al modello Klein-I, stimato con il metodo dei minimi quadrati a 3 stadi (3SLS). La matrice \hat{F}_h ha dimensioni (6×12)

$$(8.1.4) \quad \hat{F}_h = - \begin{bmatrix} 1 & \hat{P}_h & P_{h-1} & W1_h + W2_h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \hat{P}_h & P_{h-1} & K_{h-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (\hat{Y} + T - W2)_h & (Y + T - W2)_{h-1} & h & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \end{bmatrix}.$$

La stima e' relativa al periodo 1921 - 1941. I valori storici delle variabili nel periodo di stima sono riportati in tabella 9 (compresi i dati relativi al 1920, poiche' alcune variabili compaiono nel modello ritardate di un periodo).

La stima dei coefficienti strutturali (vettore \hat{a}) e' riportata in tabella 10. La stima della matrice di covarianza asintotica dei coefficienti strutturali, $\hat{\Psi}/T$, e' riportata in tabella 11 e la stima della matrice di covarianza degli errori strutturali, $\hat{\Sigma}$, e' riportata in tabella 12. La previsione uniperiodale e' relativa all'anno 1948, e i valori delle variabili predeterminate relative a tale anno, come pure i valori osservati *ex-post* delle variabili endogene, sono presi da Goldberger et alii (1961), e sono riportati in tabella 9 (per l'esattezza l'articolo di Goldberger et alii, 1961, riporta i valori delle otto variabili predeterminate elencate in precedenza, non tutti i valori delle singole variabili riportate nella tabella; i valori mancanti sono stati ricostruiti, per permettere di utilizzare il modello nella forma 8.1.1; circa i risultati numerici del lavoro di Goldberger et alii, 1961, si veda la nota di Bianchi et alii, 1979).

Dall'esame dei risultati in tabella 13 si possono ricavare alcune semplici considerazioni.

- 1) Le due componenti di errore hanno matrici di covarianza dello stesso ordine di grandezza. Per ogni variabile endogena, la varianza della componente di errore dovuta ai disturbi strutturali è maggiore della varianza dell'altra componente.
- 2) Confrontando gli errori di previsione, osservati *ex-post*, con i corrispondenti scarti quadratici medi, si nota che l'errore osservato è minore del corrispondente scarto quadratico medio per le tre variabili $W1$, Y e P , mentre è maggiore per le altre tre; per nessuna variabile, però, l'errore osservato è maggiore del doppio del corrispondente scarto quadratico medio.

Il tempo di calcolo per entrambe le matrici è circa un decimo di secondo su un calcolatore *IBM/4341*; il metodo che passa attraverso il calcolo preliminare della matrice di covarianza $\hat{\Omega}/T$ richiede un tempo alcune centinaia di volte maggiore.

Tabella 9

Valori storici della variabili

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>W1</i>	<i>Y</i>	<i>P</i>	<i>K</i>	<i>W2</i>	<i>T</i>	<i>t</i>	<i>G</i>
1920	39.8	2.7	28.8	43.7	12.7	182.8	2.2	3.4	-11.0	4.6
1921	41.9	-0.2	25.5	40.6	12.4	182.6	2.7	7.7	-10.0	6.6
1922	45.0	1.9	29.3	49.1	16.9	184.5	2.9	3.9	-9.0	6.1
1923	49.2	5.2	34.1	55.4	18.4	189.7	2.9	4.7	-8.0	5.7
1924	50.6	3.0	33.9	56.4	19.4	192.7	3.1	3.8	-7.0	6.6
1925	52.6	5.1	35.4	58.7	20.1	197.8	3.2	5.5	-6.0	6.5
1926	55.1	5.6	37.4	60.3	19.6	203.4	3.3	7.0	-5.0	6.6
1927	56.2	4.2	37.9	61.3	19.8	207.6	3.6	6.7	-4.0	7.6
1928	57.3	3.0	39.2	64.0	21.1	210.6	3.7	4.2	-3.0	7.9
1929	57.8	5.1	41.3	67.0	21.7	215.7	4.0	4.0	-2.0	8.1
1930	55.0	1.0	37.9	57.7	15.6	216.7	4.2	7.7	-1.0	9.4
1931	50.9	-3.4	34.5	50.7	11.4	213.3	4.8	7.5	0.0	10.7
1932	45.6	-6.2	29.0	41.3	7.0	207.1	5.3	8.3	1.0	10.2
1933	46.5	-5.1	28.5	45.3	11.2	202.0	5.6	5.4	2.0	9.3
1934	48.7	-3.0	30.6	48.9	12.3	199.0	6.0	6.8	3.0	10.0
1935	51.3	-1.3	33.2	53.3	14.0	197.7	6.1	7.2	4.0	10.5
1936	57.7	2.1	36.8	61.8	17.6	199.8	7.4	8.3	5.0	10.3
1937	58.7	2.0	41.0	65.0	17.3	201.8	6.7	6.7	6.0	11.0
1938	57.5	-1.9	38.2	61.2	15.3	199.9	7.7	7.4	7.0	13.0
1939	61.6	1.3	41.6	68.4	19.0	201.2	7.8	8.9	8.0	14.4
1940	65.0	3.3	45.0	74.1	21.1	204.5	8.0	9.6	9.0	15.4
1941	69.7	4.9	53.3	85.3	23.5	209.4	8.5	11.6	10.0	22.3
....
1947	59.4	94.3	26.2	197.7	8.7	9.2	16.0
1948	82.8	6.4	60.7	97.4	27.9	204.1	8.7	9.2	17.0	17.4

Tabella 10

Stima dei coefficienti strutturali. Metodo dei minimi quadrati a tre stadi (3SLS). Periodo di stima 1921-1941.

$\hat{a}_1 = 16.4408$	$\hat{a}_2 = .124890$	$\hat{a}_3 = .163144$	$\hat{a}_4 = .790081$
$\hat{a}_5 = 28.1779$	$\hat{a}_6 = -.013079$	$\hat{a}_7 = .755724$	$\hat{a}_8 = -.194848$
$\hat{a}_9 = 1.79722$	$\hat{a}_{10} = .400492$	$\hat{a}_{11} = .181291$	$\hat{a}_{12} = .149674$

Tabella 11

$\hat{\Psi}/T \times 10^5$: stima della matrice di covarianza asintotica dei 12 coefficienti strutturali incogniti del modello. La matrice (simmetrica) e' rappresentata a blocchi di dimensioni (4×4) .

Covarianze tra i coefficienti della equazione 1

	\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{a}_3	\hat{a}_4
\hat{a}_1	170185.			
\hat{a}_2	-1698.12	1169.19		
\hat{a}_3	-557.862	-806.243	1008.79	
\hat{a}_4	-3071.19	-116.847	-56.5169	143.929

Covarianze tra i coefficienti delle equazioni 2 e 1

	\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{a}_3	\hat{a}_4
\hat{a}_5	196452.	-1565.36	5469.03	-6207.42
\hat{a}_6	-4300.48	609.356	-590.258	88.5792
\hat{a}_7	1531.33	-494.273	633.691	-85.8289
\hat{a}_8	-732.226	-3.15535	-29.3111	30.5086

Covarianze tra i coefficienti della equazione 2

	\hat{a}_5	\hat{a}_6	\hat{a}_7	\hat{a}_8
\hat{a}_5	4615540.			
\hat{a}_6	-73225.0	2621.04		
\hat{a}_7	60450.1	-2234.68	2338.86	
\hat{a}_8	-21756.6	326.940	-304.281	105.825

Covarianze tra i coefficienti delle equazioni 3 e 1

	\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{a}_3	\hat{a}_4
\hat{a}_9	-61530.8	84.9344	2857.67	276.368
\hat{a}_{10}	994.907	-135.445	88.2945	-3.69105
\hat{a}_{11}	-.945900	138.818	-140.731	-.943242
\hat{a}_{12}	339.275	63.9459	44.2875	-51.7011

Covarianze tra i coefficienti delle equazioni 3 e 2

	\hat{a}_5	\hat{a}_6	\hat{a}_7	\hat{a}_8
\hat{a}_9	27654.6	-167.675	-1478.62	1.54070
\hat{a}_{10}	3791.88	3.23827	17.6514	-20.6271
\hat{a}_{11}	-4388.44	-.462288	7.21784	21.3374
\hat{a}_{12}	-3301.19	49.2808	-66.2560	17.7253

Covarianze tra i coefficienti della equazione 3

	\hat{a}_9	\hat{a}_{10}	\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}
\hat{a}_9	124514.			
\hat{a}_{10}	-790.641	101.210		
\hat{a}_{11}	-1289.31	-91.1903	116.683	
\hat{a}_{12}	1406.23	-28.2723	5.03103	78.0382

Tabella 12Stima della matrice di covarianza dei disturbi strutturali ($\hat{\Sigma}$)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>W1</i>	<i>Y</i>	<i>P</i>	<i>K</i>
<i>C</i>	.891760					
<i>I</i>	.411319	2.09305				
<i>W1</i>	-.393614	.403045	.520026			
<i>Y</i>	.0	.0	.0	.0		
<i>P</i>	.0	.0	.0	.0	.0	
<i>K</i>	.0	.0	.0	.0	.0	.0

Tabella 13

Modello Klein-I dell'economia americana 1921-1941. Stime 3SLS.
Stima delle matrici di covarianza delle due componenti dell'errore di
previsione al 1948.

Componente relativa all'errore nella stima dei coefficienti

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>W1</i>	<i>Y</i>	<i>P</i>	<i>K</i>
<i>C</i>	2.14					
<i>I</i>	.694	.533				
<i>W1</i>	1.18	.568	1.19			
<i>Y</i>	2.83	1.23	1.75	4.06		
<i>P</i>	1.65	.659	.559	2.31	1.75	
<i>K</i>	.694	.533	.568	1.23	.659	.533

Componente relativa ai disturbi strutturali

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>W1</i>	<i>Y</i>	<i>P</i>	<i>K</i>
<i>C</i>	3.85					
<i>I</i>	2.39	2.03				
<i>W1</i>	2.68	2.18	2.70			
<i>Y</i>	6.25	4.43	4.86	10.7		
<i>P</i>	3.56	2.25	2.16	5.81	3.65	
<i>K</i>	2.39	2.03	2.18	4.43	2.25	2.03

Valori calcolati delle endogene (previsioni), valori osservati *ex-post* e stima dello scarto quadratico medio delle previsioni.

	Valore calcolato	Valore osservato	Stima scarto quad. medio
<i>C</i>	78.4	82.8	2.45
<i>I</i>	9.1	6.4	1.60
<i>W1</i>	60.1	60.7	1.97
<i>Y</i>	95.7	97.4	3.84
<i>P</i>	26.9	27.9	2.32
<i>K</i>	206.8	204.1	1.60

8.2. Il modello Girshick - Haavelmo

Come ulteriore esempio di modello lineare esaminiamo in questo paragrafo il modello proposto da Girshick e Haavelmo (1953) per la domanda di prodotti alimentari.

$$(8.2.1) \quad \begin{cases} y_{1,t} = a_1 y_{2,t} + a_2 y_{3,t} + a_3 z_{8,t} + a_4 y_{3,t-1} + a_5 + u_{1,t} \\ y_{2,t} = a_6 y_{2,t} + a_7 y_{4,t} + a_8 z_{8,t} + a_9 + u_{2,t} \\ y_{3,t} = a_{10} z_{7,t} + a_{11} y_{3,t-1} + a_{12} + u_{3,t} \\ y_{4,t} = a_{13} y_{5,t} + a_{14} y_{5,t-1} + a_{15} z_{8,t} + a_{16} + u_{4,t} \\ y_{5,t} = a_{17} y_{2,t} + a_{18} z_{8,t} + a_{19} + u_{5,t} \end{cases}$$

Le variabili endogene (vettore y_t) sono 7: $y_{1,t}$ = consumi alimentari pro-capite, $y_{2,t}$ = prezzi al dettaglio dei consumi alimentari, $y_{3,t}$ = reddito disponibile pro-capite, $y_{4,t}$ = prodotti agricoli alimentari pro-capite, $y_{5,t}$ = prezzi alla produzione dei prodotti agricoli alimentari.

Le variabili predeterminate (vettore x_t) sono 5, 3 delle quali sono esogene (correnti) e 2 sono endogene ritardate di un periodo: il termine costante (= 1 in tutti i periodi), $y_{5,t-1}$, $z_{7,t}$ = investimento netto pro-capite (reddito disponibile meno spese per consumi), $z_{8,t}$ = tempo, $y_{3,t-1}$.

Il modello non contiene equazioni definizionali; il vettore degli errori al tempo t ha, pertanto, dimensioni 5×1 e, a differenza dei modelli esaminati in precedenza, non contiene termini identicamente nulli.

Le matrici di coefficienti strutturali A e B , che permettono di rappresentare il modello nella forma (1.1), hanno entrambe dimensioni 5×5

$$(8.2.2) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & 0 & 0 \\ 1 & -a_6 & 0 & -a_7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{13} \\ 0 & -a_{17} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(8.2.3) \quad B = \begin{bmatrix} -a_5 & 0 & 0 & -a_3 & -a_4 \\ -a_9 & 0 & 0 & -a_8 & 0 \\ -a_{12} & 0 & -a_{10} & 0 & -a_{11} \\ -a_{16} & -a_{14} & 0 & -a_{15} & 0 \\ -a_{19} & 0 & 0 & -a_{18} & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice \hat{F}_h ha dimensioni (5×19)

$$(8.2.4) \quad \hat{F}_h = - \begin{bmatrix} \hat{y}_{2,h} & \hat{y}_{3,h} & z_{8,h} & y_{3,h-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{y}_{2,h} & \hat{y}_{4,h} & z_{8,h} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_{7,h} & y_{3,h-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{y}_{5,h} & y_{5,h-1} & z_{8,h} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{y}_{2,h} & z_{8,h} & 1 \end{bmatrix}.$$

I valori delle variabili, relativi al periodo 1922 - 1941 (ed al 1921 per le due variabili endogene ritardate) sono riportati in tabella 14 (per maggiori dettagli sulla costruzione e sulla fonte dei dati stessi, si veda l'articolo di Girshick e Haavelmo, 1953, pp. 107-108). I coefficienti strutturali, riportati in tabella 15 (e la loro matrice di covarianza, riportata in tabella 16), sono stati stimati applicando il metodo iterativo delle variabili strumentali ad informazione limitata (IIV) ai dati del periodo 1922 - 1940. Il procedimento di stima e' descritto in Datta e Lyttkens (1974). Si tratta della versione iterativa del metodo di stima delle variabili strumentali ad informazione limitata proposto da Brundy e Jorgenson (1971, LIVE) e da Dhrymes (1971, LIIV). Una tavola riassuntiva del procedimento di stima (una iterazione) e' riportata nell'articolo di Brundy e Jorgenson (1971, p. 215, tabella I, seconda colonna *Limited Information*); il procedimento e' stato applicato iterativamente fino a raggiungere la convergenza su sei cifre

decimali, per tutti i coefficienti; i valori numerici delle stime sono, pertanto, indipendenti dalle stime che occorre fornire all'inizio, per applicare il metodo delle variabili strumentali.

Il 1941 e' l'anno di previsione. I valori osservati e calcolati delle variabili endogene (previsioni *ex-post*), le matrici di covarianza delle due componenti del vettore degli errori di previsione, e gli scarti quadratici medi complessivi sono riportati in tabella 18.

E' questo l'unico caso, tra i modelli impiegati in questo testo a titolo di esempio, in cui l'errore di stima contribuisce piu' dei disturbi strutturali alla varianza delle previsioni, per tutte le variabili.

Tabella 14

Valori storici della variabili

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	z_7	z_8
1921			77.4		98.0		
1922	98.6	100.2	87.4	108.5	99.1	92.9	1.0
1923	101.2	101.6	97.6	110.1	99.1	142.9	2.0
1924	102.4	100.5	96.7	110.4	98.9	100.0	3.0
1925	100.9	106.0	98.2	104.3	110.8	123.8	4.0
1926	102.3	108.7	99.8	107.2	108.2	111.9	5.0
1927	101.5	106.7	100.5	105.8	105.6	121.4	6.0
1928	101.6	106.7	103.2	107.8	109.8	107.1	7.0
1929	101.6	108.2	107.8	103.4	108.7	142.9	8.0
1930	99.8	105.5	96.6	102.7	100.6	92.9	9.0
1931	100.3	95.6	88.9	104.1	81.0	97.6	10.0
1932	97.6	88.6	75.1	99.2	68.6	52.4	11.0
1933	97.2	91.0	76.9	99.7	70.9	40.5	12.0
1934	97.3	97.9	84.6	102.0	81.4	64.3	13.0
1935	96.0	102.3	90.6	94.3	102.3	78.6	14.0
1936	99.2	102.2	103.1	97.7	105.0	114.3	15.0
1937	100.3	102.5	105.1	101.1	110.5	121.4	16.0
1938	100.3	97.0	96.4	102.3	92.5	78.6	17.0
1939	104.1	95.8	104.4	104.4	89.3	109.5	18.0
1940	105.3	96.4	110.7	108.5	93.0	128.6	19.0
1941	107.6	100.3	127.1	111.3	106.6	238.1	20.0

Tabella 15

Stima dei coefficienti strutturali. Metodo iterativo delle variabili strumentali ad informazione limitata. Periodo di stima 1922-1940.

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= -.588928 & \hat{a}_2 &= .345460 & \hat{a}_3 &= -.366879 & \hat{a}_4 &= .090655 & \hat{a}_5 &= 121.673 \\ \hat{a}_6 &= .135961 & \hat{a}_7 &= .802170 & \hat{a}_8 &= .409629 & \hat{a}_9 &= -.713708 \\ \hat{a}_{10} &= .230990 & \hat{a}_{11} &= .346964 & \hat{a}_{12} &= 39.9242 \\ \hat{a}_{13} &= .481668 & \hat{a}_{14} &= -.250787 & \hat{a}_{15} &= -.253800 & \hat{a}_{16} &= 84.1706 \\ \hat{a}_{17} &= 2.61243 & \hat{a}_{18} &= .458590 & \hat{a}_{19} &= -171.077 \end{aligned}$$

Tabella 16

$\hat{\Psi}/T \times 10^3$: stima della matrice di covarianza asintotica dei 19 coefficienti strutturali incogniti del modello. La matrice (simmetrica) e' rappresentata a blocchi.

Covarianze tra i coefficienti della equazione 1

	\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{a}_3	\hat{a}_4	\hat{a}_5
\hat{a}_1	145.993				
\hat{a}_2	-36.1528	11.9689			
\hat{a}_3	76.8776	-17.9171	43.4294		
\hat{a}_4	-20.4792	2.84194	-11.8377	5.31781	
\hat{a}_5	-10071.4	2403.40	-5341.19	1406.89	704489.

Covarianze tra i coefficienti delle equazioni 2 e 1

	\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{a}_3	\hat{a}_4	\hat{a}_5
\hat{a}_6	-2.54601	.703202	-1.28006	.184533	184.316
\hat{a}_7	5.10700	-1.65567	2.54602	-.434478	-339.913
\hat{a}_8	1.36282	-.506240	.526541	-.132847	-81.4026
\hat{a}_9	-287.687	106.218	-140.808	27.8736	17554.2

Covarianze tra i coefficienti della equazione 2

	\hat{a}_6	\hat{a}_7	\hat{a}_8	\hat{a}_9
\hat{a}_6	22.7165			
\hat{a}_7	-34.6513	81.5855		
\hat{a}_8	-6.37832	24.9457	12.9738	
\hat{a}_9	1375.29	-5234.04	-2078.48	426031.

Covarianze tra i coefficienti delle equazioni 3 e 1

	\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{a}_3	\hat{a}_4	\hat{a}_5
\hat{a}_{10}	0.0	.717504	0.0	-.506592	-21.1310
\hat{a}_{11}	0.0	-1.11539	0.0	1.71951	-54.9693
\hat{a}_{12}	0.0	32.5328	0.0	-110.788	7405.43

Covarianze tra i coefficienti delle equazioni 3 e 2

	\hat{a}_6	\hat{a}_7	\hat{a}_8	\hat{a}_9
\hat{a}_{10}	.218642	-1.48139	-.423004	136.081
\hat{a}_{11}	-2.54780	2.17098	-.826078	39.3408
\hat{a}_{12}	217.957	-54.7407	120.620	-17553.9

Covarianze tra i coefficienti della equazione 3

	\hat{a}_{10}	\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}
\hat{a}_{10}	1.52286		
\hat{a}_{11}	-2.36734	12.2437	
\hat{a}_{12}	69.0489	-914.253	79978.8

Covarianze tra i coefficienti delle equazioni 4 e 1

	\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{a}_3	\hat{a}_4	\hat{a}_5
\hat{a}_{13}	36.9783	-13.1528	18.3323	-3.45154	-2319.61
\hat{a}_{14}	-31.8862	10.3374	-15.8965	2.71273	2122.29
\hat{a}_{15}	12.7866	-5.21506	2.61569	-1.36853	-684.342
\hat{a}_{16}	-611.336	321.383	-257.259	84.3369	25234.7

Covarianze tra i coefficienti delle equazioni 4 e 2

	\hat{a}_6	\hat{a}_7	\hat{a}_8	\hat{a}_9
\hat{a}_{13}	12.9424	-42.1434	-15.4988	3228.98
\hat{a}_{14}	-14.0679	33.1224	10.1276	-2124.94
\hat{a}_{15}	2.54401	-16.7098	-12.5659	1605.08
\hat{a}_{16}	86.9751	1029.76	641.826	-122288.

Covarianze tra i coefficienti delle equazioni 4 e 3

	\hat{a}_{10}	\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}
\hat{a}_{13}	-2.40557	.269005	217.944
\hat{a}_{14}	1.41893	-2.07944	52.4326
\hat{a}_{15}	-.326203	-3.55131	367.618
\hat{a}_{16}	98.1933	210.939	-30128.4

Covarianze tra i coefficienti della equazione 4

	\hat{a}_{13}	\hat{a}_{14}	\hat{a}_{15}	\hat{a}_{16}
\hat{a}_{13}	176.574			
\hat{a}_{14}	-121.618	95.5853		
\hat{a}_{15}	81.4093	-48.2214	100.934	
\hat{a}_{16}	-6090.58	2971.69	-4202.44	344257.

Covarianze tra i coefficienti delle equazioni 5 e 1

	\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{a}_3	\hat{a}_4	\hat{a}_5
\hat{a}_{17}	-18.9362	0.0	-9.98209	0.0	2006.80
\hat{a}_{18}	-9.98209	0.0	-12.6563	0.0	1131.81
\hat{a}_{19}	2006.80	0.0	1131.81	0.0	-213635.

Covarianze tra i coefficienti delle equazioni 5 e 2

	\hat{a}_6	\hat{a}_7	\hat{a}_8	\hat{a}_9
\hat{a}_{17}	-1.62363	0.0	-.855884	172.067
\hat{a}_{18}	-.855884	0.0	-1.08518	97.0438
\hat{a}_{19}	172.067	0.0	97.0438	-18317.5

Covarianze tra i coefficienti delle equazioni 5 e 3

	\hat{a}_{10}	\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}
\hat{a}_{17}	.009863	.039059	-4.67799
\hat{a}_{18}	-.000719	.035796	-3.30012
\hat{a}_{19}	-.986114	-4.29144	506.121

Covarianze tra i coefficienti delle equazioni 5 e 4

	\hat{a}_{13}	\hat{a}_{14}	\hat{a}_{15}	\hat{a}_{16}
\hat{a}_{17}	4.61050	0.0	4.23490	-487.699
\hat{a}_{18}	2.43039	0.0	6.93564	-304.119
\hat{a}_{19}	-488.606	0.0	-495.833	52296.2

Covarianze tra i coefficienti della equazione 5

	\hat{a}_{17}	\hat{a}_{18}	\hat{a}_{19}
\hat{a}_{17}	112.551		
\hat{a}_{18}	59.3302	75.2248	
\hat{a}_{19}	-11927.7	-6727.11	1269780.

Tabella 17Stima della matrice di covarianza dei disturbi strutturali ($\hat{\Sigma}$)

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
y_1	1.40607				
y_2	-.083900	1.78044			
y_3	1.68622	-1.59883	15.4937		
y_4	-2.08876	-2.88225	-6.10643	33.1661	
y_5	-4.21476	-.361379	.038419	2.68085	25.0511

Tabella 18

Modello Girshick - Haavelmo. Stime IIV. Stima delle matrici di covarianza delle due componenti dell'errore di previsione al 1941.

Componente relativa all'errore nella stima dei coefficienti

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
y_1	6.01				
y_2	-5.32	25.0			
y_3	4.28	9.73	22.0		
y_4	9.67	-11.3	5.79	22.8	
y_5	-13.3	60.0	25.4	-27.7	158.

Componente relativa ai disturbi strutturali

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
y_1	2.13				
y_2	-1.90	13.1			
y_3	2.45	7.80	15.5		
y_4	3.78	-4.61	3.72	9.27	
y_5	-3.85	25.1	20.4	-8.66	67.0

Valori calcolati delle endogene (previsioni), valori osservati *ex-post* e stima dello scarto quadratico medio delle previsioni.

	Valore calcolato	Valore osservato	Stima scarto quad. medio
y_1	109.0	107.6	2.85
y_2	104.2	100.3	6.17
y_3	133.3	127.1	6.13
y_4	108.9	111.3	5.67
y_5	110.4	106.6	15.0

8.3. Una versione non lineare del modello Klein-I

Come esempio di semplice modello non lineare si considera la variante del modello Klein-I utilizzata in Belsley (1980): l'equazione (lineare) dei consumi privati e' sostituita da una equazione *lineare nei logaritmi*.

$$(8.3.1) \quad \left[\begin{array}{l} \ln C_t = a_1 + a_2 \ln P_t + a_3 \ln P_{t-1} + \\ \quad \quad \quad + a_4 \ln (W1 + W2)_t + u_{1,t} \\ I_t = a_5 + a_6 P_t + a_7 P_{t-1} + a_8 K_{t-1} + u_{2,t} \\ W1_t = a_9 + a_{10} (Y + T - W2)_t + \\ \quad \quad \quad + a_{11} (Y + T - W2)_{t-1} + a_{12} t + u_{3,t} \\ Y_t = C_t + I_t + G_t - T_t \\ P_t = Y_t - W1_t - W2_t \\ K_t = K_{t-1} + I_t \end{array} \right.$$

Trattandosi di un modello non lineare, non possiamo ricorrere alla rappresentazione (1.1). Il sistema di equazioni puo' essere risolto con tecniche numeriche. A tale scopo puo' essere opportuno introdurre una variabile endogena ausiliaria, *AUX*, il cui valore corrisponde al logaritmo naturale della variabile *C*, e una settima equazione definizionale.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \hat{P}_h & P_{h-1} & K_{h-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (\hat{Y} + T - W2)_h & (Y + T - W2)_{h-1} & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice $\partial f / \partial \bar{y}_h'$ differisce dalla matrice A del caso lineare (eq. 8.1.2) oltre che per le dimensioni (7×7), anche per la presenza di elementi variabili nel tempo. Tale matrice ha la forma seguente

$$(8.3.4) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{y}_h'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-a_4}{\bar{W1}_h + W2_h} & 0 & \frac{-a_2}{\bar{P}_h} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\bar{C}_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avendo ordinato le variabili endogene nel modo seguente:

$$(8.3.5) \quad y_t = \begin{bmatrix} AUX_t \\ I_t \\ W1_t \\ Y_t \\ P_t \\ K_t \\ C_t \end{bmatrix}.$$

La stima e' relativa al periodo 1921 - 1941, ed e' stata ottenuta applicando il metodo di massima verosimiglianza ad informazione completa (non lineare, Amemiya, 1977). I valori storici delle variabili, sia nel periodo di stima che nel periodo di previsione, sono gli stessi del modello lineare (tabella 9; AUX si ricava, ovviamente, come $\ln C$).

La stima dei coefficienti strutturali (vettore \hat{a}) e' riportata in tabella 19. La stima della matrice di covarianza asintotica dei coefficienti strutturali, $\hat{\Psi}/T$, e' riportata in tabella 20, ed e' stata ottenuta invertendo la matrice hessiana della funzione di verosimiglianza concentrata, col segno cambiato.

Come per il caso lineare, la previsione uniperiodale e' relativa all'anno 1948; i risultati sono riportati in tabella 22.

La matrice di varianza - covarianza della componente del vettore degli errori di previsione dovuta all'errore nella stima dei coefficienti strutturali $(\hat{y}_h - \bar{y}_h)$ e' stata ottenuta analiticamente, calcolando le matrici (8.3.3) e (8.3.4) in corrispondenza della soluzione del sistema nell'anno di previsione $(\hat{y}_h, x_h, \hat{a})$.

La matrice di varianza - covarianza della componente di errore dovuta ai disturbi strutturali e' stata calcolata mediante simulazione stocastica, con variabili di controllo (paragrafo 6.5). E' stato eseguito un numero particolarmente elevato di replicazioni (10^6), per garantire la correttezza dei risultati numerici, almeno fino al numero di cifre decimali riportato nella tabella 22. Con lo stesso esercizio di simulazione stocastica e' stata anche calcolata, per ogni variabile, la media condizionata della componente dell'errore di previsione dovuta ai disturbi strutturali (\bar{m}_h^{ξ} , eq. 6.5.8). Si noti che, per ogni variabile,

tale media risulta essere molto piccola rispetto al valore della variabile stessa.

Nella tabella 23 sono riportati i risultati del calcolo della matrice di varianza - covarianza della componente di errore dovuta all'errore nella stima dei coefficienti strutturali mediante simulazione analitica, ossia calcolando numericamente le derivate come rapporti incrementali. Si effettua un primo calcolo assegnando, ad ogni coefficiente strutturale \hat{a}_k , un incremento abbastanza grande, $\Delta\hat{a}_k = 10^{-1}\hat{a}_k$. Riducendo progressivamente il valore dell'incremento assegnato a ciascun coefficiente ($\Delta\hat{a}_k$), si notano cambiamenti nei risultati al variare di $\Delta\hat{a}_k$ da $10^{-1}\hat{a}_k$ a $10^{-4}\hat{a}_k$. In seguito non si notano cambiamenti nelle prime 2-3 cifre significative al variare di $\Delta\hat{a}_k$ da $10^{-4}\hat{a}_k$ a $10^{-10}\hat{a}_k$, ed infine si hanno di nuovo cambiamenti diminuendo ulteriormente gli incrementi $\Delta\hat{a}_k$. Si nota inoltre che, per i valori intermedi di $\Delta\hat{a}_k$, i risultati coincidono (almeno nelle prime tre cifre significative) con i risultati analitici della tabella 22. Questo significa che valori di $\Delta\hat{a}_k$ compresi tra $10^{-1}\hat{a}_k$ e $10^{-3}\hat{a}_k$ sono troppo grandi per calcolare numericamente le derivate prime; valori degli incrementi $\Delta\hat{a}_k$ minori di $10^{-10}\hat{a}_k$ causano, invece, la cancellazione di troppe cifre *uguali* nel calcolo numerico delle differenze e, quindi, dei rapporti incrementali.

Tabella 19

Stima dei coefficienti strutturali. Metodo della massima verosimiglianza ad informazione completa non lineare. Periodo di stima 1921-1941.

$\hat{a}_1 = 1.42365$	$\hat{a}_2 = .048579$	$\hat{a}_3 = .031093$	$\hat{a}_4 = .629689$
$\hat{a}_5 = 33.0054$	$\hat{a}_6 = -.248046$	$\hat{a}_7 = .884421$	$\hat{a}_8 = -.209644$
$\hat{a}_9 = 2.85672$	$\hat{a}_{10} = .331213$	$\hat{a}_{11} = .234773$	$\hat{a}_{12} = .163017$

Tabella 20

$\hat{\Psi}/T \times 10^3$: stima della matrice di covarianza asintotica dei 12 coefficienti strutturali incogniti del modello. La matrice (simmetrica) e' rappresentata a blocchi di dimensioni (4 x 4).

Covarianze tra i coefficienti della equazione 1

	\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{a}_3	\hat{a}_4
\hat{a}_1	564.786			
\hat{a}_2	-13.2067	22.1581		
\hat{a}_3	29.3139	-13.7517	24.7467	
\hat{a}_4	-163.836	-2.87165	-15.9754	58.2089

Covarianze tra i coefficienti delle equazioni 2 e 1

	\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{a}_3	\hat{a}_4
\hat{a}_5	9407.25	-2552.27	3971.79	-3565.33
\hat{a}_6	-217.468	174.453	-174.684	57.4095
\hat{a}_7	140.933	-116.082	168.872	-76.3572
\hat{a}_8	-39.9897	7.51470	-18.8871	19.1830

Covarianze tra i coefficienti della equazione 2

	\hat{a}_5	\hat{a}_6	\hat{a}_7	\hat{a}_8
\hat{a}_5	9334470.			
\hat{a}_6	-151995.	5221.30		
\hat{a}_7	108193.	-3624.82	3635.46	
\hat{a}_8	-42503.2	614.308	-531.199	203.627

Covarianze tra i coefficienti delle equazioni 3 e 1

	\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{a}_3	\hat{a}_4
\hat{a}_9	-3627.57	-104.806	533.153	649.411
\hat{a}_{10}	51.0557	-7.23703	1.92872	-9.75356
\hat{a}_{11}	9.01551	9.30301	-11.1922	-1.09751
\hat{a}_{12}	97.8433	5.92051	15.6138	-42.4455

Covarianze tra i coefficienti delle equazioni 3 e 2

	\hat{a}_5	\hat{a}_6	\hat{a}_7	\hat{a}_8
\hat{a}_9	292993.	-9111.00	-1296.15	-563.596
\hat{a}_{10}	11721.4	104.794	43.6537	-70.8559
\hat{a}_{11}	-17108.8	48.5875	-22.8602	83.1067
\hat{a}_{12}	-5835.66	-6.18036	-90.2257	36.9964

Covarianze tra i coefficienti della equazione 3

	\hat{a}_9	\hat{a}_{10}	\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}
\hat{a}_9	180091.			
\hat{a}_{10}	-2091.79	117.225		
\hat{a}_{11}	-873.514	-85.3389	103.452	
\hat{a}_{12}	1531.46	-48.6510	23.9779	84.8036

Tabella 21Stima della matrice di covarianza dei disturbi strutturali ($\hat{\Sigma}$)

	<i>AUX</i>	<i>I</i>	<i>W1</i>	<i>Y</i>	<i>P</i>	<i>K</i>	<i>C</i>
<i>AUX</i>	.215840						
<i>I</i>	5.10394	3630.93					
<i>W1</i>	-8.09372	1024.79	800.612				
<i>Y</i>	.0	.0	.0	.0			
<i>P</i>	.0	.0	.0	.0	.0		
<i>K</i>	.0	.0	.0	.0	.0	.0	
<i>C</i>	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0

Tabella 22

Versione non lineare del modello Klein-I. Stima FIML non lineare. Stima delle matrici di covarianza delle due componenti dell'errore di previsione al 1948.

Componente relativa all'errore nella stima dei coefficienti

	<i>AUX</i>	<i>I</i>	<i>W1</i>	<i>Y</i>	<i>P</i>	<i>K</i>	<i>C</i>
<i>AUX</i>	.227e-3						
<i>I</i>	.946e-2	.974					
<i>W1</i>	.107e-1	.990	1.43				
<i>Y</i>	.267e-1	1.70	1.81	3.74			
<i>P</i>	.160e-1	.706	.379	1.93	1.55		
<i>K</i>	.946e-2	.974	.990	1.70	.706	.974	
<i>C</i>	.173e-1	.722	.820	2.04	1.22	.722	1.32

Componente relativa ai disturbi strutturali

	<i>AUX</i>	<i>I</i>	<i>W1</i>	<i>Y</i>	<i>P</i>	<i>K</i>	<i>C</i>
<i>AUX</i>	.568e-3						
<i>I</i>	.273e-1	2.42					
<i>W1</i>	.268e-1	2.50	2.73				
<i>Y</i>	.706e-1	4.50	4.55	9.90			
<i>P</i>	.439e-1	2.00	1.82	5.35	3.53		
<i>K</i>	.273e-1	2.42	2.50	4.50	2.00	2.42	
<i>C</i>	.434e-1	2.08	2.04	5.39	3.35	2.08	3.31

Valori calcolati delle endogene (previsioni), valori osservati *ex-post*, stima dello scarto quadratico medio delle previsioni e media condizionata degli errori di previsione.

	Valore calcolato	Valore osservato	Stima scarto quad. medio	Media condiz. dell'errore
<i>AUX</i>	4.33	4.42	.028	.00034
<i>I</i>	8.4	6.4	1.84	-.00056
<i>W1</i>	58.8	60.7	2.04	.00113
<i>Y</i>	92.9	97.4	3.69	.00341
<i>P</i>	25.4	27.9	2.25	.00228
<i>K</i>	206.1	204.1	1.84	-.00056
<i>C</i>	76.3	82.8	2.15	.00397

Tabella 23

Versione non lineare del modello Klein-I. Stima FIML non lineare. Stima della matrice di covarianza della prima componente dell'errore di previsione al 1948.

Componente relativa all'errore nella stima dei coefficienti calcolata con simulazione analitica e incrementi a tutti i coefficienti pari a $\Delta\hat{a}_k = 10^{-1}\hat{a}_k$.

	<i>AUX</i>	<i>I</i>	<i>W1</i>	<i>Y</i>	<i>P</i>	<i>K</i>	<i>C</i>
<i>AUX</i>	.406e-3						
<i>I</i>	.165e-2	1.28					
<i>W1</i>	.170e-1	.668	1.38				
<i>Y</i>	.546e-1	.243	2.45	8.20			
<i>P</i>	.377e-1	-.425	1.08	5.75	4.67		
<i>K</i>	.165e-2	1.28	.668	.243	-.425	1.28	
<i>C</i>	.530e-1	-1.04	1.79	7.96	6.18	-1.04	9.00

Componente relativa all'errore nella stima dei coefficienti calcolata con simulazione analitica e incrementi a tutti i coefficienti pari a $\Delta\hat{a}_k = 10^{-2}\hat{a}_k$.

	<i>AUX</i>	<i>I</i>	<i>W1</i>	<i>Y</i>	<i>P</i>	<i>K</i>	<i>C</i>
<i>AUX</i>	.235e-3						
<i>I</i>	.907e-2	.987					
<i>W1</i>	.108e-1	.982	1.39				
<i>Y</i>	.276e-1	1.64	1.76	3.76			
<i>P</i>	.168e-1	.655	.365	2.00	1.64		
<i>K</i>	.907e-2	.987	.982	1.64	.655	.987	
<i>C</i>	.186e-1	.650	.778	2.13	1.35	.650	1.48

Componente relativa all'errore nella stima dei coefficienti calcolata con simulazione analitica e incrementi a tutti i coefficienti pari a $\Delta\hat{a}_k = 10^{-3}\hat{a}_k$.

	<i>AUX</i>	<i>I</i>	<i>W1</i>	<i>Y</i>	<i>P</i>	<i>K</i>	<i>C</i>
<i>AUX</i>	.227e-3						
<i>I</i>	.942e-2	.975					
<i>W1</i>	.107e-1	.989	1.43				
<i>Y</i>	.268e-1	1.69	1.80	3.74			
<i>P</i>	.161e-1	.701	.377	1.93	1.56		
<i>K</i>	.942e-2	.975	.989	1.69	.701	.975	
<i>C</i>	.174e-1	.715	.815	2.05	1.23	.715	1.33

Componente relativa all'errore nella stima dei coefficienti calcolata con simulazione analitica e incrementi a tutti i coefficienti pari a $\Delta\hat{a}_k = 10^{-4}\hat{a}_k$.

	<i>AUX</i>	<i>I</i>	<i>W1</i>	<i>Y</i>	<i>P</i>	<i>K</i>	<i>C</i>
<i>AUX</i>	.227e-3						
<i>I</i>	.946e-2	.974					
<i>W1</i>	.107e-1	.990	1.43				
<i>Y</i>	.267e-1	1.70	1.81	3.74			
<i>P</i>	.160e-1	.706	.379	1.93	1.55		
<i>K</i>	.946e-2	.974	.990	1.70	.706	.974	
<i>C</i>	.173e-1	.722	.820	2.04	1.22	.722	1.32

Componente relativa all'errore nella stima dei coefficienti calcolata con simulazione analitica e incrementi a tutti i coefficienti pari a $\Delta\hat{a}_k = 10^{-6}\hat{a}_k$.

	<i>AUX</i>	<i>I</i>	<i>W1</i>	<i>Y</i>	<i>P</i>	<i>K</i>	<i>C</i>
<i>AUX</i>	.227e-3						
<i>I</i>	.946e-2	.974					
<i>W1</i>	.107e-1	.990	1.43				
<i>Y</i>	.267e-1	1.70	1.81	3.74			
<i>P</i>	.160e-1	.706	.379	1.93	1.55		
<i>K</i>	.946e-2	.974	.990	1.70	.706	.974	
<i>C</i>	.173e-1	.722	.820	2.04	1.22	.722	1.32

Componente relativa all'errore nella stima dei coefficienti calcolata con simulazione analitica e incrementi a tutti i coefficienti pari a $\Delta\hat{a}_k = 10^{-8}\hat{a}_k$.

	<i>AUX</i>	<i>I</i>	<i>W1</i>	<i>Y</i>	<i>P</i>	<i>K</i>	<i>C</i>
<i>AUX</i>	.227e-3						
<i>I</i>	.946e-2	.974					
<i>W1</i>	.107e-1	.990	1.43				
<i>Y</i>	.267e-1	1.70	1.81	3.74			
<i>P</i>	.160e-1	.706	.379	1.93	1.55		
<i>K</i>	.946e-2	.974	.990	1.70	.706	.974	
<i>C</i>	.173e-1	.722	.820	2.04	1.22	.722	1.32

Componente relativa all'errore nella stima dei coefficienti calcolata con simulazione analitica e incrementi a tutti i coefficienti pari a $\Delta\hat{a}_k = 10^{-10}\hat{a}_k$.

	<i>AUX</i>	<i>I</i>	<i>W1</i>	<i>Y</i>	<i>P</i>	<i>K</i>	<i>C</i>
<i>AUX</i>	.227e-3						
<i>I</i>	.946e-2	.974					
<i>W1</i>	.107e-1	.990	1.43				
<i>Y</i>	.267e-1	1.70	1.81	3.74			
<i>P</i>	.160e-1	.706	.379	1.93	1.55		
<i>K</i>	.946e-2	.974	.990	1.70	.706	.974	
<i>C</i>	.173e-1	.722	.820	2.04	1.22	.722	1.32

Componente relativa all'errore nella stima dei coefficienti calcolata con simulazione analitica e incrementi a tutti i coefficienti pari a $\Delta\hat{a}_k = 10^{-11}\hat{a}_k$.

	<i>AUX</i>	<i>I</i>	<i>W1</i>	<i>Y</i>	<i>P</i>	<i>K</i>	<i>C</i>
<i>AUX</i>	.226e-3						
<i>I</i>	.945e-2	.974					
<i>W1</i>	.107e-1	.990	1.43				
<i>Y</i>	.267e-1	1.70	1.81	3.74			
<i>P</i>	.160e-1	.706	.378	1.93	1.55		
<i>K</i>	.945e-2	.974	.990	1.70	.706	.974	
<i>C</i>	.173e-1	.722	.819	2.04	1.22	.722	1.32

Componente relativa all'errore nella stima dei coefficienti calcolata con simulazione analitica e incrementi a tutti i coefficienti pari a $\Delta\hat{a}_k = 10^{-12}\hat{a}_k$.

	<i>AUX</i>	<i>I</i>	<i>W1</i>	<i>Y</i>	<i>P</i>	<i>K</i>	<i>C</i>
<i>AUX</i>	.224e-3						
<i>I</i>	.940e-2	.976					
<i>W1</i>	.106e-1	.990	1.43				
<i>Y</i>	.265e-1	1.69	1.80	3.71			
<i>P</i>	.159e-1	.703	.372	1.92	1.54		
<i>K</i>	.940e-2	.976	.990	1.69	.703	.976	
<i>C</i>	.171e-1	.718	.808	2.02	1.21	.718	1.31

Componente relativa all'errore nella stima dei coefficienti calcolata con simulazione analitica e incrementi a tutti i coefficienti pari a $\Delta\hat{a}_k = 10^{-13}\hat{a}_k$.

	<i>AUX</i>	<i>I</i>	<i>W1</i>	<i>Y</i>	<i>P</i>	<i>K</i>	<i>C</i>
<i>AUX</i>	.209e-3						
<i>I</i>	.914e-2	.993					
<i>W1</i>	.982e-2	1.00	1.41				
<i>Y</i>	.250e-1	1.70	1.74	3.61			
<i>P</i>	.152e-1	.696	.339	1.87	1.53		
<i>K</i>	.914e-2	.993	1.00	1.70	.696	.993	
<i>C</i>	.160e-1	.703	.761	1.92	1.16	.703	1.23

Componente relativa all'errore nella stima dei coefficienti calcolata con simulazione analitica e incrementi a tutti i coefficienti pari a $\Delta \hat{a}_k = 10^{-14} \hat{a}_k$.

	<i>AUX</i>	<i>I</i>	<i>W1</i>	<i>Y</i>	<i>P</i>	<i>K</i>	<i>C</i>
<i>AUX</i>	.974e-3						
<i>I</i>	.532e-2	.890					
<i>W1</i>	-.516e-2	1.01	1.56				
<i>Y</i>	.880e-2	1.80	2.16	4.57			
<i>P</i>	.140e-1	.792	.601	2.41	1.81		
<i>K</i>	.532e-2	.890	1.01	1.80	.792	.890	
<i>C</i>	.707e-1	.451	-.293	.835	1.13	.451	5.15

8.4. Un modello IS-LM per l'economia italiana

Come ulteriore esempio di modello non lineare, consideriamo in questo paragrafo il modello IS - LM descritto in Sampoli (1986) e, con leggere varianti, in Lorenzoni (1986). Si tratta di un adattamento, all'economia italiana, del modello proposto, per l'economia americana, in Klein, Doud e Sojo (1985).

$$(8.4.1) \quad \left[\begin{array}{l} \frac{C_t}{PIL_t} = a_1 R_t + a_2 \sum_{k=0}^3 \left[\frac{4-k}{4} \frac{PIL_{t-k} - DISP_{t-k}}{PIL_{t-k}} \right] + u_{1,t} \\ \frac{I_t}{PIL_t} = a_3 + a_4 \left[R_t + \frac{3}{4} R_{t-1} + \frac{1}{2} R_{t-2} + \frac{1}{4} R_{t-3} \right] + \\ \quad + a_5 \sum_{k=0}^3 \left[\frac{4-k}{4} \frac{PIL_{t-k}}{PIL_{t-k-1}} \right] + a_6 D75_t + u_{2,t} \\ \frac{M_t}{PIL_t} = a_7 + a_8 \sum_{k=0}^3 \left[\frac{4-k}{4} \frac{PIL_{t-k}}{PIL_{t-k-1}} \right] + u_{3,t} \\ VCM_t = a_9 + a_{10} (R_t - Rb_t) + a_{11} VCM_{t-1} + u_{4,t} \\ VCM_t = \frac{PIL_t}{M1_t} \\ DISP_t = ALD_t \times PIL_t + ALI_t \times C_t - TRASF_t \\ PIL_t = C_t + I_t + G_t + X_t - M_t \end{array} \right.$$

Le variabili endogene sono 7 (i valori storici sono riportati nella tabella 24): C_t = consumi delle famiglie, I_t = investimenti privati, M_t = importazioni di beni e servizi, VCM_t = velocità di circolazione della moneta, R_t = tasso di interesse sugli impieghi bancari, $DISP_t$ = imposte dirette + imposte indirette - trasferimenti alle famiglie, PIL_t = prodotto interno lordo.

Le variabili esogene (i valori storici sono riportati nella tabella 25) sono 8: $D75_t$ = variabile *dummy* per l'equazione degli investimenti (non

riportata in tabella; vale 1 nel 1975, zero negli altri anni), R_b = tasso di interesse sui depositi in conto corrente, $M1_t$ = liquidità primaria, ALD_t = aliquota media imposte dirette, ALI_t = aliquota media imposte indirette, $TRASF_t$ = trasferimenti alle famiglie, G_t = spesa pubblica, X_t = esportazioni di beni e servizi.

Per applicare le tecniche analitiche del paragrafo 6.1, risulta conveniente introdurre tre variabili endogene ausiliarie ($CPIL_t$, $IPIL_t$ e $MPIL_t$) e tre equazioni definizionali. I valori storici delle tre nuove endogene si ricavano dalla tabella 24, dividendo i valori di C , I e M per i corrispondenti valori di PIL . Ordiniamo le 10 variabili endogene risultanti nel modo seguente

$$(8.4.2) \quad y_t = \begin{bmatrix} CPIL_t \\ IPIL_t \\ MPIL_t \\ VCM_t \\ R_t \\ DISP_t \\ PIL_t \\ M_t \\ I_t \\ C_t \end{bmatrix}$$

e riportiamo in (8.4.3) il modello così modificato. Si noti che sul lato sinistro di due equazioni compare la medesima variabile endogena, VCM_t . Se si volesse risolvere il modello con la tecnica di Gauss - Seidel, occorrerebbe rendere esplicita, sul lato sinistro della prima delle due equazioni, la variabile endogena R_t (un problema analogo si presenterebbe se si volesse risolvere, con la stessa tecnica, anche il modello lineare del paragrafo 8.2, dove la variabile $y_{1,t}$ compare sul lato sinistro delle prime due equazioni). La rappresentazione (8.4.3) permette, comunque, l'applicazione delle tecniche analitiche del paragrafo 6.1, una volta calcolata, con tecniche numeriche, la soluzione del sistema nel periodo di previsione.

$$\begin{aligned}
 (8.4.3) \quad & CPIL_t = a_1 R_t + a_2 \sum_{k=0}^3 \left[\frac{4-k}{4} \frac{PIL_{t-k} - DISP_{t-k}}{PIL_{t-k}} \right] + u_{1,t} \\
 & IPIL_t = a_3 + a_4 \left[R_t + \frac{3}{4} R_{t-1} + \frac{1}{2} R_{t-2} + \frac{1}{4} R_{t-3} \right] + \\
 & \quad + a_5 \sum_{k=0}^3 \left[\frac{4-k}{4} \frac{PIL_{t-k}}{PIL_{t-k-1}} \right] + a_6 D75_t + u_{2,t} \\
 & MPIL_t = a_7 + a_8 \sum_{k=0}^3 \left[\frac{4-k}{4} \frac{PIL_{t-k}}{PIL_{t-k-1}} \right] + u_{3,t} \\
 & VCM_t = a_9 + a_{10} (R_t - Rb_t) + a_{11} VCM_{t-1} + u_{4,t} \\
 & VCM_t = \frac{PIL_t}{M1_t} \\
 & DISP_t = ALD_t \times PIL_t + ALI_t \times C_t - TRASF_t \\
 & PIL_t = C_t + I_t + G_t + X_t - M_t \\
 & M_t = MPIL_t \times PIL_t \\
 & I_t = IPIL_t \times PIL_t \\
 & C_t = CPIL_t \times PIL_t
 \end{aligned}$$

Per calcolare analiticamente la matrice di covarianza della componente di errore dovuta agli errori nella stima dei coefficienti, si calcolano le due matrici jacobiane sul lato destro della equazione (6.1.3). Per la prima matrice conviene indicare, per semplicità di notazione, con $\hat{P}2_h$, $\hat{P}4_h$, $\hat{P}5_h$ e $\hat{P}8_h$ i valori delle variabili che, nella forma strutturale del modello, moltiplicano i coefficienti a_2 , a_4 , a_5 e a_8 , nel periodo di previsione, h (al solito, per le endogene correnti si considera il valore calcolato in previsione).

$$(8.4.4) \quad \begin{cases} \hat{P}2_h = \frac{\hat{P}IL_h - \hat{DISP}_h}{\hat{P}IL_h} + \sum_{k=1}^3 \left[\frac{4-k}{4} \frac{\hat{P}IL_{h-k} - \hat{DISP}_{h-k}}{\hat{P}IL_{h-k}} \right] \\ \hat{P}4_h = \hat{R}_h + \frac{3}{4}R_{h-1} + \frac{1}{2}R_{h-2} + \frac{1}{4}R_{h-3} \\ \hat{P}5_h = \hat{P}8_h = \frac{\hat{P}IL_h}{\hat{P}IL_{h-1}} + \sum_{k=1}^3 \left[\frac{4-k}{4} \frac{\hat{P}IL_{h-k}}{\hat{P}IL_{h-k-1}} \right]. \end{cases}$$

Avremo, allora

$$(8.4.5) \quad \left[\frac{\partial f}{\partial a'} \right]_{(\hat{y}_h, x_h, \hat{a})} =$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{R}_h & \hat{P}2_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \hat{P}4_h & \hat{P}5_h & D75_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \hat{P}8_h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \hat{R}_h - Rb_h & VCM_{h-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per la seconda matrice avremo

$$(8.4.6) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{y}_h'} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -a_1 & \frac{a_2}{\overline{PIL}_h} & \frac{-a_2 \overline{DISP}_h}{\overline{PIL}_h^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a_4 & 0 & \frac{-a_5}{\overline{PIL}_{h-1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-a_8}{\overline{PIL}_{h-1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{\overline{M1}_h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\overline{ALD}_h & 0 & 0 & -\overline{ALI}_h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -\overline{PIL}_h & 0 & 0 & 0 & -\overline{MPIL}_h & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\overline{PIL}_h & 0 & 0 & 0 & 0 & -\overline{IPIL}_h & 0 & 1 & 0 \\ -\overline{PIL}_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\overline{CPIL}_h & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La stima e' relativa al periodo 1964-1983, ed e' stata ottenuta applicando il metodo delle variabili strumentali ad informazione limitata, in versione iterativa, IIV (lo stesso metodo di stima impiegato per il modello del paragrafo 8.2). I valori delle variabili strumentali,

ad ogni iterazione, vengono calcolati con simulazione deterministica del modello, impiegando i coefficienti stimati nella iterazione precedente.

La stima dei coefficienti strutturali (vettore \hat{a}) e' riportata in tabella 26, mentre la stima della matrice di covarianza asintotica dei coefficienti strutturali, $\hat{\Psi}/T$, e' riportata in tabella 27. La tabella 28 riporta la stima della matrice di covarianza dei disturbi strutturali ($\hat{\Sigma}$; si tratterebbe di una matrice di dimensioni 10×10 , ma viene riportata solo la sottomatrice 4×4 diversa da zero).

La previsione uniperiodale e' relativa all'anno 1984, ed i risultati sono riportati in tabella 29.

La matrice di varianza - covarianza della componente del vettore degli errori di previsione dovuta all'errore nella stima dei coefficienti strutturali ($\hat{y}_h - \bar{y}_h$) e' stata ottenuta analiticamente, calcolando le matrici (8.4.5) e (8.4.6) in corrispondenza della soluzione del sistema nell'anno di previsione (\hat{y}_h, x_h, \hat{a}).

La matrice di varianza - covarianza della componente di errore dovuta ai disturbi strutturali e' stata calcolata mediante simulazione stocastica, con variabili di controllo (paragrafo 6.5). L'elevato numero di replicazioni (10^6) garantisce la correttezza dei risultati numerici, almeno fino al numero di cifre decimali riportato nella tabella 29. Con lo stesso esercizio di simulazione stocastica e' stata anche calcolata, per ogni variabile, la media condizionata della componente dell'errore di previsione dovuta ai disturbi strutturali (\tilde{m}_R , eq. 6.5.8). Anche in questo modello, per ogni variabile, tale media risulta essere molto piccola rispetto al valore della variabile stessa.

Tabella 24

Valori storici della variabili endogene

	<i>VCM</i>	<i>R</i>	<i>DISP</i>	<i>PIL</i>	<i>M</i>	<i>I</i>	<i>C</i>
1960	3.08764	6.87	1801.	23207.	3232.	5168.	14788.
1961	2.95661	6.60	1942.	25810.	3595.	5976.	16179.
1962	2.83339	6.39	2181.	28998.	4150.	6747.	18243.
1963	2.85888	7.06	2119.	33215.	5148.	7680.	21292.
1964	2.90666	7.59	2465.	36360.	4975.	7419.	23152.
1965	2.69421	7.75	2097.	39124.	5100.	6941.	24883.
1966	2.57213	7.55	2159.	42391.	5928.	7365.	27472.
1967	2.45868	7.29	2842.	46695.	6777.	8461.	30299.
1968	2.38301	7.26	2868.	50614.	7194.	9130.	32273.
1969	2.28541	7.52	3086.	55876.	8693.	10960.	35366.
1970	2.02165	9.15	2798.	62883.	10431.	13076.	39840.
1971	1.85379	9.03	2495.	68510.	11235.	12932.	43249.
1972	1.73051	7.88	1892.	75124.	12979.	13769.	47585.
1973	1.66582	8.31	1834.	89746.	18100.	19928.	56584.
1974	1.86090	14.22	2311.	110719.	29053.	27376.	70197.
1975	1.87850	15.08	-287.	125378.	27832.	22906.	81446.
1976	1.96030	17.33	2615.	156657.	39843.	33923.	99504.
1977	1.95580	18.58	6848.	190083.	46519.	37323.	120329.
1978	1.80872	16.00	8055.	222254.	52559.	40593.	139902.
1979	1.78012	15.43	9363.	270198.	70262.	52656.	169396.
1980	1.96773	19.13	18451.	338743.	92852.	78649.	212488.
1981	2.11975	21.83	19093.	401579.	112348.	77991.	254661.
1982	2.12458	21.80	26194.	470484.	127028.	84944.	299470.
1983	2.22880	19.58	35367.	538998.	133657.	85451.	343981.
1984	2.29435	17.73	43161.	612112.	162203.	102860.	388869.

Tabella 25

Valori storici della variabili esogene

	<i>Rb</i>	<i>M1</i>	<i>ALD</i>	<i>ALI</i>	<i>TRASF</i>	<i>G</i>	<i>X</i>
1960	2.37	7516.1	.05503	.18995	2285.	3677.	2806.
1961	2.48	8729.6	.05196	.19111	2491.	4054.	3196.
1962	3.02	10234.4	.05787	.18856	2937.	4592.	3566.
1963	3.03	11618.2	.05591	.17899	3549.	5462.	3929.
1964	3.19	12509.2	.06128	.18189	3974.	6206.	4558.
1965	3.44	14521.5	.06313	.18113	4880.	6962.	5438.
1966	3.63	16480.9	.06339	.17600	5363.	7438.	6044.
1967	3.79	18991.9	.06129	.18492	5623.	8061.	6651.
1968	3.99	21239.5	.06546	.18405	6385.	8705.	7700.
1969	4.15	24449.0	.06439	.18085	6908.	9365.	8878.
1970	4.98	31104.8	.05637	.17641	7775.	10413.	9985.
1971	4.66	36956.7	.05859	.17214	8964.	12422.	11142.
1972	4.20	43411.4	.06271	.16024	10444.	14037.	12712.
1973	4.48	53875.1	.06015	.15524	12348.	16093.	15241.
1974	8.10	59497.7	.05993	.15485	15194.	19328.	22871.
1975	7.53	66743.7	.06673	.13459	19616.	22545.	26313.
1976	10.68	79914.9	.07670	.15096	24421.	27188.	35885.
1977	12.00	97189.3	.08589	.16193	28963.	33322.	45628.
1978	10.37	122879.0	.10017	.15988	36577.	40222.	54096.
1979	10.23	151786.0	.09786	.14963	42426.	50051.	68357.
1980	11.71	172149.0	.11155	.16061	53465.	63322.	77136.
1981	13.75	189446.0	.12768	.15324	71204.	82983.	98292.
1982	15.36	221448.0	.14097	.15920	87795.	99288.	113810.
1983	13.87	241833.0	.15364	.17560	107837.	116455.	126768.
1984	12.56	266791.0	.15251	.17860	119649.	133361.	149225.

Tabella 26

Stima dei coefficienti strutturali. Metodo iterativo delle variabili strumentali ad informazione limitata. Periodo di stima 1964-1983.

$\hat{a}_1 = -.0012361$	$\hat{a}_2 = .272086$		
$\hat{a}_3 = -.615946$	$\hat{a}_4 = -.0028573$	$\hat{a}_5 = .312971$	$\hat{a}_6 = -.0270261$
$\hat{a}_7 = -1.03119$	$\hat{a}_8 = .430120$		
$\hat{a}_9 = -1.21146$	$\hat{a}_{10} = .153429$	$\hat{a}_{11} = 1.17748$	

Tabella 27

$\hat{\Psi}/T \times 10^8$: stima della matrice di covarianza asintotica degli 11 coefficienti strutturali incogniti del modello. La matrice (simmetrica) e' rappresentata a blocchi.

Covarianze tra i coefficienti della equazione 1

	\hat{a}_1	\hat{a}_2
\hat{a}_1	33.0498	
\hat{a}_2	-177.988	1094.58

Covarianze tra i coefficienti delle equazioni 2 e 1

	\hat{a}_1	\hat{a}_2
\hat{a}_3	-9.75191	53.9918
\hat{a}_4	.086461	-.468869
\hat{a}_5	2.47212	-12.8360
\hat{a}_6	-.074911	.460977

Covarianze tra i coefficienti della equazione 2

	\hat{a}_3	\hat{a}_4	\hat{a}_5	\hat{a}_6
\hat{a}_3	742778.			
\hat{a}_4	2610.44	13.2022		
\hat{a}_5	-286257.	-1049.48	110848.	
\hat{a}_6	18773.8	71.6870	-7472.56	10401.6

Covarianze tra i coefficienti delle equazioni 3 e 1

	\hat{a}_1	\hat{a}_2
\hat{a}_7	-92.5894	505.872
\hat{a}_8	32.1958	-172.576

Covarianze tra i coefficienti delle equazioni 3 e 2

	\hat{a}_3	\hat{a}_4	\hat{a}_5	\hat{a}_6
\hat{a}_7	212382.	0.0	-73721.7	0.0
\hat{a}_8	-73721.7	0.0	25643.8	0.0

Covarianze tra i coefficienti della equazione 3

	\hat{a}_7	\hat{a}_8
\hat{a}_7	567101.	
\hat{a}_8	-196851.	68473.9

Covarianze tra i coefficienti delle equazioni 4 e 1

	\hat{a}_1	\hat{a}_2
\hat{a}_9	1893.05	-11003.6
\hat{a}_{10}	-282.296	1520.64
\hat{a}_{11}	-202.737	1118.03

Covarianze tra i coefficienti delle equazioni 4 e 2

	\hat{a}_3	\hat{a}_4	\hat{a}_5	\hat{a}_6
\hat{a}_9	-301930.	-1739.33	124074.	4440.16
\hat{a}_{10}	3055.38	114.338	-2273.79	-184.197
\hat{a}_{11}	134333.	536.146	-52392.4	-1627.64

Covarianze tra i coefficienti delle equazioni 4 e 3

	\hat{a}_7	\hat{a}_8
\hat{a}_9	93834.8	-30912.3
\hat{a}_{10}	-50554.5	17585.2
\hat{a}_{11}	80137.4	-27875.5

Covarianze tra i coefficienti della equazione 4

	\hat{a}_9	\hat{a}_{10}	\hat{a}_{11}
\hat{a}_9	47889100.		
\hat{a}_{10}	-3813170.	330841.	
\hat{a}_{11}	-13108900.	982586.	3750140.

Tabella 28

Stima della matrice di covarianza dei disturbi strutturali ($\hat{\Sigma} \times 10^5$). La matrice ha dimensioni 10×10 . Il primo blocco, di dimensioni 4×4 (simmetrico), e' rappresentato in tabella; tutti gli altri elementi sono uguali a zero.

	<i>CPIL</i>	<i>IPIL</i>	<i>MPIL</i>	<i>VCM</i>
<i>CPIL</i>	15.6026			
<i>IPIL</i>	.131732	9.40266		
<i>MPIL</i>	.458577	8.89467	23.7505	
<i>VCM</i>	-35.9577	37.6963	99.3463	2288.01

Tabella 29

Modello IS - LM per l'economia italiana. Stima delle matrici di covarianza delle due componenti dell'errore di previsione al 1984.

Componente relativa all'errore nella stima dei coefficienti

	<i>CPIL</i>	<i>IPIL</i>	<i>MPIL</i>	<i>VCM</i>	<i>R</i>	<i>DISP</i>
<i>CPIL</i>	.147e-4					
<i>IPIL</i>	.181e-5	.974e-4				
<i>MPIL</i>	.923e-5	.533e-4	.366e-4			
<i>VCM</i>	.375e-4	.237e-3	.134e-3	.726e-3		
<i>R</i>	.243e-3	.268e-3	.407e-4	.243e-2	.235	
<i>DISP</i>	4.26	16.8	10.4	55.0	197.	.432e+7
<i>PIL</i>	10.0	63.3	35.8	194.	649.	.147e+8
<i>M</i>	7.92	47.0	30.6	126.	166.	.968e+7
<i>I</i>	2.63	70.3	38.7	177.	265.	.127e+8
<i>C</i>	15.3	40.0	27.8	142.	550.	.117e+8

	<i>PIL</i>	<i>M</i>	<i>I</i>	<i>C</i>
<i>PIL</i>	.517e+8			
<i>M</i>	.335e+8	.264e+8		
<i>I</i>	.473e+8	.344e+8	.510e+8	
<i>C</i>	.380e+8	.255e+8	.306e+8	.329e+8

Componente relativa ai disturbi strutturali

	<i>CPIL</i>	<i>IPIL</i>	<i>MPIL</i>	<i>VCM</i>	<i>R</i>	<i>DISP</i>
<i>CPIL</i>	.116e-3					
<i>IPIL</i>	.468e-4	.178e-3				
<i>MPIL</i>	.964e-4	.143e-3	.199e-3			
<i>VCM</i>	.343e-3	.421e-3	.212e-3	.285e-2		
<i>R</i>	.310e-2	-.143e-2	-.343e-2	.264e-1	1.19	
<i>DISP</i>	36.9	34.6	25.6	238.	.219e + 4	.207e + 8
<i>PIL</i>	91.4	112.	56.6	761.	.704e + 4	.634e + 8
<i>M</i>	79.9	114.	136.	297.	-623.	.297e + 8
<i>I</i>	42.9	128.	97.9	377.	161.	.311e + 8
<i>C</i>	128.	98.1	94.9	681.	.625e + 4	.619e + 8

	<i>PIL</i>	<i>M</i>	<i>I</i>	<i>C</i>
<i>PIL</i>	.203e + 9			
<i>M</i>	.792e + 8	.102e + 9		
<i>I</i>	.100e + 9	.828e + 8	.949e + 8	
<i>C</i>	.182e + 9	.985e + 8	.885e + 8	.192e + 9

Valori calcolati delle endogene (previsioni), valori osservati *ex-post*, stima dello scarto quadratico medio delle previsioni e media condizionata degli errori di previsione.

	Valore calcolato	Valore osservato	Stima scarto quad. medio	Media condiz. dell'errore
<i>CPIL</i>	.6138	.6353	.0114	-.58e-6
<i>IPIL</i>	.1498	.1680.	.0166	-.00012
<i>MPIL</i>	.2161	.2650	.0153	-.00019
<i>VCM</i>	2.341	2.294	.0598	-.00088
<i>R</i>	18.61	17.73	1.196	-.00571
<i>DISP</i>	44046.	43161.	5005.	-77.7
<i>PIL</i>	624469.	612112.	15956.	-234.
<i>M</i>	134973.	162203.	11337.	-224.
<i>I</i>	93541.	102860.	12076.	-222.
<i>C</i>	383315.	388869.	14984.	-235.

8.5. Il modello ISPE per l'economia italiana

I metodi descritti nel capitolo 6 sono stati applicati al modello dell'economia italiana sviluppato all'Istituto di Studi per la Programmazione Economica (ISPE, Roma; per una descrizione dettagliata si veda Sartori, 1978). La versione del modello, utilizzata per questi esperimenti, e' sostanzialmente quella presentata in Bianchi et alii (1982), ad eccezione del valore dei parametri, ottenuti con un diverso metodo di stima. Il modello consiste di 49 equazioni: 19 stocastiche, 15 definizionali e 15 equazioni definizionali "tecniche" che permettono di rendere tutte le equazioni stocastiche lineari nei coefficienti. Le equazioni possono essere raggruppate nei seguenti settori: domanda, offerta, occupazione, costo del lavoro, prezzi impliciti e pubblica amministrazione. Nella specificazione di alcune equazioni sono coinvolti rapporti, prodotti e logaritmi di variabili endogene, per cui il modello risulta essere non lineare nelle variabili.

Le stime dei 75 coefficienti strutturali incogniti del modello (vettore \hat{a}), della loro matrice di covarianza ($\hat{\Psi}/T$, di dimensioni 75×75) e della matrice di covarianza dei disturbi strutturali ($\hat{\Sigma}$, la cui sottomatrice diversa da zero ha dimensioni 19×19) sono state ottenute applicando al periodo 1955-1976 il metodo di stima delle variabili strumentali ad informazione limitata, in versione iterativa, IIV. Si tratta dello stesso metodo di stima impiegato per i modelli dei paragrafi 8.2 e 8.4. I valori delle variabili strumentali, ad ogni iterazione, vengono calcolati con simulazione deterministica del modello, impiegando i coefficienti stimati nella iterazione precedente. A convergenza raggiunta, le stime dei coefficienti non dipendono piu' dai valori dei coefficienti impiegati nella simulazione effettuata nella prima iterazione.

Le equazioni strutturali del modello, come pure i valori storici delle variabili e le stime dei parametri della forma strutturale, non vengono qui riportate per ragioni di spazio.

Nella tabella 30, per le principali variabili endogene (la cui descrizione e' fornita in tabella 31), sono presentati i risultati sperimentali relativi alle previsioni per il 1977 (primo anno al di fuori del periodo campionario di stima). Anche per questo modello si tratta

di previsioni *ex-post*; sono quindi disponibili i valori "veri" delle variabili endogene, quindi anche gli errori di previsione possono essere osservati *ex-post* e confrontati con le stime dei loro scarti quadratici medi, ottenute con i metodi descritti nel capitolo 6.

Tutti i risultati sono riportati in forma percentuale, rapportati al valore calcolato (previsione) di ogni singola endogena. Per ogni variabile endogena sono riportati i seguenti risultati.

- 1) Errore di previsione osservato *ex-post* (valore calcolato meno valore osservato).
- 2) Stima dello scarto quadratico medio dell'errore di previsione.
- 3) Stima dello scarto quadratico medio della componente dovuta ai soli errori nei coefficienti (radice quadrata del termine diagonale della matrice $\hat{G}_h(\hat{\Psi}/T)\hat{G}_h'$).
- 4) Stima dello scarto quadratico medio della componente dell'errore di previsione dovuta ai soli disturbi strutturali, calcolata come scarto quadratico medio sui risultati di 10^4 repliche di simulazione stocastica con variabili di controllo (eq. 6.5.22).
- 5) Media condizionata della componente dovuta ai disturbi strutturali u_h . Tale media è stata calcolata sia dalle 10^4 repliche di simulazione stocastica con variabili di controllo (eq. 6.5.8), sia da 10^4 coppie di simulazioni stocastiche con variabili antitetiche (eq. 6.4.1). I risultati dei due metodi di calcolo coincidono fino al numero di cifre decimali riportate nella tabella 30. Anche questa media è riportata in valore percentuale, rapportata al valore calcolato della variabile corrispondente.

Il calcolo numerico della matrice delle derivate prime, $\hat{G}_h = \partial \hat{y}_h / \partial \hat{a}'$, necessarie al calcolo dei valori riportati nella seconda colonna di tabella 30, è stato fatto scegliendo una tolleranza relativa pari a 10^{-13} nell'algoritmo di soluzione di Gauss-Seidel. Sono stati fatti diversi tentativi per la scelta degli incrementi da assegnare ad ogni coefficiente strutturale per calcolare i rapporti incrementali, analogamente all'esercizio riportato in tabella 23. I risultati rimangono inalterati, nelle prime 3 - 4 cifre significative, se ad ogni coefficiente strutturale

assegnamo un incremento $\Delta\hat{a}_k$ compreso tra $10^{-4}\hat{a}_k$ e $10^{-6}\hat{a}_k$). Ognuna di queste prove richiede pochi secondi di tempo di calcolo su un calcolatore *IBM/4341*.

Le 10^4 replicazioni di simulazione stocastica (con variabili antitetiche) utilizzate per calcolare i valori nella quarta e quinta colonna di tabella 30, hanno richiesto circa 20 minuti di tempo di calcolo (per i valori della quarta colonna, pero', sarebbero sufficienti poche centinaia di replicazioni). Il calcolo dei valori della quinta colonna della tabella (le medie), con 10^4 coppie di simulazioni con variabili antitetiche, ha richiesto un tempo di calcolo circa doppio.

Le considerazioni che si possono ricavare dai risultati sperimentali sono *qualitativamente* simili a quelle ricavate dai modelli precedenti.

- 1) L'errore di previsione al 1977, osservato *ex-post*, e' piu' grande, in valore assoluto, del suo scarto quadratico medio solo per sei delle 26 variabili riportate: *LDI*, *LI*, *PCL*, *PIFIT*, *PVAP* e *TIL*. Per nessuna variabile, l'errore di previsione osservato *ex-post* e' risultato maggiore del doppio del corrispondente scarto quadratico medio.
- 2) La componente dell'errore di previsione al 1977 dovuta all'errore nella stima dei coefficienti ha una varianza minore della componente dovuta ai disturbi strutturali per quasi tutte le variabili. Fanno eccezione le variabili *PVAP* e *TD*.
- 3) La media condizionata della componente dell'errore di previsione dovuta ai disturbi strutturali, pur essendo diversa da zero, e' molto piccola per tutte le variabili. Il valore relativo piu' alto di tale media e' quello della variabile *XT*, ed e' inferiore all'un per mille del valore calcolato di tale variabile.

Tabella 30

Modello ISPE dell'economia italiana 1955-1976. Stime IIV. Previsione al 1977; errori percentuali osservati *ex-post*, stime degli scarti quadratici medi percentuali complessivi e loro componenti.

	Errore % osservato	Sc. quad.% compless.	Sc. quad.% I comp.	Sc. quad.% II comp.	Media% II comp.
<i>CPNCF</i>	.245	1.48	.742	1.28	.003
<i>DXML</i>	-.448	3.50	2.43	2.52	-.022
<i>IAB</i>	-1.59	4.51	2.29	3.89	-.001
<i>IF</i>	.756	3.25	1.90	2.64	-.008
<i>IFIT</i>	2.03	4.88	2.97	3.87	-.013
<i>KOCC</i>	-1.78	2.16	1.24	1.76	-.016
<i>LDI</i>	3.85	2.48	1.01	2.27	-.022
<i>LDT</i>	-.845	1.90	.942	1.64	-.003
<i>LI</i>	2.45	2.11	.873	1.92	-.018
<i>LTAT</i>	-.174	1.11	.602	.935	-.002
<i>MT</i>	2.28	3.43	2.04	2.76	-.056
<i>PCL</i>	2.23	1.60	1.07	1.18	.015
<i>PIAB</i>	.108	2.14	1.41	1.61	-.007
<i>PIFIT</i>	3.67	2.18	1.45	1.63	-.003
<i>PILL</i>	.891	1.48	.964	1.12	.017
<i>PING</i>	-.705	1.96	.929	1.73	-.005
<i>PVAP</i>	1.62	1.60	1.16	1.09	.028
<i>RDP</i>	.351	1.64	1.07	1.25	.033
<i>SUDT</i>	.974	1.98	.955	1.74	.005
<i>SUINE</i>	-.586	2.15	1.29	1.72	.011
<i>TD</i>	-1.37	5.19	3.80	3.53	-.062
<i>TIL</i>	2.47	1.85	1.08	1.50	.022
<i>VAI</i>	-1.78	2.16	1.24	1.76	-.016
<i>VAP</i>	-.888	1.35	.814	1.08	-.014
<i>VAT</i>	-.268	1.55	.941	1.23	-.017
<i>XT</i>	-2.11	4.74	3.07	3.61	-.097

Tabella 31

Modello ISPE: elenco delle principali variabili endogene

<i>CPNCF</i>	- Consumi Privati al Netto delle Imposte Indirette
<i>DXML</i>	- Prezzi Impliciti nelle Esportazioni di Prodotti
<i>IAB</i>	- Investimenti in Abitazioni
<i>IF</i>	- Investimenti Fissi Totali
<i>IFIT</i>	- Investimenti Fissi Privati Non-Residenziali nell'Industria e nel Settore Terziario Privato
<i>KOCC</i>	- Indice di Utilizzazione della Capacita' Produttiva nell'Industria.
<i>LDI</i>	- Occupati Dipendenti nell'Industria
<i>LDT</i>	- Occupati Dipendenti nel Settore Terziario Privato
<i>LI</i>	- Occupati nell'Industria
<i>LTAT</i>	- Occupati nel Settore Terziario Privato
<i>MT</i>	- Importazioni di Merci e Servizi
<i>PCL</i>	- Prezzi Impliciti nei Consumi Privati al Lordo delle Imposte Indirette
<i>PIAB</i>	- Prezzi Impliciti negli Investimenti in Abitazioni
<i>PIFIT</i>	- Prezzi Impliciti negli Investimenti Privati nell'Industria e nel Settore Terziario Privato
<i>PILL</i>	- Prodotto Interno Lordo
<i>PING</i>	- Indice dei Prezzi all'Ingrosso
<i>PVAP</i>	- Prezzi Impliciti nel Prodotto Lordo del Settore Privato
<i>RDP</i>	- Reddito Lordo Disponibile del Settore Privato
<i>SUDT</i>	- Salari e Stipendi per Dipendente nel Settore Privato dei Servizi
<i>SUINE</i>	- Salari e Stipendi per Dipendente nell'Industria al netto dei Contributi Sociali
<i>TD</i>	- Imposte Dirette
<i>TIL</i>	- Imposte Indirette
<i>VAI</i>	- Prodotto Lordo nell'Industria
<i>VAP</i>	- Prodotto Lordo nel Settore Privato
<i>VAT</i>	- Prodotto Lordo nel Settore Privato dei Servizi, escluso il Valore Aggiunto dei Fabbricati
<i>XT</i>	- Esportazioni di Merci e Servizi

**PARTE SECONDA: PREVISIONI
MULTIPERIODALI**

9. MODELLO LINEARE DINAMICO

Se nel modello lineare in forma strutturale (1.1) si distinguono all'interno del vettore di variabili predeterminate le variabili esogene dalle variabili endogene ritardate, otteniamo una rappresentazione del tipo

$$(9.1) \quad Ay_t + Bx_t + Dy_{t-1} = u_t \quad t = 1, 2, \dots, T$$

dove y_t e u_t sono vettori ($m \times 1$) di variabili endogene e di errori casuali al tempo t , x_t e' un vettore ($n \times 1$) di variabili esogene al tempo t , y_{t-1} e' il vettore ($m \times 1$) di variabili endogene ritardate, ed infine A , B e D sono matrici ($m \times m$), ($m \times n$) e ($m \times m$) di coefficienti strutturali. Si assume che i vettori degli errori u_t abbiano le stesse proprieta' gia' ipotizzate nel capitolo 1: siano cioe', nel tempo, indipendenti e identicamente distribuiti, con media zero e matrice di varianza - covarianza, Σ , finita e costante.

Per il modello lineare dinamico la rappresentazione (9.1) e' del tutto generale; con semplici accorgimenti, permette di tener conto anche di variabili endogene ritardate due o piu' periodi. Supponiamo infatti che la variabile y_1 compaia nel modello ritardata di due periodi ($y_{1,t-2}$); si puo' allora allungare il vettore delle variabili endogene introducendo la variabile y_{m+1} ; si aggiunge poi al sistema l'equazione $y_{m+1,t} = y_{1,t-1}$, e finalmente si sostituisce $y_{1,t-2}$ con $y_{m+1,t-1}$ ovunque nel sistema.

In maniera del tutto analoga possono essere trattate le variabili esogene ritardate, formalmente escluse dalla rappresentazione (9.1). Se infatti la variabile x_1 compare nel modello ritardata di un periodo ($x_{1,t-1}$), si puo' ulteriormente allungare il vettore delle variabili endogene

introducendo la variabile y_{m+2} ; si aggiunge poi al sistema l'equazione $y_{m+2,t} = x_{1,t}$, e finalmente si sostituisce $x_{1,t-1}$ con $y_{m+2,t-1}$. Così, ad esempio, l'equazione

$$(9.2) \quad y_{1,t} = a_1 + a_2 y_{1,t-2} + a_3 x_{1,t-1} + u_{1,t}$$

puo' essere rappresentata secondo la (9.1) nel modo seguente

$$(9.3) \quad \begin{cases} y_{1,t} - a_1 - a_2 y_{2,t-1} - a_3 y_{3,t-1} = u_{1,t} \\ y_{2,t} - y_{1,t-1} = 0 \\ y_{3,t} - x_{1,t} = 0. \end{cases}$$

Il modello dell'economia italiana impiegato come esempio (1.2) non contiene variabili endogene ritardate piu' di un periodo, ne' variabili esogene ritardate. Puo' dunque essere rappresentato nella forma (9.1) semplicemente introducendo i vettori

$$(9.4) \quad y_t = \begin{bmatrix} C_t \\ I_t \\ M_t \\ Y_t \end{bmatrix}; \quad x_t = \begin{bmatrix} 1 \\ Z_t \end{bmatrix}; \quad y_{t-1} = \begin{bmatrix} C_{t-1} \\ I_{t-1} \\ M_{t-1} \\ Y_{t-1} \end{bmatrix}$$

e le matrici di coefficienti strutturali

$$(9.5) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & 0 & -a_5 \\ 0 & a_9 - a_8 & 1 & -a_9 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(9.6) \quad B = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 \\ -a_4 & 0 \\ -a_7 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} -a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_6 & 0 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La variabile endogena M non compare mai ritardata nel modello (1.2); la colonna corrispondente nella matrice D (la terza) contiene quindi soltanto zeri.

Analogamente a quanto visto nel capitolo 1, gli elementi incogniti nelle matrici A , B e D si indicano con a_1, a_2, \dots e si suppone di disporre di stime $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots$ consistenti e asintoticamente normali (eq. 1.8 e 1.9).

Introducendo le stime $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots$ nelle matrici A , B e D , si ottengono le corrispondenti matrici \hat{A} , \hat{B} e \hat{D} . I residui della stima delle equazioni strutturali, \hat{u}_t , si ottengono introducendo nel sistema (9.1) le matrici \hat{A} , \hat{B} e \hat{D}

$$(9.7) \quad \hat{u}_t = \hat{A}y_t + \hat{B}x_t + \hat{D}y_{t-1} \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

10. SIMULAZIONE DINAMICA E PREVISIONI MULTIPERIODALI

Siano A ed \hat{A} non singolari. Si indicano con

$$(10.1) \quad \Pi_1 = -A^{-1}B$$

$$(10.2) \quad \Pi_0 = -A^{-1}D$$

le matrici $(m \times n)$ e $(m \times m)$ dei coefficienti di forma ridotta (di dimensioni 4×2 e 4×4 nel modello 1.2), relative alle variabili endogene ritardate e alle variabili esogene, e con

$$(10.3) \quad \hat{\Pi}_1 = -\hat{A}^{-1}\hat{B}$$

$$(10.4) \quad \hat{\Pi}_0 = -\hat{A}^{-1}\hat{D}$$

le stime delle due matrici. La matrice contenente tutti i coefficienti di forma ridotta si indica con

$$(10.5) \quad \Pi = [\Pi_1; \Pi_0] = -A^{-1}[B; D]$$

e la sua stima sarà

$$(10.6) \quad \hat{\Pi} = [\hat{\Pi}_1; \hat{\Pi}_0] = -\hat{A}^{-1}[\hat{B}; \hat{D}].$$

La matrice Π nel modello (1.2) ha dimensioni (4×6) . La matrice dei coefficienti di forma ridotta dello stesso modello, discussa nel capitolo 2 (eq. 2.1, notazione statica), aveva dimensioni (4×5) . La differenza e' dovuta alla presenza, nella matrice Π introdotta in questo capitolo, di una colonna di zeri, corrispondente alla terza colonna della matrice D (eq. 9.6).

Dalla (9.1), premoltiplicando ambo i membri per A^{-1} , si ricava il sistema di equazioni di forma ridotta

$$(10.7) \quad y_t = \Pi_1 x_t + \Pi_0 y_{t-1} + A^{-1} u_t.$$

Ritardando la (10.7) di un periodo, si ottiene

$$(10.8) \quad y_{t-1} = \Pi_1 x_{t-1} + \Pi_0 y_{t-2} + A^{-1} u_{t-1}$$

e sostituendo la (10.8) nella (10.7) si ricava

$$(10.9) \quad y_t = \Pi_1 x_t + \Pi_0 \Pi_1 x_{t-1} + \Pi_0^2 y_{t-2} + A^{-1} u_t + \Pi_0 A^{-1} u_{t-1}.$$

Di nuovo si puo' ritardare la (10.8) di un periodo e sostituire l'espressione di y_{t-2} cosi' ottenuta nella (10.9), e cosi' via. Ripetendo il procedimento fino ad un ritardo massimo di q periodi si ottiene

$$(10.10) \quad y_t = \sum_{r=0}^{q-1} \Pi_0^r \Pi_1 x_{t-r} + \Pi_0^q y_{t-q} + \\ + \sum_{r=0}^{q-1} \Pi_0^r A^{-1} u_{t-r}.$$

La (10.10) fornisce una rappresentazione esplicita del vettore y al tempo t come funzione delle variabili endogene ritardate q periodi, e delle variabili esogene e dei disturbi casuali nei periodi successivi (da $t - q + 1$ a t). Supponiamo ora di utilizzare il modello per fini previsivi,

su piu' periodi di tempo consecutivi (ad esempio gli anni 1980-83 nel caso del modello 1.2). Indicheremo per comodita' con $1, 2, \dots, h$ l'indice del tempo nei periodi di previsione (senza confonderlo con l'indice di tempo $t = 1, 2, \dots, T$ relativo al periodo di stima). Si suppongono noti i valori di tutte le variabili predeterminate che sono, in questo caso, le esogene nei periodi di previsione, x_1, x_2, \dots, x_h , e le endogene ritardate nel periodo iniziale, y_0 . Se potessimo conoscere i valori "veri" dei coefficienti a_1, a_2, \dots (e quindi A, B, D, Π_0 e Π_1), la previsione fornita dal modello sarebbe il *valor medio condizionato*

$$(10.11) \quad \bar{y}_h = \sum_{i=0}^{h-1} \Pi_0^i \Pi_1 x_{h-i} + \Pi_0^h y_0$$

che si ricava dalla (10.10) ponendo uguali al valor medio (zero) i termini di errore.

In realta', non si conoscono i coefficienti a_1, a_2, \dots , ma solo le loro stime $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots$ (e quindi $\hat{A}, \hat{B}, \hat{D}, \hat{\Pi}_0$ e $\hat{\Pi}_1$). La previsione, per l'ultimo periodo, effettivamente fornita dal modello, sara' dunque la *stima del valor medio condizionato*

$$(10.12) \quad \hat{y}_h = \sum_{i=0}^{h-1} \hat{\Pi}_0^i \hat{\Pi}_1 x_{h-i} + \hat{\Pi}_0^h y_0.$$

Invece di applicare la (10.12) direttamente al periodo h , possiamo calcolare ricorsivamente i valori delle endogene nel periodo di previsione

$$(10.13) \quad \begin{cases} \hat{y}_1 = \hat{\Pi}_1 x_1 + \hat{\Pi}_0 y_0 \\ \hat{y}_2 = \hat{\Pi}_1 x_2 + \hat{\Pi}_0 \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_h = \hat{\Pi}_1 x_h + \hat{\Pi}_0 \hat{y}_{h-1} \end{cases}$$

e analogamente il vettore \bar{y}_h della (10.11) puo' essere calcolato ricorsivamente

$$(10.14) \quad \left[\begin{array}{l} \bar{y}_1 = \Pi_1 x_1 + \Pi_0 y_0 \\ \bar{y}_2 = \Pi_1 x_2 + \Pi_0 \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_h = \Pi_1 x_h + \Pi_0 \bar{y}_{h-1}. \end{array} \right.$$

Se la soluzione del modello viene effettuata con tecniche numeriche (ad esempio col metodo di Gauss - Seidel), si giunge allo stesso risultato numerico delle (10.12) o (10.13) effettuando una *simulazione dinamica* dal periodo 1 al periodo h ; $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_h$ rappresentano il *sentiero di simulazione dinamica* nel periodo di previsione.

11. VARIANZA DELLE PREVISIONI: METODO ANALITICO TRADIZIONALE

Se la struttura del modello e' corretta, il valore "vero" delle variabili endogene nell'ultimo periodo di previsione, h , e' dato da:

$$(11.1) \quad y_h = \sum_{i=0}^{h-1} \Pi_0^i \Pi_1 x_{h-i} + \Pi_0^h y_0 + \\ + \sum_{i=0}^{h-1} \Pi_0^i A^{-1} u_{h-i}.$$

Il vettore degli errori di previsione nell'ultimo periodo puo' essere, dunque, rappresentato come segue:

$$(11.2) \quad \hat{y}_h - y_h = (\hat{y}_h - \bar{y}_h) + (\bar{y}_h - y_h) = \\ = \left[\sum_{i=0}^{h-1} (\hat{\Pi}_0^i \hat{\Pi}_1 - \Pi_0^i \Pi_1) x_{h-i} + (\hat{\Pi}_0^h - \Pi_0^h) y_0 \right] - \\ - \left[\sum_{i=0}^{h-1} \Pi_0^i A^{-1} u_{h-i} \right].$$

Supponiamo ora che tutto il periodo di previsione sia esterno al periodo campionario di stima (nel modello utilizzato come esempio, anni successivi al 1979) e che in tale periodo siano noti i valori di tutte le variabili predeterminate $y_0, x_1, x_2, \dots, x_h$. In tal caso, i vettori casuali u_1, u_2, \dots, u_h , che sono per ipotesi indipendenti dai vettori u_t del periodo

di stima, sono anche indipendenti dalle stime $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots$ (ottenute utilizzando i dati del campione che sono, al più, correlati con le u_t del solo periodo campionario); dunque u_1, u_2, \dots, u_h sono anche indipendenti da $\hat{\Pi}_0$ e $\hat{\Pi}_1$. Il vettore degli errori di previsione nel periodo h risulta, pertanto, decomposto nella somma algebrica dei due vettori casuali indipendenti

$$(11.3) \quad \hat{y}_h - \bar{y}_h = \sum_{i=0}^{h-1} (\hat{\Pi}_0^i \hat{\Pi}_1 - \Pi_0^i \Pi_1) x_{h-i} + (\hat{\Pi}_0^h - \Pi_0^h) y_0$$

$$(11.4) \quad \bar{y}_h - y_h = - \sum_{i=0}^{h-1} \Pi_0^i A^{-1} u_{h-i}$$

Il calcolo della matrice di varianza - covarianza della componente (11.4), cioè della componente del vettore degli errori di previsione dovuta alla presenza dei disturbi casuali u_1, u_2, \dots, u_h , non presenta particolari difficoltà. Essendo i vettori u_t indipendenti tra loro, ed avendo ciascuno media zero e matrice di covarianza Σ , la matrice di varianza - covarianza della componente (11.4) è

$$(11.5) \quad \sum_{i=0}^{h-1} [\Pi_0^i A^{-1} \Sigma A^{-1} \Pi_0^{i'}]$$

una stima della quale è, ovviamente, ottenibile come

$$(11.6) \quad \sum_{i=0}^{h-1} [\hat{\Pi}_0^i \hat{A}^{-1} \hat{\Sigma} \hat{A}^{-1} \hat{\Pi}_0^{i'}]$$

dove $\hat{\Sigma}$ viene, a sua volta, calcolata dai residui della stima delle equazioni strutturali (9.7)

$$(11.7) \quad \hat{\Sigma} = T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t \hat{u}_t' =$$

$$= T^{-1} \sum_{t=1}^T [\hat{A}y_t + \hat{B}x_t + \hat{D}y_{t-1}][\hat{A}y_t + \hat{B}x_t + \hat{D}y_{t-1}]'$$

Tutte le matrici presenti nella (11.6) hanno dimensioni $(m \times m)$, ed il calcolo risulta abbastanza agevole anche per modelli di dimensioni medio - grandi. In alternativa, la matrice intermedia $\hat{A}^{-1}\hat{\Sigma}\hat{A}'^{-1}$ puo' essere calcolata come matrice degli errori quadratici medi in una *simulazione statica* del modello sul periodo campionario, come suggerito nel capitolo 3 (equazioni 3.3 e 3.5).

Piu' complesso e' il calcolo della matrice di covarianza della componente (11.3), cioe' della componente del vettore degli errori di previsione dovuta agli errori nella stima dei coefficienti. L'estensione del metodo "*tradizionale*" di Goldberger, Nagar e Odeh (1961, descritto nel paragrafo 3.8) alla previsione multiperiodale con modelli dinamici e' dovuta a Schmidt (1974) (si veda anche Phillips e Wickens, 1978, pp. 381-383 e 461-465; per una estensione ai sistemi di equazioni con disturbi autocorrelati, che non saranno trattati nel seguito, si vedano Baillie, 1981, e Yamamoto, 1980; infine, per una estensione al caso in cui i valori delle esogene si suppongono generati da un processo *ARMA*, si veda Campos, 1986).

11.1. Il metodo di Schmidt

Si indica con w_h il vettore $[(m + hn) \times 1]$ di tutte le variabili che, nell'effettuare le previsioni nei periodi $i = 1, 2, \dots, h$, si considerano note (predeterminate)

$$(11.1.1) \quad w_h = \begin{bmatrix} y_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_h \end{bmatrix}.$$

Si indica poi con H_h la matrice di dimensioni $[m \times (m + hn)]$

$$(11.1.2) \quad H_h = [\Pi_0^h; \Pi_0^{h-1}\Pi_1; \Pi_0^{h-2}\Pi_1; \dots; \Pi_0\Pi_1; \Pi_1]$$

e con \hat{H}_h la sua stima

$$(11.1.3) \quad \hat{H}_h = [\hat{\Pi}_0^h; \hat{\Pi}_0^{h-1}\hat{\Pi}_1; \hat{\Pi}_0^{h-2}\hat{\Pi}_1; \dots; \hat{\Pi}_0\hat{\Pi}_1; \hat{\Pi}_1].$$

La previsione \hat{y}_h (eq. 10.12) puo' ora essere espressa come segue

$$(11.1.4) \quad \hat{y}_h = \hat{H}_h w_h$$

e analogamente il vettore ausiliare \bar{y}_h puo' essere espresso come

$$(11.1.5) \quad \bar{y}_h = H_h w_h.$$

La componente del vettore degli errori di previsione dovuta agli errori nella stima dei coefficienti (11.3) puo' dunque essere rappresentata come segue, applicando il lemma 3.3

$$(11.1.6) \quad \begin{aligned} \hat{y}_h - \bar{y}_h &= (\hat{H}_h - H_h)w_h = \text{vec} [I_m(\hat{H}_h - H_h)w_h] = \\ &= (w_h' \otimes I_m)[\text{vec} \hat{H}_h - \text{vec} H_h] \end{aligned}$$

dove I_m e' la matrice unitaria $(m \times m)$. Dato w_h , il calcolo delle varianze o della matrice di covarianza di $\hat{y}_h - \bar{y}_h$ richiede il calcolo preliminare della matrice di covarianza del vettore $\text{vec} \hat{H}_h - \text{vec} H_h$. Analogamente al metodo descritto nel paragrafo 3.8, si cerchera' di ricavare l'espressione della matrice di varianza-covarianza della distribuzione normale multivariata alla quale converge la distribuzione di $\sqrt{T}(\text{vec} \hat{H}_h - \text{vec} H_h)$ al tendere di T all'infinito.

Ordiniamo tutti gli elementi delle matrici A , B e D in un unico vettore colonna di dimensioni $(2mm + mn) \times 1$ (40×1 nel modello dato)

$$(11.1.7) \quad \gamma = \begin{bmatrix} \text{vec } A \\ \text{vec } B \\ \text{vec } D \end{bmatrix}.$$

Analogamente a (1.9), si avra' per la stima $\hat{\gamma}$ (convergenza in distribuzione)

$$(11.1.8) \quad \sqrt{T} [\hat{\gamma} - \gamma] \xrightarrow{T \rightarrow \infty} N(0, \Phi).$$

La matrice Φ e' del tutto analoga a quella introdotta nel paragrafo 3.8. L'unica differenza consiste nelle dimensioni $(2mm + mn) \times (2mm + mn)$, ed e' dovuta alla introduzione esplicita nel modello di una matrice $m \times m$ di coefficienti per le variabili endogene ritardate (la matrice D). Ad esempio, per il modello (1.2), la matrice Φ ha dimensioni 40×40 ed e' ottenuta con opportune *espansioni* della matrice di covarianza dei 9 coefficienti strutturali incogniti (matrice Ψ , di dimensioni 9×9).

Ordiniamo ora tutti gli elementi della matrice Π in un vettore colonna di dimensioni $(mn + mm) \times 1$, osservando che dalla (10.5) si ricava

$$(11.1.9) \quad \text{vec } \Pi = \begin{bmatrix} \text{vec } \Pi_1 \\ \text{vec } \Pi_0 \end{bmatrix}$$

e ordiniamo in una matrice jacobiana, J , di dimensioni $(mn + mm) \times (2mm + mn)$, le derivate prime degli elementi di $\text{vec } \Pi$ rispetto a tutti gli elementi di A , B e D (cioe' gli elementi del vettore γ). A questo scopo possiamo applicare il metodo descritto nel paragrafo 3.8, con qualche semplice accorgimento. Il vettore (trasposto) contenente tutti i coefficienti strutturali relativi alle variabili

predeterminate era, nel paragrafo 3.8, indicato con $(vec B)'$, ed aveva dimensioni $1 \times mn$; nel contesto del modello dinamico, tale vettore deve essere indicato con $[(vec B)'; (vec D)']$, ed ha dimensioni $1 \times (mn + mm)$. La matrice jacobiana risultante ha la stessa espressione della matrice (3.8.7), con il semplice aggiustamento delle dimensioni della matrice unitaria: I_{n+m} invece di I_n

$$(11.1.10) \quad J = \frac{\partial(vec \Pi)}{\partial \gamma'} = \frac{\partial(vec \Pi)}{\partial [(vec A)'; (vec B)'; (vec D)']} =$$

$$= - [\Pi'; I_{n+m}] \otimes A^{-1}.$$

Analogamente al paragrafo 3.8, la matrice J permette di calcolare la matrice di varianza - covarianza asintotica di $\sqrt{T}(vec \hat{\Pi} - vec \Pi)$, applicando il lemma 3.7, come

$$(11.1.11) \quad \Omega = J \Phi J' = [(\Pi'; I_{n+m}) \otimes A^{-1}] \Phi [(\Pi'; I_{n+m})' \otimes A'^{-1}].$$

Nel contesto del modello dinamico, questo e' soltanto un passaggio intermedio del calcolo. Per completare il calcolo sviluppiamo ora una relazione tra $\sqrt{T}(vec \hat{\Pi} - vec \Pi)$ e $\sqrt{T}(vec \hat{H}_h - vec H_h)$ in forma esplicita. Il procedimento seguente e' stato proposto da Schmidt (1973). Osserviamo innanzitutto che dalla (11.1.2) si ricava

$$(11.1.12) \quad vec H_h = \begin{bmatrix} vec(\Pi_0^h) \\ vec(\Pi_0^{h-1} \Pi_1) \\ vec(\Pi_0^{h-2} \Pi_1) \\ \vdots \\ vec(\Pi_0 \Pi_1) \\ vec(\Pi_1) \end{bmatrix}$$

e quindi

$$(11.1.13) \quad \sqrt{T}(\text{vec } \hat{H}_h - \text{vec } H_h) = \sqrt{T} \begin{bmatrix} \text{vec } (\hat{\Pi}_0^h - \Pi_0^h) \\ \text{vec } (\hat{\Pi}_0^{h-1} \hat{\Pi}_1 - \Pi_0^{h-1} \Pi_1) \\ \text{vec } (\hat{\Pi}_0^{h-2} \hat{\Pi}_1 - \Pi_0^{h-2} \Pi_1) \\ \vdots \\ \text{vec } (\hat{\Pi}_0 \hat{\Pi}_1 - \Pi_0 \Pi_1) \\ \text{vec } (\hat{\Pi}_1 - \Pi_1) \end{bmatrix}.$$

Indichiamo con k il generico esponente di Π_0 nella (11.1.13). Ad eccezione del primo e dell'ultimo, ognuno dei rimanenti $h-1$ vettori (purche' $h \geq 2$), che compongono il vettore (11.1.13), e' rappresentabile come

$$(11.1.14) \quad \sqrt{T} \text{vec } (\hat{\Pi}_0^k \hat{\Pi}_1 - \Pi_0^k \Pi_1)$$

dove l'esponente k assume valori tra 1 e $h-1$. Il vettore (11.1.14) puo' essere rappresentato come

$$(11.1.15) \quad \begin{aligned} \sqrt{T} \text{vec } (\hat{\Pi}_0^k \hat{\Pi}_1 - \Pi_0^k \Pi_1) &= \\ &= \sqrt{T} \text{vec } [(\hat{\Pi}_0^k - \Pi_0^k) \hat{\Pi}_1] + \sqrt{T} \text{vec } [\Pi_0^k (\hat{\Pi}_1 - \Pi_1)] = \\ &= \sqrt{T} \text{vec } [(\hat{\Pi}_0^k - \Pi_0^k) \hat{\Pi}_1] + \sqrt{T} \text{vec } [\Pi_0^k (\hat{\Pi}_1 - \Pi_1) I_n] \end{aligned}$$

dove I_n e' la matrice unitaria $n \times n$.

La matrice $(\hat{\Pi}_0^k - \Pi_0^k)$, che compare nella (11.1.15), puo' essere rappresentata come segue:

$$(11.1.16) \quad \hat{\Pi}_0^k - \Pi_0^k = -\Pi_0^k + \hat{\Pi}_0^k =$$

(si sommano $k-1$ termini identicamente nulli)

$$\begin{aligned}
&= -\Pi_0^k + (\hat{\Pi}_0 \Pi_0^{k-1} - \hat{\Pi}_0 \Pi_0^{k-1}) + (\hat{\Pi}_0^2 \Pi_0^{k-2} - \hat{\Pi}_0^2 \Pi_0^{k-2}) + \\
&+ \dots + (\hat{\Pi}_0^{k-2} \Pi_0^2 - \hat{\Pi}_0^{k-2} \Pi_0^2) + (\hat{\Pi}_0^{k-1} \Pi_0 - \hat{\Pi}_0^{k-1} \Pi_0) + \hat{\Pi}_0^k =
\end{aligned}$$

(si tolgono le parentesi e si raccolgono i termini a due a due, senza cambiarne l'ordine)

$$\begin{aligned}
&= (-\Pi_0^k + \hat{\Pi}_0 \Pi_0^{k-1}) + (-\hat{\Pi}_0 \Pi_0^{k-1} + \hat{\Pi}_0^2 \Pi_0^{k-2}) + \\
&+ (-\hat{\Pi}_0^2 \Pi_0^{k-2} + \hat{\Pi}_0^3 \Pi_0^{k-3}) + \dots + (-\hat{\Pi}_0^{k-2} \Pi_0^2 + \hat{\Pi}_0^{k-1} \Pi_0) + \\
&\quad + (-\hat{\Pi}_0^{k-1} \Pi_0 + \hat{\Pi}_0^k) =
\end{aligned}$$

(in ciascuno dei termini tra parentesi si raccoglie a fattor comune la massima potenza di $\hat{\Pi}_0$, a sinistra, e la massima potenza di Π_0 , a destra)

$$\begin{aligned}
&= (-\Pi_0 + \hat{\Pi}_0) \Pi_0^{k-1} + \hat{\Pi}_0 (-\Pi_0 + \hat{\Pi}_0) \Pi_0^{k-2} + \hat{\Pi}_0^2 (-\Pi_0 + \hat{\Pi}_0) \Pi_0^{k-3} + \\
&+ \dots + \hat{\Pi}_0^{k-2} (-\Pi_0 + \hat{\Pi}_0) \Pi_0 + \hat{\Pi}_0^{k-1} (-\Pi_0 + \hat{\Pi}_0) = \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\Pi}_0^j (-\Pi_0 + \hat{\Pi}_0) \Pi_0^{k-1-j} = \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\Pi}_0^j (\hat{\Pi}_0 - \Pi_0) \Pi_0^{k-1-j}.
\end{aligned}$$

Sostituendo la (11.1.16) nella (11.1.15) si ottiene

$$\begin{aligned}
(11.1.17) \quad &\sqrt{T} \text{vec} (\hat{\Pi}_0^k \hat{\Pi}_1 - \Pi_0^k \Pi_1) = \\
&= \sqrt{T} \sum_{j=0}^{k-1} \text{vec} [\hat{\Pi}_0^j (\hat{\Pi}_0 - \Pi_0) \Pi_0^{k-1-j} \hat{\Pi}_1] + \\
&\quad + \sqrt{T} \text{vec} [\Pi_0^k (\hat{\Pi}_1 - \Pi_1) I_n].
\end{aligned}$$

Consideriamo ora il primo vettore, che compone il vettore (11.1.13); applicando lo sviluppo (11.1.16), otteniamo

$$(11.1.18) \quad \sqrt{T} \operatorname{vec} (\hat{\Pi}_0^h - \Pi_0^h) = \sqrt{T} \sum_{i=0}^{h-1} \operatorname{vec} [\hat{\Pi}_0^i (\hat{\Pi}_0 - \Pi_0) \Pi_0^{h-1-i}].$$

Applicando ora alla (11.1.17) il lemma 3.3, otteniamo

$$(11.1.19) \quad \begin{aligned} & \sqrt{T} \operatorname{vec} (\hat{\Pi}_0^k \hat{\Pi}_1 - \Pi_0^k \Pi_1) = \\ & = \sqrt{T} \sum_{j=0}^{k-1} [(\Pi_0^{k-1-j} \hat{\Pi}_1)' \otimes \hat{\Pi}_0^j] \operatorname{vec} (\hat{\Pi}_0 - \Pi_0) + \\ & \quad + \sqrt{T} [I_n \otimes \Pi_0^k] \operatorname{vec} (\hat{\Pi}_1 - \Pi_1) = \\ & = \left[I_n \otimes \Pi_0^k; \sum_{j=0}^{k-1} ((\Pi_0^{k-1-j} \hat{\Pi}_1)' \otimes \hat{\Pi}_0^j) \right] \sqrt{T} \begin{bmatrix} \operatorname{vec} (\hat{\Pi}_1 - \Pi_1) \\ \operatorname{vec} (\hat{\Pi}_0 - \Pi_0) \end{bmatrix} = \\ & = \left[I_n \otimes \Pi_0^k; \sum_{j=0}^{k-1} ((\Pi_0^{k-1-j} \hat{\Pi}_1)' \otimes \hat{\Pi}_0^j) \right] \sqrt{T} \operatorname{vec} (\hat{\Pi} - \Pi). \end{aligned}$$

Analogamente, applicando il lemma 3.3 alla (11.1.18), otteniamo

$$(11.1.20) \quad \begin{aligned} & \sqrt{T} \operatorname{vec} (\hat{\Pi}_0^h - \Pi_0^h) = \\ & = \sqrt{T} \sum_{i=0}^{h-1} [(\Pi_0^{h-1-i})' \otimes \hat{\Pi}_0^i] \operatorname{vec} (\hat{\Pi}_0 - \Pi_0) = \\ & = \left[0_{mm,mn}; \sum_{i=0}^{h-1} ((\Pi_0^{h-1-i})' \otimes \hat{\Pi}_0^i) \right] \sqrt{T} \begin{bmatrix} \operatorname{vec} (\hat{\Pi}_1 - \Pi_1) \\ \operatorname{vec} (\hat{\Pi}_0 - \Pi_0) \end{bmatrix} = \\ & = \left[0_{mm,mn}; \sum_{i=0}^{h-1} ((\Pi_0^{h-1-i})' \otimes \hat{\Pi}_0^i) \right] \sqrt{T} \operatorname{vec} (\hat{\Pi} - \Pi) \end{aligned}$$

dove $0_{mm,mn}$ e' la matrice nulla di dimensioni $mm \times mn$.

Finalmente l'ultimo vettore che compone il vettore (11.1.13) puo' essere rappresentato come

$$\begin{aligned}
(11.1.21) \quad & \sqrt{T} \operatorname{vec} (\hat{\Pi}_1 - \Pi_1) = \\
& = [I_{mn}; 0_{mn,mm}] \sqrt{T} \begin{bmatrix} \operatorname{vec} (\hat{\Pi}_1 - \Pi_1) \\ \operatorname{vec} (\hat{\Pi}_0 - \Pi_0) \end{bmatrix} = \\
& = [I_{mn}; 0_{mn,mm}] \sqrt{T} \operatorname{vec} (\hat{\Pi} - \Pi)
\end{aligned}$$

dove I_{mn} e' la matrice unitaria di dimensioni $mn \times mn$ e $0_{mn,mm}$ e' la matrice nulla di dimensioni $mn \times mm$.

Possiamo ora indicare con \hat{M}_h la matrice di dimensioni $mm \times (mn + mm)$ che premoltiplica il vettore $\sqrt{T} \operatorname{vec} (\hat{\Pi} - \Pi)$ nella equazione (11.1.20)

$$(11.1.22) \quad \hat{M}_h = \left[0_{mm,mm}; \sum_{i=0}^{h-1} ((\Pi_0^{h-1-i})' \otimes \hat{\Pi}_0^i) \right]$$

con \hat{N}_k la matrice di dimensioni $mn \times (mn + mm)$ che premoltiplica $\sqrt{T} \operatorname{vec} (\hat{\Pi} - \Pi)$ nella equazione (11.1.19)

$$(11.1.23) \quad \hat{N}_k = \left[I_n \otimes \Pi_0^k; \sum_{j=0}^{k-1} ((\Pi_0^{k-1-j} \hat{\Pi}_1)' \otimes \hat{\Pi}_0^j) \right]$$

dove k assume tutti i valori compresi tra 1 e $h-1$ (purche' $h \geq 2$), e con N_0 la matrice di dimensioni $mn \times (mn + mm)$ che premoltiplica $\sqrt{T} \operatorname{vec} (\hat{\Pi} - \Pi)$ nella equazione (11.1.21)

$$(11.1.24) \quad N_0 = [I_{mn}; 0_{mn,mm}].$$

Costruiamo ora la matrice \hat{Q}_h

$$(11.1.25) \quad \hat{Q}_h = \begin{bmatrix} \hat{M}_h \\ \hat{N}_{h-1} \\ \hat{N}_{h-2} \\ \vdots \\ N_0 \end{bmatrix}$$

e ricordando la (11.1.13) abbiamo

$$(11.1.26) \quad \sqrt{T} (\text{vec } \hat{H}_h - \text{vec } H_h) = \hat{Q}_h \sqrt{T} \text{vec} (\hat{\Pi} - \Pi).$$

Questa equazione esprime il vettore di variabili casuali $\sqrt{T}(\text{vec } \hat{H}_h - \text{vec } H_h)$ come prodotto di due variabili casuali. La prima, ossia la matrice \hat{Q}_h , all'aumentare della lunghezza del periodo campionario T converge in probabilità alla matrice di costanti Q_h (che ha la stessa espressione, ma con le matrici $\hat{\Pi}_1$ e $\hat{\Pi}_0$ rimpiazzate dai rispettivi limiti in probabilità Π_1 e Π_0 ; si veda il lemma 3.6). La seconda, ossia il vettore $\sqrt{T} \text{vec} (\hat{\Pi} - \Pi)$, converge in distribuzione ad un vettore normale multivariato $N(0, \Omega)$, dove Ω è dato dalla equazione (11.1.11). Pertanto il loro prodotto (osservazione 3.5.5) converge in distribuzione ad un vettore normale multivariato $N(0, Q_h \Omega Q_h')$.

Finalmente possiamo riprendere in esame la componente del vettore degli errori di previsione al tempo h dovuta all'errore nella stima dei coefficienti. Dalle (11.1.6) e (11.1.26) ricaviamo

$$(11.1.27) \quad \begin{aligned} \sqrt{T} (\hat{y}_h - \bar{y}_h) &= (w_h' \otimes I_m) \sqrt{T} (\text{vec } \hat{H}_h - \text{vec } H_h) = \\ &= (w_h' \otimes I_m) \hat{Q}_h \sqrt{T} \text{vec} (\hat{\Pi} - \Pi). \end{aligned}$$

Poiché w_h è noto (contiene le variabili predeterminate della simulazione dinamica dal periodo 1 al periodo h), avremo

$$(11.1.28) \quad \sqrt{T} (\hat{y}_h - \bar{y}_h) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \mathcal{N}\{0, [(w_h' \otimes I_m) Q_h \Omega Q_h' (w_h \otimes I_m)]\}.$$

Si noti che la stima della matrice Q_h non è data dalla matrice \hat{Q}_h (eq. 11.1.25). La matrice \hat{Q}_h , infatti, contiene anche elementi della "vera" matrice Π_0 , oltre a elementi delle matrici stimate $\hat{\Pi}_0$ e $\hat{\Pi}_1$ (si veda, ad esempio, l'equazione 11.1.23). Per ottenere, dunque, la stima della matrice di covarianza asintotica della componente del vettore degli errori di previsione, dovuta agli errori nella stima dei coefficienti, dopo h periodi di simulazione dinamica $(\hat{y}_h - \bar{y}_h)$, occorrerà impiegare una matrice con la stessa espressione della matrice \hat{Q}_h data nell'equazione (11.1.25), ma con Π_0 rimpiazzato da $\hat{\Pi}_0$. Avremo dunque dalle equazioni (11.1.22-25)

$$(11.1.29) \quad \hat{M}_h = \left[0_{mm, mn}; \sum_{i=0}^{h-1} ((\hat{\Pi}_0^{h-1-i})' \otimes \hat{\Pi}_0^i) \right]$$

$$(11.1.30) \quad \hat{N}_k = \left[I_n \otimes \hat{\Pi}_0^k; \sum_{j=0}^{k-1} ((\hat{\Pi}_0^{k-1-j} \hat{\Pi}_1)' \otimes \hat{\Pi}_0^j) \right]$$

$$(11.1.31) \quad \hat{Q}_h = \begin{bmatrix} \hat{M}_h \\ \hat{N}_{h-1} \\ \hat{N}_{h-2} \\ \vdots \\ N_0 \end{bmatrix}.$$

Si ottiene quindi, per la stima della matrice di covarianza asintotica di $(\hat{y}_h - \bar{y}_h)$, l'espressione

$$(11.1.32) \quad (w_h' \otimes I_m) \hat{Q}_h (\hat{\Omega}/T) \hat{Q}_h' (w_h \otimes I_m).$$

11.2. Nota sulle dimensioni delle matrici

L'applicazione pratica del metodo di Schmidt presenta difficoltà ancora maggiori di quelle già osservate nell'applicare il metodo tradizionale alle previsioni uniperiodali. Nella letteratura econometrica si incontrano applicazioni pratiche di questo metodo solo per modelli di piccole dimensioni (non più di due equazioni in Schmidt, 1977, come pure in Chong e Hendry, 1986). Il problema principale è costituito dalle dimensioni delle matrici che compaiono nell'equazione (11.1.32).

Si osservi, innanzitutto, che il calcolo della matrice $\hat{\Omega}/T$ presenta problemi analoghi a quelli già discussi nel paragrafo 3.9 (le dimensioni sono, qui, leggermente diverse, dato il diverso dimensionamento della matrice Π nel caso dinamico rispetto al caso statico).

Osserviamo ora che le dimensioni della matrice \hat{Q}_h variano al variare del periodo di previsione (h). La matrice \hat{M}_h ha dimensioni $mm \times (mn + mm)$. La matrice N_0 e ognuna delle matrici \hat{N}_k hanno dimensioni $mn \times (mn + mm)$. La matrice \hat{Q}_h ha, pertanto, dimensioni $(mm + hmn) \times (mn + mm)$.

Supponiamo di voler utilizzare il modello (1.2) per un esercizio di previsione su 5 anni. Trattandosi di un modello contenente 4 variabili endogene, vogliamo calcolare la matrice di covarianza (4×4) degli errori nel quinto (ultimo) anno di previsione. Per utilizzare l'equazione (11.1.32) occorre effettuare il calcolo della matrice $\hat{\Omega}/T$, di dimensioni $(mn + mm) \times (mn + mm)$, cioè 24×24 , ed il calcolo della matrice \hat{Q}_h , di dimensioni 56×24 .

Nel caso di un modello medio-grande, come il modello dell'economia francese (Brillet, 1981) già menzionato nel paragrafo 3.9, considerando che il numero delle variabili endogene è $m = 225$ e che il numero delle variabili esogene supera di poco il centinaio, la matrice \hat{Q}_h in un esercizio di previsione su un orizzonte temporale di 5 anni avrebbe dimensioni 165000×74000 circa. Per un modello di pari dimensioni, ma basato su dati trimestrali, lo stesso esercizio su 5 anni (20 trimestri) richiederebbe una matrice 500000×74000 circa.

12. VARIANZA DELLE PREVISIONI: METODO ANALITICO ALTERNATIVO

Anche nel caso di previsioni multiperiodali ottenute impiegando un modello dinamico, il procedimento di calcolo della matrice di covarianza degli errori di previsione puo' essere fortemente semplificato ricorrendo ad un metodo analogo a quello gia' visto per le previsioni uniperiodali (modello statico, capitolo 4). Anche in questo caso si tratta di sviluppare una relazione esplicita tra la componente del vettore degli errori di previsione, dovuta agli errori nella stima dei coefficienti, e il vettore degli errori nei coefficienti strutturali stessi (Calzolari, 1987).

Analogamente a quanto visto nel capitolo 4, indichiamo con $a = (a_1, a_2, \dots, a_s)'$ il vettore $s \times 1$ dei coefficienti strutturali incogniti (9 coefficienti, nel modello 1.2, impiegato come esempio). Indichiamo, al solito, con \hat{a} il vettore dei coefficienti strutturali stimati, e con Ψ la matrice di covarianza asintotica del vettore $\sqrt{T}(\hat{a} - a)$: per $T \rightarrow \infty$, $\sqrt{T}(\hat{a} - a)$ converge in distribuzione a una normale multivariata $N(0, \Psi)$. Indichiamo ora con

$$(12.1) \quad C = [A; B; D]$$

la matrice $m \times (2m + n)$ di tutti i coefficienti strutturali, e con $C_0, C_1, C_2, \dots, C_s$ matrici di dimensioni, ciascuna, $m \times (2m + n)$, tali che

$$(12.2) \quad C = [A; B; D] = C_0 + C_1 a_1 + C_2 a_2 + \dots + C_s a_s.$$

Le matrici C_0, C_1, C_2, \dots includono solo elementi noti a priori e non elementi da stimare. Data l'introduzione esplicita della matrice D nel modello dinamico, la struttura delle matrici C_k e' leggermente diversa dal caso statico (capitolo 4). Ognuna di esse ha dimensioni 4×10 nel modello (1.2). Ad esempio, la matrice C_1 ha la seguente struttura:

$$(12.3) \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

In generale, con la sola eccezione di C_0 (che non viene poi utilizzata nel calcolo), ognuna delle matrici C_k e' la matrice delle derivate prime della matrice C rispetto al singolo coefficiente a_k

$$(12.4) \quad C_k = \frac{\partial C}{\partial a_k} = \frac{\partial [A; B; D]}{\partial a_k}$$

e quindi, analogamente al caso statico, C_k sara' composta, nella maggior parte dei casi, di elementi tutti uguali a zero, ad eccezione di un singolo elemento uguale a -1. La matrice di tutti i coefficienti stimati, \hat{C} , sara', ovviamente

$$(12.5) \quad \hat{C} = [\hat{A}; \hat{B}; \hat{D}] = C_0 + C_1 \hat{a}_1 + C_2 \hat{a}_2 + \dots + C_s \hat{a}_s.$$

Indichiamo ora con $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_h$ le previsioni ottenute col modello, considerando noti i valori delle variabili endogene ritardate nel periodo iniziale, y_0 , e i valori delle variabili esogene nel periodo di previsione, x_1, x_2, \dots, x_h (eq. 10.13). Osserviamo che i vettori $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_h$, introdotti nelle equazioni strutturali (9.1), con coefficienti stimati, soddisfano il sistema

$$(12.6) \quad \hat{A} \hat{y}_i + \hat{B} x_i + \hat{D} \hat{y}_{i-1} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, h.$$

Definiamo ora le h matrici \hat{F}_{h-i} , ognuna delle quali ha dimensioni $m \times s$, al variare di $i = 0, 1, \dots, h-1$

$$(12.7) \quad \hat{F}_{h-i} = \left\{ C_1 \begin{bmatrix} \hat{y}_{h-i} \\ x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix}; C_2 \begin{bmatrix} \hat{y}_{h-i} \\ x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix}; \dots; C_s \begin{bmatrix} \hat{y}_{h-i} \\ x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} \right\}.$$

Nel modello usato come esempio (1.2) ciascuna \hat{F}_{h-i} ha dimensioni 4×9 , ed ha la struttura seguente:

$$(12.8) \quad \hat{F}_{h-i} = \begin{bmatrix} -1 & -\hat{Y}_{h-i} & -\hat{C}_{h-i-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -(\hat{Y}_{h-i} - \hat{Y}_{h-i-1}) & -\hat{I}_{h-i-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\hat{I}_{h-i} & -(\hat{Y} - \hat{I})_{h-i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La (12.7) e' applicabile anche per $i = h-1$, cioe' per \hat{F}_1 , con la semplice avvertenza di sostituire \hat{y}_0 con y_0 (trattandosi di un vettore di variabili predeterminate).

Calcoliamo ora il prodotto $-A^{-1}\hat{F}_{h-i}(\hat{a} - a)$; possiamo applicare un procedimento del tutto analogo a quello gia' impiegato nel capitolo 4, oppure possiamo procedere in modo leggermente diverso, come segue.

$$(12.9) \quad -A^{-1}\hat{F}_{h-i}(\hat{a} - a) = \\ = -A^{-1} \left\{ C_1 \begin{bmatrix} \hat{y}_{h-i} \\ x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix}; C_2 \begin{bmatrix} \hat{y}_{h-i} \\ x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix}; \dots; C_s \begin{bmatrix} \hat{y}_{h-i} \\ x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} \right\} (\hat{a} - a) = \\ = -A^{-1} \left\{ C_1 \begin{bmatrix} \hat{y}_{h-i} \\ x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} \hat{a}_1 + C_2 \begin{bmatrix} \hat{y}_{h-i} \\ x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} \hat{a}_2 + \dots + C_s \begin{bmatrix} \hat{y}_{h-i} \\ x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} \hat{a}_s \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + A^{-1} \left\{ C_1 \begin{bmatrix} \hat{y}_{h-i} \\ x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} a_1 + C_2 \begin{bmatrix} \hat{y}_{h-i} \\ x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} a_2 + \dots + C_s \begin{bmatrix} \hat{y}_{h-i} \\ x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} a_s \right\} = \\
& = -A^{-1} [C_1 \hat{a}_1 + C_2 \hat{a}_2 + \dots + C_s \hat{a}_s] \begin{bmatrix} \hat{y}_{h-i} \\ x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} + \\
& + A^{-1} [C_1 a_1 + C_2 a_2 + \dots + C_s a_s] \begin{bmatrix} \hat{y}_{h-i} \\ x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} =
\end{aligned}$$

(si introducono le equazioni 12.2 e 12.5)

$$\begin{aligned}
& = -A^{-1} (\hat{C} - C_0) \begin{bmatrix} \hat{y}_{h-i} \\ x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} + A^{-1} (C - C_0) \begin{bmatrix} \hat{y}_{h-i} \\ x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} = \\
& = -A^{-1} \hat{C} \begin{bmatrix} \hat{y}_{h-i} \\ x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} + A^{-1} C \begin{bmatrix} \hat{y}_{h-i} \\ x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} = \\
& = -A^{-1} [\hat{A}; \hat{B}; \hat{D}] \begin{bmatrix} \hat{y}_{h-i} \\ x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} + A^{-1} [A; B; D] \begin{bmatrix} \hat{y}_{h-i} \\ x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} =
\end{aligned}$$

(ricordando la 12.6, il primo termine e' uguale a zero)

$$\begin{aligned}
& = A^{-1} [A; B; D] \begin{bmatrix} \hat{y}_{h-i} \\ x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} = \\
& = \hat{y}_{h-i} + A^{-1} B x_{h-i} + A^{-1} D \hat{y}_{h-i-1} =
\end{aligned}$$

(ricordando le equazioni 10.1, 10.2 e 10.13)

$$\begin{aligned}
&= \hat{\Pi}_1 x_{h-i} + \hat{\Pi}_0 \hat{y}_{h-i-1} - \Pi_1 x_{h-i} - \Pi_0 \hat{y}_{h-i-1} = \\
&= [\hat{\Pi}_1; \hat{\Pi}_0] \begin{bmatrix} x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} - [\Pi_1; \Pi_0] \begin{bmatrix} x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} = \\
&= \hat{\Pi} \begin{bmatrix} x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} - \Pi \begin{bmatrix} x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} = [\hat{\Pi} - \Pi] \begin{bmatrix} x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Moltiplicando la (12.9) per \sqrt{T} otteniamo

$$(12.10) \quad \sqrt{T} [\hat{\Pi} - \Pi] \begin{bmatrix} x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} = -A^{-1} \hat{F}_{h-i} \sqrt{T} (\hat{a} - a)$$

ossia un risultato analogo a quello della equazione (4.10). A differenza del caso statico, però, questo è soltanto un risultato intermedio. L'equazione (12.10), infatti, non coincide con $\sqrt{T}(\hat{y}_{h-i} - \bar{y}_{h-i})$ (data la presenza di \hat{y}_{h-i-1}). Impiegheremo, dunque, la (12.10), al variare di $i = 0, 1, \dots, h-1$, per calcolare $\sqrt{T}(\hat{y}_h - \bar{y}_h)$ nell'ultimo periodo di previsione. Abbiamo ora

$$(12.11) \quad \sqrt{T}(\hat{y}_h - \bar{y}_h) =$$

(si sostituisce a \hat{y}_h l'espressione 10.12)

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{T} \left[\sum_{i=0}^{h-1} \hat{\Pi}_0^i \hat{\Pi}_1 x_{h-i} + \hat{\Pi}_0^h y_0 - \bar{y}_h \right] = \\
&= \sqrt{T} \sum_{i=0}^{h-1} \hat{\Pi}_0^i \hat{\Pi}_1 x_{h-i} + \sqrt{T} [\hat{\Pi}_0^h y_0 - \bar{y}_h] =
\end{aligned}$$

(si sommano, al termine tra parentesi quadre, $h-1$ termini identicamente nulli)

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{T} \sum_{i=0}^{h-1} \hat{\Pi}_0^i \hat{\Pi}_1 x_{h-i} + \sqrt{T} \left[\hat{\Pi}_0^h y_0 + (-\hat{\Pi}_0^{h-1} \bar{y}_1 + \hat{\Pi}_0^{h-1} \bar{y}_1) + \right. \\
&\quad \left. + (-\hat{\Pi}_0^{h-2} \bar{y}_2 + \hat{\Pi}_0^{h-2} \bar{y}_2) + \dots + (-\hat{\Pi}_0^2 \bar{y}_{h-2} + \hat{\Pi}_0^2 \bar{y}_{h-2}) + \right. \\
&\quad \left. + (-\hat{\Pi}_0 \bar{y}_{h-1} + \hat{\Pi}_0 \bar{y}_{h-1}) - \bar{y}_h \right] =
\end{aligned}$$

(si tolgono le parentesi tonde e si associano a due a due i termini tra parentesi quadre, a cominciare dal primo)

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{T} \sum_{i=0}^{h-1} \hat{\Pi}_0^i \hat{\Pi}_1 x_{h-i} + \sqrt{T} \left[(\hat{\Pi}_0^h y_0 - \hat{\Pi}_0^{h-1} \bar{y}_1) + (\hat{\Pi}_0^{h-1} \bar{y}_1 - \hat{\Pi}_0^{h-2} \bar{y}_2) + \right. \\
&\quad \left. + (\hat{\Pi}_0^{h-2} \bar{y}_2 - \hat{\Pi}_0^{h-3} \bar{y}_3) + \dots + (\hat{\Pi}_0^2 \bar{y}_{h-2} - \hat{\Pi}_0 \bar{y}_{h-1}) + (\hat{\Pi}_0 \bar{y}_{h-1} - \bar{y}_h) \right] =
\end{aligned}$$

(si riordinano i termini tra parentesi quadre secondo i valori crescenti dell'esponente di $\hat{\Pi}_0$)

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{T} \sum_{i=0}^{h-1} \hat{\Pi}_0^i \hat{\Pi}_1 x_{h-i} + \sqrt{T} \left[(\hat{\Pi}_0 \bar{y}_{h-1} - \bar{y}_h) + (\hat{\Pi}_0^2 \bar{y}_{h-2} - \hat{\Pi}_0 \bar{y}_{h-1}) + \right. \\
&\quad \left. + (\hat{\Pi}_0^3 \bar{y}_{h-3} - \hat{\Pi}_0^2 \bar{y}_{h-2}) + \dots + (\hat{\Pi}_0^{h-1} \bar{y}_1 - \hat{\Pi}_0^{h-2} \bar{y}_2) + (\hat{\Pi}_0^h y_0 - \hat{\Pi}_0^{h-1} \bar{y}_1) \right] = \\
&= \sqrt{T} \sum_{i=0}^{h-1} \hat{\Pi}_0^i \hat{\Pi}_1 x_{h-i} + \sqrt{T} \sum_{i=0}^{h-1} \left[\hat{\Pi}_0^{i+1} \bar{y}_{h-i-1} - \hat{\Pi}_0^i \bar{y}_{h-i} \right] =
\end{aligned}$$

(si raccolgono tutti i termini in un'unica sommatoria, ricordando che, trattandosi di variabili predeterminate, $\bar{y}_0 = y_0$)

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{T} \sum_{i=0}^{h-1} \left[\hat{\Pi}_0^i \hat{\Pi}_1 x_{h-i} + \hat{\Pi}_0^{i+1} \bar{y}_{h-i-1} - \hat{\Pi}_0^i \bar{y}_{h-i} \right] = \\
&= \sqrt{T} \sum_{i=0}^{h-1} \left\{ \hat{\Pi}_0^i [\hat{\Pi}_1; \hat{\Pi}_0] \left[\begin{matrix} x_{h-i} \\ \bar{y}_{h-i-1} \end{matrix} \right] - \hat{\Pi}_0^i \bar{y}_{h-i} \right\} =
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{T} \sum_{i=0}^{h-1} \left\{ \hat{\Pi}_0^i \hat{\Pi} \begin{bmatrix} x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} - \hat{\Pi}_0^i \bar{y}_{h-i} \right\}.$$

Ricordiamo ora che, trattandosi di un vettore di variabili predeterminate, anche $\hat{y}_0 = y_0$; osserviamo poi che le equazioni (10.13) e (10.14) possono essere rappresentate come

$$(12.12) \quad \hat{y}_{h-i} = \hat{\Pi} \begin{bmatrix} x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} \quad i = 0, 1, \dots, h-1$$

$$(12.13) \quad \bar{y}_{h-i} = \Pi \begin{bmatrix} x_{h-i} \\ \bar{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} \quad i = 0, 1, \dots, h-1$$

e che si ha, ovviamente (lemma 3.6)

$$(12.14) \quad \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \hat{y}_{h-i} = \bar{y}_{h-i} \quad i = 0, 1, \dots, h-1.$$

Sostituiamo nella (12.11) a \bar{y}_{h-i} l'espressione (12.13)

$$(12.15) \quad \begin{aligned} \sqrt{T}(\hat{y}_h - \bar{y}_h) &= \sqrt{T} \sum_{i=0}^{h-1} \hat{\Pi}_0^i \hat{\Pi} \begin{bmatrix} x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} - \sqrt{T} \sum_{i=0}^{h-1} \hat{\Pi}_0^i \Pi \begin{bmatrix} x_{h-i} \\ \bar{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} = \\ &= \sqrt{T} \sum_{i=0}^{h-1} \hat{\Pi}_0^i (\hat{\Pi} - \Pi) \begin{bmatrix} x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

(a \bar{y}_{h-i-1} si somma e si sottrae \hat{y}_{h-i-1})

$$= \sqrt{T} \sum_{i=0}^{h-1} \hat{\Pi}_0^i (\hat{\Pi} - \Pi) \begin{bmatrix} x_{h-i} \\ \hat{y}_{h-i-1} \end{bmatrix} - \sqrt{T} \sum_{i=0}^{h-1} \hat{\Pi}_0^i (\hat{\Pi} - \Pi) \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{y}_{h-i-1} - \bar{y}_{h-i-1} \end{bmatrix}.$$

Il secondo termine converge in probabilita' a zero, al crescere di T ; contiene, infatti, il prodotto della variabile casuale $\sqrt{T}(\hat{\Pi} - \Pi)$, che converge in distribuzione, con una variabile casuale che converge a zero

in probabilita', poiche' \hat{y}_{h-i-1} converge a \bar{y}_{h-i-1} (eq. 12.14); possiamo, quindi, applicare l'osservazione 3.5.5. Nel primo termine della (12.15) possiamo ora sostituire la equazione (12.10), ottenendo che $\sqrt{T}(\hat{y}_h - \bar{y}_h)$ ha la stessa distribuzione asintotica di

$$(12.16) \quad - \left[\sum_{i=0}^{h-1} \hat{\Pi}_0^i A^{-1} \hat{F}_{h-i} \right] \sqrt{T}(\hat{a} - a).$$

La matrice di varianza - covarianza asintotica di $\sqrt{T}(\hat{y}_h - \bar{y}_h)$ sara', pertanto

$$(12.17) \quad \left[\sum_{i=0}^{h-1} \Pi_0^i A^{-1} \bar{F}_{h-i} \right] \Psi \left[\sum_{i=0}^{h-1} \Pi_0^i A^{-1} \bar{F}_{h-i} \right]'$$

dove le matrici \bar{F}_{h-i} hanno, ovviamente la stessa espressione delle \hat{F}_{h-i} , salvo sostituire i vettori \hat{y}_{h-i-1} con i loro limiti in probabilita' \bar{y}_{h-i-1} .

Risulta chiara a questo punto la semplificazione rispetto al metodo tradizionale. La stima della matrice di covarianza della componente del vettore degli errori di previsione dovuta all'errore nella stima dei coefficienti, nell'ultimo periodo di previsione ($\hat{y}_h - \bar{y}_h$)

$$(12.18) \quad \left[\sum_{i=0}^{h-1} \hat{\Pi}_0^i \hat{A}^{-1} \hat{F}_{h-i} \right] \hat{\Psi}/T \left[\sum_{i=0}^{h-1} \hat{\Pi}_0^i \hat{A}^{-1} \hat{F}_{h-i} \right]'$$

richiede semplicemente il calcolo del sentiero di simulazione dinamica nel periodo di previsione, ($\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_h$) poi il calcolo delle $h-1$ matrici $\hat{\Pi}_0^i$ (di dimensioni $m \times m$), il calcolo della matrice \hat{A}^{-1} (anch'essa di dimensioni $m \times m$), e finalmente il calcolo delle h matrici \hat{F}_{h-i} (di dimensioni $m \times s$). Analogamente al capitolo 4, si usa direttamente la matrice $\hat{\Psi}/T$, senza bisogno di espanderla nella matrice $\hat{\Phi}/T$.

12.1. Risultati sperimentali sul modello

I metodi descritti nel capitolo 12 sono stati applicati al modello (1.2). L'esercizio di previsione uniperiodale riportato nel capitolo 7 viene qui esteso con simulazione dinamica al secondo, terzo e quarto anno al di fuori del periodo di stima. I risultati sono riportati nelle tabelle 32, 33 e 34.

Se il calcolo viene effettuato con il metodo di Schmidt, (paragrafo 11.1), occorre preliminarmente calcolare la matrice $\hat{\Omega}/T$ (che differisce da quella già riportata per il caso statico in tabella 6 per il diverso dimensionamento e ordinamento dei termini, come già osservato nel paragrafo 11.1). Tale matrice è riportata nella tabella 35 e, per completezza di esposizione, nella tabella 36 si riportano le matrici $\hat{\Pi}_0$ e $\hat{\Pi}_1$, oltre alle potenze $\hat{\Pi}_0^2$ e $\hat{\Pi}_1^2$ coinvolte nel calcolo. La matrice \hat{A}^{-1} è, ovviamente, la stessa di tabella 7.

Una interessante considerazione, che si ricava dai risultati numerici, riguarda l'importanza relativa delle due componenti di errore, e il loro andamento nel tempo.

Ad eccezione della variabile C nell'ultimo periodo di previsione, la varianza della componente di errore dovuta ai disturbi strutturali è sempre maggiore della varianza dell'altra componente. La varianza di ciascuna delle due componenti di errore aumenta nel tempo (si considerino anche le varianze riportate in tabella 5, per il primo periodo di previsione, oltre a quelle delle tabelle 32, 33 e 34); la varianza della componente dovuta all'errore nella stima dei coefficienti aumenta, però, più rapidamente dell'altra.

Tutto questo non deriva necessariamente dai risultati teorici ricavati nei paragrafi precedenti. Si osservino, in particolare, le equazioni (11.6) e (12.18). Nel primo caso, la stima della matrice di covarianza è data dalla somma, nel tempo, di matrici *semidefinite positive*. Allungando perciò il periodo di previsione (h), la stima della varianza della componente di errore dovuta ai disturbi strutturali, per ogni variabile, potrà aumentare o, al più, restare costante, ma non potrà mai diminuire.

Non e' detto, invece, che la stessa cosa debba accadere anche per la componente dovuta all'errore nella stima dei coefficienti. Osservando infatti l'equazione (12.18), notiamo che non si tratta di una somma, nel tempo, di matrici *semidefinite positive*. Nulla vieta, pertanto, che la varianza di questa componente di errore possa diminuire, anziche' aumentare, quando il periodo di previsione si allunga. Non e' detto nemmeno che la varianza complessiva dell'errore di previsione debba necessariamente aumentare nel tempo (si vedano, a questo proposito, anche le considerazioni in Chong e Hendry, 1986, p. 685). Non e' questo il caso del modello che stiamo ora esaminando, ma avremo un esempio di questo fenomeno nel paragrafo 13.5.

Tabella 32

Stima delle matrici di covarianza delle due componenti dell'errore di previsione al 1981. Simulazione dinamica dal 1980.

Componente relativa all'errore nella stima dei coefficienti ($\times 10^{-3}$)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	342.			
<i>I</i>	177.	269.		
<i>M</i>	123.	112.	121.	
<i>Y</i>	397.	334.	114.	617.

Componente relativa ai disturbi strutturali ($\times 10^{-3}$)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	869.			
<i>I</i>	630.	724.		
<i>M</i>	381.	303.	325.	
<i>Y</i>	1119.	1052.	359.	1813.

Valori calcolati delle endogene (previsioni), valori osservati *ex-post* e stima dello scarto quadratico medio delle previsioni ($\times 10^{-3}$)

	Valore calcolato	Valore osservato	Stima scarto quad. medio
<i>C</i>	55.313	55.094	1.10
<i>I</i>	13.401	15.130	.997
<i>M</i>	16.923	17.645	.668
<i>Y</i>	84.920	85.707	1.56

Tabella 33

Stima delle matrici di covarianza delle due componenti dell'errore di previsione al 1982. Simulazione dinamica dal 1980.

Componente relativa all'errore nella stima dei coefficienti ($\times 10^{-3}$)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	972.			
<i>I</i>	567.	631.		
<i>M</i>	356.	294.	235.	
<i>Y</i>	1183.	904.	415.	1672.

Componente relativa ai disturbi strutturali ($\times 10^{-3}$)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	1234.			
<i>I</i>	881.	955.		
<i>M</i>	510.	403.	373.	
<i>Y</i>	1605.	1433.	540.	2499.

Valori calcolati delle endogene (previsioni), valori osservati *ex-post* e stima dello scarto quadratico medio delle previsioni ($\times 10^{-3}$)

	Valore calcolato	Valore osservato	Stima scarto quad. medio
<i>C</i>	56.230	55.377	1.48
<i>I</i>	13.194	14.343	1.26
<i>M</i>	17.169	17.918	.779
<i>Y</i>	85.715	85.262	2.04

Tabella 34

Stima delle matrici di covarianza delle due componenti dell'errore di previsione al 1983. Simulazione dinamica dal 1980.

Componente relativa all'errore nella stima dei coefficienti ($\times 10^{-3}$)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	2173.			
<i>I</i>	1165.	1051.		
<i>M</i>	764.	536.	403.	
<i>Y</i>	2574.	1681.	897.	3358.

Componente relativa ai disturbi strutturali ($\times 10^{-3}$)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	1552.			
<i>I</i>	1084.	1122.		
<i>M</i>	620.	480.	412.	
<i>Y</i>	2017.	1726.	687.	3055.

Valori calcolati delle endogene (previsioni), valori osservati *ex-post* e stima dello scarto quadratico medio delle previsioni ($\times 10^{-3}$)

	Valore calcolato	Valore osservato	Stima scarto quad. medio
<i>C</i>	57.048	55.207	1.93
<i>I</i>	13.020	13.792	1.47
<i>M</i>	17.442	17.845	.902
<i>Y</i>	86.609	85.127	2.53

Tabella 35

$\hat{\Omega}/T$: stima della matrice di covarianza asintotica dei coefficienti di forma ridotta. La matrice (simmetrica, di dimensioni 24×24) e' rappresentata a blocchi di dimensioni 4×4 . Ogni blocco contiene le covarianze dei coefficienti di forma ridotta relativi ad una coppia di variabili predeterminate.

$\hat{\Omega}_{1,1} / T$ (variabili predeterminate 1,1)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	.121454e+7			
<i>I</i>	.139282e+7	.247917e+7		
<i>M</i>	379827.	407957.	473182.	
<i>Y</i>	.222753e+7	.346404e+7	314602.	.537697e+7

$\hat{\Omega}_{2,1} / T$ (variabili predeterminate $Z_i, 1$)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	191.265	231.794	53.7317	369.327
<i>I</i>	152.506	281.565	32.9266	401.144
<i>M</i>	75.4303	113.374	11.4284	177.376
<i>Y</i>	268.340	399.985	75.2299	593.095

$\hat{\Omega}_{2,2} / T$ (variabili predeterminate Z_i, Z_i)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	.477579e-1			
<i>I</i>	.377033e-1	.475560e-1		
<i>M</i>	.185875e-1	.186131e-1	.828501e-2	
<i>Y</i>	.668737e-1	.666462e-1	.289156e-1	.104604

$\hat{\Omega}_{3,1} / T$ (variabili predeterminate C_{t-1}, I)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	-101.671	-95.0760	-31.6100	-165.137
<i>I</i>	68.8560	156.576	11.8206	213.611
<i>M</i>	-7.78852	13.3697	-9.88558	15.4668
<i>Y</i>	-25.0262	48.1299	-9.90385	33.0075

 $\hat{\Omega}_{3,2} / T$ (variabili predeterminate C_{t-1}, Z_t)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	-.230570e-1	-.136538e-1	-.798089e-2	-.287299e-1
<i>I</i>	.173107e-1	.270110e-1	.968963e-2	.346321e-1
<i>M</i>	-.151840e-2	.276381e-2	.409142e-3	.836266e-3
<i>Y</i>	-.422790e-2	.105934e-1	.129960e-2	.506590e-2

 $\hat{\Omega}_{3,3} / T$ (variabili predeterminate C_{t-1}, C_{t-1})

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	.125254e-1			
<i>I</i>	-.490716e-2	.162909e-1		
<i>M</i>	.179573e-2	.243012e-2	.103055e-2	
<i>Y</i>	.582252e-2	.895359e-2	.319530e-2	.115808e-1

 $\hat{\Omega}_{4,1} / T$ (variabili predeterminate I_{t-1}, I)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	161.465	186.333	57.3178	290.480
<i>I</i>	108.851	209.690	20.8697	297.672
<i>M</i>	104.269	175.242	-31.8203	311.331
<i>Y</i>	166.047	220.782	110.008	276.821

$\hat{\Omega}_{4,2} / T$ (variabili predeterminate I_{t-1}, Z_t)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	.429375e-1	.328882e-1	.161596e-1	.596662e-1
<i>I</i>	.358451e-1	.467576e-1	.177727e-1	.648300e-1
<i>M</i>	.235245e-1	.285687e-1	.126844e-1	.394088e-1
<i>Y</i>	.552581e-1	.510772e-1	.212479e-1	.850874e-1

 $\hat{\Omega}_{4,3} / T$ (variabili predeterminate I_{t-1}, C_{t-1})

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	-.207720e-1	.148418e-1	-.176669e-2	-.416350e-2
<i>I</i>	-.118971e-1	.269526e-1	.296180e-2	.120937e-1
<i>M</i>	-.905679e-2	.159834e-1	.234382e-2	.458279e-2
<i>Y</i>	-.236123e-1	.258109e-1	-.114871e-2	.334740e-2

 $\hat{\Omega}_{4,4} / T$ (variabili predeterminate I_{t-1}, I_{t-1})

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	.398028e-1			
<i>I</i>	.330973e-1	.520904e-1		
<i>M</i>	.172753e-1	.255510e-1	.302012e-1	
<i>Y</i>	.556248e-1	.596367e-1	.126250e-1	.102636

 $\hat{\Omega}_{5,1} / T$ (variabili predeterminate $M_{t-1}, 1$)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	.0	.0	.0	.0
<i>I</i>	.0	.0	.0	.0
<i>M</i>	.0	.0	.0	.0
<i>Y</i>	.0	.0	.0	.0

$\hat{\Omega}_{5,2} / T$ (variabili predeterminate M_{t-1}, Z_t)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	.0	.0	.0	.0
<i>I</i>	.0	.0	.0	.0
<i>M</i>	.0	.0	.0	.0
<i>Y</i>	.0	.0	.0	.0

$\hat{\Omega}_{5,3} / T$ (variabili predeterminate M_{t-1}, C_{t-1})

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	.0	.0	.0	.0
<i>I</i>	.0	.0	.0	.0
<i>M</i>	.0	.0	.0	.0
<i>Y</i>	.0	.0	.0	.0

$\hat{\Omega}_{5,4} / T$ (variabili predeterminate M_{t-1}, I_{t-1})

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	.0	.0	.0	.0
<i>I</i>	.0	.0	.0	.0
<i>M</i>	.0	.0	.0	.0
<i>Y</i>	.0	.0	.0	.0

$\hat{\Omega}_{5,5} / T$ (variabili predeterminate M_{t-1}, M_{t-1})

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	.0			
<i>I</i>	.0	.0		
<i>M</i>	.0	.0	.0	
<i>Y</i>	.0	.0	.0	.0

$\hat{\Omega}_{6,1} / T$ (variabili predeterminate $Y_{t-1}, 1$)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	-54.9132	-81.2595	-16.4886	-119.684
<i>I</i>	-141.670	-280.503	-29.8785	-392.294
<i>M</i>	-48.4939	-89.8109	.845402	-139.150
<i>Y</i>	-148.089	-271.951	-47.2126	-372.828

 $\hat{\Omega}_{6,2} / T$ (variabili predeterminate Y_{t-1}, Z_t)

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	-.138928e-1	-.136599e-1	-.593910e-2	-.216136e-1
<i>I</i>	-.351543e-1	-.477339e-1	-.180738e-1	-.648144e-1
<i>M</i>	-.111322e-1	-.145050e-1	-.587653e-2	-.197607e-1
<i>Y</i>	-.379149e-1	-.468889e-1	-.181364e-1	-.666673e-1

 $\hat{\Omega}_{6,3} / T$ (variabili predeterminate Y_{t-1}, C_{t-1})

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	.599631e-2	-.705872e-2	-.118410e-3	-.944006e-3
<i>I</i>	.118435e-1	-.277332e-1	-.331499e-2	-.125747e-1
<i>M</i>	.399370e-2	-.830969e-2	-.109538e-2	-.322061e-2
<i>Y</i>	.138461e-1	-.264823e-1	-.233802e-2	-.102981e-1

 $\hat{\Omega}_{6,4} / T$ (variabili predeterminate Y_{t-1}, I_{t-1})

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	-.125262e-1	-.134203e-1	-.768458e-2	-.182619e-1
<i>I</i>	-.305995e-1	-.472659e-1	-.281140e-1	-.497514e-1
<i>M</i>	-.893654e-2	-.135234e-1	-.114126e-1	-.110473e-1
<i>Y</i>	-.341891e-1	-.471628e-1	-.243859e-1	-.569660e-1

$\hat{\Omega}_{6,5} / T$ (variabili predeterminate Y_{t-1}, M_{t-1})

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	.0	.0	.0	.0
<i>I</i>	.0	.0	.0	.0
<i>M</i>	.0	.0	.0	.0
<i>Y</i>	.0	.0	.0	.0

 $\hat{\Omega}_{6,6} / T$ (variabili predeterminate Y_{t-1}, Y_{t-1})

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>
<i>C</i>	.448476e-2			
<i>I</i>	.132739e-1	.483355e-1		
<i>M</i>	.396007e-2	.145224e-1	.501066e-2	
<i>Y</i>	.137986e-1	.470869e-1	.134719e-1	.474137e-1

Tabella 36

 Matrice $\hat{\Pi}_1$ ($\times 10$)

29235.1	2.05929
32297.7	1.98929
-44223.9	3.11247
105757.	10.9361

 Matrice $\hat{\Pi}_0$ ($\times 10$)

8.53712	1.90510	.0	-.395478
1.40827	10.6029	.0	-2.20104
2.20341	2.39073	.0	-.496291
7.74199	10.1172	.0	-2.10023

Potenze della matrice $\hat{\Pi}_0$ $\hat{\Pi}_0^2 (\times 10)$

7.25036	3.24624	.0	-.673885
.991393	9.28354	.0	-1.92716
1.83353	2.45253	.0	-.509118
6.40822	10.0773	.0	-2.09193

 $\hat{\Pi}_0^3 (\times 10)$

6.12516	4.14142	.0	-.859716
.661734	8.08233	.0	-1.67781
1.51653	2.43460	.0	-.505397
5.27036	9.78916	.0	-2.03212

13. ERRORE DI PREVISIONE NEI MODELLI DINAMICI NON LINEARI

Un modello econometrico dinamico e non lineare (sia nelle variabili che nei coefficienti) può essere rappresentato, estendendo la notazione del capitolo 5, nel modo seguente:

$$(13.1) \quad f(y_t, x_t, y_{t-1}, a) = u_t \quad (t = 1, 2, \dots, T).$$

Dati x_t , y_{t-1} , a e u_t , si suppone che il sistema di equazioni (13.1) ammetta un'unica soluzione per y_t ; in altre parole si suppone che il sistema definisca implicitamente il vettore y_t come funzione delle altre variabili

$$(13.2) \quad y_t = y(x_t, y_{t-1}, a, u_t).$$

La (13.2) può essere considerata la *forma ridotta* del modello, ed in generale non è rappresentabile analiticamente.

Supponiamo ora di utilizzare il modello per un esercizio di previsione nei periodi $1, 2, \dots, h$, supponendo note, al solito, le variabili predeterminate $y_0, x_1, x_2, \dots, x_h$. Il valore "vero" delle variabili endogene può essere rappresentato impiegando ricorsivamente la (13.2) ed introducendo le funzioni $y^{(1)}$ (uguale alla y), $y^{(2)}$, $y^{(3)}$, ..., $y^{(h)}$ opportunamente definite

$$(13.3) \quad \left[\begin{array}{l} y_1 = y(x_1, y_0, a, u_1) = y^{(1)}(x_1, y_0, a, u_1) \\ y_2 = y(x_2, y_1, a, u_2) = y[x_2, y^{(1)}(x_1, y_0, a, u_1), a, u_2] = \\ \quad = y^{(2)}(x_1, x_2, y_0, a, u_1, u_2) \\ y_3 = y(x_3, y_2, a, u_3) = \\ \quad = y[x_3, y^{(2)}(x_1, x_2, y_0, a, u_1, u_2), a, u_3] = \\ \quad = y^{(3)}(x_1, x_2, x_3, y_0, a, u_1, u_2, u_3) \\ \quad \vdots \\ y_h = y(x_h, y_{h-1}, a, u_h) = \\ \quad = y[x_h, y^{(h-1)}(x_1, \dots, x_{h-1}, y_0, a, u_1, \dots, u_{h-1}), a, u_h] = \\ \quad = y^{(h)}(x_1, x_2, \dots, x_h, y_0, a, u_1, u_2, \dots, u_h). \end{array} \right.$$

In assenza di errori, la previsione fornita dal modello nei periodi 1, 2, ..., h , sarebbe dunque rappresentabile come

$$(13.4) \quad \left[\begin{array}{l} \bar{y}_1 = y^{(1)}(x_1, y_0, a, 0) \\ \bar{y}_2 = y^{(2)}(x_1, x_2, y_0, a, 0, 0) \\ \bar{y}_3 = y^{(3)}(x_1, x_2, x_3, y_0, a, 0, 0, 0) \\ \quad \vdots \\ \bar{y}_h = y^{(h)}(x_1, x_2, \dots, x_h, y_0, a, 0, 0, \dots, 0) \end{array} \right.$$

mentre la previsione effettivamente fornita dal modello, con i coefficienti stimati \hat{a} , mediante simulazione deterministica dinamica dal periodo 1 al periodo h , sarà

$$(13.5) \quad \begin{cases} \hat{y}_1 = y^{(1)}(x_1, y_0, \hat{a}, 0) \\ \hat{y}_2 = y^{(2)}(x_1, x_2, y_0, \hat{a}, 0, 0) \\ \hat{y}_3 = y^{(3)}(x_1, x_2, x_3, y_0, \hat{a}, 0, 0, 0) \\ \vdots \\ \hat{y}_h = y^{(h)}(x_1, x_2, \dots, x_h, y_0, \hat{a}, 0, 0, \dots, 0). \end{cases}$$

Come nel caso lineare, si ammette di avere a disposizione un vettore \hat{a} , stima consistente di a , tale che, asintoticamente, $\sqrt{T}(\hat{a} - a) \sim N(0, \Psi)$ (si noti pero' che nel caso di un modello dinamico non lineare non e' affatto scontato che tali proprieta' siano verificate sulla base di semplici ipotesi, quali quelle richieste nel caso di modello lineare, o nel caso di modello non lineare statico; si vedano, a questo proposito, Gallant, 1977, pp. 73-74, e Hatanaka, 1978, nota 8).

Il vettore degli errori di previsione al tempo h , $(\hat{y}_h - y_h)$, puo' essere espresso come

$$(13.6) \quad \hat{y}_h - y_h = (\hat{y}_h - \bar{y}_h) + (\bar{y}_h - y_h).$$

E' evidente dalle equazioni (13.3), (13.4) e (13.5) che, analogamente a quanto si e' visto per il modello lineare, la prima componente $(\hat{y}_h - \bar{y}_h)$ dipende solamente dall'errore nella stima dei coefficienti strutturali, mentre la seconda $(\bar{y}_h - y_h)$ dipende soltanto dai disturbi strutturali nel periodo di simulazione dinamica. Operando al di fuori del periodo campionario utilizzato per la stima dei coefficienti, e supponendo noti i valori di tutte le variabili predeterminate nel periodo di previsione, le due componenti sono indipendenti, e le loro varianze (o le loro matrici di covarianza) possono essere sommate per calcolare le varianze (o la matrice di covarianza) degli errori di previsione.

13.1. La componente dovuta all'errore di stima

Una stima della matrice di covarianza della componente dovuta agli errori nella stima dei coefficienti puo' essere ottenuta in maniera del tutto analoga a quanto visto per il modello statico nel paragrafo 6.1. In base al lemma 3.7 sulla distribuzione asintotica di funzioni di variabili normali multivariate, poiche' il vettore $\sqrt{T}(\hat{a} - a)$ e' distribuito asintoticamente come $N(0, \Psi)$, allora la componente dell'errore di previsione $\sqrt{T}(\hat{y}_h - \bar{y}_h) = \sqrt{T}[y^{(h)}(\dots, \hat{a}, \dots) - y^{(h)}(\dots, a, \dots)]$ (ottenuta con la sostituzione dell'ultima delle (13.4) e (13.5) a \bar{y}_h e \hat{y}_h rispettivamente) e' asintoticamente distribuita come $N(0, G_h \Psi G_h')$, dove G_h e' la matrice (di dimensioni $m \times s$) delle derivate prime $\partial y^{(h)} / \partial a'$ calcolate nel punto $(x_1, x_2, \dots, x_h, y_0, a, 0, 0, \dots, 0)$.

Considerando nelle (13.4) i vettori $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_h$ come funzioni di a , si ha, *identicamente* per ogni a ,

$$(13.1.1) \quad \begin{cases} f(\bar{y}_1, x_1, y_0, a) \equiv 0 \\ f(\bar{y}_2, x_2, \bar{y}_1, a) \equiv 0 \\ \vdots \\ f(\bar{y}_h, x_h, \bar{y}_{h-1}, a) \equiv 0 \end{cases}$$

(indicheremo, per semplicita', con f_1, f_2, \dots, f_h le funzioni sul lato sinistro) da cui

$$(13.1.2) \quad \left[\begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial \bar{y}_1'} \cdot \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial a'} + \frac{\partial f_1}{\partial a'} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial \bar{y}_2'} \cdot \frac{\partial \bar{y}_2}{\partial a'} + \frac{\partial f_2}{\partial \bar{y}_1'} \cdot \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial a'} + \frac{\partial f_2}{\partial a'} = 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial \bar{y}_3'} \cdot \frac{\partial \bar{y}_3}{\partial a'} + \frac{\partial f_3}{\partial \bar{y}_2'} \cdot \frac{\partial \bar{y}_2}{\partial a'} + \frac{\partial f_3}{\partial a'} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_h}{\partial \bar{y}_h'} \cdot \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a'} + \frac{\partial f_h}{\partial \bar{y}_{h-1}'} \cdot \frac{\partial \bar{y}_{h-1}}{\partial a'} + \frac{\partial f_h}{\partial a'} = 0. \end{array} \right.$$

Analogamente al caso statico (eq. 6.1.2), dalla prima delle (13.1.2) si puo' ricavare $\partial \bar{y}_1 / \partial a'$, essendo le altre derivate relative alle funzioni f , che sono note (forma strutturale). Sostituendo tale valore nella seconda equazione, si ricava $\partial \bar{y}_2 / \partial a'$ (essendo ancora le altre derivate relative alle funzioni f), che puo' essere sostituita nella terza equazione; e cosi' via, fino ad ottenere dall'ultima equazione $\partial \bar{y}_h / \partial a'$, ossia la matrice G_h .

Calcolando le derivate nel punto $(x_1, x_2, \dots, x_h, y_0, \hat{a}, 0, 0, \dots, 0)$ si ottiene \hat{G}_h , una stima consistente di G_h ; gli elementi diagonali di $\hat{G}_h(\hat{\Psi}/T)\hat{G}_h'$ sono le stime delle varianze asintotiche degli elementi di $(\hat{y}_h - \bar{y}_h)$.

Il calcolo numerico degli elementi della matrice \hat{G}_h puo' essere eseguito in maniera analoga al caso statico (paragrafo 6.1). La soluzione di controllo richiede una simulazione dinamica su tutto il periodo di previsione; e cosi' pure ogni soluzione disturbata (con $\Delta \hat{a}_k$) richiede una simulazione dinamica su tutto il periodo $1, 2, \dots, h$.

13.2. La componente dovuta ai disturbi strutturali: simulazione stocastica

Analogamente al caso statico, approssimazioni del valor medio condizionato e della matrice di covarianza di $\bar{y}_h - y_h$

$$(13.2.1) \quad m = E \left[(\bar{y}_h - y_h) \mid x_1, x_2, \dots, x_h, y_0, a, \Sigma \right]$$

$$(13.2.2) \quad V = V \left[(\bar{y}_h - y_h) \mid x_1, x_2, \dots, x_h, y_0, a, \Sigma \right]$$

possono essere ottenute tramite simulazione stocastica.

Come nel caso statico, supponiamo per il momento di avere a disposizione i veri parametri strutturali del modello, vettore a e matrice di covarianza Σ dei disturbi strutturali; ammettiamo anche che i disturbi abbiano distribuzione normale multivariata. Non disponendo, in realt , dei valori veri di a e Σ , bensic di stime \hat{a} e $\hat{\Sigma}$, i procedimenti di calcolo forniranno soltanto una stima dei momenti (primo e secondo) della distribuzione di $\bar{y}_h - y_h$.

Calcoliamo, dunque, media e matrice di covarianza della componente dell'errore di previsione dovuta ai disturbi strutturali, nell'ultimo (h -esimo) dei periodi di previsione. Il procedimento si articola nelle fasi seguenti.

- 1) Si risolve con simulazione dinamica deterministica il modello nel periodo di previsione 1, 2, ..., h , ottenendo i vettori $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_h$.
- 2) Si generano h vettori di disturbi strutturali pseudo-casuali indipendenti $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_h$, ciascuno con distribuzione normale, media zero e matrice di covarianza Σ (Nagar, 1969; McCarthy, 1972).
- 3) Si introducono i vettori $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_h$ nel modello e lo si risolve (simulazione stocastica dinamica), ottenendo i vettori $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_h$.

- 4) Si calcola (e si memorizza) il vettore delle differenze $\bar{y}_h - \tilde{y}_h$, relativo all'ultimo dei periodi di previsione.
- 5) Si ripete R volte il procedimento dalla fase 2 alla fase 4 (1000 volte, ad esempio) raccogliendo tutti i vettori $\bar{y}_h - \tilde{y}_h$. I vettori $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_h$ sono generati indipendentemente nella varie repliche (oltre che essere indipendenti tra loro nella stessa replicazione).

Calcolando la media e la matrice di covarianza dei vettori $\bar{y}_h - \tilde{y}_h$ ottenuti nelle diverse repliche, otteniamo una approssimazione del vettore medio e della matrice di covarianza della componente dell'errore di previsione in esame; l'approssimazione, ovviamente, migliora all'aumentare del numero di repliche. Analogamente al paragrafo 6.3, infatti, sotto ipotesi sufficientemente generali, la media e la matrice di covarianza calcolate con R repliche

$$(13.2.3) \quad \tilde{m}_R = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R (\bar{y}_h - \tilde{y}_h^{(r)})$$

$$(13.2.4) \quad \tilde{V}_R = \frac{1}{R-1} \sum_{r=1}^R [(\bar{y}_h - \tilde{y}_h^{(r)}) - \tilde{m}_R][(\bar{y}_h - \tilde{y}_h^{(r)}) - \tilde{m}_R]'$$

convergono in probabilità a m e V , all'aumentare di R

$$(13.2.5) \quad \underset{R \rightarrow \infty}{plim} \tilde{m}_R = m = E[(\bar{y}_h - y_h) \mid x_1, x_2, \dots, x_h, y_0, a, \Sigma]$$

$$(13.2.6) \quad \underset{R \rightarrow \infty}{plim} \tilde{V}_R = V = V[(\bar{y}_h - y_h) \mid x_1, x_2, \dots, x_h, y_0, a, \Sigma].$$

13.3. Variabili antitetiche e variabili di controllo

Anche per la simulazione stocastica dinamica si pongono gli stessi problemi di precisione del calcolo già discussi nel paragrafo 6.3. Sia \tilde{m}_R che \tilde{V}_R , infatti, sono affette da un errore sperimentale la cui varianza è', di solito, piuttosto elevata per valori ragionevolmente bassi del numero di replicazioni (R).

Con opportune modifiche, le tecniche di riduzione della varianza sperimentale discusse nei paragrafi 6.4 e 6.5 possono essere impiegate anche nel caso di previsione multiperiodale e simulazione dinamica.

Esaminiamo innanzitutto il procedimento di simulazione stocastica con variabili antitetiche.

- 1) Si risolve deterministicamente il modello nel periodo di previsione, con simulazione dinamica, ottenendo i vettori $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_h$.
- 2) Si generano h vettori di disturbi strutturali pseudo-casuali indipendenti, $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_h$; ogni vettore avrà distribuzione normale, media zero e matrice di covarianza Σ (usando le tecniche già ricordate nel paragrafo precedente).
- 3) Si introducono i vettori $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_h$ nel modello e lo si risolve (simulazione stocastica dinamica) ottenendo, per le variabili endogene nel periodo di previsione, h vettori che indicheremo con $\tilde{y}_1^+, \tilde{y}_2^+, \dots, \tilde{y}_h^+$.
- 4) Si introducono gli stessi vettori di disturbi strutturali, ma col segno opposto, $-\tilde{u}_1, -\tilde{u}_2, \dots, -\tilde{u}_h$, e si risolve il modello, sempre con simulazione dinamica su tutto il periodo di previsione, ottenendo h vettori che indicheremo con $\tilde{y}_1^-, \tilde{y}_2^-, \dots, \tilde{y}_h^-$.
- 5) Limitandoci a considerare l'ultimo dei periodi di previsione, calcoliamo la media aritmetica tra i due vettori \tilde{y}_h^+ e \tilde{y}_h^- :

$$\bar{y}_h = (\tilde{y}_h^+ + \tilde{y}_h^-) / 2$$
 .
- 6) Si calcola (e si memorizza) il vettore delle differenze $\bar{y}_h - \tilde{y}_h^-$.

- 7) Si ripete R volte il procedimento dalla fase 2 alla fase 6 raccogliendo i vettori $\bar{y}_h - \tilde{y}_h$ calcolati nelle diverse replichezioni.

In questo caso, ogni replichezione comporta una generazione di h vettori di disturbi strutturali pseudo-casuali e due soluzioni dinamiche del modello nel periodo di previsione. I vettori pseudo-casuali $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_h$ sono generati indipendentemente nelle varie replichezioni (oltre che essere indipendenti tra loro nella stessa replichezione).

La media della componente del vettore degli errori di previsione dovuta ai disturbi strutturali viene, a questo punto, calcolata esattamente come nel caso statico, ossia con l'equazione (6.4.1) che ripetiamo qui per completezza di esposizione, dopo aver eliminato, per semplicità, l'indice di tempo (h)

$$(13.3.1) \quad \bar{m}_R^a = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R (\bar{y} - \tilde{y}^{(r)}) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \left(\bar{y} - \frac{\tilde{y}^{(r)+} + \tilde{y}^{(r)-}}{2} \right).$$

Valgono per \bar{m}_R^a tutte le considerazioni già svolte nel paragrafo 6.4. Ci limitiamo, pertanto, a confrontare numericamente la varianza di \bar{m}_R^a con la varianza di \tilde{m}_R (calcolata con simulazione stocastica semplice).

Consideriamo ancora una volta la variabile C (consumi) nel piccolo modello non lineare (8.3.1), in una previsione su 4 periodi ($h = 4$, la simulazione dinamica è relativa al periodo 1948 - 1951). Nell'ultimo dei 4 periodi, la varianza dell'errore di previsione di C , dovuto ai soli disturbi strutturali, è data dal settimo elemento diagonale della seconda matrice nella tabella 41 ($v = 6.53$, valore che supponiamo esatto, nell'ipotesi che a e Σ siano noti). Nel caso di semplice simulazione stocastica con R replichezioni la varianza della media calcolata \tilde{m}_R sarà, pertanto, $6.53/R$.

Applicando la simulazione stocastica con variabili antitetiche, la varianza della media \bar{m}_R^a calcolata con R replichezioni vale, invece, $0.00327/R$, circa *duemila* volte più piccola. Tenendo conto che ogni replichezione con variabili antitetiche costa circa il doppio di una replichezione di simulazione stocastica semplice, possiamo concludere che l'efficienza del calcolo aumenta di circa *mille* volte. Il *guadagno* è

sempre molto elevato, anche se un po' piu' basso che nel caso della previsione uniperiodale (circa *duemilacinquecento*, si veda il paragrafo 6.4).

Esaminiamo, ora, il procedimento di simulazione stocastica con variabili di controllo.

Occorre, innanzitutto, calcolare le derivate prime delle variabili endogene nell'ultimo periodo di previsione (h), rispetto ai disturbi strutturali, correnti e ritardati. Come nel caso statico, il calcolo di queste derivate puo' essere sviluppato per via analitica, oppure puo' essere eseguito con metodi puramente numerici.

Per via analitica possiamo procedere nel modo seguente. Consideriamo la forma strutturale del modello (eq. 13.1) e la rappresentazione delle variabili endogene nel periodo di previsione 1, 2, ..., h fornita dalle equazioni (13.3). Sostituendo le equazioni (13.3) nella forma strutturale, avremo

$$(13.3.2) \quad \left[\begin{array}{l} f[y^{(1)}(x_1, y_0, a, u_1), x_1, y_0, a] \equiv u_1 \\ f[y^{(2)}(x_1, x_2, y_0, a, u_1, u_2), x_2, y^{(1)}(x_1, y_0, a, u_1), a] \equiv u_2 \\ \vdots \\ f[y^{(h-1)}(x_1, x_2, \dots, x_{h-1}, y_0, a, u_1, u_2, \dots, u_{h-1}), x_{h-1}, \\ y^{(h-2)}(x_1, x_2, \dots, x_{h-2}, y_0, a, u_1, u_2, \dots, u_{h-2}), a] \equiv u_{h-1} \\ f[y^{(h)}(x_1, x_2, \dots, x_h, y_0, a, u_1, u_2, \dots, u_h), x_h, \\ y^{(h-1)}(x_1, x_2, \dots, x_{h-1}, y_0, a, u_1, u_2, \dots, u_{h-1}), a] \equiv u_h \end{array} \right.$$

identicamente per ogni u_1, u_2, \dots, u_h . Per costruire le variabili di controllo, occorre calcolare le h matrici jacobiane, contenenti le derivate del vettore di funzioni $y^{(h)}$ rispetto agli h vettori di disturbi strutturali u_1', u_2', \dots, u_h' , in corrispondenza della soluzione deterministica del sistema nell'ultimo periodo di previsione, ossia nel punto $(x_1, \dots, x_h, y_0, a, u_1 = \dots = u_h = 0)$.

Conviene adottare la stessa semplificazione già utilizzata per le equazioni (13.1.2). Indichiamo, cioè, con $\partial f_1/\partial \bar{y}_1'$ la matrice delle derivate prime del vettore di funzioni $f(y_t, x_t, y_{t-1}, a)$, rispetto alle endogene correnti, calcolate nel punto (\bar{y}_1, x_1, y_0, a) ; una volta calcolato \bar{y}_1 , tali derivate sono calcolabili analiticamente, essendo relative alle funzioni della forma strutturale.

Indichiamo poi con $\partial f_2/\partial \bar{y}_2'$ e con $\partial f_2/\partial \bar{y}_1'$ le due matrici di derivate, rispetto alle endogene correnti e ritardate, del vettore di funzioni $f(y_t, x_t, y_{t-1}, a)$, calcolate nel punto $(\bar{y}_2, x_2, \bar{y}_1, a)$; e così via, fino a $\partial f_h/\partial \bar{y}_h'$ e $\partial f_h/\partial \bar{y}_{h-1}'$.

Dall'ultima delle equazioni (13.3.2), derivando rispetto a u_h' , otteniamo, dunque

$$(13.3.3) \quad \frac{\partial f_h}{\partial \bar{y}_h'} \cdot \frac{\partial y^{(h)}}{\partial u_h'} = I_m$$

(dove I_m è la matrice unitaria $m \times m$), da cui ricaviamo

$$(13.3.4) \quad \frac{\partial y^{(h)}}{\partial u_h'} = \left[\frac{\partial f_h}{\partial \bar{y}_h'} \right]^{-1}$$

dove tutte le derivate $\partial y^{(h)}/\partial u_h'$ si intendono calcolate nel punto $(x_1, \dots, x_h, y_0, a, u_1 = \dots = u_h = 0)$.

Dalle ultime due equazioni (13.3.2), relative al periodo $h-1$ e h , derivando rispetto a u_{h-1} , otteniamo

$$(13.3.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial f_{h-1}}{\partial \bar{y}_{h-1}'} \cdot \frac{\partial y^{(h-1)}}{\partial u_{h-1}'} = I_m \\ \frac{\partial f_h}{\partial \bar{y}_h'} \cdot \frac{\partial y^{(h)}}{\partial u_{h-1}'} + \frac{\partial f_h}{\partial \bar{y}_{h-1}'} \cdot \frac{\partial y^{(h-1)}}{\partial u_{h-1}'} = 0. \end{cases}$$

Ricavando la matrice $\partial y^{(h)}/\partial u_{h-1}'$, dalla prima delle due equazioni (13.3.5) e sostituendola nella seconda, possiamo così calcolare le derivate delle variabili endogene nell'ultimo periodo di previsione, rispetto ai disturbi strutturali del periodo precedente

$$(13.3.6) \quad \frac{\partial y^{(h)}}{\partial u_{h-1}'} = - \left[\frac{\partial f_h}{\partial \bar{y}_h'} \right]^{-1} \frac{\partial f_h}{\partial \bar{y}_{h-1}'} \left[\frac{\partial f_{h-1}}{\partial \bar{y}_{h-1}'} \right]^{-1}$$

dove anche $\partial y^{(h)}/\partial u_{h-1}'$ si intende, al solito, calcolata nel punto $(x_1, \dots, x_h, y_0, a, u_1 = \dots = u_h = 0)$.

In maniera del tutto analoga, dalle ultime tre equazioni (13.3.2), relative ai periodi $h-2$, $h-1$ e h , derivando rispetto a u_{h-2}' otteniamo tre equazioni che si possono risolvere ricorsivamente ottenendo $\partial y^{(h)}/\partial u_{h-2}'$. E così via, finché arriviamo a calcolare, dopo aver derivato rispetto ad u_1' tutte le equazioni (13.3.2), $\partial y^{(h)}/\partial u_1'$ nel punto $(x_1, \dots, x_h, y_0, a, u_1 = \dots = u_h = 0)$.

Per via puramente numerica, possiamo calcolare le h matrici di derivate prime come rapporti incrementali. Ad esempio, possiamo procedere nel modo seguente (la procedura è, comunque, più laboriosa che nel caso statico). Risolviamo, innanzitutto, il modello nel periodo di previsione, $1, 2, \dots, h$, con simulazione dinamica, calcolando i vettori $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_h$ (sempre nell'ipotesi di disporre dei veri parametri strutturali). Eseguiamo ora la simulazione, su tutto il periodo, altre m volte; di volta in volta assegnamo un valore $\Delta u_{k,1} \neq 0$ al disturbo di una equazione strutturale (la k -esima) nel periodo 1, mentre poniamo uguali a zero i disturbi di tutte le altre equazioni nel periodo 1, come pure i disturbi di tutte le equazioni, inclusa la k -esima, nei periodi $2, 3, \dots, h$. Se indichiamo con $y_h^{(k)}$ il vettore soluzione, nell'ultimo periodo, corrispondente al disturbo nell'equazione k -esima, il rapporto tra il vettore $(y_h^{(k)} - \bar{y}_h)$ e lo scalare $\Delta u_{k,1}$ ci fornisce, con una certa approssimazione, il vettore delle derivate prime delle m variabili endogene nel periodo h , rispetto al disturbo strutturale della k -esima equazione nel primo periodo.

Si ripete, ora, il medesimo procedimento, ma assegnando valori $\Delta u_{k,2} \neq 0$ ai disturbi strutturali nel secondo periodo di previsione

(ponendo uguali a zero i disturbi nei periodi 1, 3, ..., h). Continuando ad indicare con $y_h^{(k)}$ il vettore soluzione, nell'ultimo periodo, corrispondente al disturbo nell'equazione k -esima, il rapporto tra il vettore $(y_h^{(k)} - \bar{y}_h)$ e lo scalare $\Delta u_{k,2}$ ci fornisce le derivate prime delle m variabili endogene nel periodo h , rispetto al disturbo strutturale della k -esima equazione nel secondo periodo (si noti che, in questo caso, la simulazione puo' iniziare direttamente dal periodo 2, assegnando alle endogene ritardate i valori gia' calcolati \bar{y}_1).

Si procede in modo analogo per i periodi successivi, fino a calcolare le derivate delle variabili endogene nel periodo h , rispetto ai disturbi strutturali dello stesso periodo. Risulta cosi' completo il calcolo numerico delle h matrici di derivate parziali.

Fissiamo ora l'attenzione su una sola variabile endogena del modello; invece che l'intero vettore delle variabili endogene, indichiamo con y questa singola variabile nell'ultimo periodo di previsione, omettendo l'indice (h). Dalle matrici di derivate prime calcolate in precedenza possiamo estrarre i vettori riga $\partial y / \partial u_1'$, $\partial y / \partial u_2'$, ... e $\partial y / \partial u_h'$. Possiamo ora definire la variabile di controllo, y_t , come

$$(13.3.7) \quad y_t = \bar{y} + \frac{\partial y}{\partial u_1'} u_1 + \frac{\partial y}{\partial u_2'} u_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial u_h'} u_h.$$

Come per il caso statico (eq. 6.5.5) la variabile di controllo viene ottenuta dallo sviluppo di Taylor, fino ai termini di primo grado, di y (al tempo h), considerata come funzione dei disturbi strutturali u_1 , u_2 , ..., u_h . Facciamo ora corrispondere, ad h vettori di disturbi strutturali nel periodo di previsione, u_1 , u_2 , ..., u_h , due valori della variabile endogena: il valore y , che si ottiene risolvendo il modello con simulazione stocastica dinamica fino all'ultimo periodo di previsione, dopo avere introdotto i vettori u_1 , u_2 , ..., u_h , e il valore della variabile di controllo y_t , che si ottiene introducendo nella equazione (13.3.7) gli stessi h vettori di disturbi strutturali.

Poiche' nell'equazione (13.3.7) le derivate si intendono calcolate in un punto e non sono, pertanto, variabili casuali, si avra'

$$(13.3.8) \quad E(y_l) = \bar{y}.$$

Possiamo, allora, esprimere la media della componente dell'errore nell'ultimo periodo di previsione, relativamente alla variabile endogena in esame, come

$$(13.3.9) \quad \begin{aligned} E(\bar{y} - y) &= E[(\bar{y} - y_l) + (y_l - y)] = \\ &= E(\bar{y} - y_l) + E(y_l - y) = E(y_l - y). \end{aligned}$$

Eseguiamo ora la simulazione stocastica dinamica del modello, con R repliche, dal periodo 1 al periodo h , come descritto nel paragrafo 13.2; nella r -esima replicazione, però, in corrispondenza degli h vettori di disturbi pseudo-casuali $\tilde{u}_1^{(r)}$, $\tilde{u}_2^{(r)}$, ..., $\tilde{u}_k^{(r)}$ calcoliamo, oltre ad $\bar{y}^{(r)}$ (risolvendo il modello vero e proprio), anche il valore della variabile di controllo $\tilde{y}_l^{(r)}$ (inserendo $\tilde{u}_1^{(r)}$, $\tilde{u}_2^{(r)}$, ..., $\tilde{u}_k^{(r)}$ nell'equazione 13.3.7).

Ricordando l'equazione (13.3.9), potremo calcolare un valore approssimato della media della componente in esame dell'errore nell'ultimo periodo di previsione come media campionaria

$$(13.3.10) \quad \tilde{m}_R^c = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R (\tilde{y}_l^{(r)} - \bar{y}^{(r)}).$$

Valgono per \tilde{m}_R^c , e per la sua varianza sperimentale, le stesse considerazioni già svolte nel caso statico (paragrafo 6.5). In particolare, nelle applicazioni pratiche ai modelli riportati in questo testo a titolo di esempio, si riscontra una varianza sperimentale di \tilde{m}_R^c circa uguale a quella della media calcolata con le variabili antitetiche, \tilde{m}_R^a , a parità di numero di repliche. Il guadagno in termini di efficienza del calcolo risulta, dunque, molto elevato rispetto alla simulazione stocastica semplice. Risulta inoltre quasi doppio rispetto alla simulazione con variabili antitetiche, a patto, però, che il numero di repliche sia sufficientemente elevato, così che si possa considerare trascurabile il costo del calcolo delle derivate prime.

Anche nel calcolo della varianza della componente dell'errore di previsione in esame, le variabili di controllo si possono impiegare in modo analogo al caso statico. Dall'equazione (13.3.7), ricordando che i disturbi strutturali sono indipendenti e identicamente distribuiti nel tempo, si ricava

$$(13.3.11) \quad V(\bar{y} - y_l) = \frac{\partial y}{\partial u_1'} \Sigma \frac{\partial y}{\partial u_1} + \frac{\partial y}{\partial u_2'} \Sigma \frac{\partial y}{\partial u_2} + \\ + \dots + \frac{\partial y}{\partial u_h'} \Sigma \frac{\partial y}{\partial u_h}.$$

Si può ora sviluppare la varianza di $(\bar{y} - y)$ nel modo seguente

$$(13.3.12) \quad V(\bar{y} - y) = V[(\bar{y} - y_l) + (y_l - y)] = \\ = V(\bar{y} - y_l) + V(y_l - y) + 2 C[(\bar{y} - y_l), (y_l - y)] =$$

(poiché $E(\bar{y} - y_l) = 0$, la covarianza è semplicemente la media del prodotto)

$$= V(\bar{y} - y_l) + V(y_l - y) + 2 E[(\bar{y} - y_l)(y_l - y)] =$$

(sostituendo le equazioni 13.3.11 e 13.3.7)

$$= \left[\frac{\partial y}{\partial u_1'} \Sigma \frac{\partial y}{\partial u_1} + \frac{\partial y}{\partial u_2'} \Sigma \frac{\partial y}{\partial u_2} + \right. \\ \left. + \dots + \frac{\partial y}{\partial u_h'} \Sigma \frac{\partial y}{\partial u_h} \right] + V(y_l - y) + \\ + 2 E \left\{ \left[\frac{\partial y}{\partial u_1'} u_1 + \frac{\partial y}{\partial u_2'} u_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial u_h'} u_h \right] (y - y_l) \right\}.$$

Il primo termine sul lato destro dell'equazione (13.3.12), ossia la varianza della variabile di controllo, e' calcolabile analiticamente. Il secondo e terzo termine possono essere calcolati dai risultati della simulazione stocastica. Il valore approssimato della varianza, ottenibile con R repliche di simulazione stocastica con variabili di controllo, sara' pertanto il seguente

$$(13.3.13) \quad \tilde{v}_R^c = \left[\frac{\partial y}{\partial u_1'} \Sigma \frac{\partial y}{\partial u_1} + \frac{\partial y}{\partial u_2'} \Sigma \frac{\partial y}{\partial u_2} + \dots + \right. \\ \left. + \frac{\partial y}{\partial u_h'} \Sigma \frac{\partial y}{\partial u_h} \right] + \frac{1}{R-1} \sum_{r=1}^R \left[(\tilde{y}_l^{(r)} - \tilde{y}^{(r)}) - \tilde{m}_R^c \right]^2 + \\ + \frac{2}{R} \sum_{r=1}^R \left\{ \left[\frac{\partial y}{\partial u_1'} \tilde{u}_1^{(r)} + \dots + \frac{\partial y}{\partial u_h'} \tilde{u}_h^{(r)} \right] (\tilde{y}^{(r)} - \tilde{y}_l^{(r)}) \right\}.$$

Se il modello fosse lineare ($y_l = y$, e quindi anche $\tilde{y}_l^{(r)} = \tilde{y}^{(r)}$), il secondo e terzo termine sul lato destro dell'equazione (13.3.12) sarebbero uguali a zero (e ad ogni replicazione di simulazione stocastica sarebbero uguali a zero i termini da inserire nelle due sommatorie dell'equazione 13.3.13).

Se il modello non e' lineare, e' opportuno fare una considerazione di carattere puramente *qualitativo*. Prima di tutto, come nel caso statico, se *localmente* il modello non si discosta troppo da un comportamento lineare, il primo termine sul lato destro dell'equazione (13.3.12) dovrebbe essere decisamente preponderante; pertanto, la varianza sperimentale nel calcolo di \tilde{v}_R^c dovrebbe risultare piuttosto bassa, essendo dovuta soltanto agli altri due termini. E' pero' ragionevole pensare che, quanto piu' elevato e' il numero di periodi di previsione (h), ossia la lunghezza del periodo di simulazione dinamica, tanto meno lineare debba risultare il comportamento del modello. Il *guadagno*, quindi, di efficienza prodotto dalle variabili di controllo, pur rimanendo elevato, dovrebbe, pero', risultare piu' basso che nel caso statico.

Come gia' in casi incontrati precedentemente, considerazioni di questo genere necessitano di una conferma sperimentale di carattere *quantitativo*. In Calzolari e Sterbenz (1986), ad esempio, si riportano i

risultati di un esperimento di previsione con il modello non lineare Klein - Goldberger su 4 periodi. In tale modello, calcolando la varianza del prodotto nazionale lordo (o dell'errore di previsione di tale variabile) nell'ultimo periodo, le variabili di controllo riducono la varianza sperimentale di circa *millecinquecento* volte, rispetto alla simulazione stocastica semplice (si e' parlato di un fattore *diecimila* nel caso statico, paragrafo 6.5). Nel piccolo modello non lineare del paragrafo 8.3, sempre in un esercizio di previsione su 4 periodi, l'efficienza del calcolo aumenta di circa *duecentocinquanta* volte per la variabile *C* (consumi; l'aumento era di circa *mille* volte nel caso statico).

13.4. Nota

Osserviamo ora come si presentano le equazioni (13.1.2) per il modello lineare. Abbiamo innanzitutto, dalle equazioni (9.1), (12.1) e (13.1)

$$(13.4.1) \quad f(\bar{y}_t, x_t, \bar{y}_{t-1}, a) = \\ = A\bar{y}_t + Bx_t + D\bar{y}_{t-1} = C \begin{bmatrix} \bar{y}_t \\ x_t \\ \bar{y}_{t-1} \end{bmatrix}$$

da cui ricaviamo, ricordando le equazioni (12.4) e (12.7) (quest'ultima, pero', calcolata in \bar{y}_{h-i} e \bar{y}_{h-i-1} , da cui \bar{F}_{h-i} , anziche' in \hat{y}_{h-i} e \hat{y}_{h-i-1})

$$(13.4.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial a'} = \bar{F}_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial a'} = \bar{F}_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_h}{\partial a'} = \bar{F}_h. \end{cases}$$

Sempre dalla (13.4.1) ricaviamo, poi

$$(13.4.3) \quad \frac{\partial f_1}{\partial \bar{y}_1'} = \frac{\partial f_2}{\partial \bar{y}_2'} = \dots = \frac{\partial f_h}{\partial \bar{y}_h'} = A$$

$$(13.4.4) \quad \frac{\partial f_2}{\partial \bar{y}_1'} = \frac{\partial f_3}{\partial \bar{y}_2'} = \dots = \frac{\partial f_h}{\partial \bar{y}_{h-1}'} = D.$$

Dalla prima delle equazioni (13.1.2) ricaviamo, quindi

$$(13.4.5) \quad \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial a'} = -A^{-1}\bar{F}_1$$

che, sostituita nella seconda, permette di calcolare

$$(13.4.6) \quad \frac{\partial \bar{y}_2}{\partial a'} = -A^{-1}(-DA^{-1}\bar{F}_1 + \bar{F}_2) = -\Pi_0 A^{-1}\bar{F}_1 - A^{-1}\bar{F}_2$$

avendo sostituito Π_0 a $-A^{-1}D$ (equazione 10.1).

L'equazione (13.4.6) puo' essere, a sua volta, sostituita nella terza delle (13.1.2), ottenendo

$$\begin{aligned}
 (13.4.7) \quad \frac{\partial \bar{y}_3}{\partial a'} &= -A^{-1} [D(-\Pi_0 A^{-1} \bar{F}_1 - A^{-1} \bar{F}_2) + \bar{F}_3] = \\
 &= \Pi_0 (-\Pi_0 A^{-1} \bar{F}_1 - A^{-1} \bar{F}_2) - A^{-1} \bar{F}_3 = \\
 &= -\Pi_0^2 A^{-1} \bar{F}_1 - \Pi_0 A^{-1} \bar{F}_2 - A^{-1} \bar{F}_3
 \end{aligned}$$

e così' via, fino ad ottenere, dall'ultima di tali equazioni

$$(13.4.8) \quad \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a'} = - \left[\sum_{i=0}^{h-1} \Pi_0^i A^{-1} \bar{F}_{h-i} \right]$$

ossia il termine che, nella equazione (12.17), premoltiplica (e, trasposto, postmoltiplica) la matrice di varianza covarianza asintotica di $\sqrt{T}(\hat{a} - a)$, cioè' la matrice Ψ . Arriviamo, pertanto, in modo piu' diretto (tramite l'applicazione del lemma 3.7) allo stesso risultato ottenuto, per via algebrica, nel paragrafo 12.

13.5. Risultati sperimentali

Possiamo ora applicare quanto visto negli ultimi paragrafi alla versione non lineare del modello Klein-I già' impiegata nel paragrafo 8.3 per un esercizio di previsione uniperiodale (simulazione statica).

I valori delle variabili nel periodo di previsione (1948-51; sono inoltre necessari i valori relativi al 1947 per le variabili ritardate), riportati in tabella 37, sono stati presi dal lavoro di Schink (1971, p. 479). Tali valori differiscono da quelli già' riportati, per gli anni 1947-48, nella tabella 9 (ricavati dall'articolo di Goldberger et al., 1961). Cio' comporta alcune differenze nei risultati relativi alle previsioni nel primo periodo (1948, simulazione statica). In particolare, confrontando le tabelle 22 e 38, si notano differenze considerevoli nella stima della matrice di covarianza della componente dell'errore di previsione dovuta

agli errori nella stima dei coefficienti. Risultano, invece, del tutto trascurabili le differenze nella stima della matrice di covarianza della componente dovuta ai disturbi strutturali.

L'esame dei risultati numerici suggerisce alcune considerazioni. La varianza della componente relativa all'errore nella stima dei coefficienti e', in alcuni casi, minore, in altri maggiore della varianza della componente relativa ai disturbi strutturali. Per ogni variabile, la varianza della componente dovuta ai disturbi strutturali aumenta nel tempo. Considerando l'espressione di tale varianza (equazione 13.3.13), il primo termine sul lato destro (tra parentesi quadre) e' la somma, nel tempo, di forme quadratiche *semidefinite positive*. E' dunque ragionevole attendersi un comportamento di questo genere (comportamento gia' evidenziato per il modello lineare nel paragrafo 12.1) se, come suggerito nel paragrafo 13.3, il termine in questione risulta essere dominante.

Tale comportamento non e', invece, necessario per la varianza della componente relativa agli errori nella stima dei coefficienti. La variabile *I* (investimenti) ci fornisce un esempio di varianza che diminuisce nel tempo: passa infatti da un valore 5.17 nelle previsioni al 1949 (tabella 39), ad un valore 4.47 nelle previsioni al 1950 (tabella 40), ad un valore 4.01 nell'ultimo periodo di previsione (1951, tabella 41).

Sempre per la variabile *I*, la varianza della componente dovuta agli errori di stima diminuisce piu' rapidamente di quanto aumenti la varianza dell'altra componente. In questi anni, pertanto, la stima della varianza complessiva dell'errore di previsione risulta decrescente nel tempo (nell'ultima parte delle tabelle 39, 40 e 41 sono riportate le stime degli scarti quadratici medi; si passa da un valore 3.01 per le previsioni al 1949, ad un valore 2.94 per il 1950, ad un valore, infine 2.91 per il 1951).

Una ulteriore considerazione riguarda il confronto tra gli errori di previsione, osservati *ex-post*, con la stima dei loro scarti quadratici medi. Confrontando, ad esempio, le prime tre colonne nell'ultima parte di tabella 41, ci accorgiamo che l'errore di previsione e', in alcuni casi, addirittura 4 - 5 volte maggiore del corrispondente scarto quadratico medio. Se impiegassimo le stime delle matrici di covarianza per sottoporre a test una ipotesi di *corretta capacita' previsiva* del modello

(sul tipo del test impiegato da Chong e Hendry, 1986, p. 682), tale ipotesi verrebbe certamente rifiutata: sarebbe sorprendente il contrario, ricordando su quale periodo storico sono stati stimati i parametri del modello, e su quale periodo, invece, vengono eseguite le previsioni.

Tabella 37

Valori storici della variabili

	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>W1</i>	<i>Y</i>	<i>P</i>	<i>K</i>	<i>W2</i>	<i>T</i>	<i>t</i>	<i>G</i>
1947	87.1	6.9	68.3	106.4	28.7	213.7	9.4	7.9	16.0	20.3
1948	89.3	8.4	70.3	111.9	32.0	222.1	9.6	6.2	17.0	20.4
1949	91.9	3.3	69.3	110.4	30.6	225.4	10.5	8.1	18.0	23.3
1950	98.2	9.1	75.0	117.8	31.6	234.5	11.2	11.1	19.0	21.6
1951	99.4	7.8	80.7	126.8	32.6	242.3	13.5	12.1	20.0	31.7

Tabella 38

Versione non lineare del modello Klein-I. Stima FIML non lineare. Stima delle matrici di covarianza delle due componenti dell'errore di previsione al 1948. Simulazione statica.

Componente relativa all'errore nella stima dei coefficienti

	<i>AUX</i>	<i>I</i>	<i>W1</i>	<i>Y</i>	<i>P</i>	<i>K</i>	<i>C</i>
<i>AUX</i>	.386e-3						
<i>I</i>	.211e-1	2.05					
<i>W1</i>	.232e-1	2.15	2.76				
<i>Y</i>	.521e-1	3.75	4.01	7.93			
<i>P</i>	.289e-1	1.59	1.26	3.91	2.66		
<i>K</i>	.211e-1	2.05	2.15	3.75	1.59	2.05	
<i>C</i>	.310e-1	1.70	1.86	4.18	2.32	1.70	2.49

Componente relativa ai disturbi strutturali

	<i>AUX</i>	<i>I</i>	<i>W1</i>	<i>Y</i>	<i>P</i>	<i>K</i>	<i>C</i>
<i>AUX</i>	.520e-3						
<i>I</i>	.251e-1	2.44					
<i>W1</i>	.246e-1	2.50	2.68				
<i>Y</i>	.668e-1	4.45	4.47	9.82			
<i>P</i>	.423e-1	1.96	1.79	5.35	3.56		
<i>K</i>	.251e-1	2.44	2.50	4.45	1.96	2.44	
<i>C</i>	.418e-1	2.01	1.97	5.37	3.39	2.01	3.35

Valori calcolati delle endogene (previsioni), valori osservati *ex-post*, stima dello scarto quadratico medio delle previsioni e media condizionata degli errori di previsione.

	Valore calcolato	Valore osservato	Stima scarto quad. medio	Media condiz. dell'errore
<i>AUX</i>	4.39	4.49	.030	.0003
<i>I</i>	6.45	8.40	2.12	-.0001
<i>W1</i>	62.6	70.3	2.33	.0002
<i>Y</i>	100.9	111.9	4.21	.0006
<i>P</i>	28.8	32.0	2.49	.0004
<i>K</i>	220.2	222.1	2.12	-.0001
<i>C</i>	80.3	89.3	2.42	.0007

Tabella 39

Versione non lineare del modello Klein-I. Stima FIML non lineare. Stima delle matrici di covarianza delle due componenti dell'errore di previsione al 1949. Simulazione dinamica dal 1948.

Componente relativa all'errore nella stima dei coefficienti

	<i>AUX</i>	<i>I</i>	<i>W1</i>	<i>Y</i>	<i>P</i>	<i>K</i>	<i>C</i>
<i>AUX</i>	.114e-2						
<i>I</i>	.728e-1	5.17					
<i>W1</i>	.806e-1	5.81	7.17				
<i>Y</i>	.164	11.0	12.2	24.1			
<i>P</i>	.834e-1	5.18	5.08	11.8	6.76		
<i>K</i>	.111	8.18	9.50	17.0	7.52	13.2	
<i>C</i>	.912e-1	5.82	6.44	13.1	6.66	8.83	7.28

Componente relativa ai disturbi strutturali

	<i>AUX</i>	<i>I</i>	<i>W1</i>	<i>Y</i>	<i>P</i>	<i>K</i>	<i>C</i>
<i>AUX</i>	.822e-3						
<i>I</i>	.453e-1	3.89					
<i>W1</i>	.514e-1	4.25	5.08				
<i>Y</i>	.111	7.51	8.36	16.4			
<i>P</i>	.596e-1	3.26	3.28	8.02	4.75		
<i>K</i>	.656e-1	4.93	6.18	10.2	3.99	8.41	
<i>C</i>	.657e-1	3.62	4.11	8.87	4.76	5.24	5.25

Valori calcolati delle endogene (previsioni), valori osservati *ex-post*, stima dello scarto quadratico medio delle previsioni e media condizionata degli errori di previsione.

	Valore calcolato	Valore osservato	Stima scarto quad. medio	Media condiz. dell'errore
<i>AUX</i>	4.38	4.52	.044	.0006
<i>I</i>	5.19	3.30	3.01	-.0015
<i>W1</i>	61.1	69.3	3.50	.0039
<i>Y</i>	100.3	110.4	6.36	.0114
<i>P</i>	28.7	30.6	3.39	.0075
<i>K</i>	225.3	225.4	4.65	-.0016
<i>C</i>	79.9	91.9	3.54	.0129

Tabella 40

Versione non lineare del modello Klein-I. Stima FIML non lineare. Stima delle matrici di covarianza delle due componenti dell'errore di previsione al 1950. Simulazione dinamica dal 1948.

Componente relativa all'errore nella stima dei coefficienti

	<i>AUX</i>	<i>I</i>	<i>W1</i>	<i>Y</i>	<i>P</i>	<i>K</i>	<i>C</i>
<i>AUX</i>	.164e-2						
<i>I</i>	.834e-1	4.47					
<i>W1</i>	.116	6.27	9.79				
<i>Y</i>	.213	11.1	15.5	27.9			
<i>P</i>	.967e-1	4.80	5.68	12.4	6.76		
<i>K</i>	.204	11.2	17.1	27.4	10.2	31.2	
<i>C</i>	.130	6.59	9.20	16.8	7.64	16.2	10.2

Componente relativa ai disturbi strutturali

	<i>AUX</i>	<i>I</i>	<i>W1</i>	<i>Y</i>	<i>P</i>	<i>K</i>	<i>C</i>
<i>AUX</i>	.100e-2						
<i>I</i>	.520e-1	4.16					
<i>W1</i>	.647e-1	4.74	6.19				
<i>Y</i>	.131	8.28	9.86	18.6			
<i>P</i>	.664e-1	3.53	3.67	8.78	5.11		
<i>K</i>	.932e-1	5.73	8.72	13.1	4.36	15.7	
<i>C</i>	.791e-1	4.11	5.11	10.4	5.25	7.36	6.25

Valori calcolati delle endogene (previsioni), valori osservati *ex-post*, stima dello scarto quadratico medio delle previsioni e media condizionata degli errori di previsione.

	Valore calcolato	Valore osservato	Stima scarto quad. medio	Media condiz. dell'errore
<i>AUX</i>	4.37	4.59	.051	.0009
<i>I</i>	5.33	9.10	2.94	.0025
<i>W1</i>	60.3	75.0	4.00	.0129
<i>Y</i>	94.9	117.8	6.82	.0308
<i>P</i>	23.3	31.6	3.45	.0179
<i>K</i>	230.7	234.5	6.85	.0009
<i>C</i>	79.0	98.2	4.06	.0283

Tabella 41

Versione non lineare del modello Klein-I. Stima FIML non lineare.
Stima delle matrici di covarianza delle due componenti dell'errore di
previsione al 1951. Simulazione dinamica dal 1948.

Componente relativa all'errore nella stima dei coefficienti

	<i>AUX</i>	<i>I</i>	<i>W1</i>	<i>Y</i>	<i>P</i>	<i>K</i>	<i>C</i>
<i>AUX</i>	.173e-2						
<i>I</i>	.789e-1	4.01					
<i>W1</i>	.117	5.73	9.27				
<i>Y</i>	.219	10.4	15.1	28.0			
<i>P</i>	.102	4.65	5.87	12.9	7.02		
<i>K</i>	.270	13.7	22.1	35.4	13.4	54.6	
<i>C</i>	.140	6.37	9.41	17.7	8.25	21.8	11.3

Componente relativa ai disturbi strutturali

	<i>AUX</i>	<i>I</i>	<i>W1</i>	<i>Y</i>	<i>P</i>	<i>K</i>	<i>C</i>
<i>AUX</i>	.100e-2						
<i>I</i>	.529e-1	4.47					
<i>W1</i>	.666e-1	4.92	6.50				
<i>Y</i>	.134	8.74	10.3	19.5			
<i>P</i>	.672e-1	3.82	3.79	9.25	5.46		
<i>K</i>	.956e-1	5.12	9.35	12.8	3.49	21.5	
<i>C</i>	.809e-1	4.27	5.38	10.8	5.43	7.72	6.53

Valori calcolati delle endogene (previsioni), valori osservati *ex-post*, stima dello scarto quadratico medio delle previsioni e media condizionata degli errori di previsione.

	Valore calcolato	Valore osservato	Stima scarto quad. medio	Media condiz. dell'errore
<i>AUX</i>	4.39	4.60	.052	.0010
<i>I</i>	-0.93	7.80	2.91	.0091
<i>W1</i>	60.8	80.7	3.97	.0239
<i>Y</i>	99.4	126.8	6.90	.0503
<i>P</i>	25.1	32.6	3.53	.0264
<i>K</i>	229.7	242.3	8.72	.0100
<i>C</i>	80.7	99.4	4.22	.0412

BIBLIOGRAFIA

- Ahlstedt, M. (1986): *Small Sample Estimation and Stochastic Simulation of an Econometric Model*. Helsinki: Suomen Pankki (Bank of Finland), Institute for Economic Research, Series D, No. 63.
- Amemiya, T. (1977): "The Maximum Likelihood and the Nonlinear Three-Stage Least Squares in the General Nonlinear Simultaneous Equation Model", *Econometrica* 45, 955-968.
- Amemiya, T. (1983): "Non-linear Regression Models", in in *Handbook of Econometrics*, ed. by Z. Griliches and M. D. Intriligator. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, Vol. I, 333-389.
- Amirkhalkhali, S., and A. Naini (1985): "On the Predictive Efficiency in Simultaneous Equation Models: A Simulation Study". Halifax: Saint Mary's University, Department of Economics, Discussion Paper.
- Baillie, R. T. (1981): "Prediction from the Dynamic Simultaneous Equation Model with Autoregressive Errors", *Econometrica* 49, 1331-1337.
- Berndt, E. K., B. H. Hall, R. E. Hall, and J. A. Hausman (1974): "Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models", *Annals of Economic and Social Measurement* 3, 653-665.
- Belsley, D. A. (1980): "On the Efficient Computation of the Nonlinear Full-Information Maximum-Likelihood Estimator", *Journal of Econometrics* 14, 203-225.

- Bianchi, C., and G. Calzolari (1980): "The One-Period Forecast Errors in Nonlinear Econometric Models", *International Economic Review* 21, 201-208.
- Bianchi, C., and G. Calzolari (1982): "Evaluating Forecast Uncertainty Due to Errors in Estimated Coefficients: Empirical Comparison of Alternative Methods", in *Evaluating the Reliability of Macro-Economic Models*, ed. by G. C. Chow and P. Corsi. New York: John Wiley & Sons, Inc., 251-277.
- Bianchi, C., and G. Calzolari (1983): "Standard Errors of Forecasts in Dynamic Simulation of Nonlinear Econometric Models: Some Empirical Results", in *Time Series Analysis: Theory and Practice* 3, ed. by O. D. Anderson. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 177-198.
- Bianchi, C., G. Calzolari, and P. Corsi (1976): "Divergences in the Results of Stochastic and Deterministic Simulation of an Italian Non-Linear Econometric Model", in *Simulation of Systems*, ed. by L. Dekker. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 653-661.
- Bianchi, C., G. Calzolari, and P. Corsi (1979): "A Note on the Numerical Results by Goldberger, Nagar and Odeh", *Econometrica* 47, 505-506.
- Bianchi, C., G. Calzolari e F. Sartori (1982): "Stime 2SLS con Componenti Principali di un Modello Non Lineare dell'Economia Italiana", *Note Economiche* 2, 114-137.
- Brillet, J. L. (1981): "Mini-DMS: Modèle Macroéconomique de Simulation". Paris: INSEE, Archives & Documents No. 35.
- Brown, B. W., and R. S. Mariano (1984): "Residual-Based Procedures for Prediction and Estimation in a Nonlinear Simultaneous System", *Econometrica* 52, 321-343.
- Brundy, J. M., and D. W. Jorgenson (1971): "Efficient Estimation of Simultaneous Equations by Instrumental Variables", *The Review of Economics and Statistics* 53, 207-224.

- Calzolari, G. (1979): "Antithetic Variates to Estimate the Simulation Bias in Non-Linear Models", *Economics Letters* 4, 323-328.
- Calzolari, G. (1981): "A Note on the Variance of Ex-Post Forecasts in Econometric Models", *Econometrica* 49, 1593-1595.
- Calzolari, G. (1987): "Forecast Variance in Dynamic Simulation of Simultaneous Equation Models". Pisa: Centro Scientifico IBM (in corso di stampa su *Econometrica* 55/56).
- Calzolari, G., and P. Corsi (1977): "Stochastic Simulation as a Validation Tool for Econometric Models", in *Models for Regional Planning and Policy-Making*, ed. by A. Straszak, and B. V. Wagle. Peterlee: IBM UKSC 0097, 359-369.
- Calzolari, G., and L. Panattoni (1984): "Evaluating Forecast Uncertainty in Econometric Models: The Effect of Alternative Estimators of Maximum Likelihood Covariance Matrix". Pisa: Centro Scientifico IBM, articolo presentato a *The Fourth International Symposium on Forecasting*, London Business School, 8-11 Luglio.
- Calzolari, G., and L. Panattoni (1987): "Alternative Estimators of FIML Covariance Matrix: A Monte Carlo Study". Pisa: Centro Scientifico IBM (in corso di stampa su *Econometrica* 56).
- Calzolari, G., and F. P. Sterbenz (1986): "Control Variates to Estimate the Reduced Form Variances in Econometric Models", *Econometrica* 54, 1483-1490.
- Campos, J. (1986): "Confidence Intervals for the Sum of Forecasts". Caracas: Banco Central de Venezuela, Departamento de Modelos y Analisis Coyuntural, Discussion Paper.
- Chernoff, H., and N. Divinsky (1953): "The Computation of Maximum-Likelihood Estimates of Linear Structural Equations", in *Studies in Econometric Method*, ed. by W. C. Hood and T. C. Koopmans. New York: John Wiley & Sons, Inc., Cowles Commission Monograph No. 14, 236-302.

- Chong, Y. Y., and D. F. Hendry (1986): "Econometric Evaluation of Linear Macro-Economic Models", *The Review of Economic Studies* 53, 671-690.
- Christ, C. F. (1966): *Econometric Models and Methods*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Contini, B. (1973): *Introduzione alla Econometria*. Bologna: Societa' editrice il Mulino.
- Cooper, J. P., and S. Fischer (1974): "Monetary and Fiscal Policy in the Fully Stochastic St. Louis Econometric Model", *Journal of Money, Credit, and Banking* 6, 1-22.
- Corker, R., R. Ellis and S. Holly (1983): "Uncertainty and Forecasting Precision". London Business School, Centre for Economic Forecasting, Discussion Paper No.98.
- Cramér, H. (1946): *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton: Princeton University Press.
- Denton, F. T., and E. H. Oksanen (1972): "A Multi - Country Analysis of the Effects of Data Revisions on an Econometric Model", *Journal of the American Statistical Association* 67, 286-291.
- Denton, F. T., and E. H. Oksanen (1973): "Data Revisions and Forecasting Accuracy: An Econometric Analysis Based on Preliminary and Revised National Accounting Estimates", *The Review of Income and Wealth* 19, 437-452.
- Dhrymes, P. J. (1970): *Econometrics: Statistical Foundations and Applications*. New York: Harper & Row.
- Dhrymes, P. J. (1971): "A Simplified Structural Estimator for Large-Scale Econometric Models", *Australian Journal of Statistics* 13, 168-175.

- Di Fonzo, T. (1986): "Revisioni Occasionali e Cambiamenti di Base: Un' Analisi di Sensitivita' delle Stime di Modelli", in *Errori nei Dati Preliminari, Previsioni e Politiche Economiche*, a cura di U. Trivellato. Padova: CLEUP, 241-265.
- Dutta, M., and E. Lyttkens (1974): "Iterative Instrumental Variables Method and Estimation of a Large Simultaneous System", *Journal of the American Statistical Association* 69, 977-986.
- Fair, R. C. (1980): "Estimating the Expected Predictive Accuracy of Econometric Models", *International Economic Review* 21, 355-378.
- Faliva, M. (1987): *Econometria: Principi e Metodi*. Torino: UTET.
- Fisher, P., and M. Salmon (1986): "On Evaluating the Importance of Nonlinearity in Large Macroeconometric Models", *International Economic Review* 27, 625-646.
- Freedman, A. D., and S. C. Peters (1984): "Bootstrapping an Econometric Model: Some Empirical Results", *Journal of Business and Economics Statistics* 2, 150-158.
- Fuller, W. A. (1980): "The Use of Indicator Variables in Computing Predictions", *Journal of Econometrics* 12, 231-243.
- Gallant, A. R. (1977): "Three-Stage Least-Squares Estimation for a System of Simultaneous, Nonlinear, Implicit Equations", *Journal of Econometrics* 5, 71-88.
- Goldberger, A. S., A. L. Nagar and H. S. Odeh (1961): "The Covariance Matrices of Reduced-Form Coefficients and of Forecasts for a Structural Econometric Model", *Econometrica* 29, 556-573.
- Ghizzetti, A. (1960-61): *Lezioni di Analisi Matematica*, Vol. I. Roma: Libreria Eredi Virgilio Veschi.
- Ghizzetti, A. (1961-62): *Lezioni di Analisi Matematica*, Vol. II. Roma: Libreria Eredi Virgilio Veschi.

- Giannini, C., and R. Mosconi (1986): "Predictions from Unrestricted VAR Models with Deterministic Components". Università di Pavia: Quaderni dell'Istituto di Scienze Economiche e Statistiche, CR-14.
- Girshick, M. A., and T. Haavelmo (1953): "Statistical Analysis of the Demand for Food: Examples of Simultaneous Estimation of Structural Equations", in *Studies in Econometric Method*, ed. by W. C. Hood and T. C. Koopmans. New York: John Wiley & Sons, Inc., Cowles Commission Monograph No. 14, 92-111.
- Grassini, M. (1971): *Lezioni di Econometrica*. Pisa: CNUCE, Centro Nazionale Universitario di Calcolo Elettronico.
- Haitovsky, Y., and N. Wallace (1972): "A Study of Discretionary and Nondiscretionary Monetary and Fiscal Policies in the Context of Stochastic Macroeconometric Models", in *The Business Cycle Today, Fiftieth Anniversary Colloquium I*, ed. by V. Zarnowitz. New York: National Bureau of Economic Research, Columbia University Press, 261-309.
- Hall, S. G. (1986): "The Importance of Non-Linearities in Large Forecasting Models with Stochastic Error Processes", *Journal of Forecasting* 5, 205-215.
- Hatanaka, M. (1978): "On the Efficient Estimation Methods for the Macro-Economic Models Nonlinear in Variables", *Journal of Econometrics* 8, 323-356.
- Hausman, J. A. (1974): "Full Information Instrumental Variables Estimation of Simultaneous Equations Systems", *Annals of Economic and Social Measurement* 3, 641-652.
- Hendry, D. F. (1971): "Maximum Likelihood Estimation of Systems of Simultaneous Regression Equations with Errors Generated by a Vector Autoregressive Process", *International Economic Review* 12, 257-272.

- Hendry, D. F. (1984): "Monte Carlo Experimentation in Econometrics", in *Handbook of Econometrics*, ed. by Z. Griliches and M. D. Intriligator. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, Vol. II, 937-976.
- Hooper, J. W., and A. Zellner (1961): "The Error of Forecast for Multivariate Regression Models", *Econometrica* 29, 544-555.
- Howrey, E. P., and H. H. Kelejian (1971): "Simulation versus Analytical Solutions: the Case of Econometric Models", in *Computer Simulation Experiments with Models of Economic Systems*, ed. by T. H. Naylor. New York: John Wiley & Sons, Inc., 299-319.
- Howrey, E. P., and L. R. Klein (1972): "Dynamic Properties of Nonlinear Econometric Models", *International Economic Review* 13, 599-618.
- Intriligator, M. D. (1978): *Econometric Models, Techniques, and Applications*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc. Distributed by North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Johnson, N. L., and S. Kotz (1970): *Continuous Univariate Distributions*, Vol. I. Boston: Houghton Mifflin Company.
- Klein, L. R. (1950): *Economic Fluctuations in the United States, 1921-1941*. New York: John Wiley & Sons, Inc., Cowles Commission Monograph No. 11.
- Klein, L. R. (1974): *A Textbook of Econometrics*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- Klein, L. R., A. Doud, and E. Sojo (1985): "Simplification of Large Scale Macroeconometric Models", *Eastern Economic Journal* 11, 28-40.
- Lorenzoni, L. (1986): "Applicazione della Teoria del Controllo ad un Modello IS - LM Stimato per l'Italia". Università di Siena: Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie, Tesi di Laurea.

- Mairesse, J. (1982): "Discussion", in *Evaluating the Reliability of Macro-Economic Models*, ed. by G. C. Chow and P. Corsi. New York: John Wiley & Sons, Inc., 277-279.
- Makridakis, S., and S. C. Wheelwright (1978): *Forecasting Methods and Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Malinvaud, E. (1968): *Statistical Methods of Econometrics*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.
- Mariano, R. S., and B. W. Brown (1983): "Asymptotic Behavior of Predictors in a Nonlinear Simultaneous System", *International Economic Review* 24, 523-536.
- McCarthy, M. D. (1972): "Some Notes on the Generation of Pseudo-Structural Errors for Use in Stochastic Simulation Studies", in *Econometric Models of Cyclical Behavior*, ed. by B. G. Hickman. New York: National Bureau of Economic Research, Studies in Income and Wealth No. 36, Columbia University Press, 185-191.
- Moy, W. A. (1971): "Variance Reduction", in *Computer Simulation Experiments with Models of Economic Systems*, ed. by T. H. Naylor. New York: John Wiley & Sons, Inc., 269-289.
- Nagar, A. L. (1969): "Stochastic Simulation of the Brookings Econometric Model", in *The Brookings Model: Some Further Results*, ed. by J. S. Duesenberry, G. Fromm, L. R. Klein, and E. Kuh. Amsterdam: North Holland, 425-456.
- Nissen, D. H. (1968): "A Note on the Variance of a Matrix", *Econometrica* 36, 603-604.
- Oliver, J. (1980): "An Algorithm for Numerical Differentiation of a Function of One Real Variable", *Journal of Computational and Applied Mathematics* 6, 145-153.
- Pagan, A. R., and D. F. Nicholls (1984): "Estimating Predictions, Prediction Errors and Their Standard Deviations Using Constructed Variables", *Journal of Econometrics* 24, 293-310.

- Peters, S. C., and D. A. Freedman (1985): "Using the Bootstrap to Evaluate Forecasting Equations", *Journal of Forecasting* 4, 251-262.
- Phillips, P. C. B., and M. R. Wickens (1978): *Exercises in Econometrics*. Oxford: Philip Allan Publishers Limited, Vol. II.
- Rao, C. R. (1973): *Linear Statistical Inference and its Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Rettore, E. e U. Trivellato (1986): "Effetti dei Dati Provvisori sull'Errore di Previsione di Modelli ad Equazioni Simultanee", in *Errori nei Dati Preliminari, Previsioni e Politiche Economiche*, a cura di U. Trivellato. Padova: CLEUP, 267-284.
- Salkever, D. S. (1976): "The Use of Dummy Variables to Compute Predictions, Prediction Errors and Confidence Intervals", *Journal of Econometrics* 4, 393-397.
- Sampoli, L. (1986): "Costruzione e Convalida di un Modello Macroeconomico per l'Italia". Università di Siena: Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie, Tesi di Laurea.
- Sartori, F. (1978): "Caratteristiche e Struttura del Modello", in *Un Modello Econometrico dell'Economia Italiana; Caratteristiche e Impiego*. Roma: Ispequaderni 1, 9-36.
- Schink, G. R. (1971): "Small Sample Estimates of the Variance Covariance Matrix of Forecast Error for Large Econometric Models: The Stochastic Simulation Technique". University of Pennsylvania: Graduate School of Arts and Sciences, Ph. D. Dissertation.
- Schmidt, P. (1973): "The Asymptotic Distribution of Dynamic Multipliers", *Econometrica* 41, 161-164.
- Schmidt, P. (1974): "The Asymptotic Distribution of Forecasts in the Dynamic Simulation of an Econometric Model", *Econometrica* 42, 303-309.

- Schmidt, P. (1977): "Some Small Sample Evidence on the Distribution of Dynamic Simulation Forecasts", *Econometrica* 45, 997-1005.
- Slutsky, E. (1925): "Über Stochastische Asymptoten und Grenzwerte", *Metron* 5, No. 3.
- Sterbenz, F. P. (1981): "Stochastic Simulation of the Linkage of Macroeconomic Models and Techniques for Generating Pseudorandom Vectors with Desirable Properties". University of Pennsylvania: Graduate School of Arts and Sciences, Ph. D. Dissertation.
- Sterbenz, F. P., and G. Calzolari (1987): "The Impact of Structural Error Specifications on the Simulation of Nonlinear Econometric Models". Columbus: Ohio State University, Discussion Paper.
- Theil, H. (1971): *Principles of Econometrics*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Trivellato, U., and E. Rettore (1986): "Preliminary Data Errors and Their Impact on the Forecast Error of Simultaneous Equations Models", *Journal of Business & Economic Statistics* 4, 445-453.
- Yamamoto, T. (1980): "On the Treatment of Autocorrelated Errors in the Multiperiod Prediction of Dynamic Simultaneous Equation Models", *International Economic Review* 21, 735-748.
- Zacks, S. (1971): *The Theory of Statistical Inference*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Zaghini, E. (1970): *Lezioni di Econometrica*. Roma: Edizioni dell'Ateneo.