# Theorem of existence of ruptures in probability scale. Discrete case

Harin, Alexander

Moscow Institute of Physics and Technology, Modern University for the Humanities

14 July 2010

**Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей.**
**Дискретный случай**

Александр Харин
Московский физико-технический институт
Современная Гуманитарная Академия

В статье доказаны теоремы о существовании разрывов у границ конечных интервалов и у границ шкалы вероятностей для дискретного случая.

Содержание



## Введение

В настоящей статье, на базе (Харин 2010-1, -2, -3), доказываются простые, но принципиальные теоремы о существовании разрывов у границ конечных интервалов и у границ шкалы вероятностей для дискретного случая.

**Общая упрощенная схема доказательства**

Предварительное замечание

Максимально возможное значение конечного центрального момента $E(X\text{-}M)^n$ для конечного интервала $[A, B]$ не превышает соответствующей конечной степени $n$ размера $(B\text{-}A)$ этого интервала, т.е. конечно

$$|E(X-M)^n| \equiv \left|\sum_{k=1}^{K}(x_k - M)^n f_K(x_k)\right| \le (B-A)^n \sum_{k=1}^{K} f_K(x_k) = (B-A)^n < \infty .$$

Общая лемма

Если математическое ожидание $M$ стремится к границе $A$ конечного интервала $[A, B]$, то конечные центральные моменты стремятся к $0$, в т.ч.

$$|E(X-M)^n| \le (B-A)^n \times 2\frac{(M-A)}{(B-A)} \xrightarrow[M \to A]{} 0 .$$

Общая теорема

Если, на конечном интервале, какой-либо конечный центральный момент не может приближаться к нулю ближе, чем на $r_{dispers}>0$, то математическое ожидание тоже не может приближаться к границе этого интервала ближе, чем на $r_{expect}>0$, в т.ч.

$$0 < r_{dispers} \le |E(X-M)^n| \le (B-A)^n \times 2\frac{(M-A)}{(B-A)} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad 0 < r_{expect} \equiv \frac{r_{dispers}}{2(B-A)^{n-1}} \le (M-A) .$$

Другими словами, если, для величины, заданной на конечном интервале, существует ненулевой разрыв (*rupture*) $r_{dispers}>0$ между ее конечным центральным моментом и нулем, то между ее математическим ожиданием и границами интервала тоже существуют ненулевые разрывы $r_{expect}>0$.

Теорема для оценки вероятности

Если на интервале $[0, 1]$ для оценки вероятности, частоты $F \equiv M$ существует ненулевой разрыв $r_{dispers}>0$ между дисперсией ее плотности и нулем, то между $F$ и границами интервала тоже существуют ненулевые разрывы $r_{expect}>0$, в т.ч.

$$0 < r_{expect} \equiv \frac{r_{dispers}}{2} \le M = F .$$

Теорема для вероятности

Если вероятность $P$ является пределом, к которому стремится оценка вероятности, частота $F$ при стремлении количества испытаний $K$ к бесконечности, и существуют ненулевые разрывы $r_{expect}>0$ между $F$ и границами шкалы вероятностей, то между $P$ и границами шкалы вероятностей существуют такие же ненулевые разрывы $r_{expect}>0$, в т.ч.

$$F \xrightarrow[K \to \infty]{} P \qquad \text{и} \qquad 0 < r_{expect} \le F \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad 0 < r_{expect} \le P .$$

## 1. Предварительные замечания

### 1.1. Общие условия, допущения и обозначения

Пусть далее, на интервале $X=[A, B]$ : $0<(B-A)<\infty$, определена величина $f_K(x_k)$, $k=1, 2, 3, \ldots, K$ (включая, как возможный случай, $K=\infty$) : для $x_k<A$ и $x_k>B$ справедливо $f_K(x_k)\equiv 0$, для $A\le x_k\le B$ справедливо $f_K(x_k)\ge 0$, и

$$\sum_{k=1}^{K} f_K(x_k) = C_{f,K}, \qquad \text{где} \qquad 0 < C_{f,K} < \infty .$$

Запишем начальный момент первого порядка, математическое ожидание

$$EX = \frac{1}{C_{f,K}} \sum_{k=1}^{K} x_k f_K(x_k) \equiv M$$

и, для $n$ : $1<n<\infty$, центральный момент $n$-го порядка

$$E(X-M)^n = \frac{1}{C_{f,K}} \sum_{k=1}^{K} (x_k - M)^n f_K(x_k) .$$

Без ограничения общности, $f_K(x_k)$ можно нормировать так, что $C_{f,K}=1$. В основном тексте статьи и, частично, в приложениях записи выполняются в общей нормировке. В общей схеме доказательства, для простоты и наглядности, записи выполнены в нормировке на $1$.

### 1.2. Максимально возможные значения центрального момента для ограниченного интервала

Максимально возможное значение модуля центрального момента можно оценить, исходя из определения

$$|E(X-M)^n| \equiv \left| \frac{1}{C_{f,K}} \sum_{k=1}^{K} (x_k - M)^n f_K(x_k) \right| \le \frac{1}{C_{f,K}} \sum_{k=1}^{K} |(x_k - M)^n| f_K(x_k) \le$$

$$\le \frac{1}{C_{f,K}} (B-A)^n \sum_{k=1}^{K} f_K(x_k) = (B-A)^n$$

Более точную оценку по модулю дает (см. П1) сумма модулей центральных моментов функций, сконцентрированных на краях интервала: $\delta(x_k-A)\times(B-M)/(B-A)$ и $\delta(x_k-B)\times(M-A)/(B-A)$

$$Max(E(X-M)^n) \le \left|(A-M)^n \frac{B-M}{B-A}\right| + \left|(B-M)^n \frac{M-A}{B-A}\right| .$$

Через нее получаем для $n=2$ очевидный максимум при $M_{max}=(B-A)/2$

$$Max(E(X-M)^2) = \left(\frac{B-A}{2}\right)^2 ,$$

а для $n=2k>>1$ - максимумы при $M_{max}\approx A+(B-A)/2n$ и $M_{max}\approx B-(B-A)/2n$

$$Max(E(X-M)^n) \approx \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{(B-A)^n}{2n} .$$

## 2. Общая теорема о существовании разрывов

### 2.1. Общая лемма о стремлении к нулю центральных моментов

Если, для $f_K(x_k)$, определенной в разделе 1.1., $M \equiv E(X)$ стремится к $A$ или к $B$, то, для $1<n<\infty$, $E(X\text{-}M)^n$ стремится к нулю.

Доказательство (подробно см. П2): Для $M \to A$

$$
\begin{aligned}
&| E(X-M)^n | \le | (A-M)^n \frac{B-M}{B-A} | + | (B-M)^n \frac{M-A}{B-A} | \le \\
&\le ((B-A)^{n-1} + (B-A)^{n-1}) \frac{(M-A)(B-M)}{B-A} \le \\
&\le 2(B-A)^{n-1}(M-A) \xrightarrow[M \to A]{} 0
\end{aligned}
.
$$

Таким образом, если $(B\text{-}A)$ и $n$ конечны и $M \to A$, т.е. $(M\text{-}A) \to 0$, то $E(X\text{-}M)^n \to 0$. Для $M \to B$ рассмотрение полностью аналогичное.

Лемма доказана.

Замечание. Можно (см. П2) получить более точную оценку сходимости к нулю центральных моментов, в т.ч. для $M \to A$

$$| E(X-M)^n | \le (B-A)^{n-1}(M-A) \xrightarrow[M \to A]{} 0$$

### 2.2. Общая теорема о существовании разрывов для математического ожидания

Если, для $f_K(x_k)$, определенной в 1.1., существуют $n : 1<n<\infty$, и $r_{dispers}>0 : |E(X\text{-}M)^n| \ge r_{dispers}>0$, то существует $r_{expect}>0 : A<(A+r_{expect}) \le E(X) \le (B\text{-}r_{expect})<B$.

Доказательство (подробно см. П3): Из леммы, для $M \to A$,

$$0 < r_{dispers} \le | E(X-M)^n | \le 2(B-A)^{n-1}(M-A)$$

$$0 < \frac{r_{dispers}}{2(B-A)^{n-1}} \le (M-A)$$

$$r_{expect} \equiv \frac{r_{dispers}}{2(B-A)^{n-1}}$$

Для $M \to B$ рассмотрение полностью аналогичное.

Поскольку $(B\text{-}A)$, $n$ и $r_{dispers}$ – конечны, а $r_{dispers}>0$, то $r_{expect}>0$ и, как $(M\text{-}A) \ge r_{expect}>0$, так и $(B\text{-}M) \ge r_{expect}>0$.

Теорема доказана.

Таким образом, если конечный $(n<\infty)$ центральный момент величины, определенной на конечном интервале, не может приближаться к нулю ближе, чем на $r_{dispers}>0$, то математическое ожидание этой величины тоже не может приближаться к границе этого интервала ближе, чем на $r_{expect}>0$.

В более общем виде: Если для величины, определенной на конечном интервале, существует ненулевой разрыв (*rupture*) $r_{dispers}>0$ между областью возможных значений какого-либо из ее конечных центральных моментов и нулем, то между областью возможных значений математического ожидания этой величины и любой из границ интервала тоже существуют ненулевые разрывы $r_{expect}>0$ (о терминологии см. П3).

## 3. Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей

### 3.1. Общие замечания

Пусть, для серии испытаний с количеством испытаний $K$, в т.ч. при $K$, стремящемся к бесконечности $K\to\infty$, плотность $f_K(x_k)$ оценки вероятности, частоты $F$ : $F\equiv M\equiv E(X)$, некоторого события имеет свойства, заданные в разделе 1.1., в частности, определена на $[0, 1]$ и $C_{f,K}=1$.

### 3.2. Лемма о стремлении к нулю центральных моментов плотности оценки вероятности

Если для плотности $f_K(x_k)$, определенной в разделе 3.1., $E(X)\to 0$ или $E(X)\to 1$, то, для $1<n<\infty$, $E(X-M)^n\to 0$.

Доказательство: Поскольку условия данной леммы удовлетворяют условиям леммы раздела 2.1, то утверждение данной леммы так же справедливо, как и утверждение леммы раздела 2.1.

Лемма доказана.

### 3.3. Теорема о существовании разрывов для оценки вероятности

Если для плотности $f_K(x_k)$, определенной в разделе 3.1., существуют $n$ : $1<n<\infty$, и $r_{dispers}>0$ : $E(X-M)^n\geq r_{dispers}>0$, то для оценки вероятности, частоты $F\equiv M\equiv E(X)$ существует $r_{expect}>0$ : $0<r_{expect}\leq F\equiv M\equiv E(X)\leq(1-r_{expect})<1$.

Доказательство: Поскольку условия данной теоремы удовлетворяют условиям теоремы раздела 2.2, то утверждение данной теоремы так же справедливо, как и утверждение теоремы раздела 2.2.

Теорема доказана.

### 3.4. Теорема о существовании разрывов для вероятности

Если на интервале $[0,1]$ определена $P$ : при стремлении количества испытаний $K$ к бесконечности, оценка вероятности, частота $F$ стремится к $P$, т.е. $P=LimF$, между оценкой вероятности и любой из границ интервала существуют ненулевые разрывы $0<r_{expect}\leq F\leq(1-r_{expect})<1$, то такие же ненулевые разрывы $0<r_{expect}\leq P\leq(1-r_{expect})<1$ существуют между $P$ и любой из границ интервала.

Доказательство (подробнее см. П4): Поскольку операция взятия предела сохраняет нестрогие неравенства, то, при $P=LimF$, из $r_{expect}\leq F\leq(1-r_{expect})$ следует $r_{expect}\leq P\leq(1-r_{expect})$.

Теорема доказана.

Поскольку вероятность удовлетворяет условиям, наложенным на $P$, то теорема справедлива и для вероятности.

Теорему можно сформулировать и для нужд практических приложений:

Если, для серии испытаний с количеством испытаний $K$ : $K\to\infty$, и оценкой вероятности, частотой $F$, стремящейся при этом к вероятности $P$, существует разрыв $r_{dispers}>0$ между возможными значениями дисперсии $D$ оценки вероятности $F$ и нулем, то у границ шкалы вероятностей тоже существуют разрывы $r_{expect}>0$, как для возможных значений оценки вероятности $F$, так и для возможных значений вероятности $P$.

## 4. Пример разрывов в шкале вероятностей

Условия

Простейший пример подобных разрывов – стрельба в мишень в одномерном приближении (подробнее см. П5):

Пусть размер мишени равен $2L>0$, а разброс попаданий, при точном прицеливании, подчиняется нормальному закону с дисперсией $\sigma^2$. Тогда максимальная вероятность попадания в мишень $P_{in\_Max}$ и минимальная вероятность промаха $P_{out\_min}=1-P_{in\_Max}$ равны (см., напр., Прохоров 1988):

Результаты

При $\sigma=0$

$P_{in\_Max}=1$ и $P_{out\_min}=0$, то есть разрывов в шкале вероятностей для попаданий и промахов нет, то есть $r_{expect}=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}=0$, .

При $L=3\sigma$

$0\le P_{in}\le P_{in\_Max}=0{,}997<1$ и $0<0{,}003=P_{out\_min}\le P_{out}\le 1$. При этом, разрывы $r_{expect}$ в шкале вероятностей для попаданий и промахов составляют $r_{expect}=0{,}003>0$.

При $L=2\sigma$

$0\le P_{in}\le P_{in\_Max}=0{,}95<1$ и $0<0{,}05=P_{out\_min}\le P_{out}\le 1$. При этом, разрывы $r_{expect}$ в шкале вероятностей для попаданий и промахов составляют $r_{expect}=0{,}05>0$.

При $L=\sigma$

$0\le P_{in}\le P_{in\_Max}=0{,}68<1$ и $0<0{,}32=P_{out\_min}\le P_{out}\le 1$. При этом, разрывы $r_{expect}$ в шкале вероятностей для попаданий и промахов составляют $r_{expect}=0{,}32>0$.

Вывод

Таким образом:

При нулевой $\sigma=0$ - разрывов нет ($r_{expect}=0$).

При ненулевой $\sigma>0$:

- появляется ненулевой разрыв $r_{expect}>0$ между возможными значениями вероятности попадания $0\le P_{in}\le P_{in\_Max}=1-r_{expect}<1$ и единицей;

- появляется такой же ненулевой разрыв $r_{expect}>0$ между возможными значениями вероятности промаха $0<r_{expect}=P_{out\_min}\le P_{out}\le 1$ и нулем.

## 5. Применения теоремы. Экономика. Прогнозирование

Возможность существования разрывов в шкале вероятностей должна проявляться и проявляется в реальности, в т.ч. в экономике и прогнозировании. Широко известен целый ряд парадоксов теории полезности, в т.ч. парадокс Алле, "премия за риск", преувеличение малых и преуменьшение больших вероятностей, "парадокс четырех областей". Как отметили Kahneman и Thaler (2006) эти парадоксы до сих пор не решены современной экономической теорией. Существуют проблемы точности прогнозов, наглядно проявившиеся в ходе текущего кризиса.

Использование теоремы о существовании разрывов в шкале вероятностей позволяет получить и обосновать решения этих парадоксов (см., напр., Харин 2007 и 2009), а также корректирующую формулу прогнозирования (см., напр., Харин 2008).

## Заключение

В статье, для дискретного случая, доказана теорема об общей возможности существования разрывов в шкале возможных значений математических ожиданий величин, определенных на конечных интервалах. Доказана также теорема о возможности существования разрывов в шкале вероятностей, как для оценок вероятности, так и для вероятности.

Следует заметить, что, несмотря на очевидность и элементарность теоремы, и на то, что некоторые из простых расчетов и оценок, приведенных в статье, могли публиковаться ранее, напр., в учебниках, теорема в целом является новой и полезной. Так, теорема позволяет получить и обосновать для дискретного случая решения ряда известных парадоксов экономической теории (см., напр., Харин 2007 и 2009) и новые результаты в прогнозировании (см., напр., Харин 2008).

**Литература**

Harin, A. (2005) "A new approach to solve old problems" Game Theory and Information from Economics Working Paper Archive at WUSTL, 0505005, 2005.

Kahneman, D. and Thaler, R. (2006) "Anomalies: Utility Maximization and Experienced Utility" Journal of Economic Perspectives, 20, #1, 221-234.

Прохоров, Ю.В. ред. (1988) "Математический энциклопедический словарь" М., Советская энциклопедия, 1988.

Харин, А.А. (2010-3) "Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей, как математический базис принципа неопределенного будущего" Моделирование и Анализ Безопасности и Риска в Сложных Системах: 10-я Международная Научная Школа МА БР – 2010).

Харин, А.А. (2010-2) "О разрывах в шкале вероятностей и о некоторых проблемах моделирования" Третья Международная конференция Математическое моделирование социальной и экономической динамики (MMSED-2010).

Харин, А.А. (2010-1) "Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей" IX Международная конференция по финансово-актуарной математике и эвентоконвергенции технологий, Красноярск, 2010 (ФАМЭТ-2010).

Харин, А.А. (2009) "Учет краевых эффектов шумов – новый путь к решению проблем теории полезности?" Первый Российский экономический конгресс (РЭК-2009).

Харин, А.А. (2008) "К разработке общей формулы прогнозирования" 51-я научная конференция МФТИ – 2008 "Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук".

Харин, А.А. (2007) "Принцип неопределенного будущего, примеры его применения в экономической теории, возможности его применения в теориях сложных систем, в теории множеств, теории вероятностей и логике" Моделирование и Анализ Безопасности и Риска в Сложных Системах: 7-я Международная Научная Школа МА БР – 2007.

## Приложения П1-П5

**Приложение П1. Подробный расчет максимально возможного значения центрального момента для ограниченного интервала**



Две дельта-функции

Рассмотрим две дельта-функции: $\delta(x_k\text{-}A)$ и $\delta(x_k\text{-}B)$. Возьмем сумму этих функций с коэффициентами $C_{A,K}$ и $C_{B,K}$:

$$\sum_{k=1}^{K} C_{A,K}\delta(x_k - A) = C_A\,,$$

$$\sum_{k=1}^{K} C_{B,K}\delta(x_k - B) = C_B\,,$$

$$C_A + C_B = C_{f,K}\,,$$

т.е. функцию $f_{Max}(x_k)$=$C_{A,K}\delta(x_k\text{-}A)+C_{B,K}\delta(x_k\text{-}B)$.

Для упрощения выражений, без ограничения общности, можно принять

$$C_{f,K} = 1\,, \qquad \text{т.е.} \qquad C_A + C_B = 1\,.$$

Центральный момент функции $f_{Max}(x_k)$ равен

$$E(X - M)^n = \frac{1}{C_{f,K}}\sum_{k=1}^{K}(x_k - M)^n f_{Max}(x_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{K}(x_k - M)^n C_{A,K}\delta(x_k - A) + \sum_{k=1}^{K}(x_k - M)^n C_{B,K}\delta(x_k - B) =$$

$$= \sum_{k=1}^{K}(A - M)^n C_{A,K}\delta(x_k - A) + \sum_{k=1}^{K}(B - M)^n C_{B,K}\delta(x_k - B) = \quad ,$$

$$= (A - M)^n\sum_{k=1}^{K} C_{A,K}\delta(x_k - A) + (B - M)^n\sum_{k=1}^{K} C_{B,K}\delta(x_k - B) =$$

$$= (A - M)^n C_A + (B - M)^n C_B$$

а математическое ожидание равно

$$E(X) = \frac{1}{C_{f,K}}\sum_{k=1}^{K} x_k f_{Max}(x_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{K} x_k C_{A,K}\delta(x_k - A) + \sum_{k=1}^{K} x_k C_{B,K}\delta(x_k - B) =$$

$$= \sum_{k=1}^{K} A C_{A,K}\delta(x_k - A) + \sum_{k=1}^{K} B C_{B,K}\delta(x_k - B) = \quad .$$

$$= A\sum_{k=1}^{K} C_{A,K}\delta(x_k - A) + B\sum_{k=1}^{K} C_{B,K}\delta(x_k - B) =$$

$$= AC_A + BC_B \equiv M$$

Из

$$C_A + C_B = 1.$$

и

$$AC_A + BC_B \equiv M$$

можно выразить коэффициенты $C_A$ и $C_B$ через $M$:

$$C_B = 1 - C_A$$
$$AC_A + B(1 - C_A) = M$$
$$B - M = C_A(B - A)$$

$$C_A = \frac{B - M}{B - A}$$
$$C_B = \frac{M - A}{B - A}.$$

Сумма модулей

Рассмотрим сумму модулей центральных моментов функций $C_{A,K}\delta(x_k\text{-}A)$ и $C_{B,K}\delta(x_k\text{-}B)$

$$|(A-M)^n C_A| + |(B-M)^n C_B| =$$
$$= |(A-M)^n \frac{B-M}{B-A}| + |(B-M)^n \frac{M-A}{B-A}|.$$

Для удобства дальнейшей работы, преобразуем эту сумму к виду без модулей

$$|(A-M)^n \frac{B-M}{B-A}| + |(B-M)^n \frac{M-A}{B-A}| =$$
$$= (M-A)^n \frac{B-M}{B-A} + (B-M)^n \frac{M-A}{B-A}.$$

Введем параметр $m \equiv (M\text{-}A)/(B\text{-}A) = C_B$, при этом $1\text{-}m \equiv (B\text{-}M)/(B\text{-}A) = C_A$ (очевидно, что $0 \le m \le 1$ и $0 \le 1\text{-}m \le 1$). Получаем

$$(M-A)^n \frac{B-M}{B-A} + (B-M)^n \frac{M-A}{B-A} =$$
$$= (m^n(1-m) + (1-m)^n m) \times (B-A)^n.$$

Таким образом, сумма модулей центральных моментов рассматриваемых дельта-функций $(B\text{-}M)/(B\text{-}A)\delta(x_k\text{-}A)$ и $(M\text{-}A)/(B\text{-}A)\delta(x_k\text{-}B)$ равна

$$[m^n(1-m) + (1-m)^n m] \times (B-A)^n =$$
$$= (1-m)m[m^{n-1} + (1-m)^{n-1}] \times (B-A)^n$$
$$= (1-m)[m^n + (1-m)^{n-1} m] \times (B-A)^n =$$
$$= m[m^{n-1}(1-m) + (1-m)^n] \times (B-A)^n.$$

Полный анализ полученного выражения для рассматриваемой суммы модулей не является целью данной статьи. Поэтому далее будут выполняться только самые простые оценки и расчеты.

П1.0. Доказательство максимальности

Докажем, что сумма модулей центральных моментов дельта-функций $C_{A,K}\delta(x_k\text{-}A)$ и $C_{B,K}\delta(x_k\text{-}B)$, т.е. функций, полностью сосредоточенных на краях интервала $[A, B]$, больше либо равна максимально возможному значению модуля центрального момента для величины $f_K(x_k)$, определенной в разделе 1.1.

Предварительное замечание

Предположим, что, существует функция $f_{fictitious}(x_k)$ определенная в разделе 1.1, (без ограничения общности, $f_{fictitious}(x_k)$ нормирована так, что $C_{f,K}=1$), имеющая, для некоторого $M : A<M<B$, и некоторого $n : 1<n<\infty$, такое значение центрального момента $E(X\text{-}M)^n$, которое превышает по модулю рассматриваемую сумму модулей центральных моментов дельта-функций $C_{A,K}\delta(x_k\text{-}A)$ и $C_{B,K}\delta(x_k\text{-}B)$ для тех же $M$ и $n$.

Из определений математического ожидания и центрального момента

$$E(X-M)^1 = \frac{1}{C_{f,K}}\sum_{k=1}^{K}(x_k - M)f_K(x_k) = 0 =$$

$$= \frac{1}{C_{f,K}}[\sum_{x_k=M}(M-M)f_K(x_k) + \sum_{x_k<M}(x_k - M)f_K(x_k) + \sum_{x_k>M}(x_k - M)f_K(x_k)] =$$

$$= \frac{1}{C_{f,K}}[\sum_{x_k<M}(x_k - M)f_K(x_k) + \sum_{x_k>M}(x_k - M)f_K(x_k)] = 0$$

следует, что для любого бесконечно малого элемента $\Delta f(a) : A\le a<M$, существует бесконечно малый элемент $\Delta f(b) : M<b\le B$, такой, что справедливо $(M\text{-}a)\Delta f(a)=(b\text{-}M)\Delta f(b)$.

Сравним центральные моменты пары бесконечно малых элементов $\Delta f_{fictitious}(a)$ и $\Delta f_{fictitious}(b) : A\le a<M$ и $M<b\le B$, и соответствующей ей пары бесконечно малых элементов $\Delta C_A$ и $\Delta C_B$, таких, что $\Delta f_{fictitious}(a)+\Delta f_{fictitious}=\Delta C_A+\Delta C_B=\Delta C$ и $\Delta C_A/\Delta C_B=C_A/C_B=(1\text{-}m)/m$, т.е. $\Delta C_B=m\Delta C$ и $\Delta C_A=(1\text{-}m)\Delta C$, где $\Delta C=\Delta f_{fictitious}(a)+\Delta f_{fictitious}(b)$.

Если невозможно существование хотя бы одной пары бесконечно малых элементов $\Delta f_{fictitious}(a)$ и $\Delta f_{fictitious}(b)$, такой, что центральный момент этой пары функции $f_{fictitious}$ будет больше суммы модулей центральных моментов соответствующей ей пары бесконечно малых элементов $\Delta C_A$ и $\Delta C_B$ функций $C_{A,K}\delta(x_k\text{-}A)$ и $C_{B,K}\delta(x_k\text{-}B)$, то этого будет достаточно для доказательства.

Доказательство

Выразим $\Delta f_{fictitious}(b)$ через $\Delta f_{fictitious}(a)$. Из

$$(M-a)\Delta f_{fictitious}(a)=(b-M)\Delta f_{fictitious}(b)$$

получаем

$$\Delta f_{fictitious}(b)=\Delta f_{fictitious}(a)\frac{(M-a)}{(b-M)}.$$

Для $f_{fictitious}$ бесконечно малый элемент центрального момента равен

$$(a-M)^n\Delta f_{fictitious}(a)+(b-M)^n\Delta f_{fictitious}(b)=$$

$$=(a-M)^n\Delta f_{fictitious}(a)+(b-M)^n\Delta f_{fictitious}(a)\frac{(M-a)}{(b-M)}=.$$

$$=\Delta f_{fictitious}(a)[(a-M)^n+(b-M)^{n-1}(M-a)]$$

Введем два параметра: $m_a\equiv(a-A)/(B-A)$ (очевидно, что $0\leq m_a<m<1$) и $m_b\equiv(B-b)/(B-A)$ (очевидно, что $0<m<m_b\leq 1$). Перепишем

$$\Delta f_{fictitious}(a)[(a-M)^n+(b-M)^{n-1}(M-a)]=$$

$$=\Delta f_{fictitious}(a)[(m_a-m)^n+(m_b-m)^{n-1}(m-m_a)](B-A)^n=$$

$$=\Delta f_{fictitious}(a)[(-1)^n(m-m_a)^n+(m_b-m)^{n-1}(m-m_a)](B-A)^n$$

Это выражение ограничено сверху суммой модулей

$$\Delta f_{fictitious}(a)[(-1)^n(m-m_a)^n+(1-m)^{n-1}(m-m_a)](B-A)^n\leq$$

$$\leq\Delta f_{fictitious}(a)[|(m-m_a)^n|+|(1-m)^{n-1}(m-m_a)|](B-A)^n=.$$

$$=\Delta f_{fictitious}(a)[(m-m_a)^n+(m_b-m)^{n-1}(m-m_a)](B-A)^n$$

Бесконечно малый элемент $\Delta C$ равен

$$\Delta C=\Delta f_{fictitious}(a)+\Delta f_{fictitious}(b)=$$

$$=\Delta f_{fictitious}(a)(1+\frac{m-m_a}{m_b-m})=\Delta f_{fictitious}(a)\frac{m_b-m+m-m_a}{m_b-m}=.$$

$$=\Delta f_{fictitious}(a)\frac{m_b-m_a}{m_b-m}$$

Для суммы модулей центральных моментов дельта-функций $C_{A,K}\delta(x_k-A)$ и $C_{B,K}\delta(x_k-B)$

$$(1-m)[m^n+(1-m)^{n-1}m]\times(B-A)^n$$

их бесконечно малый элемент равен

$$\Delta f_{fictitious}(a)\frac{(m_b-m_a)(1-m)}{m_b-m}(m^n+(1-m)^{n-1}m)\times(B-A)^n.$$

Сравнение приращений

Сравним бесконечно малые элементы суммы модулей центральных моментов для $C_{A,K}\delta(x_k\text{-}A)$ и $C_{B,K}\delta(x_k\text{-}B)$ и модуля центрального момента для $f_{fictitious}(x_k)$. Это сравнение сводится к сравнению разности

$$\frac{(m_b - m_a)(1-m)}{m_b - m}(m^n + (1-m)^n m) - \\ -(m-m_a)^n - (m_b - m)^{n-1}(m - m_a).$$

Поскольку $-m_a > -m$ и $m_b \le 1$, то

$$\frac{m_b - m_a}{m_b - m} \ge \frac{1-m_a}{1-m}$$

и

$$\frac{(m_b - m_a)(1-m)}{m_b - m} \ge \frac{(1-m_a)(1-m)}{1-m} = 1 - m_a.$$

Таким образом,

$$\frac{m_b - m_a}{m_b - m}(m^n(1-m) + (1-m)^n m) =$$

$$= \frac{(m_b - m_a)(1-m)}{m_b - m}[m^n + (1-m)^{n-1}m] \ge$$

$$\ge (1-m_a)(m^n + (1-m)^{n-1}m)$$

То есть сравниваемая разность

$$\frac{(m_b - m_a)(1-m)}{m_b - m}(m^n + (1-m)^n m) - \\ -(m-m_a)^n - (m_b - m)^{n-1}(m - m_a)$$

сводится к разности

$$(1-m_a)(m^n + (1-m)^{n-1}m) - \\ -(m-m_a)^n - (m_b - m)^{n-1}(m - m_a).$$

Разделим это выражение на две части, соответствующие $A$ и $B$. Получаем первую часть, соответствующую $A$,

$$(1-m_a)m^n - (m-m_a)^n$$

и вторую часть, соответствующую $B$,

$$(1-m_a)(1-m)^{n-1}m - (m_b - m)^{n-1}(m - m_a).$$

Первая часть, соответствующая $A$

Рассмотрим первую часть, соответствующую $A$,

$$(1-m_a)m^n-(m-m_a)^n=$$
$$=m^n(1-m_a-(1-\frac{m_a}{m})^n)\geq$$
$$\geq m^n(1-m_a-(1-\frac{m_a}{m}))= \quad .$$
$$=m^n(-m_a+\frac{m_a}{m})=$$
$$=m^{n-1}m_a(1-m)\geq 0$$

Первая часть, соответствующая $A$, неотрицательна.

Вторая часть, соответствующая $B$

Рассмотрим вторую часть, соответствующую $B$,

$$(1-m_a)(1-m)^{n-1}m-(m_b-m)^{n-1}(m-m_a)=$$
$$=(1-m)^{n-1}m[1-m_a-(\frac{m_b-m}{1-m})^{n-1}(1-\frac{m_a}{m})]\geq$$
$$\geq(1-m)^{n-1}m[1-m_a-(1-\frac{m_a}{m})]= \quad .$$
$$=(1-m)^{n-1}m(-m_a+\frac{m_a}{m})=$$
$$=(1-m)^{n-1}m_a(1-m)\geq 0$$

Вторая часть, соответствующая $B$, также неотрицательна.

Вывод

Таким образом, и первая и вторая части и рассматриваемая разность в целом – неотрицательны.

Тем самым доказано утверждение о том, что сумма модулей центральных моментов дельта-функций $C_{A,K}\delta(x_k\text{-}A)$ и $C_{B,K}\delta(x_k\text{-}B)$, т.е. функций, полностью сосредоточенных на краях интервала $[A, B]$, больше либо равна максимально возможному значению модуля центрального момента для величины, определенной в разделе 1.1, т.е.

$$Max(E(X-M)^n)\leq(M-A)^n\frac{B-M}{B-A}+(B-M)^n\frac{M-A}{B-A}= \quad .$$
$$=[m^n(1-m)+(1-m)^n m]\times(B-A)^n$$

П1.1. Расчет для $n=2k$ и для оценки сверху

Расчет для середины интервала

Максимум при n=2

Локальные максимумы, ближайшие к краям интервала

Для $n=2k$ и для оценки сверху для $n=2k+1$

$$Max(E(X-M)^n) \le (m^n(1-m)+m(1-m)^n)\times(B-A)^n$$

и первая производная по $m$ переменной части этого выражения

$$\begin{aligned}&(m^n(1-m)+m(1-m)^n)'_m = \\ &= nm^{n-1}(1-m)-m^n+(1-m)^n-nm(1-m)^{n-1}\end{aligned}.$$

Расчет для середины интервала

Видно, что, для $n=2k$ и для оценки сверху, $Max(E(X\text{-}M)^n)$ и первая производная по $m$ симметричны по $m$ и $1\text{-}m$. Полагая $1\text{-}m=m$, получаем

$$\begin{aligned}&nm^{n-1}(1-m)-m^n+(1-m)^n-nm(1-m)^{n-1} = \\ &= nm^{n-1}m-m^n+m^n-nmm^{n-1} = \\ &= nm^{n-1}m-nmm^{n-1}-m^n+m^n \equiv 0\end{aligned},$$

т.е., для $n=2k$ и для оценки сверху, посередине интервала, при $m=1\text{-}m=1/2$, всегда имеет место экстремум либо точка перегиба. Вычислим вторую производную

$$\begin{aligned}&(nm^{n-1}(1-m)-m^n+(1-m)^n-nm(1-m)^{n-1})'_m = \\ &= n(n-1)m^{n-2}(1-m)-nm^{n-1}-nm^{n-1}- \\ &-n(1-m)^{n-1}-n(1-m)^{n-1}+n(n-1)m(1-m)^{n-2} = \\ &= n(n-1)m^{n-2}(1-m)-2nm^{n-1}-2n(1-m)^{n-1}+n(n-1)m(1-m)^{n-2}\end{aligned}.$$

В точке $m=1\text{-}m$ вторая производная равна

$$\begin{aligned}&n(n-1)m^{n-2}(1-m)-2nm^{n-1}-2n(1-m)^{n-1}+n(n-1)m(1-m)^{n-2} = \\ &= n(n-1)m^{n-1}-2nm^{n-1}-2nm^{n-1}+n(n-1)m^{n-1} = \\ &= 2n(n-1)m^{n-1}-4nm^{n-1} = 2nm^{n-1}(n-1-2) = \\ &= 2nm^{n-1}(n-3)\end{aligned},$$

т.е., при $n=2$ получаем максимум, а при $n\ge 4$ – минимум.

Максимум при $n=2$

В точке $m=1\text{-}m=1/2$ при $n=2$ для центрального момента (дисперсии) получаем известное выражение

$$\begin{aligned}&Max(E(X-M)^2) = (m^2(1-m)+m(1-m)^2)(B-A)^2 = \\ &= (m^2m+mm^2)(B-A)^2 = 2m^3(B-A)^2 = 2\frac{1}{2^3}(B-A)^2 = \\ &= (\frac{B-A}{2})^2\end{aligned}$$

Локальные максимумы,
ближайшие к краям интервала

Найдем ближайшие к краям интервала локальные максимумы при *n>3*. Рассмотрим области, где *m<<1* и *n>3*

$$\begin{aligned}&(m^n(1-m)+m(1-m)^n)'_m = \\ &= nm^{n-1}(1-m)-m^n+(1-m)^n-nm(1-m)^{n-1}\approx \\ &\approx (1-m)^n-nm(1-m)^{n-1}\approx 1-nm-nm= \\ &=1-2nm\end{aligned}.$$

то есть, локальные экстремумы имеют место при

$$m\approx\frac{1}{2n}.$$

Заметим, что это подразумевает *n>>1*.

Аналогично, для *(1-m)<<1*, локальные экстремумы имеют место при

$$m\approx 1-\frac{1}{2n}.$$

В локальных экстремумах вторая производная

$$(1-2nm)'_m=-2n<0,$$

т.е. имеют место локальные максимумы. Аналогично, локальные максимумы имеют место и в точках *m=1-1/2n*. В обоих этих случаях значения центрального момента при *n>>1* приближенно равны

$$\begin{aligned}&Max(E(X-M)^n)\le(m^n(1-m)+m(1-m)^n)(B-A)^n= \\ &=((\frac{1}{2n})^n(1-\frac{1}{2n})+\frac{1}{2n}(1-\frac{1}{2n})^n)(B-A)^n\approx \\ &\approx((\frac{1}{2n})^n+\frac{1}{2n}(1-\frac{1}{2n})^n)(B-A)^n\approx \\ &\approx\frac{1}{2n}(1-\frac{1}{2n})^n(B-A)^n\end{aligned}.$$

Найдем $(1\text{-}1/2n)^n$. Обозначая $x_k\equiv -2n$, получаем $n=-x_k/2$ и, при *n>>1*, вычисление сводится к вычислению *e*

$$(1-\frac{1}{2n})^n=(1+\frac{1}{x})^{-\frac{x}{2}}\approx\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

В результате получаем для *m=1/2n* и для *m=1-1/2n*, при *n>>1*

$$\begin{aligned}&Max(E(X-M)^n)\le(m^n(1-m)+m(1-m)^n)(B-A)^n\approx \\ &\approx\frac{1}{2n}(1-\frac{1}{2n})^n(B-A)^n\approx \\ &\approx\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{(B-A)^n}{2n}\end{aligned}.$$

Для проверки, сравним значения полученных локальных максимумов центральных моментов со значениями центральных моментов для $M$ в середине интервала. Для $m=1-m=1/2$

$$Max(E(X-\frac{A+B}{2})^n) \le (m^n(1-m)+m(1-m)^n)(B-A)^n =$$

$$=(m^n m+mm^n)(B-A)^n = 2m^{n+1}(B-A)^n = \frac{2}{2^{n+1}}(B-A)^n = (\frac{B-A}{2})^n =$$

$$=\frac{(B-A)^n}{2^n}$$

Для $m=1/2n$ и $n>>1$

$$Max(E(X-(A+\frac{B-A}{2n}))^n) \approx \frac{1}{2\sqrt{e}}\frac{(B-A)^n}{n}$$

Видно, что в формулах различаются только коэффициенты знаменателя при $(B\text{-}A)^n$, т.е. $n2\sqrt{e}$ и $2^n$. Степенная функция $2^n$ растет быстрее, чем натуральный ряд $n$. Оценим, начиная с какого $n$, коэффициент $1/n2\sqrt{e}$ станет больше, чем коэффициент $1/2^n$. Сравним

$$\frac{1}{2^n} \quad и \quad \frac{1}{2\sqrt{e}}\frac{1}{n} \approx \frac{1}{3}\frac{1}{n}.$$

При $n=3$

$$\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8} \quad > \quad \frac{1}{3}\frac{1}{3}=\frac{1}{9}.$$

При $n=4$

$$\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16} \quad < \quad \frac{1}{3}\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

Видно, что, начиная с $n=4$, значения полученных локальных максимумов центральных моментов при $m=1/2n$ превышают значения центральных моментов при $m=1/2$.

## Приложение П2. Подробное доказательство леммы о стремлении к нулю центральных моментов

Подробное доказательство

Если, для $f_K(x_k)$, определенной в разделе 1.1., $E(X)=M$ стремится к $A$ или к $B$, то $E(X\text{-}M)^n$ стремится к нулю.

Доказательство:

Для $M \rightarrow A$

$$Max(E(X-M)^n) \le ((M-A)^{n-1} + (B-M)^{n-1})\frac{(M-A)(B-M)}{B-A} <$$
$$< \frac{(M-A)(B-M)}{B-A}((B-A)^{n-1} + (B-A)^{n-1}) \le 2(M-A)(B-A)^{n-1} = ,$$
$$= 2\frac{(M-A)}{B-A}(B-A)^n \equiv 2m(B-A)^n$$

Если справедливо строгое неравенство, то тем более справедливо нестрогое неравенство

$$E(X-M)^n \le (B-A)^n \times 2\frac{M-A}{B-A} \equiv (B-A)^n \times 2m \xrightarrow[m\to 0]{} 0,$$

достаточное для целей настоящей статьи.

Таким образом, при конечных $(B\text{-}A)$ и $n$ и при $M \rightarrow A$, т.е. при $(M\text{-}A)$ и $m$, стремящихся к нулю, центральные моменты $E(X\text{-}M)^n$ тоже стремятся к нулю. Для $M \rightarrow B$ рассмотрение полностью аналогичное.

Лемма доказана.

Более точная оценка сходимости центральных моментов

Сделаем более точную оценку сходимости к $0$ центральных моментов. Снова рассмотрим, при $M \rightarrow A$, т.е. при $m \rightarrow 0$,

$$Max(E(X-M)^n) \le (m^n(1-m) + m(1-m)^n)(B-A)^n =$$
$$= m(1-m)(m^{n-1} + (1-m)^{n-1}) \times (B-A)^n \xrightarrow[m\to 0]{} .$$
$$\xrightarrow[m\to 0]{} m(1-m)^{n-1} \times (B-A)^n \xrightarrow[m\to 0]{} m(B-A)^n$$

Для проверки, сравним эту оценку с общей формулой

$$Max(E(X-M)^n) \le m(1-m)(m^{n-1} + (1-m)^{n-1})(B-A)^n .$$

Оценку отличает от общей формулы только сомножитель

$$(1-m)(m^{n-1} + (1-m)^{n-1}) .$$

Поскольку $0 \le m \le 1$, то $(1\text{-}m) \le 1$ и, для $n \ge 2$,

$$(m^{n-1} + (1-m)^{n-1}) \le (m + (1-m)) \equiv 1 .$$

Следовательно, для $n \ge 2$

$$m(1-m)(m^{n-1} + (1-m)^{n-1})(B-A)^n \le m(B-A)^n .$$

Для контроля, сравним эту оценку с максимумами в $m=1/2n$

$$m(B-A)^n = \frac{(B-A)^n}{2n} > \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{(B-A)^n}{2n} .$$

Итак, более точную оценку сходимости центральных моментов к $0$ можно применять для всех требуемых диапазонов: $1 < n < \infty$ и $0 \le m \le 1$.

## Приложение П3. Подробное доказательство теоремы о существовании разрывов для математического ожидания



### Подробное доказательство

Если, для $f_K(x_k)$, определенной в разделе 1.1., существуют $n$ : $1<n<\infty$, и $r_{dispers}>0$ : $|E(X\text{-}M)^n|\geq r_{dispers}>0$, то существует $r_{expect}>0$ : $A<(A+r_{expect})\leq E(X)\leq(B\text{-}r_{expect})<B$.

Доказательство.

Из условий теоремы и из леммы, для $M\to A$,

$$0 < r_{dispers} \leq | E(X-M)^n | \leq (B-A)^n \times 2\frac{(M-A)}{(B-A)} = 2(B-A)^{n-1}(M-A)$$

$$0 < r_{dispers} \leq 2(B-A)^{n-1}(M-A)$$

$$0 < r_{\exp ect} \equiv \frac{r_{dispers}}{2(B-A)^{n-1}} \leq (M-A)$$

$$r_{\exp ect} \equiv \frac{r_{dispers}}{2(B-A)^{n-1}}.$$

Для $M\to B$ рассмотрение полностью аналогично вышеприведенному.

Поскольку $(B\text{-}A)$ и $n$ – конечны, а $r_{dispers}>0$, то конечны и больше нуля - как $(M\text{-}A)\geq r_{expect}>0$ так и $(B\text{-}M)\geq r_{expect}>0$.

Теорема доказана.

### Возможные формулировки

Если, на конечном интервале, конечный центральный момент не может приближаться к нулю ближе, чем на $r_{dispers}>0$, то математическое ожидание не может приближаться к границе этого интервала ближе, чем на $r_{expect}>0$.

Другими словами, если для величины, определенной на конечном интервале, существует ненулевой разрыв (*rupture*), запрещенная зона $r_{dispers}>0$ между каким-либо из ее центральных моментов и нулем, то между математическим ожиданием этой величины и любой из границ интервала тоже существуют ненулевые разрывы, запрещенные зоны $r_{expect}>0$.

В более общем виде, для возможных значений: Если для величины, определенной на конечном интервале, существует ненулевой разрыв, запрещенная зона $r_{dispers}>0$ между областью возможных значений какого-либо из ее центральных моментов и нулем, то между областью возможных значений математического ожидания этой величины и любой из границ интервала тоже существуют ненулевые разрывы, запрещенные зоны $r_{expect}>0$.

Замечание 1. Более точная оценка разрыва $r_{expect}$

Заметим, что, согласно П2, можно дать более точную оценку $r_{expect}$

$$0 < r_{dispers} \leq | E(X-M)^n | \leq (B-A)^n \frac{(M-A)}{(B-A)} = (B-A)^{n-1}(M-A)$$

$$0 < r_{dispers} \leq (B-A)^{n-1}(M-A)$$

$$0 < r_{\exp ect} \equiv \frac{r_{dispers}}{(B-A)^{n-1}} \leq (M-A),$$

то есть

$$r_{\exp ect} \equiv \frac{r_{dispers}}{(B-A)^{n-1}}$$

и, при $(B\text{-}A)=1$

$$r_{\exp ect} = r_{dispers}$$

Это же справедливо и для $M \rightarrow B$.

Замечание 2. Условия существования разрывов

Следует подчеркнуть, что разрывы для математического ожидания величины, о которых идет речь, существуют не всегда и не для всех случаев. Эти разрывы между границами интервала и математическим ожиданием величины существуют только тогда и только для тех случаев, когда и в которых существует ненулевой разрыв между возможными значениями какого-либо центрального момента величины и нулем.

О терминологии

Термин "*разрыв*" появился из исходной задачи о сравнении двух интервалов в "парадоксе четырех областей". Первый интервал соответствовал гарантированному случаю и включал границы шкалы вероятностей. Второй интервал соответствовал случаю риска и, при наличии реального ненулевого разброса данных, не включал границ шкалы вероятностей. При этом, между границами первого и второго интервалов, при наличии реального ненулевого разброса данных, существовали ненулевые промежутки, разрывы. В исходной задаче необходимо было ясно показать различие между рассматриваемыми интервалами. Кроме того, слова "*разрыв*" и "*rupture*" начинаются со сходных звуков, что делает более удобным чтение статей, написанных на русском языке. Поэтому за основу был принят термин "*разрыв*".

В физике, рассматриваемое явление в значительной мере аналогично запрещенным зонам в твердом теле.

По-видимому, рассматриваемое явление, без ущерба для его сути, может быть названо адекватно условиям конкретной решаемой задачи и адекватно терминологии, сложившейся в конкретной области использования. По-видимому, допустимы названия, термины: "*разрывы*", "*промежутки*", "*запрещенные зоны*", "*недоступные области*", "*ограничения*", "*сжатия*", "*смещения*" и т.д.

## Приложение П4.
## Подробное доказательство теоремы для вероятности



### Подробное доказательство

Пусть, для серии испытаний с количеством испытаний $K$, в т.ч. при $K$, стремящемся к бесконечности, плотность $f_K(x_k)$ оценки вероятности, частоты $F$ : $F \equiv M \equiv E(X)$, некоторого события имеет свойства, заданные в разделе 1.1., в частности, определена на $[0, 1]$ и $Const_1=1$.

Тогда, если на интервале $[0,1]$ определена $P$ : при стремлении количества испытаний $K$ к бесконечности $K \to \infty$, оценка вероятности $F$ стремится к $P$, т.е.

$$\lim_{K \to \infty} F = P,$$

и между оценкой вероятности и любой из границ интервала существуют ненулевые разрывы $0 < r_{expect} \le F \le (1-r_{expect}) < 1$, то такие же ненулевые разрывы $0 < r_{expect} \le P \le (1-r_{expect}) < 1$ существуют между $P$ и любой из границ интервала.

Доказательство.

Из

$$\lim_{K \to \infty} F = P$$

следует, что для любого $r>0$ существует $K_r$ : для $K>K_r$ $|F-P|<r$.

Для случая $0<r_{expect} \le P$ предположим, от противного, что существует $r_3>0$ : $0 \le P=r_{expect}-r_3<r_{expect}$.

Для $K>K_r$ положим $r=(r_{expect}-P)/2=r_3/2$. Тогда $|F-P|<r_3/2$. При $F \ge P \ge 0$, $F-P=|F-P|<r_3/2$ и $F<P+r_3/2=r_{expect}-r_3+r_3/2=r_{expect}-r_3/2<r_{expect}$, то есть $F<r_{expect}-r_3/2<r_{expect}$, что противоречит исходному условию $F \ge r_{expect}$.

Доказательство для случая $P \le (1-r_{expect})<1$ полностью аналогично вышеприведенному.

В той мере, в какой вероятность удовлетворяет условиям, наложенным на $P$, в той же мере теорема справедлива и для вероятности.

Теорема доказана.

Возможные формулировки

Теорему можно сформулировать и для нужд практических приложений, как более конкретно, так и в более общем виде:

Если, для серии испытаний с количеством испытаний, стремящимся к бесконечности, оценка вероятности стремится к вероятности, а дисперсия оценки вероятности, из-за каких-либо причин (например, из-за шумов, из-за нестабильностей), не может приближаться к нулю ближе, чем на $r_{dispers}>0$, то, как оценка вероятности так и вероятность, тоже не могут приближаться к границе этого интервала ближе, чем на $r_{expect}>0$.

Другими словами, если, для серии испытаний с количеством испытаний, стремящимся к бесконечности, оценка вероятности стремится к вероятности, а между дисперсией оценки вероятности и нулем, из-за каких-либо причин (например, из-за шумов, из-за нестабильностей), существует ненулевой разрыв, то у границ шкалы вероятностей тоже существуют ненулевые разрывы, как для оценки вероятности, так и для вероятности.

В более общем виде, для возможных значений можно также сказать:

Если, для серии испытаний с количеством испытаний, стремящимся к бесконечности, оценка вероятности стремится к вероятности, а между возможными значениями дисперсии оценки вероятности и нулем, из-за каких-либо причин (например, из-за шумов, из-за нестабильностей), существует ненулевой разрыв, то у границ шкалы вероятностей тоже существуют ненулевые разрывы, как для возможных значений оценки вероятности, так и для возможных значений вероятности.

Замечание 1. Более точная оценка разрыва $r_{expect}$

Заметим, что, согласно П2, можно дать более точную оценку $r_{expect}$

$$r_{\exp ect} \equiv \frac{r_{dispers}}{(B-A)^{n-1}}$$

и, при $(B\text{-}A)=1$, то есть для случаев оценки вероятности и вероятности

$$r_{\exp ect} = r_{dispers}\,.$$

Замечание 2. Условия существования разрывов

Следует подчеркнуть, что разрывы, о которых идет речь, существуют не всегда и не для всех случаев. Эти разрывы в шкале вероятностей существуют и для оценки вероятности и для вероятности только тогда и только для тех случаев, когда и в которых существует ненулевой разрыв между возможными значениями дисперсии (или иного центрального момента) оценки вероятности и нулем.

**Приложение П5. Подробный пример разрывов в шкале вероятностей**

Условия

Результаты

Вывод

Замечание. Дисперсия $\sigma^2$ разброса попаданий и дисперсия $D$ оценки вероятности попаданий и промахов

Условия

Самый простой пример разрывов в шкале вероятностей – стрельба в мишень (одномерный случай):

Пусть, при точном прицеливании, имеет место некоторый разброс попаданий, например:

А) из-за разброса в размере пуль (если диаметр пули меньше диаметра ствола, то пуля будет вылетать из ствола не по оптической оси ствола, а по некоторому пучку траекторий вокруг этой оси) и разброса в количестве и качестве заряда или

Б) при стрельбе дробью.

Пусть также размер мишени равен $2L$, а разброс попаданий подчиняется нормальному закону распределения с дисперсией $\sigma^2$ (и среднеквадратичным отклонением $\sigma$). Естественно, $\sigma$ увеличивается, например, с уменьшением длины ствола, а также, в данном случае, с увеличением расстояния до мишени (то есть $\sigma$ в данном случае измеряется в линейных, а не в угловых единицах).

Возможные значения вероятности попадания в мишень $P_{in}$ могут, в зависимости от нахождения точки прицела, располагаться в диапазоне от минимального, нулевого значения $P_{in\_min}=0$, достигаемого, например, если точка прицела находится в направлении, противоположном мишени, до максимального значения $P_{in\_Max}$, достигаемого, если точка прицела гарантированно находится в центре мишени.

Возможные значения вероятности промаха $P_{out}=1-P_{in}$ могут, в зависимости от нахождения точки прицела, располагаться в диапазоне от максимального значения $P_{out\_Max}=1$, достигаемого, например, если точка прицела находится в направлении, противоположном мишени, до минимального значения $P_{out\_min}$, достигаемого, если точка прицела гарантированно находится в центре мишени.

Если точка прицела перемещается от направления, противоположного мишени, до точки, находящейся в центре мишени, то вероятность попадания в мишень $P_{in}$ увеличивается от $0$ до $P_{in\_Max}$, а вероятность промаха $P_{out}$ соответственно уменьшается от $1$ до $P_{out\_min}$. При этом Если $\sigma=0$, то переходы вероятности попадания от $0$ к $P_{in\_Max}$ и вероятности промаха от $1$ к $P_{out\_min}$ происходят скачком. Если $\sigma>0$, то оба перехода происходят плавно и $P_{in}$ принимает все значения между $0$ и $P_{in\_Max}$, а $P_{out}$ принимает все значения между $1$ и $P_{out\_min}$.

Если точка прицела гарантированно находится в центре мишени, то максимальная вероятность попадания в мишень $P_{in\_Max}$ и минимальная вероятность промаха $P_{out\_min}$, в зависимости от соотношения $\sigma$ и $L$, равны (см., напр., Прохоров 1988):

Результаты

Для простоты рассмотрим только 4 классических точки: $\sigma=0$ (или $\sigma\approx0$ или $L>3\sigma>0$), $L=3\sigma$, $L=2\sigma$ и $L=\sigma$.

При $L>\sigma=0$, максимальная вероятность попадания в мишень составляет $P_{in\_Max}=1$, а минимальная вероятность промаха составляет соответственно $P_{out\_min}=0$. Следовательно, возможные значения вероятности попадания в мишень, в зависимости от точки прицела, могут быть равны $P_{in\_min}=0$ или $P_{in\_Max}=1$, а возможные значения вероятности промаха могут быть равны соответственно $P_{out\_Max}=1$ или $P_{out\_min}=0$. Таким образом, при $L>\sigma=0$, разрывов в шкале вероятностей нет $r_{expect}=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}=0$.

При $\sigma\approx0$ и при $L>3\sigma>0$, когда, по "правилу трех сигм", можно полагать $\sigma\approx0$, максимальная вероятность попадания в мишень составляет $P_{in\_Max}\approx1$, и минимальная вероятность промаха составляет соответственно $P_{out\_min}\approx0$. Следовательно возможные значения вероятности попадания в мишень, в зависимости от точки прицела, могут находиться в диапазоне $0\le P_{in}\le P_{in\_Max}\approx1$, а возможные значения вероятности промаха могут находиться соответственно в диапазоне $0\approx P_{out\_min}\le P_{out}\le1$. Таким образом, при $\sigma\approx0$ и при $L>3\sigma>0$, разрывов в шкале вероятностей тоже нет, точнее говоря, разрывы в шкале вероятностей можно считать равными нулю $r_{expect}=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}\approx0$.

При $L=3\sigma>0$, максимальная вероятность попадания в мишень составляет $P_{in\_Max}\approx0{,}997$, а минимальная вероятность промаха составляет $P_{out\_min}\approx0{,}003$. Следовательно возможные значения вероятности попадания в мишень, в зависимости от точки прицела, могут находиться в диапазоне $0\le P_{in}\le P_{in\_Max}=0{,}997<1$, а возможные значения вероятности промаха могут находиться соответственно в диапазоне $0<0{,}003=P_{out\_min}\le P_{out}\le1$. Таким образом, при $L=3\sigma>0$, в шкале вероятностей появляются ненулевые разрывы $r_{expect}=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}=0{,}003>0$.

При $L=2\sigma>0$, максимальная вероятность попадания в мишень составляет $P_{in\_Max}=0{,}95$, а минимальная вероятность промаха составляет $P_{out\_min}=0{,}05$. Следовательно возможные значения вероятности попадания в мишень, в зависимости от точки прицела, могут находиться в диапазоне $0\le P_{in}\le P_{in\_Max}=0{,}95<1$, а возможные значения вероятности промаха могут находиться соответственно в диапазоне $0<0{,}05=P_{out\_min}\le P_{out}\le1$. Таким образом, при $L=2\sigma>0$, в шкале вероятностей существуют ненулевые разрывы $r_{expect}=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}=0{,}05>0$.

При $L=\sigma>0$, максимальная вероятность попадания в мишень составляет $P_{in\_Max}=0{,}68$, а минимальная вероятность промаха составляет $P_{out\_min}=0{,}32$. Следовательно возможные значения вероятности попадания в мишень, в зависимости от точки прицела, могут находиться в диапазоне $0\le P_{in}\le P_{in\_Max}=0{,}68<1$, а возможные значения вероятности промаха могут находиться соответственно в диапазоне $0<0{,}32=P_{out\_min}\le P_{out}\le1$. Таким образом, при $L=\sigma>0$, в шкале вероятностей существуют ненулевые разрывы $r_{expect}=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}=0{,}32>0$.

Результаты. Краткий список

При $L>\sigma=0$ получаем $P_{in}=P_{in\_min}=0$ или $P_{in}=P_{in\_Max}=1$,
$P_{out}=P_{out\_Max}=1$ или $P_{out}=P_{out\_min}=0$ и
$r_{expect}=1\text{-}P_{in\_Max}=P_{out\_min}=0$.

При $L>3\sigma>0$, для многих практических применений, по "правилу трех сигм", можно полагать $\sigma\approx0$ и $0\leq P_{in}\leq P_{in\_Max}\approx1$,
$0\approx P_{out\_min}\leq P_{out}\leq1$ и
$r_{expect}=1\text{-}P_{in\_Max}=P_{out\_min}\approx0$.

При $L=3\sigma>0$ получаем $0\leq P_{in}\leq P_{in\_Max}=0{,}997<1$,
$0<0{,}003=P_{out\_min}\leq P_{out}\leq1$ и
$r_{expect}=1\text{-}P_{in\_Max}=P_{out\_min}=0{,}003>0$.

При $L=2\sigma>0$ получаем $0\leq P_{in}\leq P_{in\_Max}=0{,}95<1$,
$0<0{,}05=P_{out\_min}\leq P_{out}\leq1$ и
$r_{expect}=1\text{-}P_{in\_Max}=P_{out\_min}=0{,}05>0$.

При $L=\sigma>0$ получаем $0\leq P_{in}\leq P_{in\_Max}=0{,}68<1$,
$0<0{,}32=P_{out\_min}\leq P_{out}\leq1$ и
$r_{expect}=1\text{-}P_{in\_Max}=P_{out\_min}=0{,}32>0$.

Вывод

Таким образом, при нулевой дисперсии (и в тех случаях, когда дисперсию можно считать нулевой), т.е. при $\sigma^2=0$ (и при $\sigma\approx0$ или $L>3\sigma$) - разрывов в шкале вероятностей нет (практически нет).

При ненулевой дисперсии $\sigma^2>0$ - в шкале вероятностей появляются ненулевые разрывы $r_{expect}>0$:

- между областью возможных (в зависимости от нахождения точки прицела) значений вероятности $P_{in}$ : $0\leq P_{in}\leq P_{in\_Max}=1\text{-}\ r_{expect}<1$, попадания в мишень и единицей, то есть верхней границей шкалы вероятностей, и
- между областью возможных (в зависимости от нахождения точки прицела) значений вероятности $P_{out}$ : $0<r_{expect}=P_{out\_min}\leq P_{out}\leq1$, промаха и нулем, то есть нижней границей шкалы вероятностей.

Замечание. Дисперсия $\sigma^2$ разброса попаданий
и дисперсия $D$ оценки вероятности попаданий и промахов

Заметим, что дисперсия разброса попаданий $\sigma^2$ может определять дисперсию $D$ оценки вероятности попаданий и промахов, но не является ею.

Если дисперсия разброса попаданий $\sigma^2=0$ (или если $\sigma^2\approx 0$ или если $L>3\sigma$), то область возможных значений дисперсии $D$ доходит (при $\sigma^2\approx 0$ и $L>3\sigma>0$ - приблизительно доходит) до нуля. Поэтому, в данном случае, нет (практически нет) разрыва, запрещенной зоны между возможными значениями дисперсии $D$ оценки вероятности и нулем, то есть $r_{dispers}=0$ (или $r_{dispers}\approx 0$).

Если $3\sigma>L>0$, то область возможных значений дисперсии $D$ не доходит до нуля, то есть существует разрыв $r_{dispers}>0$:

Для оценки вероятности попадания в мишень – только в области вблизи $1$

(Если точка прицела находится в направлении, противоположном мишени, то есть если оценка вероятности попадания в мишень находится в области вблизи $0$, то увеличение, изменение $\sigma$ от $\sigma=0$ до $\sigma>0$ не влияет на $D$. Следовательно, вблизи оценки вероятности попаданий, равной $0$, дисперсия $D$ оценки вероятности попадания в мишень может быть равна $0$).

Для оценки вероятности промаха – только в области вблизи $0$

(Если точка прицела находится в направлении, противоположном мишени, то есть если оценка вероятности промаха находится в области вблизи $1$, то увеличение, изменение $\sigma$ от $\sigma=0$ до $\sigma>0$ также не влияет на $D$. Следовательно, вблизи оценки вероятности промаха, равной $1$, дисперсия $D$ оценки вероятности промаха может быть равна $0$).

Вследствие этого, данный простой пример может иллюстрировать теорему о существовании разрывов в шкале вероятностей наглядно, но лишь частично, в отдельных областях, а именно:

Для оценки вероятности и вероятности попадания в мишень – только в области вблизи $1$.

Для оценки вероятности и вероятности промаха – только в области вблизи $0$.