



Munich Personal RePEc Archive

# **Different Techniques of Modelling Trend and its applications to Puerto Rico Sectoral Employment Series**

Toledo, Wilfredo

University of Puerto Rico, Rio Piedras Campus

November 2010

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/26871/>  
MPRA Paper No. 26871, posted 29 Nov 2010 07:27 UTC

# *Algunos métodos para modelar tendencias y su aplicación a las series de empleo sectorial en Puerto Rico*

*(Different Techniques of Modelling Trend and its applications to Puerto Rico Sectoral Employment Series)*

*por*

*Wilfredo Toledo Ph.D.  
Noviembre de 2010*

**Resumen:** En este artículo se expusieron los principales métodos que se utilizan para modelar las tendencias de las series de tiempo. Se consideraron métodos para extraer las tendencias deterministas y estocásticas, así como modelos segmentados con las fechas de los quiebres determinadas endógenamente. Se discutió, además, la forma de construir intervalos de confiabilidad para las fechas de los cambios estructurales. Dichas técnicas se aplicaron a las series de empleo total y sectorial de Puerto Rico. Un hallazgo interesante del trabajo fue la identificación de una reducción en la tasa de crecimiento del empleo total de la isla ocurrida entre 1998 a 2004.

**Abstracts:** This paper considers the principal approaches used for modelling trends in economic time series. Deterministic, stochastic, and segmented trends models with dates of break determined endogenously are considered. Also, a review of Quandt/Andrews/Bain method to identify structural changes and construct confidence intervals for the break dates is presented. These techniques are applied to Puerto Rico sectoral employment series.

**Palabras Clave:** Modelos de tendencia, filtro Hodrick-Prescott, descomposición Beveridge-Nelson, cambios estructurales con fechas endógenas, intervalos de confianza para fechas de cambios estructurales.

**Key Words:** Modelling trends, structural break and confidence intervals, Hodrick-Prescott Filter, Beveridge-Nelson Decomposition.

**JEL classification codes** C32, C10, E32

# *Algunos métodos para modelar tendencias y su aplicación a las series de empleo sectorial en Puerto Rico<sup>1</sup>*

*Wilfredo Toledo<sup>2</sup>*

## **1. Introducción**

No existe un consenso entre los estadísticos ni los economistas sobre lo que constituye la tendencia general de una serie y por consiguiente tampoco existe una sola manera de modelarla. En este artículo se discuten los principales métodos que se utilizan para extraer la tendencia secular de las series de tiempo. Se examinan tanto los conceptos de tendencias determinísticas como estocásticas.

Los modelos de tendencias reseñados en este trabajo se aplicaron a las series de empleo de los principales sectores económicos de Puerto Rico, a saber: la administración pública, la manufactura, el comercio, transportación comunicaciones y utilidades, y los servicios que incluyen servicios financieros y bienes raíces. Se excluyó del análisis el sector agrícola, pero se examina de empleo total en la isla. Los resultados de esos análisis son útiles para detectar cambios que han impactado permanentemente la actividad en los sectores económicos y que han modificado la senda de crecimiento del insumo laboral en el país.

## **2. El concepto de tendencia**

Desde el punto de vista estadístico una serie cronológica ( $X_t$ ) puede ser descompuesta en los siguientes componentes; (i) un elemento estacional (s); (ii) un elemento irregular o aleatorio ( $\epsilon$ ); (iii) un elemento cíclico(c) y; (iv) una tendencia o movimiento de largo plazo (f(t)). Esa serie se puede representar como:

---

<sup>1</sup> Esta investigación se realizó mientras se disfrutaba un descargue de las tareas docentes otorgado por el Departamento de Economía del Colegio de Ciencias Sociales de UPR recinto de Río Piedras en el año académico 2009-2010.

<sup>2</sup> Catedrático Asociado, Departamento de Economía, UPR Río Piedras.

$$X_t = s + \epsilon + c + f(t)$$

Las series de tiempo a menudo manifiestan patrones que se repiten cada (k) períodos. Este tipo de serie se conoce como una serie periódica. Dichas series tienen la característica de que las observaciones separadas por múltiplos de “k” son parecidas. En las series económicas estos patrones ocurren dentro de un año por lo que se le conocen como series estacionales.

Existen distintas técnicas para remover el elemento periódico de las series de tiempo, los más utilizados son: (i) diferenciación discreta estacional; (ii) uso de variables categóricas asociadas a cada período; (iii) y, el filtro X12 (antes X11) que es utilizado por el Oficina de Análisis Económico del Departamento de Comercio de los Estados Unidos y está incorporado en algunos programas estadísticos computadorizados. Los componentes aleatorios y cíclicos podrían separarse o extraerse de la serie mediante la estimación de algún modelo econométrico.

Para modelar la tendencia es necesario, primero contar con alguna definición conceptual que se pueda operacional. Como se mencionó, ese componente de las series no ha sido definido concluyentemente, pero en términos generales se concibe como la parte de una serie que cambia lentamente a través del tiempo. La suavidad es una característica importante, de esa definición. Sin embargo, en el caso de los procesos de caminatas aleatorias la tendencia de la variable es la última observación, por lo que los cambios en ésta no son necesariamente graduales. En ese caso el componente secular podría ser una línea que pase por la última observación de la serie.

Otra forma de definir ese concepto es como aquel componente de la serie que cuando se predice ofrece una indicación de los movimientos en el largo plazo de la variable bajo análisis. Si la tendencia es la parte de la serie que se puede extrapolar, entonces hay que tener una forma de realizar dicha extrapolación.

### **3. Tres métodos para extraer la tendencia general de las series**

La tendencia de largo plazo contiene los cambios que han afectado permanentemente las series económicas. Existen varios métodos para remover este

elemento algunos de las cuales son: (i) uso de polinomios de tendencia (iii) el filtro de Hodrick-Prescott (HP); y la descomposición de Beveridge-Nelson.

Esta sección se dedica a la discusión de esas tres técnicas y los resultados de su aplicación a las series de empleo mencionadas, para el período de 1970 a 2008.

### **A. Polinomios de tendencia**

Si la evolución del indicador,  $Y_t$ , está afectada por una tendencia lineal se puede representar, entonces, como:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t \quad (1)$$

Donde las  $\beta$ 's son parámetros y  $t$  es una variable de tendencia

Por otro lado, si la tendencia no fuera lineal se puede representar por:

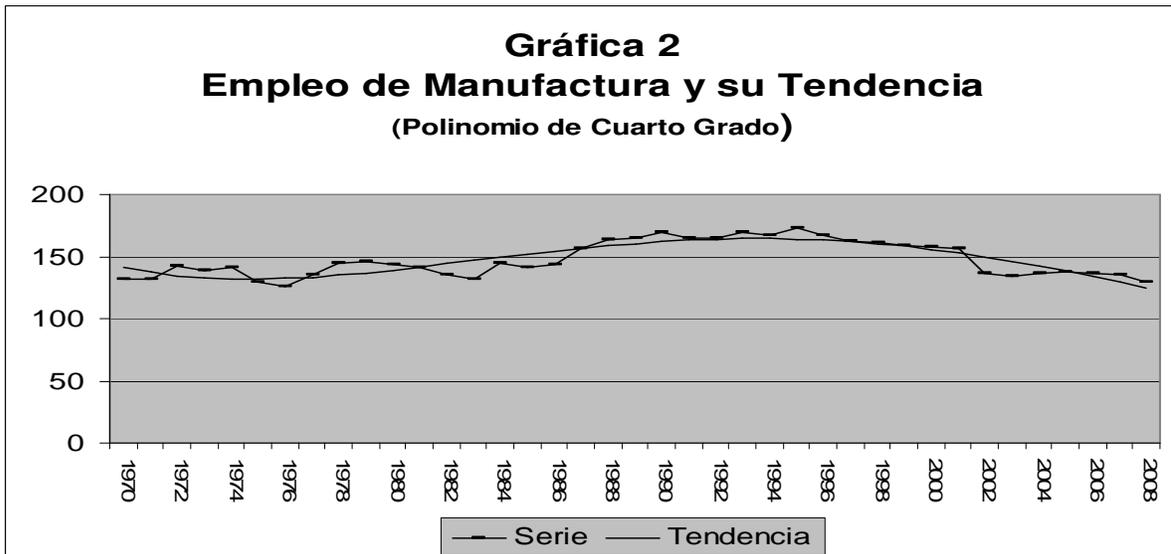
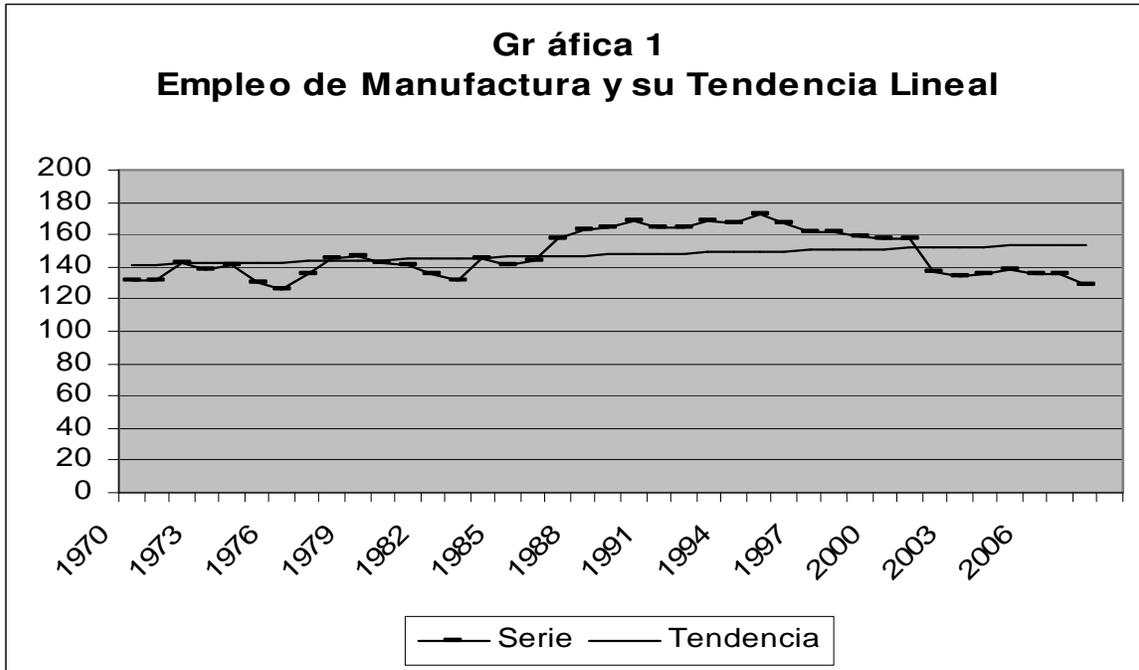
$$Y_t = \beta_0 + \sum_1^K \beta_j t^j \quad (2)$$

El modelo (2) es un polinomio de orden  $k$ , lo que implica que la pendiente de la serie cambia a través del tiempo. El problema empírico es determinar los valores de las  $\beta$ 's en los dos modelos y el orden del polinomio para (2), eso se puede hacer con las pruebas estadísticas estándares usadas en la técnica de regresión lineal presumiendo las variables dependientes son aleatorias.

Las Gráficas 1 y 2 muestran la tendencia lineal y ajustada por un polinomio de cuarto grado para el empleo en manufactura. Como se observa, el empleo en ese sector estuvo por encima de su tendencia lineal desde 1987 hasta 2001, mientras que desde 2002 hasta 2008 asumió valores por debajo de la misma. Por otro lado, al considerar la tendencia generada por el polinomio de cuarto grado, que no toma como constante la tasa de crecimiento de largo plazo, se observa que el empleo en ese sector estuvo por debajo de su senda de expansión en los años 2002 al 2005, pero que ha superado la misma para los años de 2006 y 2007. Como se muestra en la Gráfica 2 lo que ha sucedido en la década de los 2000 es una reducción en la tendencia secular de esa serie y no movimientos transitorios.

La Tabla 1 contiene los resultados más relevantes la estimación de los dos modelos de tendencia. Como se desprende de la parte B de dicha tabla la pendiente del empleo en manufactura ha sufrido varios cambios en el período bajo análisis, en la

década de los dos mil la tasa de crecimiento ha sido negativa aunque se ha reducido el ritmo de las reducciones anuales.

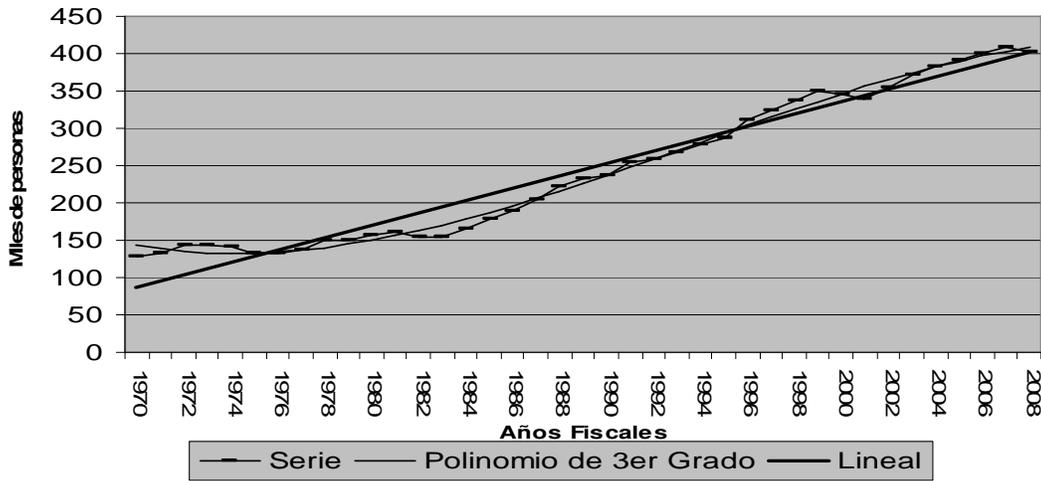


<b>Tabla 1</b>			
<b>Resultados de la Estimación de los modelos de tendencia</b>			
Variable dependiente: Empleo en Manufactura			
Período de estimación: 1970 a 2008			
<b>A. Tendencia lineal</b>			
<b>Variable</b>	<b>Coefficiente</b>	<b>Desviación estándar</b>	<b>Valor-P</b>
C	141.127	4.317	0.000
t	0.333	0.195	0.096
R <sup>2</sup> =.0731			
<b>B. Polinomio de tendencia</b>			
C	141.017	4.931	0.000
t	-4.389	1.848	0.023
t <sup>2</sup>	0.611	0.202	0.005
t <sup>3</sup>	-0.021	0.008	0.013
t <sup>4</sup>	0.0002	0.0001	0.063
R <sup>2</sup> =.771			

Examinemos ahora, el sector de los servicios. La Gráfica 3 y la Tabla 2 ilustran y resumen la estimación de dos modelos de polinomios de tendencia: uno lineal y otro cúbico. Como es evidente en la Gráfica 3 y en la parte A de la Tabla 2 la tendencia del empleo en servicios de 1970 a 2007 fue positiva. Esa serie estuvo por encima de su crecimiento lineal en la década de los años 2000 y creció al ritmo implícito en el modelo de tendencia de tercer grado.

La evolución del empleo en el sector de comercio se ilustra en la Gráfica 4 y la Tabla 3. El comportamiento de esa serie se asemeja mucho al del empleo de servicios. Los valores de dicha variable supera su tendencia de largo plazo desde el segundo lustro de los 1990. Sin embargo, el modelo de tercer grado que se ajusto evidencia que su crecimiento se ha mermado desde finales de los años 2000.

**Gráfica 3**  
**Empleo en Sevicios, Finanzas y Bienes Raices y Sus**  
**Tendencias**



**Tabla 2**  
**Resultados de la Estimación de los modelos de tendencia**

Variable dependiente: Empleo en Servicios  
 Período de estimación: 1970 a 2008

**A. Tendencia Lineal**

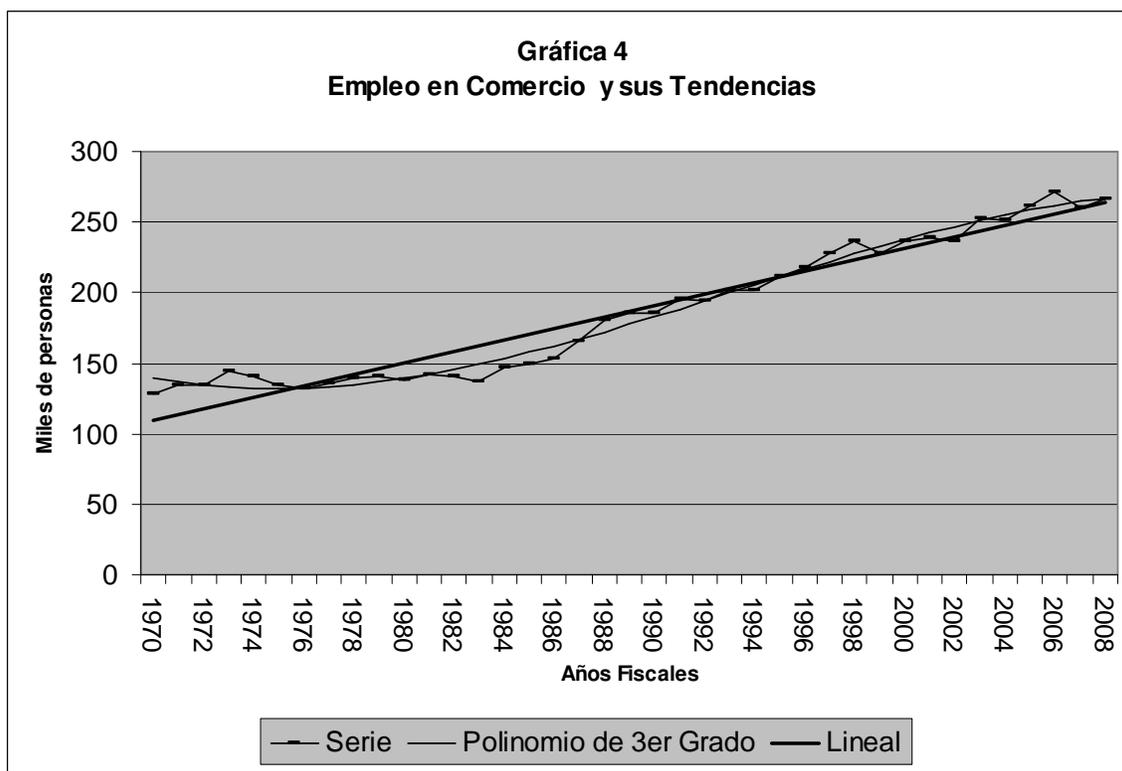
Variable	Coficiente	Desviación estándar	Valor-P
C	86.29	6.667	0.000
t	8.294	0.302	0.000

$R^2=.953$

**B. Polinomio de tendencia**

C	143.69	4.83	0.000
t	-5.429	1.16	0.000
t <sup>2</sup>	.704	.069	0.000
t <sup>3</sup>	-.0099	.001	0.000

$R^2=.993$



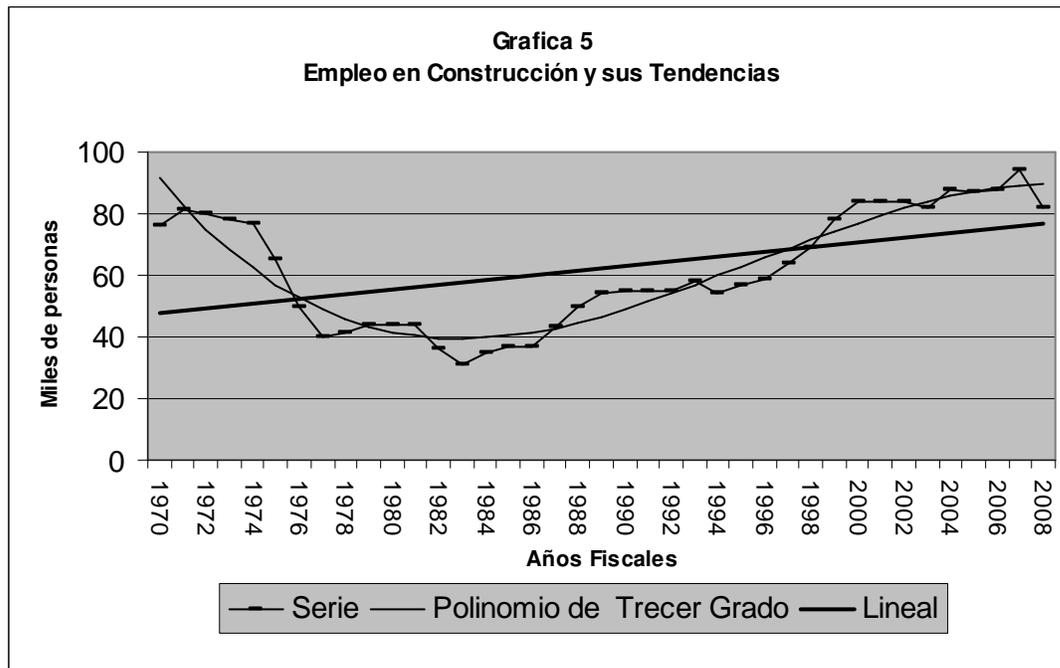
**Tabla 3**  
**Resultados de la Estimación de los modelos de tendencia**

Variable dependiente: Empleo en el Comercio  
Período de estimación: 1970 a 2008

<b>A. Tendencia Lineal</b>			
Variable	Coficiente	Desviación estándar	Valor-P
C	109.0064	3.7761	0.0000
t	4.0860	0.1709	0.0000
R <sup>2</sup> =.953			
<b>B. Polinomio de tendencia</b>			
C	139.6263	3.6139	0.0000
t	-3.3343	0.8344	0.0003
t <sup>2</sup>	0.3856	0.0514	0.0000
t <sup>3</sup>	-0.0055	0.00088	0.0000
R <sup>2</sup> =.993			

Las Gráficas 5 y 6, y las Tablas 4 y 5 exponen la evolución del empleo de construcción y del conglomerado de transportación y comunicaciones y los resultados de las estimaciones de los modelos de regresión lineal para los mismos. Como vemos el empleo de construcción exhibe un comportamiento peculiar en forma de “U”, resultando que la variable esté regularmente por debajo de su tendencia lineal. La estimación del polinomio de tendencia de grado tres implica que la tendencia de esa serie se ha reducido en los últimos años.

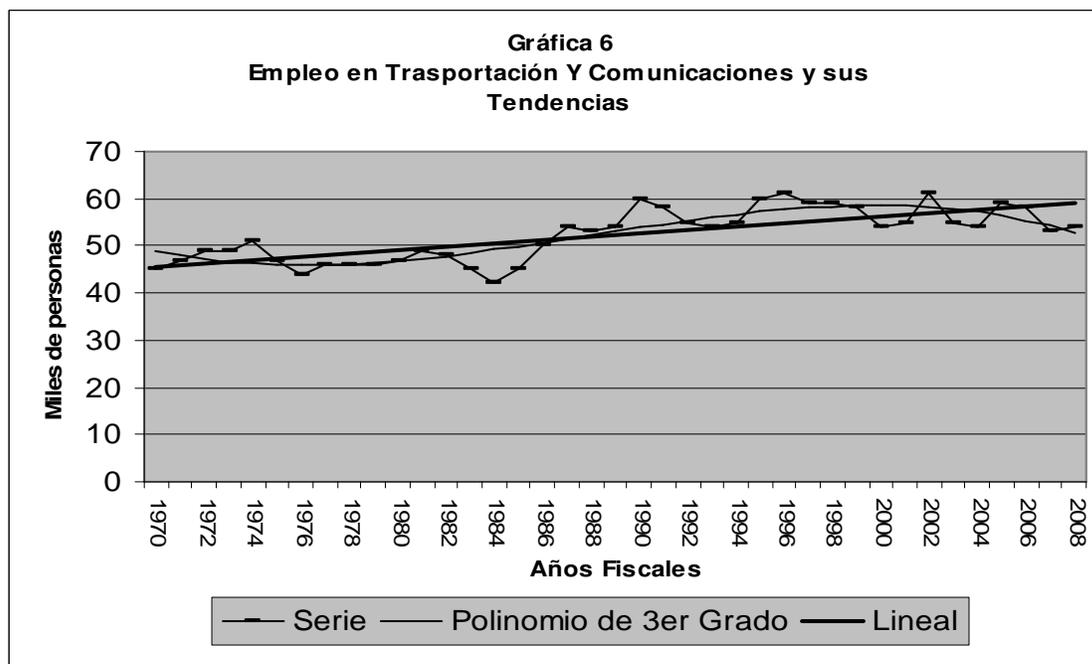
Por otro lado, el empleo en el sector de transportación y comunicaciones estuvo por encima de su tendencia de primer grado desde el segundo lustro de la década de los mil novecientos noventa pero en los años 2000 ha asumido valores por debajo de la misma. Además, los estimados del modelo de tendencia cúbico evidencia una reducción en la tendencia en los últimos años (coeficiente negativo de  $t^3$ )



**Tabla 4**  
**Resultados de la Estimación de los modelos de tendencia**

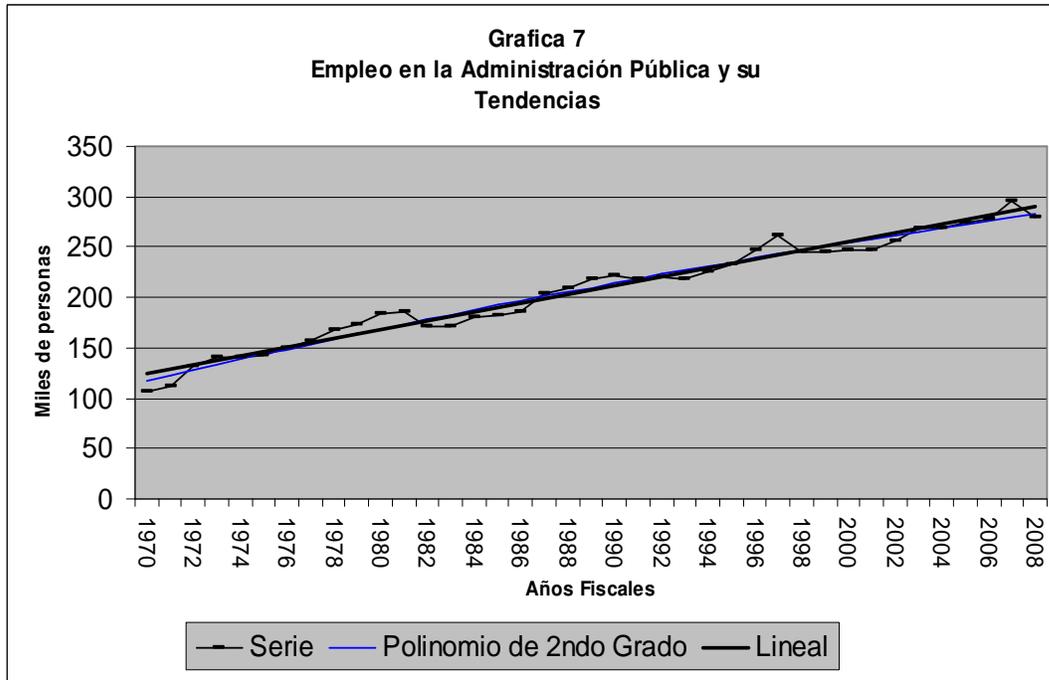
Variable dependiente: Empleo en el Construcción Período de estimación: 1970 a 2008

<b>A. Tendencia Lineal</b>			
Variable	Coefficiente	Desviación estándar	Valor-P
C	47.52051	5.300577	0.0000
t	0.764777	0.240028	0.0029
$R^2 = .0.215$			
<b>B. Polinomio de tendencia</b>			
C	91.39931	3.628507	0.0000
t	-9.057172	0.837788	0.0000
t <sup>2</sup>	0.468362	0.051616	0.0000
t <sup>3</sup>	-0.006085	0.000892	0.0000
$R^2 = .0.899$			



<b>Tabla 5</b>			
<b>Resultados de la Estimación de los modelos de tendencia</b>			
Variable dependiente: Empleo en Transportación y Comunicaciones			
Período de estimación: 1970 a 2008			
<b>A. Tendencia Lineal</b>			
<b>Variable</b>	<b>Coefficiente</b>	<b>Desviación estándar</b>	<b>Valor-P</b>
C	45.41282	1.155220	0.0000
t	0.361538	0.052312	0.0000
R <sup>2</sup> =0.563495			
<b>B. Polinomio de tendencia</b>			
C	48.86148	1.715036	0.0000
t	-1.053053	0.395985	0.0117
t <sup>2</sup>	0.103559	0.024397	0.0002
t <sup>3</sup>	-0.001923	0.000422	0.0001
R <sup>2</sup> =0.736173			

La Gráfica 7 y la Tabla 6 contienen información sobre la evolución a través del tiempo del empleo público, mientras que la Gráfica 8 y Tabla 7 informan lo propio para la serie de empleo total en la isla. Como se puede observar el empleo gubernamental hasta 2007 ha exhibido una tendencia positiva aunque el último año manifestó un valor por debajo de la tendencia. Por su parte el empleo total estuvo por encima de su tendencia lineal desde mediados de los años noventa hasta 2006, pero el 2007 asumió un valor por debajo de la misma. La estimación del modelo de tendencia de grado tres arrojó un coeficiente negativo para  $t^3$ , lo que implica que la tasa de crecimiento de esa variable se ha reducido en los últimos años.

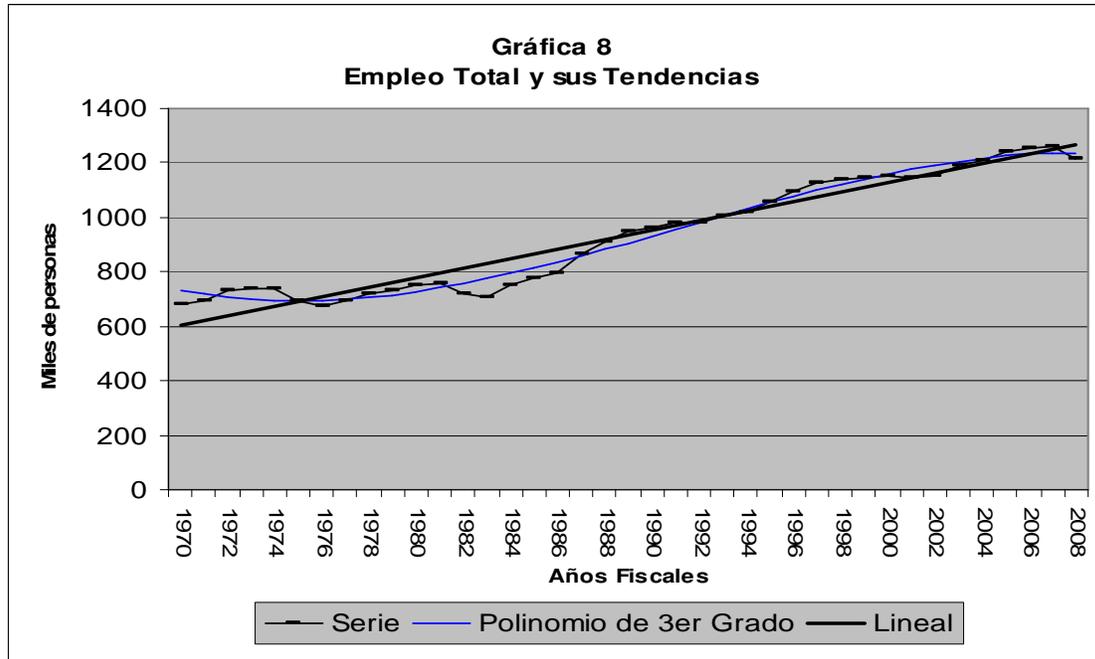


**Tabla 6**  
**Resultados de la Estimación de los modelos de tendencia**

Variable dependiente: Empleo en la Administración

Período de estimación: 1970 a 2008

<b>A. Tendencia Lineal</b>			
<b>Variable</b>	<b>Coefficiente</b>	<b>Desviación estándar</b>	<b>Valor-P</b>
C	123.6321	2.782325	0.0000
t	4.370243	0.125993	0.0000
$R^2=0.970165$			
<b>B. Polinomio de tendencia</b>			
C	123.6321	2.782325	0.0000
t	4.370243	0.125993	0.0000
t <sup>2</sup>	123.6321	2.782325	0.0279
$R^2=0.973964$			



**Tabla 6**  
**Resultados de la Estimación de los modelos de tendencia**

Variable dependiente: Empleo Total

Período de estimación: 1970 a 2008

<b>A. Tendencia Lineal</b>			
Variable	Coefficiente	Desviación estándar	Valor-P
C	604.0115	16.24885	0.0000
t	17.35567	0.735802	0.0000
$R^2=0.937644$			
<b>B. Polinomio de tendencia</b>			
C	731.3984	17.34557	0.0000
t	-16.82271	4.004926	0.0002
t <sup>2</sup>	1.948004	0.246744	0.0000
t <sup>3</sup>	-0.030398	0.004266	0.0000
$R^2=0.980514$			

**B. La tendencia de acuerdo al filtro Hodrick-Prescott**

Otra forma de modelar la tendencia de la serie fue propuesta por Hodrick y Prescott (1995), tomando como base el siguiente problema:

$$\text{Min}_{S_t} \sum_1^T (Y_t - S_t)^2 + \lambda \sum_1^T [(S_{t+1} - S_t) - (S_t - S_{t-1})]^2 \quad (3)$$

Donde:  $Y_t$  es la serie bajo análisis;  $S_t$  es la tendencia de la serie en el período  $t$ ;  $T$  es la longitud de la serie;  $\lambda$  es un parámetro que controla la suavidad de la serie luego de remover la tendencia. Hodrick y Prescott recomiendan utilizar  $\lambda$  igual a 100, 1,600 y 14,100 para datos anuales, trimestrales y mensuales, respectivamente.

En el primer término de la función objetivo se penaliza por valores de tendencia que se alejen de los valores de la serie, mientras que en el segundo se penaliza por la falta de suavidad en la tendencia. Así que, la tendencia obtenida constituye una valoración de estos dos factores para minimizar la penalidad total. El parámetro  $\lambda$  magnifica la penalidad por falta de suavidad de la tendencia, de tal forma que si dicho parámetro es igual a cero la tendencia será la misma serie y si tiende a infinito la tendencia sería lineal.

Este filtro es compatible con la noción de que el ciclo económico se compone de fluctuaciones de la actividad económica alrededor de una tendencia que varía lentamente a través del tiempo.

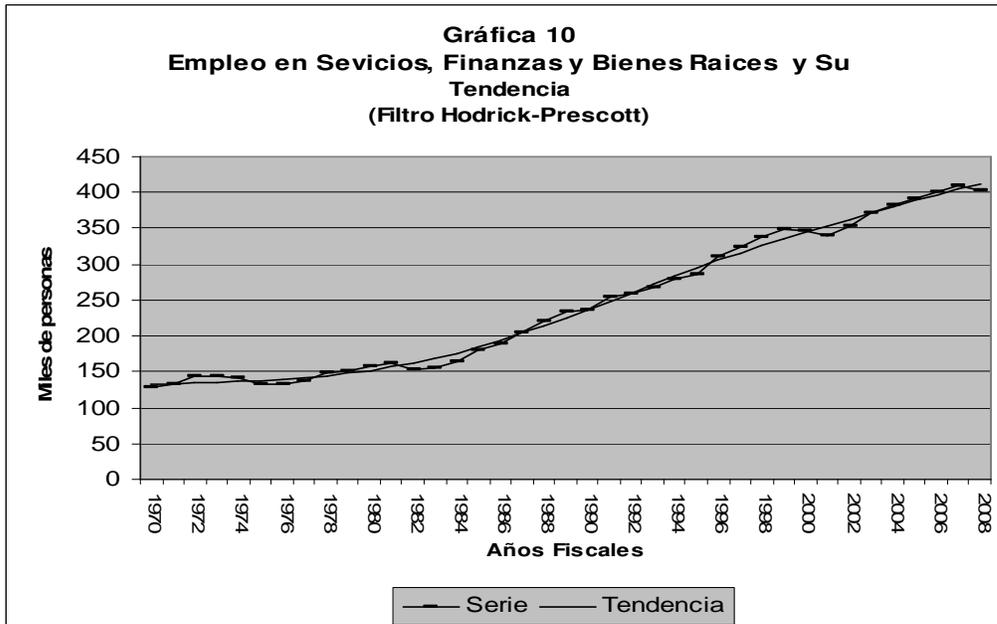
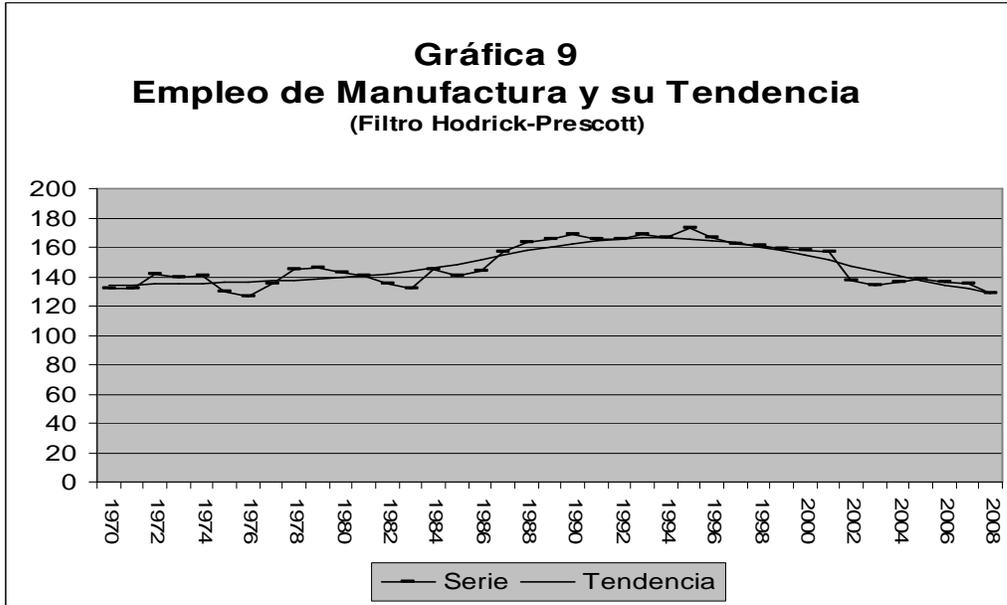
La minimización del problema (5) tiene como resultado el filtro de Hodrick- Prescott que se representa como:

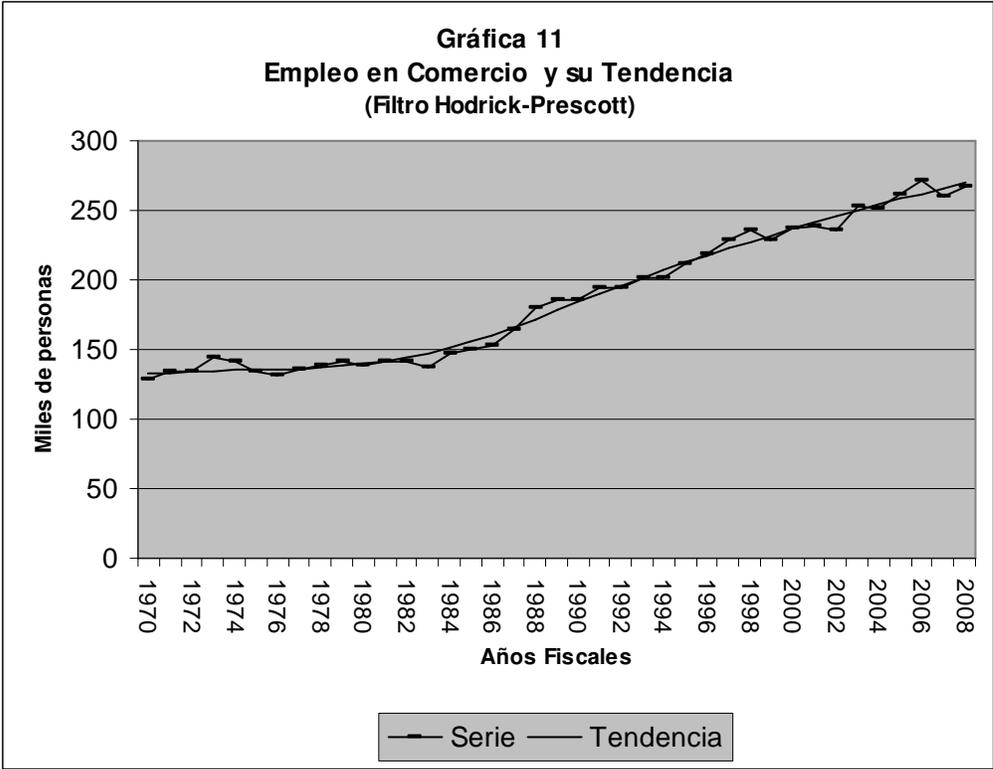
$$\text{Filtro } H - P = [1 + \lambda(1 - L)^2(1 - L^{-1})^2] \quad (4)$$

Donde  $L$  es el operador de rezago. Al aplicar este filtro a una serie ( $Y_t$ ) se obtiene la tendencia de la serie, mientras que la diferencia entre la serie original y la tendencia contiene los componentes cíclico y aleatorio, bajo el supuesto de que el elemento estacional ya se ha removido.

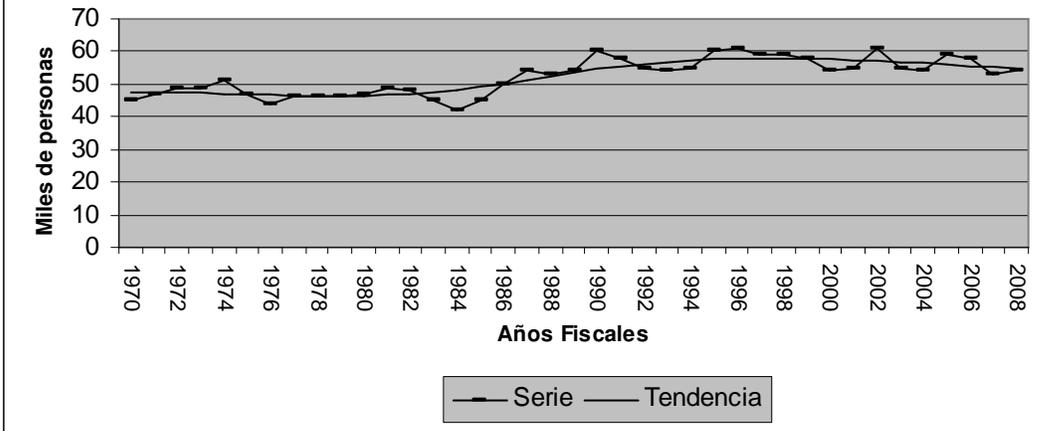
Las Gráficas 9 a la 15 presentan las tendencias, de acuerdo al filtro H-P, para las series de empleo. Como es evidente, este concepto de tendencia dinámica reproduce

mejor el movimiento de las variables a través del tiempo que los polinomios de tendencia. Vemos que aún bajo este concepto de tendencia en el 2007 el empleo total estuvo por debajo de su crecimiento de largo plazo.



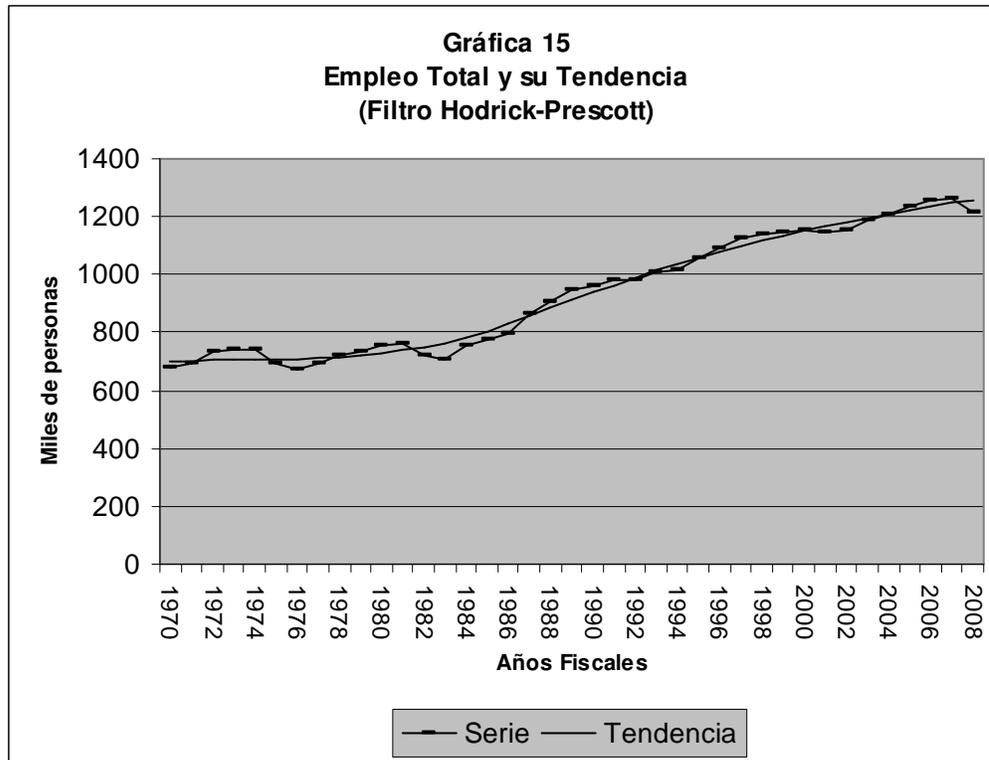


**Gráfica 13**  
**Empleo en Traspotación Y Comunicaciones y su**  
**Tendencia (Filtro Hodrick-Prescott)**



**Gráfica 14**  
**Empleo en la Administración Pública y su**  
**Tendencia (Filtro Hodrick-Prescott)**





### C. La descomposición Beveridge-Nelson (BN)<sup>3</sup>

Beveridge y Nelson (1981) proponen un método ingenioso para extraer la tendencia de una serie, partiendo de la descomposición de Wold. Si una serie es  $I(1)$  tiene primera diferencia ( $\Delta Y_t$ ) que puede representarse, de acuerdo a esa descomposición como:

$$\Delta Y_t = \mu + \psi(L)\varepsilon_t; \quad \psi_0 = 1 \quad (5)$$

Puesto que  $\psi(1) = \sum \psi_i$  es una constante, se puede demostrar que:

$$\psi(L) = \psi(1) + \Delta\tilde{\psi}(L)$$

<sup>3</sup> Esta discusión se basa en Mills (2003) páginas 61 a 63.

donde:  $\tilde{\psi}(L)$  es un polinomio que depende de  $\psi_j, j=1,2,\dots,\infty$ . Así que,

$$\Delta Y_t = \mu + \psi(1)\varepsilon_t + \Delta\tilde{\psi}(L)\varepsilon_t \quad (6)$$

La ecuación (6) se puede expresar como la suma de la tendencia ( $TR_t$ ) y el elemento cíclico ( $C_t$ ):

$$\Delta TR_t = \mu + \psi(1)\varepsilon_t \quad (7)$$

$$C_t = \Delta\tilde{\psi}(L)\varepsilon_t \quad (8)$$

En esta descomposición la tendencia de la serie es un proceso de caminata aleatoria con un término constante. Las ecuaciones (7) y (8) implican que tanto el elemento cíclico como la tendencia dependen de los elementos aleatorios, por lo que están correlacionados, contrario a las descomposiciones tradicionales que presumen una dicotomía entre estos dos factores.

Una forma de aplicar la descomposición BN es modelando la serie con un proceso ARIMA(p,1,q). En ese caso la ecuación (8) luciría como:

$$\Delta Y_t = \mu + \frac{\theta(L)}{\phi(L)}\varepsilon_t \quad (9)$$

Para:

$$\psi(L) = \frac{\theta(L)}{\phi(L)} \quad \text{y} \quad \psi(1) = \frac{\theta(1)}{\phi(1)}$$

$\psi(1)$  es la medida de persistencia para  $Y_t$

donde, los  $\theta$ 's son los parámetros del proceso MA y los  $\phi$ 's del AR.

La ecuación (9) puede escribirse como:

$$\frac{\phi(L)}{\theta(L)}\Delta Y_t = \mu \frac{\phi(1)}{\theta(1)} + \varepsilon_t \quad , \quad \text{ó}$$

$$\frac{\phi(L)}{\theta(L)} \Delta Y_t \psi(1) = \mu + \psi(1) \varepsilon_t \quad (10)$$

El lado derecho de (10) es  $\Delta TR_t$  de acuerdo a (10), así que en términos de las Y's:

$$TR_t = \frac{\phi(L)}{\theta(L)} Y_t \psi(1)$$

y,

$$C_t = Y_t - TR_t$$

En este trabajo se estimaron las tendencias BN para el empleo en el sector de servicios, y total, ya que esas dos series fueron las que se adaptaron a la aplicación de dicho método. De acuerdo a las pruebas de raíces unitarias ADF no se pueden rechazar las hipótesis de que las variables son  $I(1)$ <sup>4</sup>.

Los modelos ajustados fueron los siguientes:

$$(1-.436L)\Delta L_{SERV,t}=3.60 + \varepsilon_t$$

$$(1-.48)\Delta L_{Total,t}=6.58+ \varepsilon_t$$

Las Gráficas 16 y 17 muestran las tendencias BN para estas dos variables de empleo. Dichas tendencias son casi iguales a las series.

#### **D. Resumen de la sección 3**

Esta sección se dedicó a discutir tres conceptos de tendencias y su aplicación a las series de empleo sectorial y total en Puerto Rico

Algunos resultados interesantes para el período de 1999 a 2008 son:

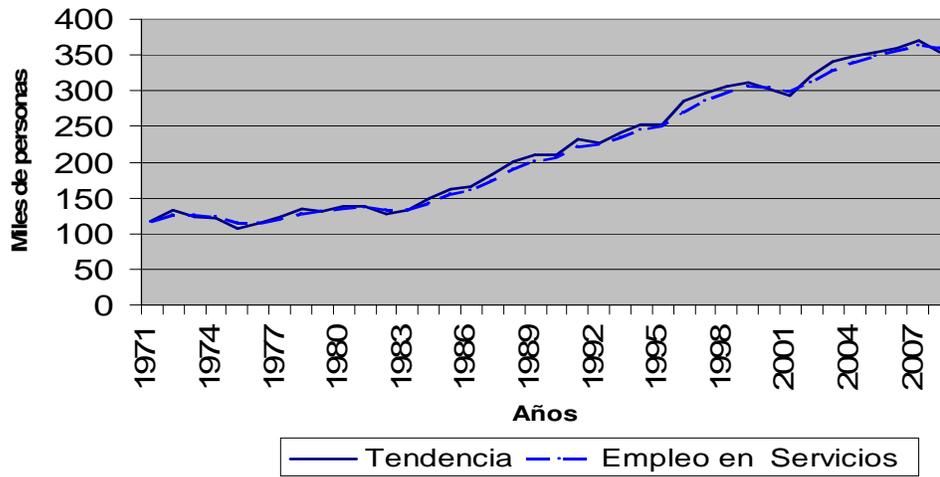
1. El empleo de manufactura ha sufrido una reducción marcada en su tendencia de crecimiento, y aún así, en los últimos años los valores observados han estado por debajo de la misma.

---

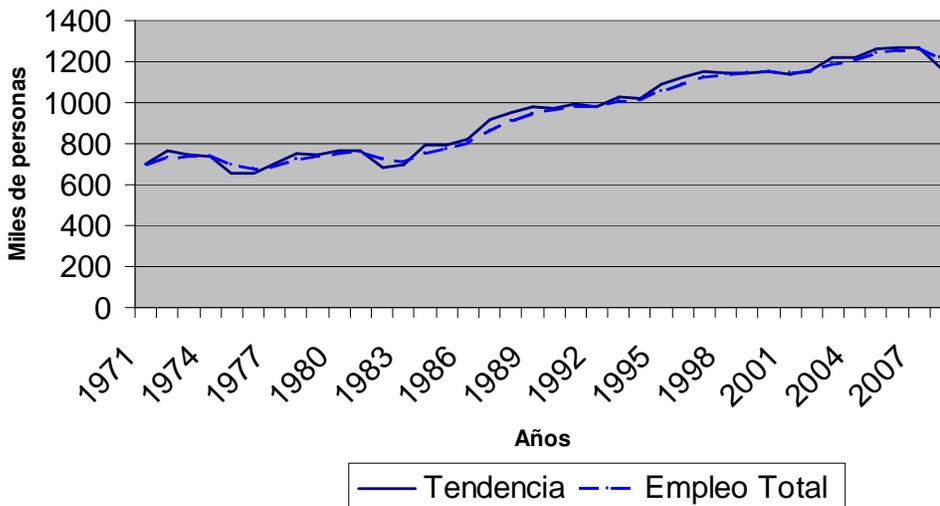
<sup>4</sup> Este asunto se discute en detalle más adelante.

2. El empleo en los servicios mostró una tendencia creciente en el período bajo análisis. En el 2008, no obstante, su valor no superó la tendencia.
3. Al igual que el empleo de servicios el de comercio exhibió una tendencia creciente de 1970 a 2008.
4. El empleo de construcción manifiesta una tendencia de largo plazo positiva, y es la serie de empleo que más variabilidad ha mostrado.
5. El empleo de transportación y comunicaciones tiene una tendencia de crecimiento positiva, aunque la misma se ha reducido en los últimos años
6. El empleo en la administración pública manifiesta una tendencia de crecimiento positiva, pero refleja la contracción económica que ha experimentado el país en los últimos años.

**Gráfica 16**  
**Empleo en Servicios y la Tendencia Beveridge-Nelson**



**Gráfica 17**  
**Empleo Total y su Tendencia Beveridge-Nelson**



#### 4. Quiebres en las series y tendencias estocásticas

En esta sección del artículo se utiliza para discutir la forma de identificar quiebres en la tendencia de crecimiento de las series y el concepto de tendencia estocástica. Las fechas de los quiebres en las tendencias se determinaron con criterios estadísticos desarrollados por Andrews (1993) y Quantd (1960). Además, se utiliza el procedimiento desarrollado por Bai(1997) para construir intervalos de confianza para las fechas de quiebres en las series.

##### A. Cambios estructurales en series con tendencias determinísticas

Un modelo de tendencia para una serie que ha sido impactada por cambios estructurales se puede representar como:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \sum_1^m \beta_{2i} d_{it} + \sum_1^m \beta_{3i} d_{it} t \quad (11)$$

donde:  $m$  indica el número de regímenes, las  $d_{it}$ , para  $i=1,2,\dots,m$ , son variables dicótomas que asumen el valor de uno en el régimen  $i$  y cero en los otros períodos. Un elemento estocástico se le añade a (11) para estimarlo por regresión lineal.

La aplicación del modelo (11) requiere de la identificación de los cambios estructurales que han afectado la variable de interés. Existen distintos métodos para identificar cambios estructurales siendo uno de los más usados la prueba propuesta por Chow (1960). Esa prueba se basa en la consideración de un modelo de regresión lineal, que en términos generales se puede representar como:

$$Y_t = X_t \beta + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad \text{para } t \leq T \quad (12)$$

donde:  $Y_t$  es la variable dependiente,  $X_t$  es una matriz ( $k \times T$ ) de variables independientes que son útiles para explicar  $Y_t$ ,  $\varepsilon_t$  es un elemento estocástico y  $\beta$  es un vector,  $k \times 1$ , que contiene los parámetros del modelo.

El modelo (12) implica que la relación entre  $Y$  y las  $X$ 's ha sido constante a través del tiempo. Sin embargo, como el sistema económico está sujeto a impulsos aleatorios

continuamente, estos pudieran provocar cambios en la relación entre las variables, por los que no sería correcto presumir que los  $\beta$ 's son constantes. Por ejemplo, si se supone que la longitud de la serie se puede expresar como,  $T=t_1+t_2$  y que hubo un cambio estructural en  $t_1$  el modelo (12) luciría como:

$$\begin{aligned}
 Y_t &= X_t \beta_1 + \varepsilon_{t,1} && \text{para } t \leq t_1 \\
 Y_t &= X_t \beta_2 + \varepsilon_{t,2} && \text{para } t > t_1
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

La Prueba de cambio estructural de Chow consiste en docimar la siguiente hipótesis:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2$$

$$H_a: \beta_1 \neq \beta_2$$

La hipótesis nula impone la restricción de que los parámetros no han cambiado a través del tiempo y que el modelo dado por (12) es correcto. Bajo el supuesto de normalidad de los elementos estocásticos de los modelos el estadístico F nos permite docimar  $H_0$ . Éste está dado por:

$$F_C = \frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} - (\hat{\varepsilon}'_1 \hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}'_2 \hat{\varepsilon}_2) / k}{(\hat{\varepsilon}'_1 \hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}'_2 \hat{\varepsilon}_2) / T - 2k} \sim F(k, T-2k)$$

La prueba discutida es útil si hay suficientes observaciones para estimar los dos modelos representados en (13). Sin embargo, si el cambio estructural sucede al final de serie eso no sería posible tal estimación. Si se presume que el período  $t_2$  es muy pequeño para estimar el modelo se tendría que estimar el modelo (13) sólo para  $t_1$  y compararlo con la estimación del modelo (12) para todo el período. En ese caso un estadístico alternativo sería:

$$F'_C = \frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} - (\hat{\varepsilon}'_1 \hat{\varepsilon}_1)/t_2}{(\hat{\varepsilon}'_1 \hat{\varepsilon}_1)/t_1 - k} \sim F(t_2, t_1 - 2k)$$

A esa prueba se le conoce como la prueba Chow predictiva.

El uso de cualquiera de los dos tipos de la prueba de Chow requiere que se conozca la fecha del cambio estructural de antemano. Sin embargo, dicho conocimiento en raras ocasiones se tiene por varios motivos. Por ejemplo, cuando el evento exógeno que ocasiona el cambio actúa con rezagos o antes del evento por el efecto anticipación. El investigador tiene dos opciones bajo esa situación: seleccionar una fecha en forma arbitraria; o examinar los datos para determinar el período del cambio en régimen. Como plantea Hansen (2001) en el primer caso la prueba de Chow no sería informativa, mientras que el segundo caso las propiedades estadísticas de la prueba no serían válidas, ya que la fecha de la partición es endógena, y los parámetros estimados estarían sujetos al problema de sesgos asociados a un estimador pre-probado (*pretest estimator*<sup>5</sup>).

Quandt (1960) propone calcular el estadístico de Chow presumiendo cambios en cada período de la muestra y seleccionar aquél con el valor más alto como la fecha del cambio estructural, pero no provee criterios estadísticos para esta selección. Valores críticos para el procedimiento propuesto por Quandt fueron desarrollados por Andrews (1993).

Andrews examina un modelo<sup>6</sup> indexado por los parámetros  $[\beta_t \ \psi_0]$  y plantea la siguiente hipótesis sobre la estabilidad de los parámetros:

$$H_0 = \beta_t = \beta_0 \quad \forall t \geq 1 \quad \text{para } \beta_0 \in B \subset \mathbf{R}^p$$

La hipótesis alterna puede ser planteada de distintas formas dependiendo de la naturaleza del problema, una opción es:

$$H_A(\pi) : \beta_t = \begin{cases} \beta_1(\pi) & \text{para } t=1, \dots, T\pi \\ \beta_2(\pi) & \text{para } t=T\pi+1 \end{cases} \quad \text{para } B_1(\pi), B_2(\pi) \in B \subset \mathbf{R}^p$$

<sup>5</sup> Ver Judge, Griffiths, Hill, Lütkepohl y Lee (1980) capítulo 3 para una discusión de los estimadores pre-probados.

<sup>6</sup> Este modelo es más general que el descrito por (3), ya que permite cambios estructurales parciales.

donde:  $\pi \in (0,1)$ .

En el caso de que  $\pi$  sea conocido la prueba estándar de Chow se puede utilizar con los estadísticos: de Wald (W), el multiplicador de Lagrange (LM) o la razón de verosimilitud (LR)<sup>7</sup>. Sin embargo, cuando se desconoce  $\pi$  la distribución de dichas pruebas no es la Ji cuadrada, la razón es que aunque el parámetro  $\pi$  aparece bajo la hipótesis alterna no aparece bajo la nula. Por lo que los estadísticos citados si se calculan considerando  $\pi$  como fija no poseen las propiedades de muestreo regulares.

Andrews deriva la distribución asintótica para:

$$\sup_{\pi \in \Pi} W_T(\pi), \quad \sup_{\pi \in \Pi} LM_T(\pi) \quad \text{y} \quad \sup_{\pi \in \Pi} LR_T(\pi), \quad \pi \subset [0,1].$$

donde: sup es el valor más alto del estadístico calculado en el intervalo de tiempo examinado. Dicho autor presenta una Tabla con los valores críticos (asintóticos) para los tres estadísticos.

## B. Cambios estructurales en series con tendencia estocástica

Dickey y Fuller (1979 y 1981) plantean que algunas series económicas pueden manifestar tendencias estocásticas en vez de determinísticas. Considere un proceso AR(1) que genera la serie  $Y_t$ :

$$Y_t = \mu + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde:  $\mu$  es una constante,  $\rho$  es un parámetro y  $\varepsilon$  es un elemento aleatorio.

Este proceso es una caminata aleatoria cuando  $\rho=1$ , en ese caso se dice que el proceso es I(1). Por otro lado, es estacionario si y sólo si  $|\rho| < 1$ .

Existen distintas pruebas para determinar el orden de integración de las series, una de las desarrolladas por Dickey y Fuller (ADF) es la que se usa en este trabajo.

Para identificar los cambios estructurales ocurridos en las tendencias de las series en las primeras diferencias se usó la siguiente ecuación:

$$\Delta y_t = \beta_0 + \phi_1 D_t + \beta_1 t + \phi_2 t D_t + \sum_{j=1}^p \rho_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t \quad (14)$$

---

<sup>7</sup> Estas pruebas son equivalentes a la prueba F.

donde;  $\Delta y_t$  es la primera diferencia del logaritmo de las variables de empleo sectorial; las variables dicótomas de cambio estructural se definen como  $D_t=1$  si  $t>T_B$  y cero de otra forma, siendo  $T_B$  la fecha del cambio en régimen, y las letras griegas representan parámetros.  $T_B$  se identifica en una forma secuencial, como ya se discutió en la sección anterior. Las hipótesis que se someten a prueba son las siguientes:

$$H_0 : \phi_1 = \phi_2 = 0$$

$$H_A : \phi_1 \neq 0 \text{ y/o } \phi_2 \neq 0$$

Rechazo de la hipótesis nula es evidencia de la existencia de cambio estructural en la serie.

### C. Intervalos de confianza para las fechas de los quiebres

Bai (1997) extienden el trabajo de Andrews en dos direcciones: añade un procedimiento secuencial para identificar múltiples cambios estructurales, y presenta la construcción de intervalos de confianza para la fecha del cambio. En el primer caso el procedimiento consiste en identificar primero la partición que tiene el estadístico más alto, dividir la serie en dos períodos y repetir el procedimiento para identificar otro cambio. El método finaliza cuando se identifican todos los cambios que la longitud de la serie permita.

Los intervalos de confianza se pueden construir considerando la ecuación dada por (12). Si se define  $\hat{\delta}_j$  como el estimado del cambio en los parámetros del modelo asociado al régimen  $j$ , y  $Z_t$  como el subconjunto de  $X_t$  que se afecta por el cambio estructural (se puede definir a  $X_t = [W_t, Z_t]$  donde  $W_t$  son las variables independientes cuyos parámetros se mantienen constantes a través del tiempo) el intervalo de confianza está dado por:

$$[\hat{K} - (c/\hat{L}) - 1, \hat{K} + (c/\hat{L}) + 1] \quad (15)$$

donde:  $\hat{K}$  es la fecha del cambio.

$c$  es la  $(1-\alpha/2)$  cuantíla de la distribución de probabilidad derivada por Andrews.

El estimado de  $\hat{L}$  depende de los supuestos sobre estacionariedad de las variables independientes del modelo y la correlación serial del elemento estocástico. Consideremos dos de los posibles casos<sup>8</sup>:

*Caso 1:  $[\mathcal{E}_t, Z_t]$  es estacionario de orden dos para toda la muestra y  $\mathcal{E}_t$  no está autocorrelacionado.*

Para este caso:

$$\hat{L} = \hat{\delta}_j' \hat{Q} \hat{\delta} / \hat{\sigma}^2,$$

$\hat{Q} = T^{-1} \sum_{t=1}^T Z_t Z_t'$ , y  $\hat{\sigma}^2$  es el estimado de máxima verosimilitud de la varianza usando los residuos de de la regresión.

*Caso 2: Variables independientes con tendencia y  $\mathcal{E}_t$  es estacionario y no está autocorrelacionado*

En este caso.

$$\hat{L} = \hat{\delta}_j' \hat{g}(k/T) \hat{g}(k/T)' \hat{\delta} / \hat{\sigma}^2,$$

Obsérvese que en términos generales  $Z_t = [g_1(t/T), g_2(t/T), \dots, g_q(t/T)]'$

### **E. Aplicación de los métodos a las series de empleo: Tendencia determinística**

Esta sección presenta los resultados de la identificación de los cambios estructurales que ha experimentado las series de empleo mencionadas desde 1970 hasta el 2008, usando datos anuales. Se utilizan los niveles de las variables bajo el supuesto que la tendencia es determinista.

La Tabla 7 contiene los resultados de las pruebas para identificar quiebres en las tendencias de las cuatro series de empleo analizadas, mientras que en la Tabla 8 se reportan los intervalos de confiabilidad construidos. Se identificaron cuatro cambios estructurales que afectaron las series, estos ocurrieron en las décadas de mil novecientos

---

<sup>8</sup> El intervalo pudiera ser asimétrico para otros casos no considerados aquí.

setenta, ochenta, noventa y a principios de los años dos mil. El primer cambio afectó la tendencia del empleo total y no fue estadísticamente significativo de acuerdo a la distribución de probabilidad desarrollada por Andrews, aunque lo es al usar la distribución F que es aplicable si se hubiera conocido de antemano la fecha del quiebre.

<b>Tabla 7</b>							
<b>Resultados de las Pruebas de Cambios Estructurales para las series de empleo: los valores-p y los puntos de cambio</b>							
	<b>Valores-P de Estadístico LR*</b>						
<b>Empleo</b>	<b>1975</b>	<b>1985</b>	<b>1987</b>	<b>1995</b>	<b>2000</b>	<b>2001</b>	<b>2002</b>
<b>Total</b>	<b>6.50</b> (.35)	-	<b>58.09**</b> (.000)	-		<b>9.84</b> (.10)	
<b>Manufactura</b>		-	<b>14.62</b> (.013)	<b>56.65**</b> (.000)			<b>21.65</b> (.000)
<b>Comercio</b>	<b>8.28</b> (.185)		<b>92.23**</b> (.000)				
<b>Servicios</b>	<b>5.62</b> (.464)	<b>110.63**</b> (.000)			<b>11.923</b> (.043)		

\*Usando el procedimiento de *refinement* desarrollado por Bai. \*\*1<sup>er</sup> cambio identificado. Se usó  $\pi$  igual a .15.

La serie del empleo de servicios sufrió un desplazamiento en 1985, mientras que en las otras tres series el estimado puntual para la fecha del cambio en esa década ocurrió en 1987. Por otro lado, sólo la tendencia de crecimiento del empleo en manufactura experimentó un cambio en régimen en la década de los mil novecientos noventa el cual acaeció en 1995. Dicho cambio fue el principal en esa serie de empleo, por lo que fue el primero en identificarse y por tanto el que obtuvo el valor más alto para el estadístico LR. Al examinar la Tabla 8 se puede observar que los límites del intervalo de confiabilidad para ese cambio estructural son los años 1994 y 1996. Por tanto, se puede conjeturar que la eliminación de la sección 936 de código de rentas internas federal está relacionada con ese cambio.

<b>Tabla 8</b>				
<b>Intervalos de Confiabilidad para las Fechas de los Cambios Estructurales</b>				
	<b>Intervalos de confianza de 95%</b>			
<b>Fecha del cambio</b>	<b>Empleo Total</b>	<b>Manufactura</b>	<b>Servicios</b>	<b>Comercio</b>
<b>1985</b>	-	-	[1984 1986]	[1983 1987]
<b>1987</b>	[1986 1988]	[1985 1989]		
<b>1995</b>	-	[1994 1996]*		
<b>2000</b>	-	-	[1998 2002]	[1995 2005]
<b>2001</b>	[1998 2004]	-		
<b>2002</b>	-	[2000 2004]		

\*para cambio en la pendiente.

El estimado puntual para el último quiebre en la tendencia de crecimiento de las series se ubica entre los años 2000 al 2002. Los intervalos de confianza revelan que no existe diferencia estadísticamente significativa entre las fechas de ese cambio para las cuatro variables consideradas.

Para conocer la dirección de los cambios estructurales identificados se estimaron modelos de tendencias segmentadas para cada una de las cuatro variables de empleo. Los resultados de esa estimación se informan en la Tabla 9. Se observa que las cuatro series manifiestan tendencias de crecimiento positivas.

El cambio estructural que afectó las series de empleo a mediados de los años mil novecientos ochenta aumentó su tendencia de crecimiento. Ese cambio se puede asociar al período de recuperación de la economía luego de la recesión ocurrida a principios de esa década. Por otro lado, el cambio estructural que afectó el empleo en manufactura 1995, el intervalo de confianza de 95% lo ubica entre 1994 y 1996, tuvo el efecto de reducir su tasa de crecimiento. Podría conjeturarse que la eliminación de la sección 936, que comenzó a discutirse en 1993, pudo haber sido la fuente de ese quiebre en la serie. Es sobresaliente el hecho que de las series de empleo consideradas esa fue la única que sufrió un cambio en su tendencia de crecimiento en la década de los 1990, lo que añade evidencia a favor de la conjetura planteada.

Por último, se encontró que hubo una reducción en la tendencia de crecimiento de las cuatro series a principios de los años dos mil. Esa reducción se asocia con la

desaceleración económica que ha experimentado la economía de puerto Rico desde 2001 y que se agudizó luego de 2006. Es menester señalar que las pruebas estadísticas utilizadas arrojan evidencia de que esa contracción económica no ha sido una oscilación de la actividad económica de la isla alrededor de su tendencia de crecimiento secular, sino que ha sido una merma en la senda de expansión de la economía. Lo que constituye evidencia de que la crisis económica actual que atraviesa el país es de carácter estructural y no un fenómeno transitorio.

<b>Tabla 9</b>				
<b>Resultados de la Estimación de los modelos de tendencias segmentadas</b>				
<b>Variables Independientes</b>	<b>Variables de Empleo: Coeficientes (Valores-P de t)</b>			
	<b>Total</b>	<b>Manufactura</b>	<b>Servicios</b>	<b>Comercio</b>
<b>C</b>	<b>693.53</b> <b>(0.000)</b>	<b>134.48</b> <b>(0.000)</b>	<b>130.49</b> <b>(0.00)</b>	<b>133.31</b> <b>(0.000)</b>
<b>t</b>	<b>4.32</b> <b>(0.000)</b>	<b>0.47</b> <b>(0.045)</b>	<b>2.17</b> <b>(0.000)</b>	<b>0.66</b> <b>(0.036)</b>
<b>d85</b>	-	-	<b>-126.42</b> <b>(0.000)</b>	<b>-65.39</b> <b>(0.000)</b>
<b>d85*t</b>	-	-	<b>9.55</b> <b>(0.00)</b>	<b>5.14</b> <b>(0.000)</b>
<b>d87</b>	<b>-169.03</b> <b>(0.000)</b>	-	-	-
<b>d87*t</b>	<b>17.06</b> <b>(0.000)</b>	<b>1.02</b> <b>(0.000)</b>	-	-
<b>d95</b>	-	<b>70.02</b> <b>(0.000)</b>	-	-
<b>d95*t</b>	-	<b>-2.99</b> <b>(0.000)</b>	-	-
<b>d00</b>	-	-	<b>62.95</b> <b>(.038)</b>	<b>37.07</b> <b>(0.120)</b>
<b>d00*t</b>	-	-	<b>-2.58</b> <b>(0.007)</b>	<b>-1.45</b> <b>(0.051)</b>
<b>d01</b>	-	-	-	-
<b>d01*t</b>	<b>-1.59</b> <b>(0.008)</b>	-	-	-
<b>d02</b>	-	-	-	-
<b>d02*t</b>	-	<b>-0.47</b> <b>(0.004)</b>	-	-
<b>R<sup>2</sup></b>	<b>.99</b>	<b>.91</b>	<b>.99</b>	<b>.99</b>

## F. Aplicación de los métodos a las series de empleo: tendencia estocástica

En esta sección se discute la identificación cambios estructurales ante la hipótesis de que las series de empleo son estacionarias luego de ser diferenciadas

Las pruebas se realizaron usando los logaritmos de las variables, para aproximar las tasas de crecimiento con la primera diferencia de esta transformación. Los resultados de la prueba ADF implican que ambas series tienen una raíz unitaria (ver Tabla 10)

<b>Tabla 10</b>			
<b>Resultados de las Pruebas de Raíces Unitarias</b>			
	<b>Valores-P Para la Prueba ADF:</b> <b>H<sub>0</sub>: la variable tiene una raíz unitaria</b>		
<b>Logaritmo del Empleo</b>	<b>Niveles</b>	<b>Primeras Diferencias</b>	<b>Orden de integración</b>
<b>Total</b>	<b>0.8073</b>	<b>0.0147</b>	<b>I(1)</b>
<b>Manufactura</b>	<b>0.5956</b>	<b>0.0001</b>	<b>I(1)</b>
<b>Servicios</b>	<b>0.6690</b>	<b>0.0057</b>	<b>I(1)</b>
<b>Comercio</b>	<b>0.9448</b>	<b>0.0000</b>	<b>I(1)</b>
* Con dos rezagos. ** no se rechaza la hipótesis de raíz unitaria a un nivel de 1%. Y <sub>t</sub> es la variable examinada.			

Para identificar los cambios estructurales ocurridos en las tendencias de las series se utilizó la ecuación (4) discutida en la sección II. El resultado de la aplicación de las pruebas de cambios estructurales de Andrews-Quandt implicó el no rechazo de la hipótesis nula de que los parámetros asociados a las tendencias de las tasas de crecimiento de las variables de empleo se mantuvieron constantes para el período examinado, bajo la premisa de que las fechas de los posibles cambios eran desconocidas.

## **G. Resumen de la sección 4**

En esta sección del artículo se expusieron las nuevas técnicas econométricas desarrolladas por Andrews (1993) y Bai (1997) para identificar cambios estructurales en los parámetros de los modelos de regresión lineal y construir intervalos de confiabilidad para las fechas de los cambios. Esos procedimientos determinan los momentos de los cambios en regimenes con criterios estadísticos en vez de imponerlos exógenamente. El escrito constituye una introducción a esas técnicas que todavía no han sido incorporadas en los textos de econometría.

Los métodos se aplicaron a las series de empleo sectorial (manufactura, servicios y comercio) y el empleo total en Puerto Rico para el período de 1970 a 2008. Los resultados principales de análisis empírico fueron los siguientes:

1. Todas las series fueron impactadas por cambios estructurales en la décadas de los ochenta y los dos mil y sólo el empleo de manufactura sufrió un quiebre en la década de 1990.
2. El estimado puntual para la fecha del cambio en régimen fue el 1985 para las series de empleo en servicios y comercio y 1987 para las series de empleo de manufactura y total.
3. Los intervalos de confiabilidad de 95% ubican ese cambio estructural ocurriendo entre 1983 y 1989, aunque cada serie tiene su intervalo particular.
4. El efecto del cambio estructural de los años ochenta fue aumentar la tendencia de crecimiento de las series. Ese cambio se puede explicar por la reorganización industrial que surge en la economía del país luego de la recesión de principios de los mil novecientos ochenta.
5. El empleo de manufactura experimentó un cambio estructural en 1995 que redujo su tendencia de crecimiento, el intervalo de confiabilidad lo coloca entre 1994 y 1996. Ese cambio se puede asociar a la eliminación de la sección 936 del código de rentas internas de Estados Unidos.
6. Todas las series examinadas experimentaron un cambio estructural que redujo su tendencia de crecimiento a principios de los años 2000. Los intervalos de

confiabilidad van desde 1995 hasta 2005. Ese cambio se asocia la contracción económica que padece la economía de isla, que parece ser de carácter estructural no cíclica.

## Bibliografía

- Andrews, Donald W.K.** (1993). Test for Parameter Instability and Structural Change with Unknown Change Point" *Econometrica* 61(4) 821-56.
- Bai, Jushan.** 1997. "Estimation of a Change Point in Multiple Regression Models". *Review of Economics and Statistics*. November, 79:4: 551-63.
- Bai, Jushan.** 1997. "Estimating Multiple Breaks Once at a Time". *Econometric Theory*. June 13:3: 315-52.
- Bai, Jushan.** 1997b. "Estimating Multiple One at a Time." *Econometric Theory*. June, 13:3: 315-52.
- Bai, Jushan and Pierre Perron.** 1998. "Estimating and Testing Linear Models with Multiple Structural Changes." *Econometrica*. January, 66:1, pp. 47-78.
- Bai, Jushan, Robin L. Lumsdaine and James H. Stock.** 1998. "Testing for and Dating Common Breaks in Multivariate Time Series." *Review of Economic Studies*. July, 64:3: 395-432.
- Banerjee, Anindya, Robin L. Lumsdaine and James H. Stock.** 1992. "Recursive and Sequential Tests of the Unit-Roots and Trend-Break Hypotheses: Theory and International Evidence." *Journal of Business and Economic Statistics*. July, 10:3: 271-87.
- Ben-David, Dan and David H. Papell** 1998. "Slowdowns and Meltdowns: Postwar Growth Evidence from 74 Countries." *Review of Economics and Statistics*. November, 80:4: 561-71.
- Beveridge, S. y C.R. Nelson (1981)** "A New approach to decomposition of economic time series into permanent and transitory components with particular attention to measurement of the business cycle" *Journal of Monetary Economics* 7, 151-174.
- Bosworth, B. P. y S.M. Collins (2006).** "Economic Growth" en The Economy of Puerto Rico, editado por Susan M. Collins, Barry P. Bosworth y Miguel A. Soto-Class: 17-81.
- Chong, Terence Tai-leung.** 1995. "Partial Parameter Consistency in a Misspecified Structural Change Model." *Economics Letters*. October, 49:4, pp. 351-57.
- Chow, Gregory C.** 1960. "Tests of Equality Between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions." *Econometrica*. 28:3, pp. 591-605.
- Christiano, Lawrence J.** 1992. "Searching for a Break in GNP." *Journal of Business and Economic Statistics*. July, 10:3, pp. 237-50.
- Dickey, David A. and Wayne A. Fuller.** 1979. "Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root." *Journal of the American Statistical Association*. June, 74:366, pp. 427-31.
- Dickey, David A. and Wayne A. Fuller.** 1981 "Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series With Unit Root", *Econometrica*, 49, 1057-1072.
- Elliott, Graham, Thomas J. Rothenberg and James H. Stock.** 1996. "Efficient Tests for an Autoregressive Unit Root." *Econometrica*. July, 64:4, pp. 813-36.
- Fernandez, David G.** 1997. "Breaking Trends and the Money-Output Correlation." *Review of Economics and Statistics*. November, 79:4, pp. 674-79.

**Hansen, Bruce E. (2001)**, “The New Econometrics of Structural Change: Dating Breaks in US Labor Productivity, *Journal of Economic Perspectives*, 15(4):117-128.

**Hodrick, R.J. y E.C. Prescott** (1995) “Postwar Us Business Cycles: an empirical investigation “ *Journal of Money Credit and Banking and Banking* 29, 1-16.

**Judge, G.G., W.E. Griffiths, R. Carter Hill, Helmut Lütkepohl y Tsoung-Chao Lee**, (1985). The Theory and Practice of Econometrics, segunda edición, (Wiley).

**Mills, T. C.** (2003) Modelling Trends and Cycles in Economic Time Series, Palgrave Texts in Econometrics.

**Quandt R.** (1960) “Test of the Hypothesis that a Linear Regression Obeys Two Separate Regimes”. *Journal of the American Statistical Association*. 55 324-30.