



Munich Personal RePEc Archive

GARCH models : evidence from Tunisian Exchange market

Lahiani, Amine and Yousfi, Ouidad

EconomiX (UPX), EconomiX (UPX,), CR2M (University of
Montpellier 2)

December 2007

Online at <https://mpa.ub.uni-muenchen.de/28702/>

MPRA Paper No. 28702, posted 07 Feb 2011 14:31 UTC

MODÈLES GARCH À MÉMOIRE LONGUE : APPLICATION AUX TAUX DE CHANGE TUNISIENS

LAHIANI A¹ et YOUSFI O²

Abstract

This paper deals with statistics' and econometrics' properties of fractionally integrated *GARCH* (*FIGARCH*). We compare these characteristics with those of traditional models. We insist on the *GARCH* exponential/*IGARCH* infinite decrease of volatility impact. Then, we apply it on three Tunisian exchange rate series between 1994 and 2006. As Beine, Laurent and Lecourt (2002), the contributions of the *FIGARCH* model are extended by accounting for the observed kurtosis through a student-t based maximum likelihood estimation. This estimation improves the goodness of fit properties of this model and may lead to different interest parameters estimates

Keywords : Long memory, Volatility, persistence, exchange rate.

JEL Classification : C13, C22, C52, F31.

Résumé

Dans ce travail, nous étudions les propriétés statistiques et économétriques des modèles *GARCH* fractionnellement intégrés (*FIGARCH*). A l'aide de trois séries de taux de change prélevées sur le marché de change tunisien entre 1994 et 2002, nous mettons en évidence les propriétés « flexibles » de ce modèle par rapport aux propriétés opposées des modèles traditionnels (la décroissance exponentielle de l'impact des chocs sur la volatilité des modèles *GARCH* et la décroissance infinie des modèles *IGARCH*). Nous procédons comme Beine, Laurent et Lecourt (2002) en tenant compte du moment d'ordre 4 observé en utilisant la fonction de vraisemblance. L'introduction d'une telle caractéristique améliore le degré d'ajustement des données par le modèle et pourrait aboutir à des valeurs différentes des estimateurs.

Mots-clés : la mémoire longue, la persistance de la volatilité, taux de change.

Classification JEL : C13, C22, C52, F31.

1. INTRODUCTION

La très grande fréquence des données financières a favorisé l'étude des impacts de court et de long terme d'une brusque fluctuation sur la dynamique des séries. Elle met en évidence le concept de mémoire longue dans les séries financières et microéconomiques. Pendant de nombreuses années, le modèle de marche aléatoire

Nous remercions Mme Catherine BRUNEAU dont les remarques et suggestions ont permis d'améliorer de manière substantielle le présent papier. Nous restons responsables des éventuelles erreurs ou omissions.

¹EconomiX, UPX et HEC Genève. Email : amine.lahiani@u-paris10.fr

²EconomiX, UPX. Email : oyousfi@u-paris10.fr.

a été considéré le meilleur prédicteur de la dynamique de la volatilité sur les marchés de change. Ce modèle présume qu'on ne peut pas battre systématiquement le marché : les marchés sont efficients.

Diebold et Nason (1990) montrent que le risque peut persister dans les séries financières : l'étude de ces séries révèle une dépendance temporelle du risque qui disparaît souvent progressivement. Les recherches se sont orientées vers l'étude des dynamiques conditionnelles. Toutefois, ces travaux ne différencient pas la dépendance conditionnelle révélant de la moyenne de celle de la variance. Deux volets sont alors issus. Le premier étudie l'équation de la moyenne conditionnelle avec les modèles *ARMA*, *ARIMA*, *ARFIMA*... Le second s'est focalisé sur la variance conditionnelle. Deux classes de modèles non linéaires se sont développées pour caractériser cette variance.

- La première classe se base sur les modèles d'hétéroscédasticité conditionnelle autorégressive (*ARCH*) de Engle (1982) et ses extensions, le plus connu étant le modèle d'hétéroscédasticité conditionnelle autorégressif généralisé (*GARCH*) de Bollerslev (1986) et le modèle *GARCH* intégré de Engle et de Bollerslev (1986).
- La deuxième classe fait référence aux modèles de volatilité stochastique (*SV*) introduit par Taylor (1986).

Dans ce papier, nous nous intéressons à la première classe de modèles. Contrairement aux modèles économétriques standards qui supposent que la variance est toujours constante, les modèles *ARCH* supposent que la variance conditionnelle est une fonction des carrés des innovations passées. L'application de ces modèles sur les taux d'inflation montre que la volatilité change au cours du temps.

Dans tous ces travaux, on suppose que plus l'innovation est lointaine dans le passé plus faible sera son impact sur la variance conditionnelle : la valeur de la volatilité est une fonction décroissante de l'ordre de retard. La spécification linéaire de la variance conditionnelle semble saisir l'effet des erreurs passées ou de mémoire longue trouvé dans les travaux empiriques. Cette spécification ne pose pas de problèmes d'estimation particuliers. Toutefois, pour que la variance conditionnelle soit positive, des contraintes supplémentaires sur les paramètres du modèle sont nécessaires. Pour contourner cette dernière difficulté, Engle (1982, 1983) et Engle et Kraft (1983) proposent de fixer le nombre de retards à prendre en compte au lieu de travailler avec des *ARCH* infinis. En se basant sur les travaux faits sur l'équation de la moyenne conditionnelle, une extension généralisée des modèles *ARCH* a été développée : le modèle *GARCH*. Ce dernier tient compte non seulement de la volatilité courante exprimée par les carrés des résidus passés mais aussi de la volatilité passée : il présente ainsi une spécification plus flexible de la variance conditionnelle.

Toutefois, le modèle *GARCH* ne permet de modéliser que la dépendance temporelle de court terme : l'effet des chocs décroît exponentiellement dans le temps. Pour "étendre" la mémoire du modèle *GARCH*, Engle et Bollerslev (1986) introduisent une extension du modèle *GARCH* dite intégrée (*IGARCH*) qui présente une mémoire "explosive" : les effets de chocs sont persistants à l'infini.

Compte tenu des propriétés opposées des modèles traditionnels : décroissance exponentielle de l'impact des chocs sur la volatilité des modèles *GARCH* par opposition leur persistance à l'infini dans les modèles *IGARCH*, un troisième modèle

plus flexible a été introduit. Sur le marché de change, Baillie, Bollerslev et Mikkelsen (1996) ont proposé une version ajustée des deux modèles : c'est le processus *GARCH* fractionnellement intégré (*FIGARCH*).

Ces modèles sont spécifiés par analogie avec les modèles *ARFIMA* dans l'équation de la moyenne. Cette spécification a été discutée par Teyssière (1997), Breidt Crato et De Lima (1998). Chung (2001) a émis des réserves sur la spécification *FIGARCH* adoptée par Baillie, Bollerslev et Mikkelsen (1996) et a proposé une nouvelle version.

Dans le présent papier, nous étudions les propriétés de la modélisation *FIGARCH* puis nous discutons ses différentes spécifications. Nous testons la validité de ce modèle grâce à une application au marché de change tunisien pour répondre à la question suivante :

Jusqu'à quelle mesure ce modèle permet-il de décrire la dynamique du taux de change ?

Le papier s'organise comme suit : la section (2) présente les propriétés du modèle *FIGARCH*. Dans la section (3), nous l'appliquons au marché de change tunisien moyennant trois séries de taux de change : l'euro, le Livre Sterling et le dollar américain par rapport au dinar tunisien. Enfin, nous synthétisons nos principaux résultats et concluons.

2. PROPRIÉTÉS DES MODÈLES *FIGARCH*

Dans ce papier, nous supposons que la moyenne est décrite par l'équation suivante :

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

Pour simplifier, nous supposons que μ_t est égal à une constante μ , I_{t-1} représente l'information passée jusqu'à la date $t - 1$ et que $\varepsilon_t / I_{t-1} \sim iid (0, \sigma_t^2)$. Les résidus conditionnels ε_t / I_{t-1} sont indépendamment et identiquement distribués, de moyenne nulle et hétéroscédastiques tel que : $E (y_t) = \mu$.

ε_t suit un processus *GARCH*(p, q) si :

$$\begin{cases} \varepsilon_t = z_t \sigma_t \\ E (z_t / I_{t-1}) = 0 \\ Var (z_t / I_{t-1}) = 1 \end{cases}$$

et σ_t vérifie :

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(L) \varepsilon_t^2 + \beta(L) \sigma_t^2$$

où L désigne l'opérateur de retard et $\alpha(L) = \sum_{i=1}^q \alpha_i L^i$ et $\beta(L) = \sum_{j=1}^p \beta_j L^j$ sont deux polynômes de L de degrés respectifs q et p . Pour s'assurer de la stabilité et de la stationnarité du processus $\{\varepsilon_t^2\}$, nous supposons que les racines des deux polynômes $[1 - \alpha(L) - \beta(L)]$ et $[1 - \beta(L)]$ sont à l'extérieur du cercle unitaire. Cette condition est satisfaite si $(\alpha + \beta) < 1$. Le modèle *GARCH* (p, q) peut s'écrire sous la forme d'un modèle *ARCH* infini, tel que :

$$\sigma_t^2 = \omega [1 - \beta(L)]^{-1} + \alpha(L) [1 - \beta(L)]^{-1} \varepsilon_t^2$$

Soit :

$$\sigma_t^2 = \omega [1 - \beta(L)]^{-1} + \lambda(L) \varepsilon_t^2$$

où $\lambda(L) = \alpha(L) [1 - \beta(L)]^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j L^j$ décroît exponentiellement lorsque j tend vers ∞ .

Le modèle *GARCH* (p, q) peut être réécrit sous la forme d'un modèle *ARMA*(m, p) tel que $m = \max\{p, q\}$. Soit $v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ les résidus dans l'équation de la variance conditionnelle. En reprenant la définition du modèle *GARCH*(p, q) et remplaçant σ_t^2 par $\varepsilon_t^2 + v_t$, nous obtenons :

$$[1 - \alpha(L) - \beta(L)] \varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)] v_t$$

Une large littérature financière suggère que la volatilité conditionnelle des prix d'actions présente une persistance significative des chocs (une longue mémoire)³. Les modèles standards *ARCH*, *GARCH*, *GARCH* exponentiel (*EGARCH*) ne permettent pas de modéliser ce type de persistance.

Des études empiriques plus récentes montrent que les deux processus $\{\varepsilon_t^2\}$ et $\{\log \varepsilon_t^2\}$ laissent entrevoir que les chocs de volatilité décroissent lentement et sont persistants. Bien qu'ils soient plus flexibles que d'autres modèles et tiennent compte de plusieurs propriétés spécifiques des marchés financiers, les modèles *GARCH* présentent une mémoire courte, contredisant certaines propriétés empiriques de la volatilité des séries financières. Mais que se passe-t-il si $[1 - \alpha(L) - \beta(L)]$ admet une racine unitaire ?

Dans ce cas, notre processus est non stationnaire au sens de *GARCH*. Pour remédier à ces limites, Engle et Bollerslev (1986) définissent le modèle *IGARCH* intégré. Il s'écrit :

$$(1 - L) \phi(L) \varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)] v_t$$

où $\phi(L) = \sum_{i=1}^{m-1} \phi_i L^i$. Toutefois, ce modèle présente une persistance explosive des chocs de volatilité sur la dynamique de la série. En se basant sur le modèle *IGARCH*, Baillie, Bollerslev et Mikkelsen (1996) s'inspirent de l'analogie entre le modèle *ARMA* et le modèle *ARFIMA*, pour définir le modèle *FIGARCH* à partir du modèle *GARCH*. L'idée est de permettre au paramètre d'intégration d , qui appartenait à $\{0, 1\}$ dans le modèle *GARCH/IGARCH*, de varier sur $[0, 1]$. Le modèle résultant est beaucoup plus flexible : les chocs de volatilité décroissent exponentiellement mais sont plus persistants que dans le modèle *GARCH* et moins persistants que dans le modèle *IGARCH*. Le modèle *FIGARCH* est obtenu en remplaçant l'opérateur de retard $(1 - L)$ dans la dernière équation par l'opérateur de retard fractionnel $(1 - L)^d$. Le modèle *FIGARCH*(p, d, q) s'écrit alors :

$$(2.1) \quad (1 - L)^d \phi(L) \varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)] v_t$$

où les polynômes $\phi(L)$ et $[1 - \beta(L)]$ admettent des racines à l'extérieur du cercle unitaire. Le processus *FIGARCH*(p, d, q), pareillement que pour le *GARCH*(p, q), admet une représentation *ARCH*. En remplaçant v_t par son expression et en réorganisant les termes de l'équation ci-dessus, on obtient :

$$[1 - \beta(L)] \sigma_t^2 = \omega + [1 - \beta(L) - (1 - L)^d \phi(L)] \varepsilon_t^2$$

ou encore :

$$\sigma_t^2 = \omega [1 - \beta(L)]^{-1} + [1 - (1 - L)^d \phi(L) [1 - \beta(L)]^{-1}] \varepsilon_t^2$$

Si on note par $\lambda(L)$, le polynôme d'ordre infini, tel que :

$$\lambda(L) = 1 - (1 - L)^d \phi(L) [1 - \beta(L)]^{-1}$$

³Voir, entre autres, Ding et all. (1993), De Lima et Crato (1993).

Le modèle *FIGARCH* s'écrit :

$$(2.2) \quad \sigma_t^2 = \omega [1 - \beta(L)]^{-1} + \lambda(L) \varepsilon_t^2$$

Breidt , Crato et De Lima (1998) adoptent une autre écriture du modèle. Ils considèrent le modèle *GARCH* suivant :

$$[1 - \alpha(L) - \beta(L)] (\sigma_t^2 - \sigma^2) = \alpha(L) v_t$$

où σ^2 est la variance "non conditionnelle" de ε_t dans le modèle *GARCH*⁴. Ensuite, ils montrent que le modèle *FIGARCH* peut être spécifié comme suit :

$$\phi(L) (1 - L)^d (\sigma_t^2 - \sigma^2) = \alpha(L) v_t$$

Cette spécification n'est pas récurrente et aucun papier à notre connaissance n'a étudié ses propriétés.

Chung (2001) montre que le *FIGARCH* tel qu'il est défini par Baillie, Bollerslev et Mikkelsen (1996) est "non cohérent". Il considère $\phi(L)$ dans l'équation (2.1) :

$$\phi(L) = 1 - \sum_{j=1}^q \phi_j L^j$$

Chung analyse l'analogie de base entre le modèle *ARFIMA* et le modèle *FIGARCH* et montre qu'il y a des différences structurelles entre les deux spécifications.

Le modèle *ARFIMA* a été introduit par Granger (1980, 1981), Granger et Joyeux (1980) et Hosking (1981) pour étudier la mémoire longue dans l'équation de la moyenne. Un processus stochastique y_t suit un processus *ARFIMA*(a, d_0, m), s'il vérifie :

$$(1 - L)^{d_0} \Psi(L) (y_t - \mu) = \theta(L) \varepsilon_t$$

où μ est la moyenne non conditionnelle de y_t , $\Psi(L) = 1 - \sum_{j=1}^a \Psi_j L^j$ et $\theta(L) = 1 - \sum_{j=1}^m \theta_j L^j$

sont deux polynômes de L d'ordre respectifs a et m et ε_t est un bruit blanc de moyenne σ^2 . Pour s'assurer de la stationnarité et de l'inversibilité du processus y_t , nous supposons que d_0 varie de $-0,5$ à $0,5$. Ce paramètre décrit la mémoire longue du processus y_t . L'opérateur de différence fractionnelle est défini à partir de son développement sur la base de séries de Maclaurin, tel que :

$$\begin{aligned} (1 - L)^{d_0} &= 1 - d_0 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma(j - d_0)}{\Gamma(j + 1) \Gamma(1 - d_0)} L^j \\ &= 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j(d_0) L^j = 1 - \delta_d(L) \end{aligned}$$

Dans certains papiers, on trouve le développement précédent exprimé comme un polynôme d'ordre infini de L donné par :

$$(1 - L)^{d_0} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j - d_0)}{\Gamma(j + 1) \Gamma(-d_0)} L^j = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j(d_0) L^j$$

où $\pi_j(z) = \frac{\Gamma(j - z)}{\Gamma(j + 1) \Gamma(-z)}$ et $\Gamma(\cdot)$ est la fonction gamma standard.

La constante ω du modèle *FIGARCH* est structurellement différente de μ dans les modèles *ARFIMA*. Dans ce dernier, l'opérateur de retard fractionnaire s'applique

⁴Nous détaillons l'interprétation de σ^2 ultérieurement. Nous supposons que cette variance s'écrit :

$$\omega = \phi(L) (1 - L)^d \sigma^2$$

à la constante μ . De plus, la structure de mémoire longue est différente dans les deux modèles : le paramètre de mémoire d_0 varie entre $-0,5$ et $0,5$ alors que d appartient à $[0, 1]$.

- Si $0 < d_0 < \frac{1}{2}$, le modèle *ARFIMA* est un modèle stationnaire à mémoire longue. Les autocorrélations sont positives, diminuent hyperboliquement et tendent vers zéro lorsque le retard augmente. La densité spectrale est concentrée autour des faibles fréquences et tend vers l'infini lorsque les fréquences tendent vers zéro.
- Si $d_0 = 0$, le modèle *ARFIMA* se réduit au modèle *ARMA* standard.
- Si $-\frac{1}{2} < d_0 < 0$, le modèle est antipersistant, les autocorrélations décroissent hyperboliquement et tendent vers zéro et la densité spectrale est dominée par les composantes des fréquences élevées.

Selon la valeur du paramètre d dans $[0, 1]$, seront déterminés le profil et la vitesse de propagation des chocs de volatilité. Si on se réfère à l'analyse des fonctions de réponses aux impulsions, dérivées de (2.1), on peut évaluer l'impact de long terme des chocs passés v_s , $s \leq t$, sur la série en fonction de la limite des poids cumulés de la fonction de réponses impulsionnelles donnée par :

$$\begin{aligned} \gamma(1) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^k \gamma_i := \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k \\ &= F(d-1, 1, 1; 1) \phi^{-1}(1) [1-\beta(1)] \end{aligned}$$

où $\gamma_k = \frac{\partial E_t(\varepsilon_{t+k}^2)}{\partial v_t} - \frac{\partial E_t(\varepsilon_{t+k-1}^2)}{\partial v_t}$ est le coefficient de la fonction d'impulsion⁵, E_t est l'espérance conditionnelle à la date t et $v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma^2$.

- Si $0 \leq d \leq 1$ alors $F(d-1, 1, 1; 1) = 0$, d'où $\gamma(1) = 1$ les chocs de volatilité décroissent hyperboliquement contrairement au modèle *GARCH* où ces chocs décroissent exponentiellement.
- Si $d = 1$ alors $F(d-1, 1, 1; 1) = 1$ d'où $\gamma(1) = \phi^{-1}(1) [1-\beta(1)]$ et les chocs sont infiniment persistants.
- Si $d > 1$ alors la variance conditionnelle est explosive et $\gamma(1)$ tend vers $+\infty$.

Le paramètre de mémoire d_0 est appliqué directement sur le carré de l'erreur contrairement au paramètre d s'appliquant sur les σ_t^2 dans le *FIGARCH*. Par ailleurs, un modèle *ARFIMA* $(a, 0, m)$ se ramène à un modèle *ARMA* (a, m) tandis qu'un modèle *FIGARCH* $(p, 0, q)$ ne peut pas être réduit à un *GARCH* (p, q) .

S'ajoutent à ces différences structurelles, d'autres d'ordre technique : les paramètres du modèle *ARFIMA* sont moins contraints que ceux du modèle *FIGARCH*. Ces derniers doivent satisfaire certaines conditions pour assurer de la positivité de la variance conditionnelle. Si Bollerslev et Mikkelsen (1996) ont proposé certaines conditions, d'autres papiers ont étudié la question et ont trouvé d'autres conditions.

⁵ $F(d-1, 1, 1; 1)$ est la fonction hypergéométrique solution de l'équation différentielle suivante :

$$x(1-x) y''(x) + [c - (a+b+1)x] y'(x) - ab y(x) = 0$$

Elle est définie par :

$$F(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(a+n) \Gamma(b+n) \Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}$$

En se basant sur la première version du modèle, Chung (2001) conclut en la présence de quelques problèmes de spécification. Comme nous l'avons déjà signalé, la constante du modèle *FIGARCH* peut s'écrire :

$$(2.3) \quad \omega = \phi(L) (1-L)^d \sigma^2$$

où $\phi(L) = 1 - \sum_{j=1}^q \phi_j L^j$ et $(1-L)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j(d) L^j$. Il suffit de remplacer dans l'équation (2.2). Soit :

$$\omega = \sigma^2 \phi(1) \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j(d) L^j$$

Chung démontre que cette constante est théoriquement égal à 0. Toutefois, des études empiriques montrent que cette constante est faible mais significativement non nulle (voir Baillie, Bollerslev et Mikkelsen, 1996, Bollerslev et Mikkelsen, 1996 et Teyssière, 1997).

Pour contourner ce problème, Chung reprend l'écriture *ARMA* du modèle *GARCH* (p, q) -voir Breidt, Crato et De Lima (1998) - en considérant plutôt le processus $\{\varepsilon_t^2\}$:

$$[1 - \alpha(L) - \beta(L)] (\varepsilon_t^2 - \sigma^2) = \omega + [1 - \beta(L)] v_t$$

puis, il propose la version suivante du modèle *FIGARCH*, tel que :

$$(2.4) \quad \phi(L) (1-L)^d (\varepsilon_t^2 - \sigma^2) = [1 - \beta(L)] v_t$$

Cependant, l'interprétation du paramètre σ^2 n'est pas claire et ambiguë : nous ne savons pas si c'est une variance "non conditionnelle" (comme définie précédemment) ou une composante constante dans ε_t^2 comme présentée dans l'équation (2.3).

Par ailleurs, les conditions de positivité de la variance conditionnelle posent un problème. Deux ensembles de conditions suffisantes ont été proposés : le premier est défini dans Baillie, Bollerslev et Mikkelsen(1996) et le deuxième est celui de Chung (2001). Nous notons que ces deux ensembles ne sont pas équivalents bien qu'ils soient tous deux suffisants : certains paramètres vérifient certaines conditions mais pas la totalité de ces conditions. Baillie, Bollerslev et Mikkelsen (1996) considèrent que ces conditions sont à définir au cas par cas. Ils considèrent l'exemple particulier du modèle *GARCH*(p, q), étudié par Nelson et Cao (1992) alors que Chung, dans une première version de son papier en 1996, considère l'écriture *ARCH* du modèle *FIGARCH*. Il montre que si $\beta \neq 0$, les paramètres de la variance conditionnelle doivent vérifier :

$$(2.5) \quad \lambda_1 = d - \beta - \phi$$

$$(2.6) \quad \lambda_2 = (d - \beta) (\beta - \phi) + \frac{d(d+1)}{2}$$

$$(2.7) \quad \lambda_k = \beta^{k-2} (d - \beta) (\beta - \phi) - (\beta - \phi) \sum_{j=2}^{k-1} \pi_j(d) \beta^{k-1-j} - \pi_k(d); \quad k = 3, 4, \dots$$

pour que la variance conditionnelle soit positive, il suffit que tous les paramètres λ_k , $k = 1, \dots$ soient positifs. Ceci revient à imposer :

$$0 \leq \phi \leq \beta \leq d < 1$$

Bollerslev et Mikkelsen (1996) quant à eux se basent sur une relation autorégressive entre les paramètres λ_k tel que :

$$\lambda_1 = d - \beta - \phi$$

$$\lambda_k = \beta \lambda_{k-1} + [(k-1-d)k^{-1} - \phi] \pi_k(d); \quad k = 2, 3, \dots$$

où $\pi_k(d) = \pi_{k-1}(d)(k-1-d)k^{-1}$, $k = 2, 3, \dots$ sont les coefficients d'une expansion de séries Maclaurin $(1-L)$. Ils en déduisent les inégalités suivantes comme conditions suffisantes pour assurer la positivité de la variance conditionnelle :

$$(2.8) \quad \beta - d \leq \phi \leq \frac{2-d}{3}$$

$$(2.9) \quad d\left(\phi - \frac{1-d}{2}\right) \leq \beta \leq \beta(d - \beta + \phi)$$

3. APPLICATION AU MARCHÉ DE CHANGE TUNISIEN

3.1. Statistiques descriptives des données. Notre étude empirique sera faite sur des données journalières de taux de change : l'euro (*EUR*) (1305 observations)⁶, le Livre Sterling (*GBP*) (1305 observations) et le dollar américain (*USD*) (1966 observations) par rapport au dinars tunisien (*TND*). Ces données nous ont été fournies par le service de change de la Banque Centrale de Tunis (BCT) et Datastream. Les séries de l'euro et du Livre Sterling s'étendent du 18/09/2001 au 18/09/2006 alors que les cotations du dollar américain commencent le 01/03/1994 (date d'ouverture du marché de change au comptant) et cessent au 01/03/2002. Nous nous intéressons au marché de change au comptant.

La littérature empirique sur les taux de change ne trouve pas de dépendance linéaire entre les observations (pas d'autocorrélations ou une corrélation très faible) mais elle montre une dépendance temporelle de second ordre ce qui peut être expliqué par une hétéroscédasticité. De plus la distribution des rendements des taux de change est asymétrique et caractérisée par des queues épaisses (voir Fig 1).

Conformément à nos prévisions, le taux de change *USD/TND* présente une tendance à la hausse relativement plus importante par rapport aux deux autres devises. *L'EUR/TND* et le *GBP/TND* croient et décroissent avec des vitesses proportionnelles et de même signe. Prouvant ainsi la présence de périodes "stables" et d'autres plus volatiles (voir Fig 2). Économiquement, ce constat empirique est expliqué par la dépréciation de la valeur du dollar durant la période du [01/03/1995 - 01/03/1996]. Remarquons que les valeurs négatives (les baisses des cours) tendent à provoquer un accroissement de la volatilité supérieur à celui induit par des valeurs positives (hausse des cours) de même amplitude : C'est l'*Effet de Levier* de Brock (1976).

3.2. Stationnarité des séries de taux de change. Les corrélogrammes des autocorrélations et des autocorrélations partielles indiquent un comportement non stationnaires ; même si les autocorrélations ne sont pas proches de l'unité mais très proches entre elles, on conclut donc en faveur de la non stationnarité des séries de taux de change.

Pour confirmer cette hypothèse, nous avons mis en oeuvre le test de Dickey et Fuller (1979 et 1980) : le test ADF. Nous avons aussi utilisé le test KPSS de Kwiatkowski, Phillips, Schmidt et Shin (1992). Notre choix de tests s'explique par le

⁶En Tunisie, les échanges en euros ont commencé effectivement le 04/01/1999.

fait que pour le premier test l'hypothèse nulle correspond à la présence d'une racine unitaire tandis que l'hypothèse nulle du second test correspond à la stationnarité. En effet, le premier test favorise l'hypothèse nulle, il est donc impératif de considérer les deux types de tests. Ces tests permettent également de distinguer les processus à mémoire longue de ceux à mémoire courte. Quatre cas de figures sont possibles selon les résultats des deux tests :

- Le test ADF rejette l'hypothèse de présence de racine unitaire et le test KPSS accepte l'hypothèse de stationnarité. On en déduit que le processus est stationnaire.
- Le non rejet de l'hypothèse nulle de présence de racine unitaire et le rejet de l'hypothèse nulle de stationnarité. Le processus est donc non stationnaire : il est intégré d'ordre un.
- Les tests ADF et KPSS peuvent rejeter l'hypothèse nulle. Le processus ni $I(0)$ ni $I(1)$. On peut envisager la présence de mémoire longue.
- L'acceptation de l'hypothèse nulle par les deux tests révèle souvent la présence de problèmes de données.

Les résultats des deux tests appliqués aux trois séries de taux de change sont communiqués dans le tableau (1) :

Tableau (1) : Statistiques descriptives

	<i>EUR</i>	<i>GBP</i>	<i>USD</i>
Moyenne	1,502	2,240	1,148
Médiane	1,526	2,259	1,123
Maximum	1,698	2,519	1,515
Minimum	1,287	2,040	0,911
Ecart type	0,122	0,127	0,174
JB	96,567**	173,418**	173,418**
ADF	-2,145**	97,133**	-0,186**
KPSS	0,632**	0,401**	0,757**

** significatif au seuil 1 %

JB : le test de normalité de Jarque Bera

On conclut à la non stationnarité des trois séries. Cependant, cette non stationnarité peut être expliquée par l'hétéroscédasticité des résidus. En effet, les autocorrélations décroissent très faiblement et ne convergent presque pas, le test de Box-Pearce montre que les résidus sont fortement corrélés. Appliqué aux carrés des rendements, le test du Multiplicateur de Lagrange révèle un effet *ARCH* très significatif jusqu'à l'ordre 10. Ces résultats sont récapitulés dans le tableau (2). L'hypothèse nulle d'absence d'effet *ARCH* est rejetée pour toutes les séries. Pour stationnariser les séries, on différencie les séries en logarithme dans le but de remédier à leur hétéroscédasticité ce qui correspond à étudier finalement les rendements des taux de change.

Tableau (2) : Résultats du test *ARCH*

	EUR	GBP	USD
<i>ARCH</i> (2)	9,626**	10,547**	3,776**
	[0,000]	[0,000]	[0,023]
<i>ARCH</i> (5)	5,850**	6,770**	5,042**
	[0,000]	[0,000]	[0,000]
<i>ARCH</i> (10)	4,085	6,982**	29,371**
	[0,000]	[0,000]	[0,000]

** significatif au seuil 1 %.

Les P-values sont entre [].

Dans la suite, le taux de rendement est défini par :

$$r_t = 100 \log \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right)$$

où S_t et S_{t-1} sont les cours journaliers aux instants t et $t - 1$.

Les rendements sont plus dispersés que les cours de change journaliers avec des écarts à la moyenne plus importants. En subdivisant la période étudiée en deux sous périodes, la première s'étendant du 01/03/1994 au 26/06/1997 et la deuxième du 30/06/1997 au 31/12/1998, on remarque que le taux de change *USD/TND* a augmenté considérablement durant la deuxième période, une des principales causes qui peut expliquer ce constat est l'ouverture du marché de change à terme qui a favorisé la libéralisation financière. Ce nouveau marché permet en effet aux opérateurs de se couvrir contre le risque de change à l'import comme à l'export ; le nombre de transactions sur le nouveau marché a nettement augmenté (voir Fig 2).

L'hypothèse de présence de racine unitaire est rejetée pour les trois devises, les séries des rendements sont donc stationnaires. L'examen des corrélogrammes montre que les autocorrélations sont nettement moins faibles et convergent rapidement au bout des dix premiers retards (voir tableau (3)).

Le tableau (3) : Statistiques descriptives des taux de rendement

	EUR	GBP	USD
Moyenne	-0,006	-0,005	-0,016
Médiane	0,000	0,001	-0,017
Maximum	1,187	2,038	2,503
Minimum	-1,404	-1,541	-3,321
Ecart type	0,213	0,277	0,466
Skeweness	-0,231	0,403	-0,044
	(3,290)	(5,690)	(0,802)
Kurtosis	7,092	8,611	6,032
	(29,056)	(39,676)	(27,454)
JB	851,59**	1599,9**	752,46**
ADF	-38,432**	-41,640**	-41,427**
KPSS	0,050	0,132	0,273

** significatif au seuil 1 %.

Les t -student sont entre ().

D'après le tableau (4), les autocorrélations empiriques des rendements au carré sont toutes positives et nettement plus élevées en valeur absolue que les autocorrélations empiriques des rendements. Le test de Portemanteau est très significatif

et les P-values sont généralement nulles (voir tableau (4)). Les autocorrélations ne convergent presque pas. Compte tenu de ces résultats, nous pouvons conclure à la présence d'une variance conditionnelle hétéroscédastique et à la possibilité d'une dépendance temporelle dans les premiers moments et les moments d'ordre supérieur. Les tests de la normalité (le moment d'ordre 3, le moment d'ordre 4 et le test JB) révèlent que les distributions des trois séries ne sont pas gaussiennes (voir Fig 1). En effet, quelque soit la série considérée, les coefficients d'aplatissement des queues des distributions (Kurtosis) sont significativement supérieurs à trois. Les graphiques de densité de Kernel montrent que les distributions sont léptokurtiques (une propriété courante des séries financières). Généralement, on propose d'autres lois alternatives tenant compte des propriétés des séries financières telles que la loi de Student et la loi de Student symétrique.

Tableau (4) : Résultats des tests de Box Pearce appliqués aux carrés des rendements

	<i>EUR</i>	<i>GBP</i>	<i>USD</i>
<i>Q</i> (10)	49,633** [0,000]	38,358** [0,000]	74,849** [0,000]
<i>Q</i> (15)	77,440** [0,000]	40,141** [0,004]	114,453** [0,000]
<i>Q</i> (20)	165,429** [0,000]	133,553** [0,000]	214,481** [0,000]

** significatif au seuil 1 %.

Les P-values sont entre [].

3.3. Modélisation ARFIMA–FIGARCH. Granger et Teravista (1993) montrent qu'une mauvaise spécification de la moyenne conditionnelle peut affecter l'estimation des paramètres de la variance conditionnelle. Teyssière (1997) une expérience Monte Carlo et montre qu'ignorer la mémoire longue dans la moyenne conditionnelle d'un processus à double mémoire longue peut donner des biais significativement importants lors de l'estimation du processus de la volatilité conditionnelle. L'estimation du modèle *ARFIMA – FIGARCH* est nouvelle dans la littérature économétrique (voir Teyssière, 1997).

Dans une première partie, nous estimons la moyenne par le modèle *ARFIMA*. L'équation est la suivante :

$$(3.1) \quad (1 - L)^{d_0} \Psi(L) (y_t - \mu) = \theta(L) \varepsilon_t$$

où $E(\varepsilon_t) = 0$, $E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$ et $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, \forall s \neq t$. Les conditions citées ci-haut sont vérifiées. Le modèle *ARFIMA* représenté par l'équation (3.1) est estimé par la méthode du maximum de vraisemblance en utilisant *PcGive* (voir Doornik et Hendry, 2001)⁷. Nous estimons différentes paramétrisations du *ARFIMA* (a, d_0, m), allant jusqu'à l'ordre 2. Nous considérons différentes combinaisons de (a, m) telles que $a, m = 0...2$.⁸

⁷Sowell (1992a) présente un algorithme détaillé pour l'estimation des paramètres d'un modèle *ARFIMA*(a, d_0, m).

⁸L'examen des corrélogrammes des autocorrélations et des autocorrélations partielles montrent que les autocorrélations tendent vers 0 après l'ordre 2.

D'après les valeurs des critères d'information (AIC et SIC)⁹, nous avons retenu les modèles $ARFIMA(0, d_0, 0)$ pour les trois séries étudiées. Les résultats de nos estimations sont résumés dans le tableau (5).

Tableau (5) : Les résultats des estimations après sélection des modèles $ARFIMA$

	<i>EUR</i>	<i>GBP</i>	<i>USD</i>
μ	0,020 (6,02)**	0,014 (2,04)*	0.006 (1.11)
d_0	-0,098 (-4.92)**	-0.049 (-2,23)*	0.045 (2.50)*
$\ln(L)$	61,762	-481,023	438.673
$Q(20)$	49,561 [0,000]	49,585 [0,000]**	17,886 [0,594]
$Q^2(20)$	62,381 [0,000]**	40,141 [0,004]**	118,969 [0,000]**
AIC	-0,090	0,742	-0.444
SIC	2,905	3, 737	-0.427
SIC_c	-117,515	968, 055	-871,3337
JB	28,433 [0.000]**	35,862 [0.000]**	387.66 [0.0000]**
<i>ARCH</i>	4,311 [0.000]*	14,832 [0.000]**	4.0631 [0.044]*

** significatif au seuil 1%.

* significatif au seuil 5 %.

Les t-student sont entre ().

Les P-values sont entre [].

Les résultats reportés dans le tableau (5) montrent la présence d'un effet ARCH dans les résidus de l'estimation d'un modèle $ARFIMA(a, d_0, m)$ sur les séries de rendements des taux de changes étudiées. Une modélisation $ARFIMA(a, d_0, m) - FIGARCH(p, d, q)$ sur les trois séries de taux de croissance des taux de change étudiées tel que :

$$(3.2) \quad \Psi(L)(1-L)^{d_0}(y_t - \mu) = \Theta(L)\epsilon_t$$

$$(3.3) \quad \epsilon_t = z_t \sigma_t$$

$$(3.4) \quad [1 - \beta L]\sigma_t^2 = w + [1 - \beta L - \phi L(1-L)^d]\epsilon_t^2$$

où $E(\epsilon_t) = 0$ et $E(\epsilon_t \epsilon_s) = 0, \forall s \neq t$.

Ce modèle est estimé en utilisant la version professionnelle d'Ox, selon la méthode du maximum de vraisemblance. Sous l'hypothèse de normalité, la fonction de log-vraisemblance du modèle du modèle $ARFIMA(a, d_0, m) - FIGARCH(p, d, q)$ s'écrit comme suit :

$$(3.5) \quad L(\lambda, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_T) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{t=1}^T [\ln(\sigma_t^2) + \epsilon_t^2 \sigma_t^{-2}]$$

où $\lambda' = (\mu, \Psi_1, \dots, \Psi_a, \theta_1, \dots, \theta_m, d_0, w, \phi_1, \dots, \phi_q, \beta_1, \dots, \beta_p, d)$.

Nous avons estimé les paramètres des deux spécifications du modèle $FIGARCH$: celle de Baillie, Bollerslev et Mikkelsen (1996) et de Chung (2001). Nous avons

⁹ $AIC_c = -2 LV(\max) + \frac{2kT}{T - (k+1)}$ où LV est la valeur du Log vraisemblance à l'optimum et k est le nombre de paramètres du modèle.

constaté qu'il n'y a pas de différences au niveau de la sélection des modèles. Toutefois, la constante dans le modèle de Chung est largement supérieure à celle de Baillie, Bollerslev et Mikkelsen. Dans la suite, on se contente d'étudier cette dernière spécification.

Les résultats des estimations sont récapitulés dans le tableau (6). Quelque soit le critère d'information retenu, les séries présentent une dépendance de long terme dans leurs moyennes et volatilités conditionnelles. Le paramètre d'intégration fractionnelle est significatif et positif dans l'équation de la variance conditionnelle. Nous sommes en présence d'un phénomène de persistance de la volatilité des taux de rendement des trois devises : *EUR*, *GBP* et *USD*.

Tableau (6) : Les résultats des estimations après sélection du modèle *ARFIMA – FIGARCH*

	<i>EUR</i>	<i>GBP</i>	<i>USD</i>
μ	0,019 (5,245)**	0,014 (1,954)	0,008 (1,529)
d_0	-0,070 (-3,433)**	-0,042 (-1,692)	0,050 (2,38)*
w	0,020 (5,394)**	0,050 (4,136)**	0,001 (1, 097)
d	0,120 (4,947)**	0,121 (3,546)**	0,397 (2,518)*
ϕ_1		-0,046 (-0,989)	0,436 (4,669)**
ϕ_2			0,049 (1,201)
β_1			0,782 (7,88)**
$\ln(L)$	81,791	-466,138	491,98
$Q(20)$	43,949 [0,001]**	11,126 [0,942]	14,298 [0,815]
$Q^2(20)$	18,953 [0,524]	21,698 [0,299]	15,145 [0,584]
AIC	-0,119	0,722	-0,493
SIC	-0,103	0,742	-0,473
SIC_c	-155,563	942,306	-969,902
Skeweness	-0,054	-0,248	-0,068
Kurtosis	3,687	3,719	5,982

** significatif au seuil 1%.

* significatif au seuil 5 %.

Les t-student sont entre ().

Les P-values sont entre [].

Les résultats reportés dans le tableau (6) donnent plusieurs conclusions. Ils confirment ceux du tableau (5) pour deux des trois séries de rendements des taux de change. Le paramètre d'intégration fractionnaire de la moyenne conditionnelle est négatif pour la zone euro et le Royaume Uni contrairement aux Etats-Unis. La série *GBP/TND* montre l'existence d'une mémoire longue dans l'équation de la moyenne lorsque seul le modèle *ARFIMA* est estimé. Par contre, quand on estime un *ARFIMA – FIGARCH* sur cette même série, le paramètre de mémoire longue

dans l'équation de la moyenne dévient non significatif. En effet, d_0 est négatif et non significatif. La série USD/TND a une composante de mémoire longue dans l'équation de la moyenne conditionnelle : d_0 est positif et significatif. Pour la série EUR/TND , d_0 est négatif et significatif dans les deux tableaux donc la série présente une antipersistance et les autocorrélations décroissent hyperboliquement vers zéro. On peut donc conclure que les dynamiques estimées dans les moyennes conditionnelles ne sont pas affectées par l'introduction du modèle $FIGARCH$ pour les séries EUR/TND et USD/TND . Les trois séries présentent une mémoire longue dans leurs équations de la variance.

L'estimation de la variance conditionnelle révèle des coefficients d'intégration fractionnelle qui sont significatifs et positifs, montrant la présence d'un phénomène de persistance de la volatilité caractérisant les trois séries de rendements des taux de change étudiées. Le paramètre d_0 est très significatif pour les séries de taux de rendements EUR et USD (significatif au seuil 1%) et significatif pour la série de taux de rendements GBP .

Après la comparaison des divers critères d'information, nous retenons les modèles suivants : $ARFIMA(0, d_0, 0) - FIGARCH(0, d, 0)$ pour l' EUR , $ARFIMA(0, d_0, 0) - FIGARCH(1, d, 0)$ pour le GBP et $ARFIMA(0, d_0, 0) - FIGARCH(1, d, 1)$ pour l' USD .

Nous pouvons conclure aussi en la présence de mémoire longue (modélisée par le coefficient d'intégration fractionnelle) et de mémoire courte (que nous retrouvons dans les paramètres du processus $GARCH$). Le test ARCH, appliqué aux carrés des résidus issus de l'estimation des modèles $ARFIMA - FIGARCH$ sélectionnés, n'est pas significatif pour les trois séries (voir tableau (7)). Ceci confirme l'absence d'hétéroscédasticité.

Tableau (7) : Résultats du test $ARCH$ appliqué aux modèles sélectionnés

	<i>EUR</i>	<i>GBP</i>	<i>USD</i>
<i>ARCH</i> (2)	1,385	0,018	1,817
	[0,250]	[0,981]	[0,403]
<i>ARCH</i> (5)	0,910	2,258	3,610
	[0,473]	[0,046]*	[0, 606]
<i>ARCH</i> (10)	0,999	1,306	11,128
	[0,441]	[0,221]	[0,347]

* significatif au seuil 5 %.

Les P-values sont entre [].

4. CONCLUSION :

L'environnement économique et monétaire est caractérisé aujourd'hui par une volatilité très élevée des séries financières. Pour tenir compte de cet aspect dans la prévision du risque, plusieurs modèles économétriques ont été proposés. Dans ce papier, nous modélisons la volatilité des taux de croissance des taux de change via des processus $GARCH$ à mémoire longue.

La première partie de ce travail montre que ces processus $GARCH$ sont particulièrement pertinents pour la modélisation des séries temporelles des taux de change présentant une dépendance de long terme. L'avantage des modèles $FIGARCH$ est qu'ils permettent de cerner les dynamiques de court et de long terme de la volatilité et d'inclure le phénomène de regroupement de volatilité dans l'analyse.

Nous avons discuté brièvement les deux définitions proposées par Baillie, Bollerslev et Mikkelsen (1996) et par Chung (2001), en montrant que les versions ne sont pas compatibles en général.

L'estimation du modèle *ARFIMA-FIGARCH* sur les taux de rendements des taux de change tunisiens met en évidence la dépendance temporelle de long terme de la variance conditionnelle et particulièrement la série du dollar américain contre le dinar tunisien. A partir de la crise du 11 septembre 2001, on a constaté un pic de volatilité qui a persisté dans le temps. Cependant, il apparaît que ce choc a été amorti au bout de quelques mois.

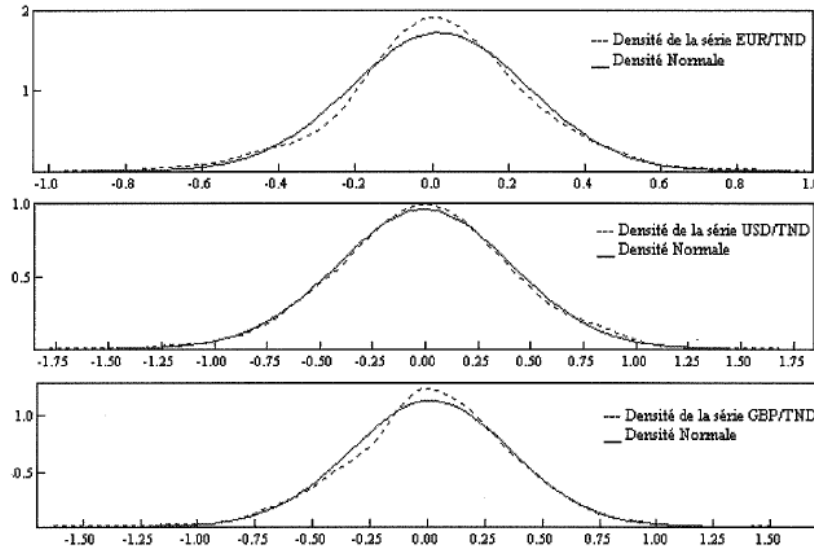


Fig 1 : Représentation des densités des rendements

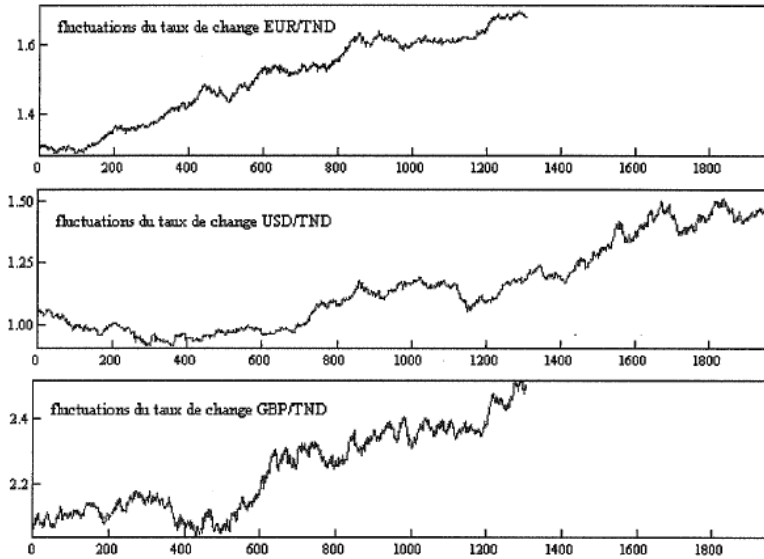


Fig 2 : Fluctuations des taux de change

RÉFÉRENCES

- [1] Beine, M. Laurent, S. et Lecourt, C., 1999, Accounting for conditional leptokurtosis and closing days effects in FIGARCH models of daily exchange rates, Communication présentée au 6ième Workshop of Financial Modelling, Lille, Janvier.
- [2] Baillie, R.T., Bollerslev T. et Mikkelsen H.O., 1996, Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroscedasticity, *Journal of Econometrics* 74, 3-30.
- [3] Bollerslev, T., 1986, Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity, *Journal of Econometrics* 31, 307-327.
- [4] Bollerslev, T., Chou, R.Y. et Kroner, K.F., 1992, ARCH modelling in finance : A review of the theory and empirical evidence, *Journal of Econometrics*, Vol. 52, 5-59.
- [5] Bollerslev, T., R.F. Engle et D.B. Nelson, 1994, ARCH models, in R.F. Engle et D. McFadden, eds., *Handbook of Econometrics*, Vol. 4, Elsevier Science B. V Amesterdam.
- [6] Bollerslev, T. et Mikkelsen H. O., 1996, Modeling and pricing long memory in stock market volatility, *Journal of Econometrics*, Vol. 73, 151-184.
- [7] Bougerol, N. et Picard, N.M., 1992, Stationarity of *GARCH* processes and of some nonnegative time series, *Journal of Econometrics*, Vol. 52, 115-127
- [8] Breidt, F.J., Crato, N, et De Lima, P., 1998, The detection and estimation of long memory in stochastic volatility, *Journal of Econometrics*, Vol. 83, 325-348.
- [9] Caporin M., 2002, Long memory conditional heteroscedasticity and second order causality, université de Ca' Foscari Venise.
- [10] Caporin, M., 2002, *FIGARCH* models : stationarity, estimation methods and the identification problem, Université de Ca' Foscari à Venise, n° 02.02.
- [11] Chung, C. F., 2001, Estimating the fractionally integrated *GARCH* model, National Taiwan University discussion paper.
- [12] Davidson, J., 2003, Moment and Memory Properties of Linear Conditional Heteroscedasticity Models, and a New Model, working paper.
- [13] Ding, Z. et Granger, C.W.J., 1996, Modeling volatility persistence of speculative returns : A new approach. *J. Econometrics* 73, 185-215.
- [14] Hendry, D.F. et Doornik, J.A., 2001. *Empirical Econometric Modelling Using PcGive Volume I*, London : Timberlake Consultants Press. (ISBN 0-9533394-2-4).
- [15] Engle, R.F., 1982, Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance U.K. inflation, *Econometrica*, Vol. 50, 987-1008.
- [16] Engle, R.F., et Granger, C.W.J., 1987, Cointegration and Error Correction : Representation, Estimation and Testing. *Econometrica*. *Econometrica*, Vol. 55, 251-76
- [17] Engle, R.F., et T. Bollerslev, 1986, Modelling the persistence of conditional variances, *Econometric reviews*, Vol. 5, 1-50.
- [18] Giraitis, L., Koskoszka, P. et Leipus R., 2000, Stationary ARCH models : Dependence structure and central limit theorem, *Econometric theory*, Vol. 16, 3-22.
- [19] Granger, C.W.J., 1980, Long Memory Relationships and the Aggregation of Dynamics Models, *Journal of Econometrics*, Vol. 14, 227-238.
- [20] Granger, C.W.J. et Joyeux, R., 1980, An Introduction to long memory time series models and fractional differencing, Vol 1, 15-29.
- [21] Granger, C.W.J. et Terasvirta, T., 1993, *Modeling Nonlinear Economic Relationships*, Oxford, Oxford University Press.
- [22] Hosking, J.R.M., 1981, Fractional Differencing, *Biometrika*, n° 68 (1), 165-176.
- [23] Kazakevicius, V. et Leipus, R., 2002, On stationarity in the integrated ARCH models, *Econometrics theory*, Vol. 18, n°1, 1-16.
- [24] Kazakevicius, V., 2003, A New Theorem on existence of invariant Distributions With Applications to ARCH processes, *Journal of Applied Probability*, Vol. 40, n°1, 147-162.
- [25] Kwiatkowski D., Phillips P., Schmidt, P. et Shin, Y., 1992, Testing the Null Hypothesis of Stationary Against the Alternative of a Unit Root : How Sure Are We that Economic Time Series Have a Unit Root ?, *Journal of Econometrics*, Vol 54, 159-178.

- [26] Lardic S. et Mignon V., 1999, Pr evision *ARFIMA* des taux de change : les mod elisseurs doivent ils encore exhorter   la naivit  des pr evisions ?, *Annales d' conomie et de Statistique*, Vol. 54, 47-68.
- [27] Mikosch, T. et C. Starica, 2003, Long-range dependence effects and ARCH modeling, *Theory and applications of long-range dependence*, Birkhauser Boston, Boston, MA, 2003, 439-459
- [28] Nelson, D.B., 1990, Stationarity and persistence in the *GARCH(1,1)* model , *Econometric theory*, 6, 318-334.
- [29] Nelson, D.B, 1990 a, *ARCH* Models as Diffusion Approximation, *Journal of Econometrics*, Vol. 45, 7-38.
- [30] Nelson, D.B., 1990 b, Stationarity and Persistence in The *GARCH(1,1)* Model, *Econometric Theory*, Vol. 6, 318-334.
- [31] Robinson et Zaffaroni, 2001, Pseudo_Maximum likelihood Estimation of Models, London School Of Economics et Banque d'Italie.
- [32] Sowell F.,1992a, Maximum Likelihood Estimation of Stationary Univariate Fractionally Integrated Time Series Models, *Journal of Econometrics*, 165-188.
- [33] Teyssi re, G., 1997, Double Long-Memory Financial Time Series, Contribution pr esent e   l' ESEM, Toulouse.
- [34] Zaffaroni P., 2002, Stationarity and memory of ARCH models, publication du STICERD, EM/2000/383.