



Munich Personal RePEc Archive

## **The random walk model with autoregressive errors**

George, Halkos and Ilias, Kevork

University of Thessaly, Department of Economics

2005

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/33312/>  
MPRA Paper No. 33312, posted 11 Sep 2011 16:16 UTC

# The random walk model with autoregressive errors

George E. Halkos and Ilias S. Kevork

## Abstract

In this study we show that a random walk model with drift and first order autocorrelated errors, AR(1), behaves like an ARIMA(1,1,0). The last one is extracted from the unrestricted model of the Augmented Dickey Fuller test using as an explanatory variable a lag of order one difference of the series under consideration when  $H_0$  is true. Through Monte Carlo simulations we show that when the population model is a random walk with moderate AR(1) autocorrelation in the errors we have a high type II error either in small or large samples. Thus we are accepting as a population model the random walk with unfortunately uncorrelated errors. This causes problems at the stage of making predictions when constructing prediction intervals of the series we use 2 standard deviations of the forecast error above and below the predicted value. More specifically, the actual probability the prediction interval to include the real future value is really smaller than the nominal one of 95.44% even if the number of forecasting periods ahead is relatively small compared to the sample size we are using.

**Keywords:** Random walk with drift, ARIMA(1,1,0), Predictions  
**JEL:** C5

## Το υπόδειγμα τυχαίου περιπάτου με αυτοπαλίνδρομα σφάλματα

Ηλίας Σ. Κεβόρκ και Γεώργιος Ε. Χάλκος

## Περίληψη

Στη μελέτη αυτή δείχνουμε ότι ένα υπόδειγμα τυχαίου περιπάτου με αυτοπαλίνδρομα πρώτου βαθμού σφάλματα, AR(1), συμπεριφέρεται σαν ένα ARIMA (1,1,0), όπως το τελευταίο προκύπτει από το μη περιοριστικό υπόδειγμα του επαυξημένου ελέγχου Dickey-Fuller, με μία μόνο χρονική υστέρηση στις πρώτες διαφορές της σειράς ως ερμηνευτική μεταβλητή, όταν ισχύει η μηδενική υπόθεση. Με την χρήση Monte Carlo προσομοιώσεων, δείχνουμε ότι όταν το πληθυσμιακό υπόδειγμα είναι αυτό του τυχαίου περιπάτου με μετρίου βαθμού αυτοσυσχετιζόμενα σφάλματα AR(1), έχουμε υψηλό σφάλμα τύπου II, τόσο σε μικρά όσο και σε μεγάλα μεγέθη δείγματος. Έτσι οδηγούμαστε στο να αποδεχθούμε ότι το πληθυσμιακό υπόδειγμα είναι αυτό του τυχαίου περιπάτου αλλά με σφάλματα ασυσχέτιστα. Αυτό δημιουργεί πρόβλημα στην διενέργεια προβλέψεων, όταν στη κατασκευή του διαστήματος πρόβλεψης για την πραγματική μελλοντική τιμή της σειράς χρησιμοποιούνται δύο τυπικές αποκλίσεις του σφάλματος πρόβλεψης εκατέρωθεν της προβλεπόμενης τιμής. Πιο συγκεκριμένα, η πιθανότητα το διάστημα να περιλαμβάνει την πραγματική τιμή της σειράς είναι ανησυχητικά μικρότερη από το 95.44%, ακόμα και όταν η πρόβλεψη διενεργείται για σχετικά μικρό αριθμό μελλοντικών περιόδων.

**Λέξεις Κλειδιά:** Τυχαίος περίπατος με περιπλάνηση, ARIMA(1,1,0), Προβλέψεις  
**JEL:** C5

## 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένας σημαντικός αριθμός μελετών έχει δείξει ότι πολλές χρονολογικές σειρές οικονομικών μεγεθών συμπεριφέρονται σύμφωνα με το υπόδειγμα του τυχαίου περιπάτου με περιπλάνηση (random walk model with drift). Η διαπίστωση αυτή θα πρέπει να λαμβάνεται σοβαρά υπόψη όταν τέτοιας μορφής οικονομικά μεγέθη επιλέγονται ως μεταβλητές σε μια παλινδρόμηση καθώς βασιζόμενοι στα αποτελέσματά της μπορεί να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι μεταξύ των μεταβλητών υπάρχει σχέση, ενώ στην πραγματικότητα μια τέτοια σχέση δεν υφίσταται. Επομένως, στην διενέργεια παλινδρομήσεων όπου επιλέγονται ως μεταβλητές χρονολογικές σειρές, θα πρέπει να προηγείται ο έλεγχος εάν οι μεταβλητές αυτές ακολουθούν τυχαίο περίπατο. Και αν αυτό πράγματι συμβαίνει τότε η παλινδρόμηση αυτή θα είναι αποδεκτή μόνο εάν οι μεταβλητές συνολοκληρώνονται, δηλαδή όταν υπάρχει τουλάχιστον ένας γραμμικός συνδυασμός αυτών ο οποίος θα παράγει στάσιμη σειρά.

Οι εκτιμήσεις του μη περιοριστικού υποδείγματος (unrestricted model)

$$\Delta y_t = \alpha + \beta t + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1)$$

και του αντίστοιχου περιοριστικού (restricted model)

$$\Delta y_t = \alpha + \varepsilon_t \quad (2)$$

το οποίο προκύπτει από την (1) θέτοντας ταυτόχρονα  $\beta=0$  και  $\gamma=0$ , αποτελούν το πρώτο στάδιο στη διαδικασία ελέγχου εάν η χρονολογική σειρά  $y_t$  είναι τυχαίος περίπατος. Σε δεύτερο στάδιο ο έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης  $H_0: \beta=0, \gamma=0$  διενεργείται μέσω του λόγου

$$F = \frac{(n - \lambda)(ESS_R - ESS_{UR})}{q \cdot ESS_{UR}} \quad (3)$$

όπου  $n$  είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων,  $\lambda$  ο αριθμός των εκτιμώμενων συντελεστών στο μη περιοριστικό υπόδειγμα,  $q$  ο αριθμός των προς έλεγχο συντελεστών, και  $ESS_{UR}$ ,  $ESS_R$  το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων αντίστοιχα στο μη περιοριστικό και περιοριστικό υπόδειγμα. Είναι όμως γνωστό ότι ο λόγος  $F$  της (3) δεν ακολουθεί την κατανομή  $F$ . Για το

λόγο αυτό ο έλεγχος της  $H_0$  διενεργείται όχι με τη χρησιμοποίηση των πινάκων της κατανομής F αλλά μέσω ειδικά κατασκευασμένων πινάκων που έχουν παράγει οι Dickey και Fuller το 1981.

Η παραπάνω μεθοδολογία εφαρμόστηκε σε περιβαλλοντικά δεδομένα, ειδικότερα δε χρησιμοποιήθηκε για τον έλεγχο εάν οι ετήσιες εκπομπές θείου για την Ουγγαρία από το 1891 έως και το 1990 ακολουθούν το υπόδειγμα του τυχαίου περιπάτου<sup>1</sup>. Στον Πίνακα 1 δίνονται οι εκτιμήσεις του μη περιοριστικού (1) και του περιοριστικού υποδείγματος (2), οι τιμές t (σε παρενθέσεις), τα τυπικά σφάλματα,  $S_e$ , των δύο παλινδρομήσεων, οι τιμές του κριτηρίου Durbin-Watson (DW), τα αθροίσματα των τετραγώνων των καταλοίπων, και τέλος ο λόγος F, όπως αυτός υπολογίστηκε βάσει της (3). Από τα αποτελέσματα διαπιστώνεται ότι αν και ο λόγος F είναι μικρότερος της κριτικής τιμής των πινάκων Dickey-Fuller σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 10%, γεγονός που δεν μας επιτρέπει να απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση, το συγκεκριμένο συμπέρασμα για την ώρα δεν ευσταθεί καθώς τα σφάλματα στο μη περιοριστικό υπόδειγμα δεν είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους. Αυτό φαίνεται από τη αντίστοιχη τιμή του DW, η οποία πέφτει στην περιοχή της θετικής αυτοσυσχέτισης.

**Πίνακας 1:** Εφαρμογή του απλού κριτηρίου Dickey-Fuller στις ετήσιες εκπομπές θείου της Ουγγαρίας για την περίοδο 1891-1990

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	Λόγος F
Μη περιοριστικό υπόδειγμα	9.9571 (1.570)	-0.0367 (-0.157)	-0.0103 (-0.387)	0.636
	$S_e = 31.306$ <b>DW = 1.187</b> $ESS_{UR} = 94084.10$			
Περιοριστικό υπόδειγμα	4.1796 (1.333)			
	$S_e = 31.189$ <b>DW = 1.183</b> $ESS_R = 95330.28$			

<sup>1</sup> Οι πηγές των δεδομένων είναι A.S.L. και Associates (1997) και Lefohn *et al.* (1999).

Επομένως είναι αναγκαία η χρησιμοποίηση του αντίστοιχου επαυξημένου κριτηρίου Dickey-Fuller, σύμφωνα με το οποίο ως ερμηνευτικές μεταβλητές θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν χρονικές υστερήσεις των πρώτων διαφορών της χρονολογικής σειράς.

Στον Πίνακα 2 δίνονται, βάσει του επαυξημένου κριτηρίου Dickey-Fuller, οι εκτιμήσεις του μη περιοριστικού υποδείγματος,

$$\Delta y_t = \alpha + \beta t + \gamma y_{t-1} + \phi \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4)$$

του αντίστοιχου περιοριστικού,

$$\Delta y_t = \alpha + \phi \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (5)$$

καθώς και ο λόγος F όπως αυτός υπολογίσθηκε και πάλι βάσει της (3). Έχοντας εισάγει ως ερμηνευτική μεταβλητή τη  $\Delta y_{t-1}$ , μπορούμε να δεχθούμε ότι τα σφάλματα στη (4) και (5) είναι ασυσχέτιστα καθώς η τιμή του DW είναι πολύ κοντά στο 2. Προχωρώντας επομένως στο έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης  $H_0: \beta=0, \gamma=0$ , διαπιστώνουμε και πάλι ότι ο λόγος F σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 10% είναι μικρότερος της αντίστοιχης κριτικής τιμής, γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα να μη μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση του τυχαίου περιπάτου. Το βασικό όμως ερώτημα που τίθεται εδώ μετά τη εξαγωγή του παραπάνω συμπεράσματος είναι ποιο υπόδειγμα για τη μεταβλητή  $y_t$  θα χρησιμοποιηθεί, είτε σε μια ενδεχόμενη παλινδρόμηση (στην οποία η  $y_t$  θα χρησιμοποιηθεί ή ως εξαρτημένη ή ως ερμηνευτική μεταβλητή), είτε στο στάδιο διενέργειας προβλέψεων για τη συγκεκριμένη χρονολογική σειρά στο μέλλον. Από τη βιβλιογραφία συνάγεται [βλ. πχ. Pindyck & Rubinfeld (1998)] ότι το υπόδειγμα που θα χρησιμοποιηθεί θα είναι αυτό του τυχαίου περιπάτου

$$y_t = \alpha + y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (6)$$

με τα σφάλματα  $\varepsilon_t$  να είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους.

**Πίνακας 2:** Εφαρμογή του επαυξημένου κριτηρίου Dickey-Fuller στις ετήσιες εκπομπές θείου της Ουγγαρίας για την περίοδο 1891-1990

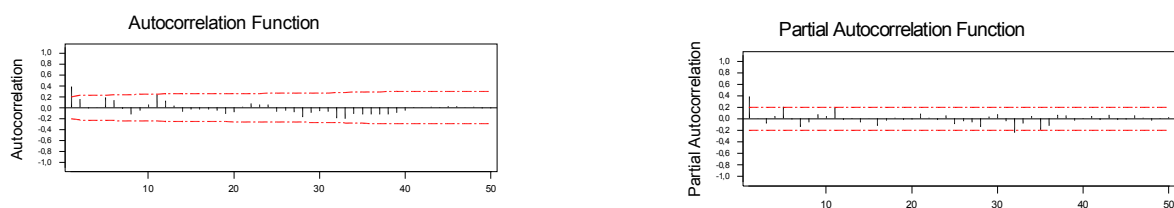
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\phi$	Λόγος F
Μη περιοριστικό υπόδειγμα	6.3112 (1.043)	0.1426 (0.641)	-0.0295 (-1.176)	0.4193 (4.291)	1.059
	$S_e = 28.926$ $ESS_{UR} = 78649.72$ <b>DW = 1.992</b>				
Περιοριστικό υπόδειγμα	2.2249 (0.752)			0.4046 (4.218)	
	$S_e = 28.944$ $ESS_R = 80422.30$ <b>DW = 1.975</b>				

Για τις εκπομπές θείου της Ουγγαρίας τα αποτελέσματα της εκτίμησης της (6), όπως αυτά προέκυψαν μετά την εφαρμογή της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων στο υπόδειγμα  $\Delta y_t = \alpha + \varepsilon_t$ , δίνονται στον Πίνακα 1, στο τμήμα του περιοριστικού υποδείγματος. Το πιο ενδιαφέρον χαρακτηριστικό που παρατηρείται στα αποτελέσματα αυτά είναι η τιμή του DW, η οποία μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα σφάλματα παρουσιάζουν θετική αυτοσυσχέτιση πρώτου βαθμού. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε επίσης εξετάζοντας τις συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης των καταλοίπων [βλ. Διάγραμμα (1)], οι οποίες εμφανίζουν εικόνες αντίστοιχες με αυτές του αυτοπαλίνδρομου σχήματος πρώτου βαθμού, AR(1).

Η παραπάνω ανάλυση μας οδηγεί στη μελέτη αυτή να εισάγουμε ένα υπόδειγμα τυχαίου περιπάτου με περιπλάνηση αλλά με σφάλματα τα οποία να ακολουθούν το αυτοπαλίνδρομο σχήμα πρώτου βαθμού, AR(1). Ειδικότερα, στο επόμενο τμήμα γίνεται η ανάλογη αναφορά στην υπάρχουσα βιβλιογραφία. Στο τρίτο τμήμα, αποδεικνύουμε ότι το υπόδειγμα τυχαίου περιπάτου με περιπλάνηση και με σφάλματα που να ακολουθούν το AR(1) συμπεριφέρεται ως ARIMA (1,1,0), το οποίο με τη σειρά του προκύπτει από το μη περιοριστικό υπόδειγμα του επαυξημένου κριτηρίου Dickey-Fuller, με μια χρονική υστέρηση στις πρώτες διαφορές της χρονολογικής σειράς ως ανεξάρτητη μεταβλητή, όταν  $\beta=0$  και  $\gamma=0$ .

Στο ίδιο τμήμα, χρησιμοποιώντας ως βάση τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων που προκύπτουν από τα περιβαλλοντικά δεδομένα της Ουγγαρίας, παράγουμε σειρές προσομοιώσεων για το υπόδειγμα του τυχαίου περιπάτου με περιπλάνηση και με σφάλματα που ακολουθούν το AR(1), και εξετάζουμε τη συμπεριφορά του απλού και του επαυξημένου κριτηρίου Dickey-Fuller, αναφορικά με το σφάλμα τύπου II να αποδεχθούμε ότι η χρονολογική σειρά ακολουθεί το υπόδειγμα τυχαίου περιπάτου με σφάλματα ασυσχέτιστα. Κατόπιν, στο τέταρτο τμήμα της μελέτης αυτής εξετάζουμε τις συνέπειες που έχουμε όταν στη διενέργεια προβλέψεων χρησιμοποιούμε το πρότυπο του τυχαίου περιπάτου με σφάλματα ασυσχέτιστα, ενώ στην πραγματικότητα τα σφάλματα ακολουθούν το AR(1). Ως κριτήριο μελέτης των συνεπειών αυτών επιλέξαμε την πραγματική πιθανότητα το διάστημα πρόβλεψης να περιλαμβάνει την πραγματική τιμή της σειράς, την οποία και εκτιμάμε μέσω προσομοιώσεων. Τέλος, το πέμπτο τμήμα παρουσιάζουμε συνοπτικά τα βασικά συμπεράσματα της μελέτης.

**Διάγραμμα 1:** Συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης των καταλοίπων του εκτιμηθέντος υποδείγματος  $\Delta y_t = \alpha + \varepsilon_t$ , χρησιμοποιώντας τις ετήσιες εκπομπές θείου της Ουγγαρίας για την περίοδο 1891-1990



## 2. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

Οι Ahn *et al.* (2001) αναλύουν τις ιδιότητες του ελέγχου μοναδιαίας ρίζας τόσο ασυμπτωτικά όσο και για πεπερασμένου μεγέθους δείγματα, όταν τα σφάλματα υπακούουν σε κάποιο σταθερό νόμο. Θεωρούν ένα αριθμό τεστ ελέγχου (όπως αυτά των Dickey Fuller και Lagrange Multiplier) όταν η διαδικασία δημιουργίας των δεδομένων είναι ένας τυχαίος περίπατος χωρίς περιπλάνηση και το υπόδειγμα παλινδρόμησης αντιπροσωπεύσει πλήρως την διαδικασία δημιουργίας της υπό εξέταση σειράς.

Οι Gallegari *et al.* (2003) σε μια παρόμοια ανάλυση, χαρακτηρίζουν ως περιορισμένη τόσο την συμπεριφορά των εκτιμητών της μεθόδου OLS όσο και τα κριτήρια ελέγχου Dickey-Fuller (DF) υπό το πρίσμα της διαδικασίας δημιουργίας των δεδομένων που λαμβάνεται υπόψη στην βιβλιογραφία των ελέγχων μοναδιαίας ρίζας (τυχαίος περίπατος με ή χωρίς περιπλάνηση και τα αντίστοιχα υποδείγματα παλινδρόμησης, χωρίς αιτιοκρατική συνιστώσα (deterministic component) και με σταθερά και τάση). Επίσης ερευνούν τις συνέπειες της τοπικά πεπερασμένης ανάλυσης διακύμανσης συμπεραίνοντας ότι οι συνέπειες λανθασμένης απόφασης που λαμβάνεται από την εφαρμογή του κριτηρίου ελέγχου DF σαν το σημείο εκκίνησης από τον στερεότυπο καθορισμό της πεπερασμένης διακύμανσης τείνει να μειώνεται καθώς το μέγεθος του δείγματος τείνει στο άπειρο.

Οι Leybourne και Newbold (1999) χρησιμοποιώντας απλούς θεωρητικούς υπολογισμούς επιβεβαιώνουν τις ενδείξεις των προσομοιώσεων ότι οι πιθανότητες απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης των ελέγχων Dickey Fuller και Phillips-Perron διαφέρει ουσιαστικά όταν η διαδικασία δημιουργίας της υπό εξέταση σειράς είναι το στάσιμο δεύτερου βαθμού αυτοπαλίνδρομο σχήμα. Από την άλλη πλευρά, οι Halkos και Kevork (2003), αξιολογώντας εναλλακτικές μεθοδολογίες ελέγχου μοναδιαίας ρίζας, προτείνουν τη χρησιμοποίηση του απλού ελέγχου DF μέσω του λόγου F καθώς αυτός επιτυγχάνει α) πραγματικό (actual) σφάλμα τύπου I πολύ κοντά στο ονομαστικό (nominal) όταν το πληθυσμιακό υπόδειγμα είναι



πράγματι τυχαίος περίπατος, και β) δύναμη κριτηρίου (power of test) πολύ κοντά στη μονάδα για τιμές του  $\gamma$  στο διάστημα  $(-2,0)$ , όταν το μέγεθος του δείγματος δεν είναι πολύ μικρό.

Ο Sanchez (2003) αναλύει την σχέση μεταξύ των σφαλμάτων πρόβλεψης μιας ερμηνευτικής μεταβλητής, τα οποία υποθέτουν την ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας καθώς και αποτελεσματικό εντοπισμό μιας τέτοιας ρίζας. Οι Dickey and Fuller (1979) στήριξαν την ανάλυση στις ασυμπτωτικές ιδιότητες των εκτιμητών OLS. Σημαντικές διαφοροποιήσεις των ελέγχων DF παρατηρούνται όταν η χρησιμοποίησή τους επεκτείνεται και σε άλλες μεθόδους εκτίμησης όπως αυτές της Μεγίστης Πιθανοφάνειας (Shin and Lee, 2000. Shin and Fuller, 1998), των Γενικευμένων Ελαχίστων Τετραγώνων απαλλαγμένων από την τάση κάτω από μια σταθερή τοπική εναλλακτική υπόθεση (Elliot *et al.*, 1996. Xiao and Phillips, 1998) και του σταθμισμένου συμμετρικού εκτιμητή (weighted symmetric estimator, Park and Fuller, 1995. Fuller, 1996). Οι Hassler και Wolters (1994) ισχυρίζονται ότι ο Επαυξημένος Έλεγχος DF (Augmented Dickey Fuller, ADF) συγκρινόμενος με κλασματικές εναλλακτικές χάνει σημαντική δύναμη όταν οι επαυξημένοι όροι προστίθενται. Από την άλλη πλευρά, ο Krämer (1998) βρίσκει ότι ο έλεγχος ADF είναι συνεπής αν ο βαθμός του αυτοπαλίνδρομου σχήματος δεν τείνει στο άπειρο με γρήγορο ρυθμό. Οι Bisaglia και Procidano (2002), χρησιμοποιώντας προσομοιώσεις Monte Carlo, επεξηγούν αυτή την αντίθεση και βρίσκουν ότι το ADF με την μέθοδο bootstrap λειτουργεί γενικά καλύτερα από το συνηθισμένο ADF ακόμα και όταν η δύναμη κριτηρίου του ελέγχου είναι τελείως χαμηλή, ειδικά όταν η διαδικασία δημιουργίας της υπό εξέταση σειράς είναι μια μη στάσιμη κλασματικά ολοκληρώσιμη.

Ο Perron (1989) ισχυρίζεται ότι η απόδοση των ελέγχων ADF και PP δεν είναι ικανοποιητική όταν υπάρχει ασυνέχεια στην αιτιοκρατική συνάρτηση τάσης. Αυτός εξάγει την ασυμπτωτική κατανομή του κριτηρίου ελέγχου ερμηνεύοντας με τον τρόπο αυτό την ύπαρξη μιας ασυνεχούς τάσης (broken trend). Η μέθοδος του Perron έχει δεχθεί κριτικές

καθώς το σημείο ασυνέχειας βασίζεται σε μια πριν τον έλεγχο εξέταση των δεδομένων. Χρησιμοποιώντας αρχική (prior) πληροφόρηση για την εύρεση του σημείου ασυνέχειας, ο Perron υπερτονίζει την πιθανοφάνεια της εναλλακτικής υπόθεσης για μια ασυνεχή τάση. Οι Zivot και Andrews (1992) ανέπτυξαν μεθόδους για ενδογενή εντοπισμό ενός σημείου ασυνέχειας καθώς και τον έλεγχο για μοναδιαία ρίζα, όταν η διαδικασία έχει ασυνεχή τάση.

Οι Perron και Vogelsang (1992) και Banerjee *et al.* (1992) μεταξύ άλλων πραγματοποίησαν ελέγχους για τυχαίο περίπατο με άγνωστα σημεία ασυνέχειας χρησιμοποιώντας παρόμοιες μεθόδους για εντοπισμό των σημείων αυτών. Για μια πιο λεπτομερή περιγραφή της διαδικασίας ελέγχου διαρθρωτικών αλλαγών και μη-γραμμικότητας στις αποδόσεις μετοχών ή και άλλης μορφής δεδομένων, συνιστάται στον αναγνώστη να συμβουλευθεί τις εργασίες των Kim και Kon (1999) και Bidarkota (2000). Ο Vogelsang και Perron (1998) χρησιμοποιώντας προσομοιώσεις Monte Carlo διαπίστωσαν ότι η δύναμη κριτηρίου ενός ελέγχου μοναδιαίας ρίζας με ασυνέχεια βρίσκεται μεταξύ 60-90%, το οποίο διάστημα είναι μεγαλύτερο συγκρινόμενο με τους παραδοσιακούς ελέγχους τυχαίου περιπάτου χωρίς ασυνέχεια (βλέπε Chaudhuri και Wu, 2003, σελ. 581).

Άλλο ένα μειονέκτημα των ελέγχων ADF και PP είναι ότι για σχετικά μικρά δείγματα έχουν πολύ χαμηλή δύναμη κριτηρίου ενάντια αργών μηχανισμών επαναφοράς στο μέσο επίπεδο της σειράς. Αυτό υπονοεί ότι η μη απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης δεν μπορεί να θεωρηθεί ως ισχυρή απόδειξη ενάντια στον μηχανισμό επαναφοράς στο μέσο (Chaudhuri και Wu, 2003). Οι Spilimbergo και Vambakidis (2003) μέσω των προσομοιώσεων Monte Carlo έδειξαν ότι το ποσοστό απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης στον έλεγχο μοναδιαίας ρίζας σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 5% είναι κάτω από 6% όταν η εναλλακτική του  $\alpha$ ,  $\phi = 0,96$ , είναι αληθινή. Στην ίδια μελέτη, ερευνάται η στασιμότητα στα στοιχεία με τη χρησιμοποίηση ενός ελέγχου που προτείνεται από τους Levin και Lin (1993) στα πλαίσια των δυναμικών διαστρωματικών στοιχείων (panel data), και στον οποίο η μηδενική υπόθεση

αναφέρεται στην ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας. Τέλος, Οι Spilimbergo και Vambakidis έχουν αποκλείσει από τα δυναμικά διαστρωματικά στοιχεία τις χώρες για τις οποίες η ύπαρξη μοναδιαίας-ρίζας απορρίπτεται ήδη σε επίπεδο σημαντικότητας 5%.

### 3. ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ DICKEY-FULLER ΣΤΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΤΥΧΑΙΟΥ ΠΕΡΙΠΑΤΟΥ ΜΕ ΣΦΑΛΜΑΤΑ AR(1)

Το υπόδειγμα τυχαίου περιπάτου με περιπλάνηση, όταν τα σφάλματα ακολουθούν το αυτοπαλίνδρομο σχήμα πρώτου βαθμού εισάγεται ως

$$y_t = \mu + y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (7\alpha)$$

με

$$\varepsilon_t = \phi\varepsilon_{t-1} + v_t \quad (7\beta)$$

όπου  $v_t$  νέα ασυσχέτιστα μεταξύ τους σφάλματα. Για την περίοδο  $t-1$ , η (7α) μετά από πολλαπλασιασμό αμφοτέρων των μελών με  $\phi$  και την υστέρηση κατά μία χρονική περίοδο γράφεται ως

$$\phi y_{t-1} = \phi\mu + \phi y_{t-2} + \phi\varepsilon_{t-1} \quad (8)$$

Αφαιρώντας την (8) από την (7α) λαμβάνουμε

$$y_t - \phi y_{t-1} = \mu(1 - \phi) + y_{t-1} - \phi y_{t-2} + \varepsilon_t - \phi\varepsilon_{t-1}$$

ή

$$\Delta y_t = \alpha + \phi \Delta y_{t-1} + v_t \quad (9)$$

όπου  $\alpha = \mu(1 - \phi)$ . Η σχέση (9) παρουσιάζει για τις πρώτες διαφορές της σειράς ένα αυτοπαλίνδρομο σχήμα πρώτου βαθμού, δηλαδή ένα ARIMA (1,1,0), το οποίο επίσης προκύπτει από το μη περιοριστικό υπόδειγμα (4), που χρησιμοποιήθηκε στο επαυξημένο κριτήριο Dickey-Fuller, θέτοντας  $\beta = 0$  και  $\gamma = 0$ . Επομένως η μη απόρριψη της  $H_0: \beta = 0, \gamma = 0$ , οδηγεί σε ARIMA (1,1,0), το οποίο με τη σειρά του μπορεί να προκύψει και από ένα

υπόδειγμα τυχαίου περιπάτου με περιπλάνηση και με σφάλματα τα οποία ακολουθούν το AR(1).

Θεωρώντας λοιπόν ότι η χρονολογική σειρά ακολουθεί το υπόδειγμα (7), θα ήταν ενδιαφέρον να προσδιορίσουμε το σφάλμα τύπου II του απλού και του επαυξημένου ελέγχου Dickey-Fuller ότι μια σειρά ακολουθεί το υπόδειγμα τυχαίου περιπάτου με περιπλάνηση και με σφάλματα που είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους. Δηλαδή, να προσδιορίσουμε την πιθανότητα αποδοχής της μηδενικής υπόθεσης του τυχαίου περιπάτου με σφάλματα ασυσχέτιστα, όταν η χρονολογική σειρά ακολουθεί πραγματικά τυχαίο περίπατο αλλά με σφάλματα αυτοσυσχετιζόμενα κατά AR(1).

Στο υπόλοιπο λοιπόν του τμήματος αυτού παρουσιάζονται οι εκτιμήσεις της παραπάνω πιθανότητας αποδοχής της συγκεκριμένης μηδενικής υπόθεσης, όπως αυτές προέκυψαν από 200 σειρές προσομοιώσεων από το πληθυσμιακό υπόδειγμα

$$y_t = 4 + y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = 0.40\varepsilon_{t-1} + v_t \quad (10)$$

με  $y_0 = 80$ ,  $\sigma_\varepsilon = \sigma_v = 30$ , και  $\varepsilon_0$  να επιλέγεται τυχαία από τη κανονική κατανομή με μέσο μηδέν και διακύμανση  $\sigma_\varepsilon^2 / (1 - \phi^2)$ . Η επιλογή των τιμών των παραπάνω παραμέτρων για την εκκίνηση των πειραμάτων προσομοίωσης βασίστηκε στις εκτιμήσεις μέσω της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων των υποδειγμάτων (7α) και (7β), χρησιμοποιώντας τις ετήσιες εκπομπές θείου της Ουγγαρίας για την περίοδο 1891-1990.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειωθεί ότι για τη διενέργεια των πειραμάτων προσομοίωσης χρησιμοποιήθηκε η γεννήτρια τυχαίων αριθμών

$$X_{t+1} = \alpha X_t + (\text{mod } m)$$

με  $\alpha = 16807$  και  $m = 2^{31} - 1 = 2147483647$ . Με τις συγκεκριμένες τιμές του  $\alpha$  και του  $m$ , η μέγιστη περίοδος της γεννήτριας αυτής είναι  $2^{31}$  (Law and Kelton, 1982). Υποδιαιρώντας τη συνολική περίοδο σε μη επικαλυπτόμενα τμήματα των 500000 παρατηρήσεων (βλ. Kevork, 1990) εξασφαλίζονται δυο επιθυμητές ιδιότητες στη διαδικασία παραγωγής τυχαίων αριθμών:

α) οι ίδιοι τυχαίοι αριθμοί δεν χρησιμοποιούνται σε διαφορετικές σειρές προσομοίωσης, και β) το μήκος του κάθε τμήματος είναι αρκούντως μεγάλο. Επιπλέον η αποθήκευση της πρώτης τιμής του κάθε τμήματος (τιμή εκκίνησης της παραγωγής τυχαίων αριθμών) εξασφαλίζει την αναπαραγωγή πάντα της ίδιας σειράς τυχαίων αριθμών. Οι Halkos & Kevork (2003) διαιρώντας τις πρώτες 500 παρατηρήσεις διακοσίων τμημάτων [τα οποία επιλέχθηκαν από τα 1436 προτεινόμενα τμήματα του Kevork (1990)] με τη μέγιστη περίοδο παρήγαγαν τυχαίους αριθμούς από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $[0,1]$ . Η χρησιμοποίηση κατόπιν της παραδοσιακής μεθόδου των Box & Muller (1958) έδωσε αντίστοιχα, για κάθε ένα από τα 200 τμήματα, 500 τυχαίους αριθμούς από την τυποποιημένη κανονική κατανομή  $N(0,1)$ . Ας σημειωθεί τέλος ότι σε κάθε ένα από τα διακόσια αυτά τμήματα οι 500 παρατηρήσεις πέρασαν τους ελέγχους α) Box-Ljung στις πρώτες 36 υστερήσεις για αυτοσυσχέτιση σε  $\alpha=1\%$ , β) σταθερής διακύμανσης μέσω της γραφικής μεθόδου, και γ) Bera-Jarque για κανονικότητα.

Για την εκτίμηση του σφάλματος τύπου II, όπως αυτό ορίστηκε παραπάνω, προσαρμόστηκε σε κάθε μια από τις 200 σειρές προσομοίωσης, βάσει της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων, το μη περιοριστικό υπόδειγμα (1) για διαφορετικά μεγέθη δείγματος  $n = 50, 100, 150$  και  $200$  παρατηρήσεων. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας το κριτήριο Durbin-Watson (DW) ελέγχθηκε σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας  $\alpha=1\%$  εάν τα σφάλματα του υποδείγματος αυτού είναι ασυσχέτιστα. Στον Πίνακα 3 δίνονται τα ποσοστά των σειρών προσομοίωσης όπου η τιμή του DW έπεφτε αντίστοιχα στις περιοχές θετικής αυτοσυσχέτισης, αβεβαιότητας, και μη αυτοσυσχέτισης για τα τέσσερα διαφορετικά μεγέθη δείγματος. Όπως παρατηρούμε σε μικρά μεγέθη δείγματος η πιθανότητα να προχωρήσουμε στην εφαρμογή του απλού ελέγχου Dickey-Fuller (DF) είναι σημαντική (για  $n = 50$  η εκτιμηθείσα αυτή πιθανότητα είναι 28.5%). Αντίθετα σε μεγάλα δείγματα, το DW σε όλες τις σειρές προσομοίωσης έπεφτε στην περιοχή της θετικής αυτοσυσχέτισης, γεγονός που μας

οδηγεί στην εφαρμογή του επαυξημένου κριτηρίου ελέγχου Dickey-Fuller (ADF). Για  $n = 50$ , και για εκείνες τις σειρές όπου το DW έπεφτε στην περιοχή είτε της αβεβαιότητας είτε της μη αυτοσυσχέτισης εκτιμήθηκε και το περιοριστικό υπόδειγμα (2) και εφαρμόστηκε ο απλός έλεγχος DF. Στο 89% αυτών των σειρών δεν μπορούσαμε να απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση του τυχαίου περιπάτου με περιπλάνηση και σφάλματα ασυσχέτιστα.

**Πίνακας 3:** Εκτιμηθείσες πιθανότητες χρησιμοποίησης του απλού κριτηρίου ελέγχου Dickey-Fuller (DF) αντί του αντίστοιχου επαυξημένου (ADF) όταν το πληθυσμιακό υπόδειγμα είναι τυχαίος περίπατος με περιπλάνηση και σφάλματα που ακολουθούν το AR(1)

Μέγεθος Δείγματος	Χρησιμοποίηση (DF)*	Αβεβαιότητα**	Χρησιμοποίηση (ADF)***
50	0.285	0.215	0.50
100	0.015	0.040	0.945
150			1
200			1

\* Το DW της (1) πέφτει στην περιοχή μη αυτοσυσχέτισης σε  $\alpha=1\%$

\*\* Το DW της (1) πέφτει στην αβέβαιη περιοχή σε  $\alpha=1\%$

\*\*\* Το DW της (1) πέφτει στην περιοχή θετικής αυτοσυσχέτισης σε  $\alpha=1\%$

Στην αντίθετη περίπτωση όπου το DW της (1) έπεφτε είτε στην περιοχή της θετικής αυτοσυσχέτισης είτε στην περιοχή της αβεβαιότητας εκτιμήθηκε το υπόδειγμα (4), και επανελέγχτηκε μέσω των νέων τιμών DW εάν τα σφάλματα του υποδείγματος (4) ήταν ασυσχέτιστα. Για όλα τα μεγέθη δείγματος και για όλες τις εξετασθείσες σειρές προσομοίωσης παρατηρήθηκε ότι το DW έπεφτε στην περιοχή της μη αυτοσυσχέτισης, γεγονός που μας επέτρεψε να μην επεκταθούμε στην εφαρμογή του κριτηρίου ελέγχου ADF εισάγοντας περισσότερες υστερήσεις στις πρώτες διαφορές των τιμών της σειράς ως ερμηνευτικές μεταβλητές στο υπόδειγμα (4). Στον Πίνακα 4, και για τις εξετασθείσες σειρές προσομοίωσης δίνονται οι εκτιμηθείσες πιθανότητες μη απόρριψης της  $H_0: \beta=0, \gamma=0$  όταν το πληθυσμιακό υπόδειγμα είναι αυτό του τυχαίου περιπάτου με περιπλάνηση και σφάλματα που να ακολουθούν το AR(1). Όπως παρατηρείται σε ονομαστικό επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 1%, οι εκτιμηθείσες αυτές πιθανότητες είναι πάρα πολύ κοντά στη μονάδα.

Με άλλα λόγια έχουμε πολύ υψηλή πιθανότητα να αποδεχθούμε το υπόδειγμα τυχαίου περιπάτου με περιπλάνηση και σφάλματα ασυσχέτιστα όταν πραγματικά τα σφάλματα στο υπόδειγμα αυτό ακολουθούν το AR(1).

**Πίνακας 4:** Εκτιμηθέν σφάλμα τύπου II για το ADF όταν το πληθυσμιακό υπόδειγμα είναι τυχαίος περίπατος με περιπλάνηση και σφάλματα που ακολουθούν το AR(1)

Μέγεθος Δείγματος	Αριθμός εξετασθέντων σειρών προσομοίωσης	$\alpha = 10\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$
50	143	0.895	0.951	0.993
100	197	0.883	0.949	0.995
150	200	0.895	0.945	0.995
200	200	0.915	0.945	0.995

#### 4. ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΣΤΗ ΔΙΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΡΟΒΛΕΨΕΩΝ ΑΠΟ ΤΗ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΤΥΧΑΙΟΥ ΠΕΡΙΠΑΤΟΥ ΜΕ ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΑΣΥΣΧΕΤΙΣΤΑ

Η μέχρι τώρα ανάλυση στη μελέτη αυτή έχει δείξει ότι εάν μια χρονολογική σειρά ακολουθεί το υπόδειγμα τυχαίου περιπάτου με σφάλματα τα οποία να αυτοσυσχετίζονται σε όχι υψηλό βαθμό, όπως το υπόδειγμα (10), η εφαρμογή του απλού ή του επαυξημένου κριτηρίου Dickey-Fuller (ανάλογα με τη τιμή του DW που λαμβάνεται από το αντίστοιχο μη περιοριστικό υπόδειγμα), μας οδηγεί με μεγάλη πιθανότητα στο να αποδεχθούμε ότι το πληθυσμιακό υπόδειγμα είναι μεν αυτό του τυχαίου περιπάτου αλλά με σφάλματα ασυσχέτιστα. Είναι ενδιαφέρον λοιπόν στη συνέχεια να μελετήσουμε τις συνέπειες που έχει η λανθασμένη χρησιμοποίηση του υποδείγματος του τυχαίου περιπάτου με σφάλματα ασυσχέτιστα στη διενέργεια προβλέψεων σε χρονολογικές σειρές που στην πραγματικότητα ακολουθούν το υπόδειγμα (10).

Είναι γνωστό (Pindyck and Rubinfeld, 1998) ότι όταν η προς μελέτη χρονολογική σειρά  $y_t$  ( $t = 1, 2, \dots, T$ ) ακολουθεί το υπόδειγμα του τυχαίου περιπάτου με περιπλάνηση και με σφάλματα ασυσχέτιστα, η πρόβλεψη καθώς και η διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης για την πραγματική τιμή της σειράς  $\ell$ - περιόδους μπροστά δίνονται αντίστοιχα από τις παρακάτω δυο σχέσεις:

$$\hat{y}_T(\ell) = E(y_{T+\ell} / y_T, y_{T-1}, \dots, y_1) = E(y_T + \ell\mu + \varepsilon_{T+\ell} + \varepsilon_{T+\ell-1} + \varepsilon_{T+\ell-2} + \dots + \varepsilon_{T+1}) = y_T + \ell\hat{\mu} \quad (11)$$

$$S_{\varepsilon(\ell)}^2 = V[y_T(\ell) - \hat{y}_T(\ell)] = \ell \cdot s_{\varepsilon}^2 \quad (12)$$

όπου  $\hat{\mu}$  και  $s_{\varepsilon}^2$  είναι οι εκτιμήσεις του όρου της περιπλάνησης και της διακύμανσης των σφαλμάτων, όπως αυτές λαμβάνονται μετά την εφαρμογή στο διαθέσιμο δείγμα των παρατηρήσεων της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων για το υπόδειγμα  $\Delta y_t = \mu + \varepsilon_t$ . Επομένως λαμβάνοντας  $\pm k$  τυπικές αποκλίσεις του σφαλματος πρόβλεψης εκατέρωθεν της προβλεπόμενης τιμής, το διάστημα εμπιστοσύνης για την πραγματική μελλοντική τιμή της χρονολογικής σειράς είναι  $\hat{y}_T(\ell) \pm k \cdot \sqrt{S[\hat{\varepsilon}(\ell)]}$ . Εάν  $k=2$  τότε το ονομαστικό επίπεδο εμπιστοσύνης που συνδέεται με το διάστημα αυτό είναι 95.44%, ενώ όταν  $k=3$  αυτό είναι 99.74%.

Λαμβάνοντας επομένως ως βάση αναφοράς το ονομαστικό επίπεδο εμπιστοσύνης, το κριτήριο μελέτης των συνεπειών της λανθασμένης χρησιμοποίησης του υποδείματος τυχαίου περιπάτου με περιπλάνηση και με σφάλματα ασυσχέτιστα μεταξύ τους ορίζουμε να είναι η πραγματική πιθανότητα το διάστημα εμπιστοσύνης της πρόβλεψης να περιέχει την μελλοντική τιμή της χρονολογικής σειράς. Ονομάζουμε δε την πιθανότητα αυτή πραγματικό επίπεδο εμπιστοσύνης του διαστήματος πρόβλεψης. Είναι σαφές ότι εκτιμώντας πρώτα την πιθανότητα αυτή, μπορούμε να υπολογίσουμε στη συνέχεια το μέγεθος της απόκλισης μεταξύ του πραγματικού και του ονομαστικού επιπέδου εμπιστοσύνης του διαστήματος πρόβλεψης, το οποίο μέγεθος από μόνο του φανερώνει την έκταση του όλου προβλήματος που μελετάμε.

Για την εκτίμηση του πραγματικού επιπέδου εμπιστοσύνης χρησιμοποιήσαμε τις 200 σειρές προσομοίωσης του υποδείματος (10), για διαφορετικά μεγέθη δείγματος  $n = 50, 100, 150, 200$ , και για διαφορετικές τιμές του  $\ell$ , το οποίο ορίστηκε ως το 10% του αντίστοιχου μεγέθους του δείγματος. Ειδικότερα, σε κάθε σειρά προσομοίωσης, για κάθε μέγεθος δείγματος, και για κάθε τιμή του  $\ell$  κατασκευάσαμε το διάστημα εμπιστοσύνης της



πρόβλεψης βάσει της μεθοδολογίας που δόθηκε παραπάνω και εξετάσαμε εάν το διάστημα αυτό περιείχε την πραγματική τιμή της χρονολογικής σειράς. Για κάθε περίπτωση, το πραγματικό επίπεδο εμπιστοσύνης, το οποίο εκτιμήθηκε ως το ποσοστό των διαστημάτων εμπιστοσύνης στο σύνολο των διακοσίων που περιείχαν τις αντίστοιχες πραγματικές μελλοντικές τιμές της χρονολογικής σειράς, δίνεται στον Πίνακα 5.

Όπως παρατηρείται, δοθέντος του αριθμού των τυπικών αποκλίσεων  $k$  του σφάλματος πρόβλεψης εκατέρωθεν της προβλεπόμενης τιμής, και του μεγέθους του δείγματος,  $n$ , το πραγματικό επίπεδο εμπιστοσύνης μειώνεται καθώς αυξάνεται ο αριθμός των  $\ell$ -περιόδων στο μέλλον όπου γίνεται η πρόβλεψη. Οι διαφοροποιήσεις όμως μεταξύ του ονομαστικού και του πραγματικού επιπέδου εμπιστοσύνης είναι πολύ πιο έντονες όταν χρησιμοποιούνται δυο τυπικές αποκλίσεις αντί για τρεις (η χρησιμοποίηση  $k = 2$  είναι πολύ συνηθισμένο γεγονός στη κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης). Ενδεικτικά δε αναφέρουμε ότι για  $k = 2$ , ακόμα και σε μέγεθος δείγματος 150 παρατηρήσεων, το οποίο είναι αρκετά μεγάλο, η διαφοροποίηση μεταξύ του πραγματικού και του ονομαστικού επιπέδου εμπιστοσύνης ξεπερνά το 10% όταν το  $\ell = 4$ . Βεβαίως μια τέτοια τιμή για το  $\ell$  είναι αρκετά μικρή όταν είμαστε στο στάδιο διενέργειας προβλέψεων έχοντας διαθέσιμο ένα δείγμα της τάξεως των 150 παρατηρήσεων. Αντίθετα, φαίνεται ότι τέτοιες διαφοροποιήσεις μεταξύ πραγματικού και ονομαστικού επιπέδου εμπιστοσύνης είναι μάλλον αμελητέες όταν χρησιμοποιούνται τρεις τυπικές αποκλίσεις του σφάλματος πρόβλεψης. Θα πρέπει όμως εδώ να σημειωθεί ότι το τμήμα το οποίο πληρώνεται για  $k=3$  είναι ένα αρκετά πλατύ διάστημα εμπιστοσύνης το οποίο και συνεπάγεται χαμηλής ποιότητας πληροφόρηση αναφορικά με το που θα κυμανθεί η πραγματική τιμή της σειράς στο μέλλον.

**Πίνακας 5:** Πραγματικά επίπεδα εμπιστοσύνης του διαστήματος πρόβλεψης για το υπόδειγμα τυχαίου περιπάτου με περιπλάνηση και με σφάλματα ασυσχέτιστα μεταξύ τους

$\ell$	k = 2				k = 2			
	n = 50	n = 100	n = 150	n = 200	n = 50	n = 100	n = 150	n = 200
1	0,95	0,96	0,97	0,93	0,995	0,995	0,995	1
2	0,915	0,91	0,905	0,915	0,99	0,99	0,985	0,99
3	0,88	0,86	0,895	0,905	0,97	0,97	0,975	0,985
4	0,845	0,845	0,84	0,89	0,97	0,975	0,965	0,975
5	0,845	0,855	0,86	0,905	0,97	0,97	0,955	0,985
6		0,83	0,835	0,87		0,965	0,965	0,975
7		0,845	0,835	0,885		0,945	0,95	0,975
8		0,825	0,8	0,85		0,935	0,94	0,96
9		0,815	0,785	0,835		0,94	0,935	0,97
10		0,805	0,795	0,815		0,94	0,935	0,955
11			0,8	0,795			0,945	0,955
12			0,82	0,78			0,93	0,96
13			0,82	0,785			0,935	0,945
14			0,805	0,78			0,945	0,955
15			0,815	0,78			0,945	0,95
16				0,76				0,94
17				0,77				0,945
18				0,795				0,955
19				0,795				0,95
20				0,8				0,94

## 5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στη μελέτη αυτή αποδεικνύουμε πρώτα ότι ένα υπόδειγμα τυχαίου περιπάτου με σφάλματα τα οποία να ακολουθούν το αυτοπαλίνδρομο σχήμα πρώτου βαθμού, AR(1), συμπεριφέρεται σαν ένα ARIMA (1,1,0). Το τελευταίο δε προκύπτει από το μη περιοριστικό υπόδειγμα του επαυξημένου ελέγχου Dickey-Fuller, με μία μόνο χρονική υστέρηση στις πρώτες διαφορές της σειράς ως ανεξάρτητη μεταβλητή, όταν ισχύει η μηδενική υπόθεση. Την συγκεκριμένη μεθοδολογία την επαληθεύουμε χρησιμοποιώντας τις ετήσιες εκπομπές θείου για την Ουγγαρία από το 1891 έως το 1990.

Στη συνέχεια δείχνουμε, με την βοήθεια προσομοιώσεων, ότι όταν το πληθυσμιακό υπόδειγμα (δηλαδή αυτό το οποίο παράγει τις τιμές της χρονολογικής σειράς) είναι αυτό του τυχαίου περιπάτου με σφάλματα τα οποία αυτοσυσχετίζονται σε μέτριο βαθμό, έχουμε υψηλό σφάλμα τύπου II, τόσο σε μικρά όσο και σε μεγάλα μεγέθη δείγματος. Αυτό εγκυμονεί τον κίνδυνο να αποδεχθούμε ότι το πληθυσμιακό υπόδειγμα είναι αυτό του τυχαίου περιπάτου αλλά με σφάλματα ασυσχέτιστα. Οι συνέπειες μιας τέτοιας λανθασμένης επιλογής είναι αρκετά σοβαρές στη διενέργεια προβλέψεων, όταν στη κατασκευή του διαστήματος πρόβλεψης για την πραγματική μελλοντική τιμή της σειράς χρησιμοποιούνται δυο τυπικές αποκλίσεις του σφάλματος πρόβλεψης εκατέρωθεν της προβλεπόμενης τιμής.

Ειδικότερα, σε μια τέτοια περίπτωση δείχνουμε ότι ακόμα και σε μεγάλα μεγέθη δείγματος η πραγματική πιθανότητα το διάστημα πρόβλεψης να περιλαμβάνει την αληθινή τιμή της σειράς είναι σημαντικά μικρότερη της αντίστοιχης ονομαστικής (95.44%) ακόμα και όταν η πρόβλεψη διενεργείται για σχετικά μικρό αριθμό μελλοντικών περιόδων μπροστά.

## References

- Ahn, S.K., Fotopoulos, S.B., and He, L. (2001). "Unit root tests with infinite variance errors". *Econometric Review*, 20, 461-483
- A.S.L. and Associates (1997). *Sulfur Emissions By Country And Year*, Report No: DE96014790, US Department of Energy, Washington DC.
- Banerjee, A., Lumsdaine, R., and Stock, J. (1992). "Recursive and sequential tests of the unit root and trend break hypothesis: Theory and international evidence". *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 271-287
- Bidarkota, P.V. (2000). "Asymmetries in the conditional mean dynamics of real GNP: Robust evidence". *Review of Economics and Statistics*, 82, 153-157
- Bisaglia L., and Procidano, I. (2002). "On the power of the Augmented Dickey-Fuller test against fractional alternatives bootstrap". *Economics Letters*, 77, 343-347
- Box, G.E.P., and Muller, M.E. (1958). "A Note on the Generation of Random Normal Deviates". *Ann. Math. Statist.* 29: 610-611
- Chaudhuri, K. and Wu, Y. (2003). "Random walk versus breaking trend in stock prices: Evidence from emerging markets". *Journal of Banking and Finance*, 27, 575-592
- Dickey, D.A., and Fuller, W.A. (1979). "Distribution of the Estimators for Autoregressive Time-Series with Unit Root". *Journal of the American Statistical Association*, 74, 427-431
- Dickey, D.A., and Fuller, W.A. (1981). "Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a unit Root". *Econometrica*, 49, 1057-1072
- Elliot G., Rothenberg, T.J., and Stock, J.H. (1996). "Efficient tests for an autoregressive unit root". *Econometrica*, 64, 813-836
- Fuller, W.A. (1996). *Introduction to statistical Time Series*, 2<sup>nd</sup> edn, Wiley, New York
- Gallegari F., Cappuccio N., and Lubian D. (2003). "Asymptotic inference in time series regressions with a unit root and infinite variance errors". *Journal of Statistical Planning and Inference*, 116, 277-303
- Halkos G.E. and Kevork, I.S. (2003). *A comparison of alternative unit root tests*. Discussion Papers Series **0302**, Department of Economics University of Thessaly
- Hassler, U. and Wolters, J. (1994). "On the power of unit root test against fractional alternatives". *Economics Letters*, 45, 1-5
- Kevork, I.S. (1990). *Confidence Interval Methods for Discrete Event Computer Simulation: Theoretical Properties and Practical Recommendations*. Unpublished Ph.D. Thesis, University of London, London
- Kim, D. and Kon, S.J. (1999). "Structural change and time dependence in models of stock returns". *Journal of Empirical Finance*, 6, 283-308

- Krämer, W. (1998). "Fractional integration and the augmented Dickey Fuller test". *Economics Letters*, 61, 269-272
- Law, A.M., and Kelton, W.D. (1982). *Simulation Modelling and Analysis*. McGraw-Hill, New York
- Lepohn, A. S., D.H. Janja and Rudolf, B.H. (1999). "Estimating historical anthropogenic global sulfur emission patterns for the period 1860-1990", *Atmospheric Environment*, 33, 2435-2444
- Levin, A. and Lin, C.F. (1993). Unit root test in panel data: asymptotic and finite sample properties. University of California at San Diego, Discussion Paper 92/93
- Leybourne S., Newbold P. (1999). "The behaviour of Dickey Fuller and Phillips Perron under the alternative hypothesis". *Econometrics Journal*, 2(1), 92-106
- Perron, P. (1989). "The great crash, the oil price shock and the unit root hypothesis". *Econometrica*, 55, 277-302
- Perron P., and Vogelsang, T.J. (1992). "Nonstationary and level shifts with an application to purchasing power parity". *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 301-320.
- Pindyck, R.S., and Rubinfeld, D.L. (1998). *Econometric Models and Economic Forecasts*. 4<sup>th</sup> edn. McGraw-Hill International Editions
- Sanchez, I. (2003). "Efficient forecasting in nearly non-stationary processes". *Journal of Forecasting*, in preparation
- Shin D.W., and Lee, J.H. (2000). "Consistency of the maximum likelihood estimators for non-stationary ARMA regression with time trends". *Journal of Statistical Planning Inference*, 87, 55-68
- Skin D.W., and Fuller, W.A. (1998). "Unit root tests based on unconditional maximum likelihood estimation for the autoregressive moving average". *Journal of Time Series Analysis*, 19, 591-599
- Spilimbergo, A. and Vamvakidis, A. (2003). "Real effective exchange rate and the constant elasticity of substitution assumption". *Journal of International Economics*, 60, 337-354
- Vogelsang, T.J. and Perron, P. (1998). Additional tests for a unit root allowing for a break in the trend function at an unknown time. *International Economic Review*, 39, 1073-1100
- Xiao Z., and Phillips, P.C.B. (1998). "An ADF coefficient test for a unit root in ARMA models of unknown order with empirical applications to the US economy". *Econometric Journal*, 1, 27-43
- Zivot E., and Andrews, D.W.K. (1992). "Further evidence on the great crash, the oil-price shock, and the unit-root hypothesis". *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 251-270