# Using the asymptotic variance to estimate the stationary mean under autocorrelation

George, Halkos and Ilias, Kevork

University of Thessaly, Department of Economics

2004

# Using the asymptotic variance to estimate the stationary mean under autocorrelation

**George E. Halkos and Ilias S. Kevork**

**ABSTRACT**

In this study, using Monte Carlo simulations, we evaluate three alternative methods for constructing confidence intervals for the population mean in the case of a stationary first order autoregressive process, AR(1), with parameter $\phi$. Differentiating the three methodologies with respect to the way of estimating the asymptotic variance, we infer that in constructing confidence intervals we have to avoid the use of the observations of the time series under consideration for the estimation of the autovariance and the autocorrelation coefficients. Instead, it is preferable to identify the series according to Box-Jenkins and then use the asymptotic variance derived from the corresponding ARMA model after the substitution of the OLS parameter and error variance estimates. It is worth mentioning that using the asymptotic variance, for small samples and in the case of an AR(1) with positive $\phi$ values, the expected actual confidence levels are larger as compared to the corresponding nominal ones, indicating a potential area for future research.

**Keywords:** Asymptotic variance of the sample mean, confidence intervals, actual and nominal confidence levels, AR(1)

# Η ασυμπτωτική διακύμανση στην εκτίμηση του στάσιμου μέσου υπό συνθήκες αυτοσυσχέτισης

Ηλίας Σ. Κεβόρκ και Γεώργιος Ε. Χάλκος

**Περίληψη**

Στην μελέτη αυτή με την βοήθεια προσομοιώσεων αξιολογούμε τρεις εναλλακτικές μεθοδολογίες κατασκευής διαστημάτων εμπιστοσύνης για τον πληθυσμιακό μέσο στο στάσιμο αυτοπαλίνδρομο σχήμα, AR(1) με παράμετρο $\phi$. Διαφοροποιώντας τις τρεις μεθοδολογίες αναφορικά με τον τρόπο εκτίμησης της ασυμπτωτικής διακύμανσης, συμπεραίνουμε ότι στη κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης θα πρέπει να αποφεύγεται η διαδικασία χρήσης των τιμών της υπό εξέταση σειράς για την εκτίμηση της αυτοδιακύμανσης και των συντελεστών αυτοσυσχέτισης. Αντίθετα είναι προτιμότερο να γίνεται ταυτοποίηση της σειράς κατά Box-Jenkins, και η ασυμπτωτική διακύμανση του εξαγχθέντος ARMA να υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις ελαχίστων τετραγώνων της διακύμανσης των σφαλμάτων και των παραμέτρων του υποδείγματος. Σημειωτέον ότι για το AR(1), για μικρά δείγματα και θετικές τιμές του $\phi$, τα αναμενόμενα πραγματικά επίπεδα των διαστημάτων εμπιστοσύνης είναι μεγαλύτερα των αντίστοιχων ονομαστικών, αφήνοντας περιθώρια μελλοντικής ερευνητικής επέκτασης.

**Λέξεις Κλειδιά:** Ασυμπτωτική διακύμανση δειγματικού μέσου, διαστήματα εμπιστοσύνης, πραγματικά και ονομαστικά επίπεδα εμπιστοσύνης, αυτοπαλίνδρομο σχήμα πρώτου βαθμού AR(1)

## 1. Εισαγωγή

Η ανεξαρτησία των παρατηρήσεων σε ένα δείγμα αποτελεί βασική προϋπόθεση για την αξιοπιστία του διαστήματος εμπιστοσύνης για τον πληθυσμιακό μέσο. Σε πολλά όμως προβλήματα εκτίμησης του πληθυσμιακού μέσου, η παραπάνω προϋπόθεση δεν ισχύει. Ως αντιπροσωπευτικά παραδείγματα τέτοιων προβλημάτων αναφέρουμε δύο. Πρώτον, την εκτίμηση της μέσης καθυστέρησης των πελατών σε ένα σύστημα ουράς του οποίου τα χαρακτηριστικά δεν ταυτίζονται με αυτά των θεωρητικών υποδειγμάτων ουρών που είναι διαθέσιμα στη βιβλιογραφία. Και δεύτερον, τον προσδιορισμό του αποθέματος ασφαλείας σε συστήματα αποθεμάτων συνεχούς ή περιοδικής επιθεώρησης. Στην μεν πρώτη περίπτωση είναι λογικό να δεχθούμε ότι σε ένα δείγμα n συνεχόμενων πελατών η καθυστέρηση του κάθε πελάτη θα επηρεάσει τις καθυστερήσεις των επόμενων πελατών, ενώ στη δεύτερη περίπτωση δεν είναι ρεαλιστικό να ισχυριζόμαστε ότι η ζήτηση του προϊόντος σε μια περίοδο δεν εξαρτάται από τη ζήτηση των προηγούμενων περιόδων.

Έστω λοιπόν ότι είναι διαθέσιμο ένα δείγμα n συνεχόμενων στο χρόνο παρατηρήσεων από μια στάσιμη στη συνδιακύμανση (covariance stationary) χρονολογική σειρά $\{X_t$, t =1, 2, 3, …$\}$, με μέσο μ και διακύμανση $\gamma_o$. Για το δείγμα των n αυτών παρατηρήσεων αποδεικνύεται (Fishman, 1978) ότι η διακύμανση του μέσου αριθμητικού δίνεται ως

$$\mathrm{Var}\left(\overline{X}_n\right) = \frac{\sigma^2}{n} \tag{1}$$

Όπου
$$\sigma^2 = \gamma_o \left\{ 1 + 2\sum_{s=1}^{n-1} \left(1 - \frac{s}{n}\right)\rho_s \right\} \tag{2}$$

και $\rho_s$ ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης μεταξύ των $X_t$ και $X_{t+s}$ η τιμή του οποίου εξαρτάται μόνο από την απόσταση s και όχι από τις πραγματικές τιμές της σειράς στους χρόνους t και t+s.

Εναλλακτικές μέθοδοι εκτίμησης της (2) έχουν προταθεί στη διεθνή βιβλιογραφία στα πλαίσια της ανάλυσης των αποτελεσμάτων προσομοίωσης. Μεταξύ αυτών όμως, η έρευνα έχει κυρίως επικεντρωθεί στις μεθόδους λήψης σταθερού δείγματος χρησιμοποιώντας μια μόνο σειρά προσομοίωσης μεγάλου μήκους. Στη κατηγορία αυτή ανήκουν οι μέθοδοι των διαδοχικών μη επικαλυπτόμενων δειγματικών μέσων (Law & Kelton, 1991; Fishman, 1999), των διαδοχικών επικαλυπτόμενων δειγματικών μέσων (Song & Schmeiser, 1995), των τυποποιημένων χρονολογικών σειρών (Schruben, 1983). Επίσης ανήκουν η αναπαραγωγική μέθοδος (Crane & Iglehart, 1974a, b, c, 1975), η αυτοπαλίνδρομη μέθοδος (Fishman, 1978), και η φασματική (Fishman, 1973a, b; Duket & Pritsker, 1978; Law & Kelton, 1984; Heidelberger & Welch, 1981a, b). Το βασικό όμως μειονέκτημα των παραπάνω μεθόδων βρίσκεται στο στάδιο της εφαρμογής τους σε πραγματικά δεδομένα, όπου απαιτείται ο προσδιορισμός συγκεκριμένων τιμών, για τις παραμέτρους των οι οποίες δυστυχώς διαφοροποιούνται σημαντικά ανάλογα με τη μορφή και το βαθμό αυτοσυσχέτισης της πληθυσμιακής σειράς, με αποτέλεσμα να μην μπορούν να κατηγοριοποιηθούν εύκολα.

Οι Halkos & Kevork (2004), στην προσπάθεια αποφυγής της χρησιμοποίησης των παραπάνω μεθόδων, εξέτασαν τις επιπτώσεις που έχει η εφαρμογή της κλασικής μεθοδολογίας κατασκευής διαστημάτων εμπιστοσύνης για τον στάσιμο πληθυσμιακό μέσο μ (που ως γνωστό χρησιμοποιεί ως διακύμανση του δειγματικού μέσου τον λόγο $\gamma_o/n$) στο AR(1) και MA(1). Δυστυχώς τα αποτελέσματα δεν ήταν ενθαρρυντικά για το AR(1). Πιο συγκεκριμένα, παρατηρήθηκε ότι όταν η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης παίρνει μόνο θετικές τιμές και τείνει εκθετικά στο μηδέν, η πραγματική πιθανότητα το διάστημα εμπιστοσύνης της κλασικής μεθοδολογίας να περιέχει τον στάσιμο πληθυσμιακό μέσο μ μειώνεται με την αύξηση του δείγματος. Επιπλέον σε υψηλά επίπεδα αυτοσυσχέτισης και για μεγάλα δείγματα, η πιθανότητα αυτή σε ονομαστικό επίπεδο εμπιστοσύνης 95%, κυμαίνεται ακόμα και κάτω του 40%.

Για την απλοποίηση του συγκεκριμένου προβλήματος, πρόσφατα οι Brokwell & Davis (2002) συνιστούν, εφόσον το δείγμα που λαμβάνεται είναι μεγάλο, το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το στάσιμο πληθυσμιακό μέσο να κατασκευάζεται ως

$$\Pr\left[\overline{X}_n - 1.96\left(\frac{u}{n}\right)^{1/2} \le \mu \le \overline{X}_n + 1.96\left(\frac{u}{n}\right)^{1/2}\right] = 1 - \alpha \tag{3}$$

όπου u η ασυμπτωτική μορφή του $\sigma^2$ όταν το μέγεθος του δείγματος τείνει στο άπειρο, δηλαδή

$$u = \gamma_o\left\{1 + 2\sum_{s=1}^{\infty}\rho_s\right\} \tag{4}$$

Δύο όμως ερωτήματα προκύπτουν εδώ. Πρώτον, πόσο αξιόπιστο είναι το διάστημα εμπιστοσύνης που δίνεται από την σχέση (3), και δεύτερον πως θα εκτιμάται πρακτικά μια τέτοια ασυμπτωτική μορφή όπως είναι αυτή της u. Τις απαντήσεις στα παραπάνω δύο ερωτήματα τις δίνουμε στα πλαίσια της μελέτης αυτής, υποθέτοντας ότι οι παρατηρήσεις στο δείγμα προέρχονται από το αυτοπαλίνδρομο σχήμα πρώτου βαθμού AR(1). Ειδικότερα, στο επόμενο τμήμα εξάγουμε αναλυτικά το πραγματικό επίπεδο εμπιστοσύνης της (3), δηλαδή την πιθανότητα το συγκεκριμένο διάστημα εμπιστοσύνης να περιέχει τον στάσιμο πληθυσμιακό μέσο, μ, για διαφορετικά μεγέθη δείγματος και διαφορετικές μορφές και επίπεδα αυτοσυσχέτισης. Τα ενθαρρυντικά αποτελέσματα της ανάλυσης αυτής μας οδηγούν στο ίδιο τμήμα να προτείνουμε τρεις εναλλακτικές μεθοδολογίες υπολογισμού της u. Στο τρίτο τμήμα χρησιμοποιώντας προσομοιώσεις Monte Carlo αξιολογούμε τις τρεις μεθοδολογίες αναφορικά με τα πραγματικά επίπεδα εμπιστοσύνης τα οποία η κάθε μια επιτυγχάνει. Στο τέταρτο τμήμα ερμηνεύουμε τις αποκλίσεις των εκτιμηθέντων από προσομοιώσεις επιπέδων εμπιστοσύνης από τις αντίστοιχες τιμές που έχουν προκύψει μέσω μαθηματικής ανάλυσης, και τέλος στο πέμπτο τμήμα παρουσιάζουμε συνοπτικά τα βασικά συμπεράσματα της μελέτης αυτής.

## 2. ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ ΣΤΟ AR(1) ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΗΝ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ

Το AR(1) ορίζεται ως $X_t = \mu + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$, και είναι στάσιμο όταν $|\phi| < 1$. Τα τυχαία σφάλματα, $\varepsilon_t$, είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους και ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέσο μηδέν και σταθερή διακύμανση $\sigma_\varepsilon^2$. Για το υπόδειγμα αυτό αντικαθιστώντας τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισής του, $\rho_s = \varphi^s$, στην (4) λαμβάνουμε

$$u = \frac{1+\phi}{1-\phi}\gamma_o \tag{5}$$

Επιπλέον, σε πεπερασμένα δείγματα το $\sigma^2$ στο AR(1) προσδιορίζεται από τη σχέση (Kevork, 1990)

$$\sigma^2 = \gamma_o\left(\frac{1+\varphi}{1-\varphi} - \frac{2\varphi(1-\varphi^n)}{n(1-\varphi)^2}\right) \tag{6a}$$

ή εναλλακτικά

$$\sigma^2 = u\left\{1 - \frac{2\phi(1-\phi^n)}{n(1-\phi^2)}\right\} \tag{6b}$$

Από την τελευταία σχέση συνάγουμε ότι για κάθε $n \geq 2$ και $0 < \phi < 1$, η παράσταση μέσα στην αγκύλη της (6b) είναι μικρότερη της μονάδας. Αυτό σημαίνει ότι η χρησιμοποίηση της u υπερεκτιμά το $\sigma^2$, με αποτέλεσμα το πραγματικό επίπεδο εμπιστοσύνης του διαστήματος εμπιστοσύνης της (3) να είναι μεγαλύτερο του αντίστοιχου ονομαστικού. Αντίθετα, όταν $-1 < \phi < 0$ η χρησιμοποίηση της u έχει ως αποτέλεσμα να υποεκτιμούμε το πραγματικό δειγματοληπτικό σφάλμα του διαστήματος και αυτό με τη σειρά του μας οδηγεί στο να λαμβάνουμε πραγματικά επίπεδα εμπιστοσύνης μικρότερα των αντίστοιχων ονομαστικών.

Σε κάθε περίπτωση, το πραγματικό επίπεδο εμπιστοσύνης του διαστήματος εμπιστοσύνης της (3), σε ονομαστικό επίπεδο εμπιστοσύνης $1-\alpha_N$, ορίζεται ως

$$1-\alpha_A = \Pr\left\{-z_{\alpha_N/2} \le \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n-\mu\right)}{u^{1/2}} \le z_{\alpha_N/2}\right\}$$

Αλλά για το AR(1), η μεταβλητή $\sqrt{n}\left(\overline{X}_n-\mu\right)/u^{1/2}$ κατανέμεται κανονικά με μέσο μηδέν και διακύμανση την παράσταση εντός της παρένθεσης στη σχέση (6a). Επομένως $1-\alpha_A = 1-2\Phi(\cdot)$ όπου $\Phi(\cdot)$ η αθροιστική κατανομή της τυποποιημένης κανονικής κατανομής υπολογιζόμενη στη τιμή

$$-\frac{z_{\alpha_N/2}}{\left(1-\frac{2\phi\left(1-\phi^n\right)}{n\left(1-\phi^2\right)}\right)^{1/2}}$$

Στον πίνακα 1 παρουσιάζουμε για διαφορετικές τιμές των $\phi$ και n τα πραγματικά επίπεδα εμπιστοσύνης τα οποία επιτυγχάνουμε με τη χρησιμοποίηση του διαστήματος εμπιστοσύνης (3), σε $1-\alpha_N = 0.95$. Όπως παρατηρούμε στις περιπτώσεις που εξετάζουμε, οι αποκλίσεις μεταξύ ονομαστικών και πραγματικών επιπέδων εμπιστοσύνης δεν υπερβαίνει το 5%. Επομένως, η χρησιμοποίηση της u στο διάστημα εμπιστοσύνης για τον στάσιμο πληθυσμιακό μέσο, μ, μπορεί να θεωρηθεί ως επιτυχής ακόμα και σε μικρά δείγματα (π.χ. n=25). Το επόμενο λοιπόν ερώτημα που τίθεται είναι το πως στην πράξη θα εκτιμηθεί η u. Στο σημείο λοιπόν αυτό προτείνουμε τρεις εναλλακτικές μεθοδολογίες τις οποίες και θα αξιολογήσουμε μέσω προσομοιώσεων στο επόμενο τμήμα.

**$1^{\eta}$ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ($CIM_1$)**

Αυτή βασίζεται στην εκτιμήτρια της u από την σχέση $\hat{u}_1 = \hat{\gamma}_o \left\{1 + 2\sum_{s=1}^{h} \hat{\rho}_s\right\}$ όπου $\hat{\rho}_s = \hat{\gamma}_s / \hat{\gamma}_o$, $\hat{\gamma}_s = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-s}\left(X_{t+s} - \overline{X}_n\right)\left(X_t - \overline{X}_n\right)$, και h ≤ n/4 όπως προτείνεται από τους Box & Jenkins (1976).

**Πίνακας 1**

Πραγματικά επίπεδα εμπιστοσύνης με τη χρησιμοποίηση του u
στην κατασκευή του διαστήματος εμπιστοσύνης για πληθυσμιακό μέσο,
σε ονομαστικό επίπεδο εμπιστοσύνης 95%

| n | $\phi$ = -0.90 | $\phi$ = -0.50 | $\phi$ = -0.20 | $\phi$ = 0.20 | $\phi$ = 0.50 | $\phi$ = 0.90 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 0.9016 | 0.9438 | 0.9481 | 0.9519 | 0.9560 | 0.9851 |
| 50 | 0.9278 | 0.9469 | 0.9490 | 0.9510 | 0.9530 | 0.9704 |
| 100 | 0.9390 | 0.9485 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9606 |
| 200 | 0.9445 | 0.9492 | 0.9498 | 0.9502 | 0.9508 | 0.9554 |
| 400 | 0.9473 | 0.9496 | 0.9499 | 0.9501 | 0.9504 | 0.9527 |
| Infinity | 0.9500 | 0.9500 | 0.9500 | 0.9500 | 0.9500 | 0.9500 |

**$2^{\eta}$ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ($CIM_2$)**

Η εφαρμογή της μεθοδολογίας αυτής προϋποθέτει ότι η διαδικασία ταυτοποίησης κατά Box-Jenkins έχει δείξει ότι η διαθέσιμη χρονολογική σειρά προέρχεται από το στάσιμο AR(1). Βάσει της σχέσης (5) η u μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας α) την εκτίμηση της $\gamma_o$, όπως αυτή προκύπτει και στη μεθοδολογία $CIM_1$ χρησιμοποιώντας τις διαθέσιμες παρατηρήσεις της σειράς, και β) την εκτίμηση του $\phi$ που προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων στην παλινδρόμηση της $X_t$ πάνω στη $X_{t-1}$. Έτσι λοιπόν η εκτιμήτρια της u για τη μεθοδολογία αυτή θα είναι $\hat{u}_2 = \hat{\gamma}_o \left(1 + \hat{\phi}\right)/\left(1 - \hat{\phi}\right)$.

**$3^η$ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ($CIM_3$)**

Διαφοροποιείται έναντι της προηγούμενης μόνο στην εκτίμηση της αυτοδιακύμανσης $γ_o$. Αφού στο AR(1) ισχύει ότι $γ_o = σ_ε^2 / (1 - φ^2)$, η $γ_o$ εναλλακτικά μπορεί να εκτιμηθεί, χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις ελαχίστων τετραγώνων της διακύμανσης των καταλοίπων και του φ, όπως αυτές προκύπτουν από την παλινδρόμηση της $X_t$ πάνω στη $X_{t-1}$, και όχι τις διαθέσιμες παρατηρήσεις της χρονολογικής σειράς. Επομένως η υ εναλλακτικά μπορεί να εκτιμηθεί ως $\hat{u}_3 = \hat{σ}_ε^2 / (1 - \hat{φ})^2$.

**3. Η ΚΑΛΥΨΗ ΠΟΥ ΕΠΙΤΥΓΧΑΝΟΥΝ ΟΙ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ**

Θεωρώντας λοιπόν ότι η υπό εξέταση χρονολογική σειρά ακολουθεί το AR(1), στο τμήμα αυτό συγκρίνουμε και αξιολογούμε για διαφορετικούς συνδυασμούς τιμών των n και φ τα πραγματικά επίπεδα εμπιστοσύνης, τα οποία επιτυγχάνονται χρησιμοποιώντας τις τρεις προτεινόμενες εκτιμήτριες της υ στο διάστημα εμπιστοσύνης της (3). Δυστυχώς, σε πεπερασμένα μεγέθη δείγματος δεν είναι εφικτός ο ακριβής υπολογισμός των εν λόγω επιπέδων. Αντίθετα, η μόνη διέξοδος που υπάρχει είναι η εκτίμηση των υπό εξέταση πραγματικών επιπέδων εμπιστοσύνης μέσω προσομοιώσεων, την οποία και θα την ονομάσουμε 'Κάλυψη' (Coverage).

Ειδικότερα για τον υπολογισμό των καλύψεων χρησιμοποιήθηκαν 200 σειρές προσομοίωσης από το πληθυσμιακό υπόδειγμα $X_t = φX_{t-1} + ε_t$, με μ=0, και $σ_ε$ = 10. Για να διασφαλιστεί εξαρχής η στασιμότητα της σειράς η τιμή $ε_o$ παρήχθη τυχαία από τη κανονική κατανομή με μέσο μηδέν και διακύμανση $σ_ε^2 / (1 - φ^2)$. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειωθεί ότι για τη διενέργεια των πειραμάτων προσομοίωσης χρησιμοποιήθηκε η γεννήτρια τυχαίων αριθμών, $X_{t+1} = αX_t + \ (\mathrm{mod}\ m)$, με α = 16807 και m = $2^{31}$ – 1 = 2147483647. Για τις τιμές αυτές του α και m, η μέγιστη περίοδος της γεννήτριας είναι $2^{31}$ (Law and Kelton, 1982a,b). Ο

Kevork (1990) διαίρεσε τη μέγιστη περίοδο σε μη επικαλυπτόμενα τμήματα των 500000 παρατηρήσεων εξασφαλίζονται έτσι ότι αρχικά οι ίδιοι τυχαίοι αριθμοί δεν χρησιμοποιούνται σε διαφορετικές σειρές προσομοίωσης, και κατόπιν το μήκος κάθε τμήματος είναι αρκούντως μεγάλο. Επιπλέον αποθηκεύοντας την πρώτη τιμή κάθε τέτοιου τμήματος (τιμή εκκίνησης της παραγωγής τυχαίων αριθμών) εξασφάλισε την αναπαραγωγή πάντα της ίδιας σειράς τυχαίων αριθμών. Οι Halkos & Kevork (2003) διαιρώντας τις πρώτες 500 παρατηρήσεις διακοσίων τμημάτων (τα οποία επιλέχθηκαν από τα 1436 προτεινόμενα τμήματα του Kevork (1990)) με τη μέγιστη περίοδο παρήγαγαν τυχαίους αριθμούς από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0,1]. Η χρησιμοποίηση κατόπιν της παραδοσιακής μεθόδου των Box & Muller (1958) έδωσε αντίστοιχα, για κάθε ένα από τα 200 τμήματα, 500 τυχαίους αριθμούς από την τυποποιημένη κανονική κατανομή N(0,1). Ας σημειωθεί τέλος ότι σε κάθε ένα από τα διακόσια αυτά τμήματα οι 500 παρατηρήσεις πέρασαν τους ελέγχους α) Box-Ljung στις πρώτες 36 υστερήσεις για αυτοσυσχέτιση σε α=1%, β) σταθερής διακύμανσης μέσω της γραφικής μεθόδου, και γ) Bera-Jarque για κανονικότητα.

**$CIM_1$**

Το βασικό μειονέκτημα της μεθοδολογίας αυτής είναι η εμφάνιση αρνητικών τιμών για τη $\hat{u}_1$ γεγονός που δεν επιτρέπει τον υπολογισμό του διαστήματος εμπιστοσύνης της (3). Οι εκτιμηθείσες βάσει προσομοιώσεων πιθανότητες λήψης μιας τέτοιας αρνητικής τιμής για τη $\hat{u}_1$ δίνονται στον Πίνακα 2. Γενικά παρατηρούμε ότι για μεγάλα δείγματα η πιθανότητα αυτή αυξάνει καθώς το $\phi$ μετακινείται από το +1 στο –1. Ειδικότερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι σχετικώς χαμηλές τιμές για $\phi$=0.90, ενώ για $\phi$=-0.90 και n≥100 η πιθανότητα αυτή μπορεί και να υπερβαίνει το 35%.

**Πίνακας 2**

Πιθανότητα λήψης αρνητικής τιμής για τη $\hat{u}_1$

| n | φ = -0.90 | φ = -0.50 | φ = -0.20 | φ = 0.20 | φ = 0.50 | φ = 0.90 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 0.135 | 0.250 | 0.195 | 0.145 | 0.080 | 0.005 |
| 50 | 0.225 | 0.170 | 0.145 | 0.150 | 0.130 | 0.015 |
| 100 | 0.550 | 0.230 | 0.200 | 0.215 | 0.200 | 0.065 |
| 200 | 0.370 | 0.205 | 0.200 | 0.205 | 0.190 | 0.100 |
| 400 | 0.405 | 0.185 | 0.195 | 0.185 | 0.175 | 0.130 |

Στις σειρές προσομοίωσης για τις οποίες ελήφθη θετική τιμή για τη $\hat{u}_1$, υπολογίσαμε για κάθε συνδυασμό των n και φ, το ποσοστό εκείνων των σειρών οι οποίες περιείχαν τον αληθή στάσιμο πληθυσμιακό μέσο μ=0. Οι καλύψεις αυτές δίνονται στον Πίνακα 3. Η γενική παρατήρηση είναι ότι η συμπεριφορά της μεθοδολογίας αυτής είναι μάλλον απογοητευτική. Ειδικότερα για $0<\phi<1$, η κάλυψη είναι κατά πολύ μικρότερη του ονομαστικού επιπέδου εμπιστοσύνης 0.95, ακόμα και στην περίπτωση των μεγάλων δειγμάτων (π.χ. $n\geq100$). Επιπλέον η συμπεριφορά των καλύψεων αυτών δεν συμφωνεί με αυτή που αναμένετο βάσει των θεωρητικών αποτελεσμάτων του πίνακα 1, δηλαδή, οι πιθανότητες αυτές να είναι μεγαλύτερες και όχι μικρότερες του 0.95. Για την περίπτωση αρνητικών τιμών του φ όχι κοντά στο –1, και πάλι οι καλύψεις είναι μικρότερες από το 0.95. Το αποτέλεσμα όμως αυτό συμφωνεί με τα θεωρητικά αποτελέσματα του πίνακα 1. Η μόνη εξαίρεση αποδεκτών καλύψεων είναι για φ=-0.90, αλλά όπως τονίσθηκε προηγουμένως για την περίπτωση αυτή είναι αυξημένη η πιθανότητα λήψης αρνητικής τιμής της $\hat{u}_1$.

**Πίνακας 3**

Καλύψεις για τη $CIM_1$

| n | φ = -0.90 | φ = -0.50 | φ = -0.20 | φ = 0.20 | φ = 0.50 | φ = 0.90 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 0.965 | 0.853 | 0.801 | 0.778 | 0.707 | 0.523 |
| 50 | 0.961 | 0.867 | 0.854 | 0.859 | 0.828 | 0.690 |
| 100 | 0.911 | 0.786 | 0.763 | 0.777 | 0.781 | 0.695 |
| 200 | 0.937 | 0.824 | 0.750 | 0.774 | 0.765 | 0.744 |
| 400 | 0.908 | 0.773 | 0.839 | 0.840 | 0.824 | 0.799 |

## $CIM_2$

Και η μεθοδολογία αυτή έχει το μειονέκτημα, για τιμές του φ είτε πολύ κοντά στο –1 είτε πολύ κοντά στο +1, οι αντίστοιχες εκτιμήσεις ελαχίστων τετραγώνων να είναι αντίστοιχα μικρότερες του –1 και μεγαλύτερες του +1. Για τους συνδυασμούς των n και φ που εξετάσαμε, τέτοιες περιπτώσεις συναντήσαμε μόνο για φ=0.90, φ=–0.90 και n=25. Ειδικότερα για φ=0.90 και n=25 το ποσοστό των προσομοιώσεων με φ μεγαλύτερο του +1 ήταν μόνο 3%, ενώ για την περίπτωση φ=–0.90 και n=25 το ποσοστό προσομοιώσεων με φ μικρότερο του –1 ήταν μόλις 1%. Στον Πίνακα 4 παρουσιάζονται για διαφορετικούς συνδυασμούς των n και φ οι καλύψεις που πέτυχε η μεθοδολογία αυτή. Η συμπεριφορά της γενικά παρουσιάζεται πιο βελτιωμένη συγκρινόμενη με την προηγούμενη μεθοδολογία. Ειδικότερα για κάθε τιμή του φ που εξετάζεται, και για μεγάλα δείγματα (π.χ. n ≥100) οι καλύψεις της $CIM_2$ κυμαίνονται σε αποδεκτά επίπεδα κοντά στο 0.95. Μόνο για μικρά μεγέθη δείγματος και τιμές του φ πολύ κοντά είτε στο –1 είτε στο +1, οι καλύψεις είναι σαφώς μικρότερες από το ονομαστικό επίπεδο εμπιστοσύνης 0.95. Επιπλέον για φ θετικό, ενώ οι καλύψεις θα αναμένονταν μεγαλύτερες του 0.95, αντίθετα, όπως και στην $CIM_1$, είναι μικρότερες.

**Πίνακας 4**

Καλύψεις για τη $CIM_2$

| n | φ = -0.90 | φ = -0.50 | φ = -0.20 | φ = 0.20 | φ = 0.50 | φ = 0.90 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 0.869 | 0.930 | 0.955 | 0.950 | 0.925 | 0.856 |
| 50 | 0.930 | 0.950 | 0.955 | 0.960 | 0.955 | 0.900 |
| 100 | 0.935 | 0.935 | 0.940 | 0.960 | 0.960 | 0.920 |
| 200 | 0.950 | 0.945 | 0.950 | 0.955 | 0.965 | 0.940 |
| 400 | 0.965 | 0.975 | 0.975 | 0.980 | 0.970 | 0.935 |

**$CIM_3$**

Οι καλύψεις της μεθοδολογίας αυτής παρουσιάζονται στον Πίνακα 5. Για $0<\phi<1$, οι τιμές των καλύψεων είναι μεγαλύτερες της μονάδας, δηλαδή, συμπεριφέρονται όπως ακριβώς αναμένετο με βάση τα θεωρητικά αποτελέσματα του Πίνακα 1. Αποδεκτές καλύψεις λαμβάνονται και στην περίπτωση του αρνητικού $\phi$ όταν αυτό δεν είναι πολύ κοντά στην μονάδα, και το δείγμα δεν είναι πολύ μικρό.

**Πίνακας 5**

Καλύψεις για τη $CIM_3$

| n | $\phi$ = -0.90 | $\phi$ = -0.50 | $\phi$ = -0.20 | $\phi$ = 0.20 | $\phi$ = 0.50 | $\phi$ = 0.90 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 0.890 | 0.955 | 0.960 | 0.975 | 0.990 | 1 |
| 50 | 0.945 | 0.955 | 0.970 | 0.970 | 0.975 | 0.995 |
| 100 | 0.935 | 0.945 | 0.955 | 0.980 | 0.975 | 0.985 |
| 200 | 0.945 | 0.945 | 0.950 | 0.965 | 0.970 | 0.990 |
| 400 | 0.965 | 0.975 | 0.975 | 0.980 | 0.975 | 0.965 |

Από την παραπάνω ανάλυση διαφαίνεται ότι η τρίτη μεθοδολογία υπερέχει των άλλων δύο, καθώς οι καλύψεις που λαμβάνονται συμπεριφέρονται κατά τον ίδιο τρόπο όπως τα πραγματικά επίπεδα εμπιστοσύνης που προέκυψαν βάσει μαθηματικής ανάλυσης και παρουσιάσθηκαν στον Πίνακα 1. Παρόλα αυτά, παραμένει ενδιαφέρον να διερευνηθούν οι αιτίες μη ικανοποιητικής συμπεριφοράς των καλύψεων των δύο πρώτων μεθοδολογιών. Αυτό αναλύεται στο επόμενο τμήμα. Επιγραμματικά μπορούμε να πούμε ότι η μη αναμενόμενη συμπεριφορά των καλύψεων των δυο πρώτων μεθοδολογιών οφείλεται στις αναξιόπιστες εκτιμήσεις της αυτοδιακύμανσης και των συντελεστών αυτοσυσχέτισης. Κάτι τέτοιο βέβαια δεν συναντάται στην τρίτη μεθοδολογία, όπου η εκτίμηση της υ βασίζεται στις εκτιμήσεις των $\sigma_\varepsilon$ και $\phi$ όπως αυτές προκύπτουν από τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Αλλά αν και αυτή η μεθοδολογία έχει το πλεονέκτημα ότι οι καλύψεις είναι αποδεκτές σε κάποιες περιπτώσεις είναι μεγαλύτερες του ονομαστικού επιπέδου εμπιστοσύνης, κάτι το οποίο οδηγεί σε ακρίβεια μικρότερη αυτής που θα οδηγούσε σε ισότητα πραγματικών και ονομαστικών επιπέδων εμπιστοσύνης.

## 4. ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Στο τμήμα αυτό ερμηνεύουμε τη συμπεριφορά των τριών υπό εξέταση μεθοδολογιών, όπως αυτή προέκυψε μέσα από τα πειράματα προσομοίωσης και παρουσιάσθηκε στο προηγούμενο τμήμα. Η ερμηνεία αυτή βασίζεται στον έλεγχο της αξιοπιστίας α) των εναλλακτικών τρόπων εκτίμησης της αυτοδιακύμανσης, β) της διαδικασίας εκτίμησης των θεωρητικών συντελεστών αυτοσυσχέτισης $\rho_s$, και γ) των εκτιμήσεων ελαχίστων τετραγώνων της διακύμανσης των καταλοίπων, $\sigma_\varepsilon^2$, και του συντελεστή $\phi$.

*Α) ΜΕΡΟΛΗΨΙΑ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΑΥΤΟΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ*

Για τον υπολογισμό της ασυμπτωτικής διακύμανσης u χρησιμοποιήθηκαν δυο εναλλακτικές εκτιμήτριες της αυτοδιακύμανσης $\gamma_o$. Η πρώτη, συμβολιζόμενη ως $\hat{\gamma}_o^{(1,2)}$, βασίστηκε στις τιμές της κάθε σειράς προσομοίωσης και χρησιμοποιήθηκε στην πρώτη και δεύτερη μεθοδολογία. Η δεύτερη εκτιμήτρια, $\hat{\gamma}_o^{(3)}$, βασίστηκε στις εκτιμήσεις ελαχίστων τετραγώνων των $\sigma_\varepsilon^2$ και $\phi$ για κάθε σειρά προσομοίωσης και χρησιμοποιήθηκε στη τρίτη μεθοδολογία. Στον Πίνακα 6 δίνονται για κάθε εξεταζόμενο συνδυασμό των n και $\phi$ το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την εκάστοτε πραγματική τιμή (True Value, TV) της αυτοδιακύμανσης (η οποία δίνεται για κάθε περίπτωση στη γραμμή TV) όπως αυτό προέκυψε χρησιμοποιώντας αντίστοιχα τις παραπάνω δύο εκτιμήτριες της $\gamma_o$ και το δείγμα των 200 σειρών προσομοίωσης.

Για τιμές του $\phi$ κοντά στο +1, η εκτιμήτρια $\hat{\gamma}_o^{(1,2)}$ παράγει διαστήματα εμπιστοσύνης που δυστυχώς δεν περιέχουν την πραγματική τιμή της $\gamma_o$ ακόμα και στην περίπτωση των πολύ μεγάλων δειγμάτων (π.χ. n=400). Η ίδια παρατήρηση ισχύει για μικρά όμως δείγματα και στην περίπτωση όπου το φ παίρνει θετικές τιμές, όχι πολύ κοντά στο +1 (π.χ. φ=0.50 και n<100). Στις δύο αυτές περιπτώσεις παρατηρείται υποεκτίμηση της πραγματικής $\gamma_o$, το μέγεθος της οποίας λαμβάνει μεγάλες διαστάσεις για φ κοντά στη μονάδα και μικρό μέγεθος δείγματος. Από την άλλη πλευρά, για φ θετικό και κοντά στο μηδέν, ή για φ στο διάστημα (-1,0), όλα τα εξεταζόμενα διαστήματα εμπιστοσύνης από την χρησιμοποίηση της $\hat{\gamma}_o^{(1,2)}$ περιέχουν την αληθινή τιμή της $\gamma_o$. Αντίθετα, η χρησιμοποίηση της $\hat{\gamma}_o^{(3)}$ παράγει διαστήματα εμπιστοσύνης που περιέχουν την πραγματική $\gamma_o$ για όλους τους εξεταζόμενους συνδυασμούς των n και φ, εκτός της περίπτωσης όπου έχουμε μικρά μεγέθη δείγματος και τιμές του φ κοντά στο +1, και στην οποία παρατηρείται μεν υπερεκτίμηση της αυτοδιακύμανσης, αλλά η ακρίβεια του διαστήματος είναι πολύ μικρή.

**Πίνακας 6**

95% διαστήματα εμπιστοσύνης για την πραγματική τιμή της αυτοδιακύμανσης

| | | n = 25 | n = 50 | n = 100 | n = 200 | n = 400 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| φ=0.90 | $\hat{\gamma}_o^{(1,2)}$ | [95.1 , 103.6] | [329.5 , 382.8] | [415.7 , 462.6] | [462.6 , 499.5] | [492.7 , 522.2] |
| | $\hat{\gamma}_o^{(3)}$ | [575 , 1041] | [479.7 , 567.5] | [517.5 , 577.1] | [510.4 , 553.8] | [516.0 , 546.6] |
| | TV | *526.3* | | | | |
| φ=0.50 | $\hat{\gamma}_o^{(1,2)}$ | [110.8 , 122.7] | [118.9 , 127.5] | [125.8 , 131.7] | [129.1 , 133.4] | [131.8 , 133.4] |
| | $\hat{\gamma}_o^{(3)}$ | [132.0 , 147.0] | [127.9 , 137.1] | [131.2 , 137.5] | [131.7 , 136.2] | [131.4 , 134.7] |
| | TV | 133.3 | | | | |
| φ=0.20 | $\hat{\gamma}_o^{(1,2)}$ | [102.3 , 104.4] | [ 97.1 , 102.9] | [100.0 , 104.1] | [102.0 , 104.9] | [102.3 , 104.4] |
| | $\hat{\gamma}_o^{(3)}$ | [103.0 , 105.0] | [101.7 , 107.8] | [102.6 , 106.8] | [103.2 , 106.3] | [103.0 , 105.0] |
| | TV | *104.2* | | | | |
| φ=−0.20 | $\hat{\gamma}_o^{(1,2)}$ | [102.7 , 104.7] | [99.1 , 105.2] | [101.0 , 104.9] | [102.5 , 105.6] | [102.7 , 104.7] |
| | $\hat{\gamma}_o^{(3)}$ | [103.1 , 105,1] | [102.3 , 108.6] | [102.7 , 106.8] | [103.3 , 106.5] | [103.1 , 105.1] |
| | TV | *104.2* | | | | |
| φ=−0.50 | $\hat{\gamma}_o^{(1,2)}$ | [124.8 , 138.2] | [126.9 , 136.5] | [129.9 , 136.0] | [131.6 , 136.2] | [131.4 , 134.3] |
| | $\hat{\gamma}_o^{(3)}$ | [132.3 , 146.7] | [130.2 , 140.1] | [131.6 , 137.9] | [132.5 , 137.2] | [131.8 , 134.7] |
| | TV | *133.3* | | | | |
| φ=−0.90 | $\hat{\gamma}_o^{(1,2)}$ | [496.7 , 617.8] | [484.6 , 568.7] | [509.5 , 565.1] | [516.2 , 559.6] | [506.2 , 533.6] |
| | $\hat{\gamma}_o^{(3)}$ | [390.0 , 1658] | [503.8 , 616.8] | [519.5 , 580.4] | [518.4 , 562.6] | [507.5 , 535.0] |
| | TV | *526.3* | | | | |

*Β) ΜΕΡΟΛΗΨΙΑ ΕΚΤΙΜΗΣΕΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ*

Στον Πίνακα 7 παρουσιάζονται τα 95% διαστήματα εμπιστοσύνης για τις πραγματικές τιμές των συντελεστών αυτοσυσχέτισης $\rho_s$ (s=1, …,5), για κάθε συνδυασμό των εξεταζόμενων τιμών των n και ϕ. Για τιμές του ϕ κοντά στο ± 1, οι εκτιμηθέντες συντελεστές αυτοσυσχέτισης για όλα τα s είναι υποεκτιμημένοι ακόμα και σε μεγάλα μεγέθη δείγματος, καθώς τα διαστήματα εμπιστοσύνης όχι μόνο δεν περιέχουν τις αντίστοιχες πραγματικές τιμές αλλά και λαμβάνουν τιμές μικρότερες αυτών. Το ίδιο φαινόμενο παρατηρείται για χαμηλά s (π.χ. s=1,2), και για τις θετικές αλλά και για τις αρνητικές τιμές του ϕ όταν αυτές δεν βρίσκονται κοντά στο ±1. Η μόνη διαφορά που παρατηρείται εδώ είναι ότι για αρνητικά ϕ, υποεκτίμηση παρατηρείται μόνο για μικρά δείγματα. Αντίθετα όμως στις περιπτώσεις όπου το ϕ λαμβάνει είτε θετικές είτε αρνητικές τιμές κοντά στο μηδέν, τα διαστήματα εμπιστοσύνης περιέχουν τα πραγματικά $\rho_s$, ακόμα και σε μικρά μεγέθη δείγματος, για κάθε εξεταζόμενη τιμή του s.

*Γ) ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ ΤΩΝ $\sigma_\varepsilon^2$ ΚΑΙ $\phi$*

Κατ' αντιστοιχία των προηγούμενων δύο πινάκων, ο πίνακας 8 περιέχει τα 95% διαστήματα εμπιστοσύνης για την πραγματική τιμή του ϕ, και την πραγματική διακύμανση των σφαλμάτων $\sigma_\varepsilon^2$. Τα διαστήματα αυτά προέκυψαν από τις αντίστοιχες εκτιμήσεις ελαχίστων τετραγώνων, παλινδρομώντας τη $X_t$ στη $X_{t-1}$ χωρίς σταθερό όρο, και χρησιμοποιώντας και πάλι το δείγμα των 200 σειρών προσομοίωσης. Είναι εμφανές ότι στα αντίστοιχα μεγέθη δείγματος, η υποεκτίμηση του ϕ είναι σαφώς μικρότερη με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων συγκρινόμενη με την εκτίμησή του βάσει του $\rho_1$, καθώς για το AR(1) $\rho_1=\phi$, χρησιμοποιώντας τις τιμές της χρονολογικής σειράς. Αξιοσημείωτο είναι επίσης το γεγονός της αξιόπιστης εκτίμησης της διακύμανσης των σφαλμάτων, καθώς σε κάθε περίπτωση το διάστημα εμπιστοσύνης περιέχει την πραγματική τιμή αυτής που είναι, βάσει του σχεδιασμού της προσομοίωσης, ίση με 100.

Η παραπάνω ανάλυση ερμηνεύει πλήρως τις καλύψεις των τριών υπό εξέταση μεθοδολογιών που παρουσιάσθηκαν στους ανάλογους πίνακες. Ειδικότερα, για την $CIM_1$, σε θετικές τιμές του φ η ταυτόχρονη υποεκτίμηση τόσο της αυτοδιακύμανσης όσο και των συντελεστών αυτοσυσχέτισης οδηγεί αντίστοιχα σε τέτοιο μέγεθος υποεκτίμησης του αναμενόμενου δειγματοληπτικού σφάλματος ώστε οι λαμβανόμενες καλύψεις αντί να είναι μεγαλύτερες από το αντίστοιχο ονομαστικό επίπεδο εμπιστοσύνης, όπως και θα αναμένετο, εμφανίζονται να είναι μικρότερες. Αντίθετα για αρνητικό φ, το πρόβλημα επικεντρώνεται μόνο στην υποεκτίμηση των συντελεστών αυτοσυσχέτισης. Αλλά η άθροιση θετικών και αρνητικών εκτιμηθέντων συντελεστών αυτοσυσχέτισης οι οποίοι ως αρνητικοί κατά απόλυτη τιμή είναι μεγαλύτεροι των πραγματικών και ως θετικοί μικρότεροι οδηγεί σε μεγέθη του δειγματοληπτικού σφάλματος όπου άλλες φορές εμφανίζονται μεγαλύτερα και άλλες φορές μικρότερα των αναμενόμενων. Έτσι οι λαμβανόμενες καλύψεις δεν παρουσιάζουν συγκεκριμένο πρότυπο αλλά άλλες φορές είναι μεγαλύτερες και άλλες φορές μικρότερες των αντίστοιχων πραγματικών επιπέδων εμπιστοσύνης που παρουσιάσθηκαν στον πίνακα 1.

Αναφορικά με τη $CIM_2$, η υποεκτίμηση τόσο της αυτοδιακύμανσης όσο και του φ μέσω της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων οδηγεί και πάλι σε τέτοιο βαθμό υποεκτίμησης του δειγματοληπτικού σφάλματος ώστε για μικρά δείγματα και φ κοντά στη μονάδα, οι λαμβανόμενες καλύψεις να είναι μικρότερες του ονομαστικού επιπέδου εμπιστοσύνης. Βέβαια η σαφώς μικρότερη υποεκτίμηση του φ με την μέθοδο ελαχίστων τεραγώνων οδηγεί στις αντίστοιχες περιπτώσεις η $CIM_2$ να παρουσιάζει μεγαλύτερες καλύψεις από την $CIM_1$. Αντίθετα για φ αρνητικό η μικρή υποεκτίμηση του δειγματοληπτικού σφάλματος οφείλεται μόνο στην μικρή υποεκτίμηση του ίδιου του φ μέσω της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων (ενώ από τον πίνακα 6 φαίνεται ότι η εκτίμηση της αυτοδιακύμανσης είναι αξιόπιστη), και για το λόγο αυτό οι καλύψεις εμφανίζονται να είναι πολύ κοντά στα αντίστοιχα πραγματικά επίπεδα εμπιστοσύνης.

Τέλος η συνεπής συμπεριφορά των καλύψεων της $CIM_3$ ως προς τα πραγματικά επίπεδα εμπιστοσύνης του πίνακα 1 οφείλεται τόσο στις ελαφρώς υποεκτιμημένες έως και αξιόπιστες τιμές του φ ιδίως σε μεγάλα δείγματα, καθώς και στις ακριβείς τιμές της διακύμανσης των καταλοίπων όπως αυτές έχουν προκύψει από τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Επομένως καθίσταται σαφές ότι για την εκτίμηση της ασυμπτωτικής διακύμανσης u θα πρέπει να αποφεύγεται η χρήση των εκτιμήσεων της αυτοδιακύμανσης και των θεωρητικών συντελεστών αυτοσυσχέτισης όπως αυτές προκύπτουν με τη χρησιμοποίηση των τιμών της χρονολογικής σειράς. Εναλλακτικά μπορεί να εφαρμοσθεί η μεθοδολογία ταυτοποίησης κατά Box-Jenkins, και να χρησιμοποιηθούν στο τύπο της ασυμπτωτικής διακύμανσης οι αντίστοιχες εκτιμήσεις ελαχίστων τετραγώνων των παραμέτρων και της διακύμανσης των σφαλμάτων.

**Πίνακας 7**

95% διαστήματα εμπιστοσύνης για τις πραγματικές τιμές των συντελεστών αυτοσυσχέτισης

| | n | s = 1 | s = 2 | s = 3 | s = 4 | s = 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\phi$=0.90 | 25 | [0.651 , 0.697] | [0.401 , 0.467] | [0.225 , 0.294] | [0.105 , 0.171] | [0.015 , 0.076] |
| | 50 | [0.778 , 0.806] | [0.596 , 0.642] | [0.452 , 0.508] | [0.339 , 0.400] | [0.247 , 0.310] |
| | 100 | [0.844 , 0.860] | [0.708 , 0.737] | [0.589 , 0.628] | [0.491 , 0.536] | [0.407 , 0.456] |
| | 200 | [0.873 , 0.882] | [0.760 , 0.778] | [0.660 , 0.684] | [0.573 , 0.602] | [0.497 , 0.530] |
| | 400 | [0.888 , 0.893] | [0.787 , 0.798] | [0.698 , 0.713] | [0.618 , 0.637] | [0.547 , 0.570] |
| | TV | 0.90 | 0.81 | 0.729 | 0.6561 | 0.59049 |
| $\phi$=0.50 | 25 | [0.353 , 0.402] | [0.071 , 0.132] | [-0.048 , 0.014] | [-0.073,-0.020] | [-0.084,-0.032] |
| | 50 | [0.415 , 0.450] | [0.141 , 0.186] | [0.021 , 0.067] | [-0.022 , 0.023] | [-0.041 , 0.003] |
| | 100 | [0.462 , 0.484] | [0.201 , 0.234] | [0.067 , 0.102] | [0.014 , 0.048] | [-0.008 , 0.023] |
| | 200 | [0.478 , 0.493] | [0.222 , 0.244] | [0.092 , 0.115] | [0.034 , 0.057] | [0.006 , 0.027] |
| | 400 | [0.488 , 0.498] | [0.234 , 0.249] | [0.109 , 0.125] | [0.048 , 0.064] | [0.021 , 0.037] |
| | TV | 0.50 | 0.25 | 0.125 | 0.0625 | 0.03125 |
| $\phi$=0.20 | 25 | [0.102 , 0.151] | [-0.057,-0.004] | [-0.088,-0.031] | [-0.067,-0.018] | [-0.061,-0.013] |
| | 50 | [0.140 , 0.177] | [-0.025 , 0.014] | [-0.050,-0.011] | [-0.041,-0.003] | [-0.036 , 0.002] |
| | 100 | [0.172 , 0.195] | [0.016 , 0.044] | [-0.030,-0.001] | [-0.026 , 0.002] | [-0.021 , 0.005] |
| | 200 | [0.183 , 0.199] | [0.025 , 0.045] | [-0.014 , 0.005] | [-0.015 , 0.004] | [-0.014 , 0.004] |
| | 400 | [0.189 , 0.200] | [0.029 , 0.043] | [-0.003 , 0.011] | [-0.008 , 0.004] | [-0.004 , 0.009] |
| | TV | 0.20 | 0.04 | 0.008 | 0.0016 | 0.00032 |
| $\phi$=−0.20 | 25 | [-0.239,-0.191] | [-0.023 , 0.029] | [-0.072,-0.015] | [-0.042 , 0.011] | [-0.042 , 0.009] |
| | 50 | [-0.225,-0.188] | [-0.005 , 0.032] | [-0.045,-0.006] | [-0.027 , 0.012] | [-0.024 , 0.014] |
| | 100 | [-0.218,-0.194] | [0.028 , 0.055] | [-0.039,-0.012] | [-0.017 , 0.012] | [-0.017 , 0.010] |
| | 200 | [-0.212,-0.196] | [0.032 , 0.051] | [-0.027,-0.009] | [-0.010 , 0.010] | [-0.010 , 0.009] |
| | 400 | [-0.207,-0.197] | [-0.032 , 0.045] | [-0.016,-0.003] | [-0.008 , 0.004] | [-0.001 , 0.011] |
| | TV | -0.20 | 0.04 | -0.008 | 0.0016 | -0.00032 |
| $\phi$=−0.50 | 25 | [-0.495,-0.451] | [0.162 , 0.220] | [-0.150,-0.086] | [0.007 , 0.070] | [-0.064,-0.004] |
| | 50 | [-0.499,-0.465] | [0.190 , 0.232] | [-0.139,-0.094] | [0.022 , 0.069] | [-0.048,-0.004] |
| | 100 | [-0.508,-0.487] | [0.232 , 0.261] | [-0.148,-0.117] | [0.042 , 0.077] | [-0.049,-0.017] |
| | 200 | [-0.508,-0.493] | [0.240 , 0.260] | [-0.141,-0.120] | [0.049 , 0.074] | [-0.042,-0.018] |
| | 400 | [-0.504,-0.495] | [0.240 , 0.253] | [-0.130,-0.115] | [0.048 , 0.064] | [-0.031,-0.015] |
| | TV | -0.50 | 0.25 | -0.125 | 0.0625 | -0.03125 |
| $\phi$=−0.90 | 25 | [-0.835,-0.805] | [0.631 , 0.686] | [-0.577,-0.507] | [0.398 , 0.476] | [-0.405,-0.326] |
| | 50 | [-0.865,-0.846] | [0.708 , 0.743] | [-0.646,-0.601] | [0.505 , 0.557] | [-0.485,-0.428] |
| | 100 | [-0.888,-0.877] | [0.767 , 0.788] | [-0.700,-0.672] | [0.584 , 0.618] | [-0.549,-0.509] |
| | 200 | [-0.895,-0.887] | [0.784 , 0.800] | [-0.716,-0.694] | [0.611 , 0.639] | [-0.572,-0.539] |
| | 400 | [-0.897,-0.891] | [0.792 , 0.803] | [-0.719,-0.704] | [0.624 , 0.644] | [-0.576,-0.554] |
| | TV | -0.90 | 0.81 | -0.729 | 0.6561 | -0.59049 |

**Πίνακας 8**

95% διαστήματα εμπιστοσύνης για τις πραγματικές τιμές του $\hat{\phi}$ και $\sigma_\varepsilon^2$

| | | n = 25 | n = 50 | n = 100 | n = 200 | n = 400 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\phi$=0.90 | $\hat{\phi}$ | [0.823 , 0.860] | [0.852 , 0.874] | [0.881 , 0.895] | [0.888 , 0.897] | [0.895 , 0.900] |
| | $\sigma_\varepsilon^2$ | [95.03, 103.57] | [96.04, 101.64] | [97.74, 101.34] | [98.59, 101.47] | [98.68, 100.57] |
| $\phi$=0.50 | $\hat{\phi}$ | [0.434 , 0.485] | [0.454 , 0.487] | [0483 , 0.505] | [0.488 , 0.503] | [0.492 , 0.503] |
| | $\sigma_\varepsilon^2$ | [95.67, 104.34] | [96.19, 101.90] | [97.61, 101.40] | [98.67, 101.55] | [98.70, 100.59] |
| $\phi$=0.20 | $\hat{\phi}$ | [0.155 , 0.209] | [0.165 , 0.203] | [0.186 , 0.210] | [0.190 , 0.206] | [0.193 , 0.204] |
| | $\sigma_\varepsilon^2$ | [95.98, 104.57] | [96.22, 101.97] | [97.68, 101.48] | [98.71, 101.59] | [98.72, 100.61] |
| $\phi$=–0.20 | $\hat{\phi}$ | [-0.214,-0.160] | [-0.215,-0.177] | [-0.211,-0.187] | [-0.209,-0.193] | [-0.206,-0.195] |
| | $\sigma_\varepsilon^2$ | [96.00, 104.47] | [96.19, 101.96] | [97.67, 101.47] | [98.70, 101.59] | [98.73, 100.63] |
| $\phi$=–0.50 | $\hat{\phi}$ | [-0.492,-0.443] | [-0.500,-0.466] | [-0.508,-0.486] | [-0.508,-0.493] | [-0.504,-0.495] |
| | $\sigma_\varepsilon^2$ | [95.68, 104.43] | [96.19, 101.97] | [97.64, 101.43] | [98.68, 101.58] | [98.74, 100.64] |
| $\phi$=–0.90 | $\hat{\phi}$ | [-0.865,-0.834] | [-0.882,-0.863] | [-0.897,-0.886] | [-0.899,-0.890] | [-0.899,-0.893] |
| | $\sigma_\varepsilon^2$ | [95.10, 104.72] | [96.36, 102.11] | [97.71, 101.51] | [98.61, 101.50] | [98.69, 100.58] |

## 5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην μελέτη αυτή, χρησιμοποιώντας προσομοιώσεις Monte Carlo, αξιολογήσαμε στο στάσιμο αυτοπαλίνδρομο σχήμα, AR(1), τρεις εναλλακτικές μεθοδολογίες κατασκευής διαστημάτων εμπιστοσύνης για τον πληθυσμιακό μέσο. Οι τρεις μεθοδολογίες διαφοροποιήθηκαν μεταξύ τους ως προς το τρόπο εκτίμησης της ασυμπτωτικής διακύμανσης του δειγματικού μέσου όταν το μέγεθος του δείγματος τείνει στο άπειρο. Ειδικότερα, η πρώτη μεθοδολογία χρησιμοποιεί τις εκτιμήσεις της αυτοδιακύμανσης και των συντελεστών αυτοσυσχέτισης, όπως αυτές προκύπτουν από τις τιμές της υπό εξέταση σειράς. Επομένως για την χρησιμοποίησή της δεν χρειάζεται να ταυτοποιηθεί η σειρά κατά Box-Jenkins. Αντίθετα, η δεύτερη μεθοδολογία προϋποθέτει ότι η σειρά ακολουθεί το AR(1), και υπολογίζει την ασυμπτωτική διακύμανση του δειγματικού μέσου μέσω των θεωρητικών ιδιοτήτων του AR(1), εκτιμώντας την αυτοδιακύμανση από τις τιμές της σειράς και τον συντελεστή αυτοπαλινδρόμησης από τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Η τρίτη μεθοδολογία διαφοροποιείται έναντι της δεύτερης μόνο στο τρόπο εκτίμησης της αυτοδιακύμανσης όπου αντί των τιμών της σειράς χρησιμοποιούνται οι εκτιμήσεις ελαχίστων τετραγώνων της διακύμανσης των καταλοίπων και του αυτοπαλίνδρομου συντελεστή.

Το κίνητρο για την ανάπτυξη των παραπάνω τριών μεθοδολογιών απετέλεσε ο ακριβής υπολογισμός των πραγματικών επιπέδων εμπιστοσύνης (η πιθανότητα το διάστημα εμπιστοσύνης να περιέχει τον πραγματικό πληθυσμιακό μέσο) χρησιμοποιώντας την ασυμπτωτική διακύμανση του δειγματικού μέσου για την κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης. Στην περίπτωση όπου η παράμετρος $\phi$ του AR(1) έπαιρνε θετικές (αρνητικές) τιμές, τα πραγματικά αυτά επίπεδα εμπιστοσύνης ενώ βρέθηκαν μεγαλύτερα (μικρότερα) του αντίστοιχου ονομαστικού 95%, οι αποκλίσεις στα μικρά δείγματα δεν υπερέβησαν το 5%, και στα μεγάλα δείγματα ήταν αμελητέες.

Επανερχόμενοι λοιπόν στην αξιολόγηση των τριών μεθοδολογιών, μόνο η τρίτη μεθοδολογία παράγει καλύψεις (δηλαδή εκτιμηθέντα πραγματικά επίπεδα εμπιστοσύνης) οι οποίες να συμπεριφέρονται όπως τα αναμενόμενα πραγματικά επίπεδα εμπιστοσύνης. Αντίθετα για τις δύο πρώτες μεθοδολογίες η σοβαρή υποεκτίμηση τόσο της αυτοδιακύμανσης όσο και των συντελεστών αυτοσυσχέτισης που υπολογίζονται βάσει των τιμών της χρονολογικής σειράς οδηγεί σε καλύψεις των οποίων η συμπεριφορά όχι μόνο δεν είναι ικανοποιητική αλλά και σε πολλές περιπτώσεις δεν ακολουθεί συγκεκριμένο πρότυπο, ιδίως σε σχετικώς μικρά δείγματα ($n<100$) και τιμές του $\phi$ όχι κοντά στο $\pm 1$.

Το γενικό λοιπόν συμπέρασμα που εξάγεται είναι ότι αναφορικά με τη χρήση της ασυμπτωτικής διακύμανσης στην κατασκευή του διαστήματος εμπιστοσύνης για τον στάσιμο πληθυσμιακό μέσο θα πρέπει να αποφεύγεται η διαδικασία χρησιμοποίησης των τιμών της υπό εξέταση χρονολογικής σειράς για την εκτίμηση της αυτοδιακύμανσης και των συντελεστών αυτοσυσχέτισης. Αντίθετα η μελέτη έδειξε ότι είναι προτιμότερο να γίνεται ταυτοποίηση της σειράς κατά Box-Jenkins, και να χρησιμοποιείται η ασυμπτωτική διακύμανση που υπολογίζεται μέσω αντικατάστασης, στη μαθηματική μορφή του αντίστοιχου ARMA που προκύπτει, των εκτιμήσεων ελαχίστων τετραγώνων της διακύμανσης των σφαλμάτων και των παραμέτρων. Βέβαια για το AR(1) δείξαμε ότι στις περιπτώσεις των σχετικά μικρών δειγμάτων και των θετικών τιμών του φ οι καλύψεις και τα πραγματικά επίπεδα εμπιστοσύνης είναι μεγαλύτερα των αντίστοιχων ονομαστικών. Επομένως και η τρίτη μεθοδολογία δεν είναι απολύτως προτεινόμενη καθώς οδηγεί σε διαστήματα εμπιστοσύνης με πλάτη μεγαλύτερα των αναμενόμενων και φυσικά με μειωμένη ακρίβεια. Εδώ έγκειται και η μελλοντική έρευνα, δηλαδή, η ανάπτυξη μεθοδολογιών που θα παράγουν σε λογικά μεγέθη δείγματος και αποδεκτές καλύψεις αλλά και επιθυμητά επίπεδα ακρίβειας.

## REFERENCES


Box, G.E.P., and G.M. Jenkins, (1976). Time Series Analysis: Forecasting and Control, Revised Edition, Holden-Day, San Francisco.

Box, G.E.P., and M.E. Muller (1958). A Note on the Generation of Random Normal Deviates. Ann. Math. Statist. Vol 29, p.p. 610-611

Brockwell, P.J., and R.A. Davis, (2002). Introduction to Time Series and Forecasting. Second Edition. Springer

Crane, M.A., and D.L. Iglehart, (1974a). Simulating stable stochastic systems, I: General multi-server queues. Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 21, pp.103-113.

Crane, M.A., and D.L. Iglehart, (1974b). Simulating stable stochastic systems, II: Markov chains. Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 21, pp.114-123.

Crane, M.A., and D.L. Iglehart, (1974c) Simulating stable stochastic systems, III: Regenerative processes and discrete event simulations. Operations Research, Vol. 23, pp.33-45.

Crane, M.A., and D.L. Iglehart, (1975). Simulating stable stochastic systems, IV: Approximation techniques. Management Science, Vol. 21, pp.1215-1224.

Ducket, S.D., and A.A.B. Pritsker, (1978). Examination of simulation output using spectral methods. Mathematical Computing Simulation, Vol. 20, pp. 53-60.

Fishman, G.S., (1973a). Statistical analysis for queuing simulations. Management Science, Vol. 20, pp. 363-369.

Fishman, G.S., (1973b). Concepts and methods in discrete event digital simulation. John Wiley and Sons, New York.

Fishman, G., (1978). Principles of Discrete Event Simulation. Wiley, New York.

Fishman, G., (1999). Monte Carlo: Concepts, Algorithms, and Applications. Springer, New York.

Halkos G.E., Kevork I.S. (2003). *A comparison of alternative unit root tests*. Discussion Papers Series **0302**, Department of Economics University of Thessaly

Halkos G.E., Kevork I.S. (2004). *Confidence intervals in stationary autocorrelated time series*. Forthcoming in Archieves of Economic History

Heidelberger, P., and P.D. Welch, (1981a). A spectral method for confidence interval generation and run length control in simulations. Communications of the Association for Computing Machinery, Vol. 24, pp. 233-245.

Heidelberger, P., and P.D. Welch, (1981b). Adaptive spectral methods for simulation output analysis. IBM Journal of Research and Development, Vol. 25, pp. 860-876.

Kevork, I.S, (1990). Confidence Interval Methods for Discrete Event Computer Simulation: Theoretical Properties and Practical Recommendations. Unpublished Ph.D. Thesis, University of London, London

Law, A.M., and W.D. Kelton, (1982a). Confidence interval for steady state simulations: II. A survey of sequential procedures. Management Science, Vol. 28, pp. 560-562.

Law, A.M., and W.D. Kelton, (1982b). Simulation modelling and analysis. McGraw Hill, New York.

Law, A.M., and W.D. Kelton, (1984). Confidence intervals for steady state simulations: I. A survey of fixed sample size procedures. Operation Research, Vol. 32, pp. 1221-1239.

Law, A. and Kelton, W., (1991). Simulation Modeling and Analysis, second ed. McGraw-Hill, New York.

Schruben, L., (1983). Confidence interval estimation using standardized time series. Operations Research 31, 1090-1108.

Song, W.T. and Schmeiser, B.W., (1995). Optimal mean-squared-error batch sizes. Management Science 41, 111-123.