



Munich Personal RePEc Archive

## **Phénomènes financiers et mélange de lois : Une nouvelle méthode d'estimation des paramètres.**

Chilarescu, Constantin and Viasu, Iana Luciana

Université de Lille<sup>1</sup>, Laboratoire CLERSE, Université de l'Ouest de  
Timisoara

6 October 2011

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/33909/>  
MPRA Paper No. 33909, posted 06 Oct 2011 20:45 UTC

## *Phénomènes financiers et mélange de lois :*

### *Une nouvelle méthode d'estimation des paramètres.*

*Constantin Chilarescu<sup>1</sup> et Ioana Viasu<sup>2</sup>*

**1. Université de Lille1, Laboratoire CLERSE**

**2. Université de l'Ouest de Timisoara**

**Résumé :** L'objet essentiel de cet article est d'examiner les qualités du processus mixte diffusion saut dont les paramètres sont des variables aléatoires. L'hypothèse d'un processus de Wiener géométrique appliquée à la modélisation du taux de change est devenue discutable au début des années quatre-vingt-dix à cause de la forte leptokurticité des distributions observées et l'alternative d'une autre distribution que la distribution normale a fait l'objet de nombreux articles. Le modèle proposé dans cet article a comme hypothèse que la loi de la partie continue du processus est un mélange de deux lois normales dont les paramètres sont des variables aléatoires.

**Abstract :** The main aim of this paper is to examine the qualities of the mixed diffusion-jump process whose parameters are random variables. The hypothesis of a Wiener geometric process applied to exchange rate has become doubtful at the beginning of the nineties, fact determined by a high leptokurtosis of the empirical distributions. The alternative of another distribution was studied in several articles. The mathematical model proposed in this paper has as fundamental hypothesis the fact that the distribution of the continuous part of the changes in the logarithms of exchange rate is a mixture of normals whose parameters are random variables.

## **1. Introduction**

Les modèles en temps continu se sont largement développés en finance. Ces modèles sont bien adaptés pour formaliser l'évolution d'un actif financier, lorsque cette évolution ne peut pas être prévue avec certitude à partir de l'état initial de l'actif et d'une équation d'évolution. Depuis l'introduction par Merton du concept de processus aléatoire en temps continu pour la modélisation de la dynamique du taux instantané, des nombreux travaux se

sont attachés à généraliser le modèle initial. Un rôle essentiel est joué par l'hypothèse faite sur le type de processus gouvernant cette évolution.

L'approche stochastique se fonde sur l'idée que cette évolution se fait de manière suffisamment lente pour que l'observation du passé récent soit utile pour décrire l'avenir proche. L'hypothèse de processus de diffusion appliquée aux prix financiers, particulièrement aux taux de change, constitue l'une des voies possibles, mais la plus spectaculaire, et elle a permis un développement théorique considérable durant les trois dernières décennies. Toutefois, au début des années quatre-vingt-dix cette hypothèse est devenue discutable, et des nombreuses études ont envisagé des processus impliquant des discontinuités dans la cotation des taux de change.

Les processus stochastiques proposés, pour lesquels on dispose aujourd'hui d'une théorie à la fois riche et fortement développée mais aussi parfois très complexe, sont simples et découlent de l'observation suivante : les prix évoluent, la plus part du temps de façon continue grâce à de petites variations en grand nombre, mais à des moments aléatoires ils sont affectés par des discontinuités qui peuvent être de grande amplitude. Ayant accepté ces prémisses, il nous reste encore la question du type de processus qui peut être retenu. Il n'existe pas de réponse évidente à cette question. Si le processus gaussien a été longtemps le plus couramment utilisé, d'autres alternatives à une loi normale ont été proposées.

Deux principales approches peuvent être distinguées : la première suppose que la loi de distribution des taux est plus générale qu'une loi normale et la seconde suppose que les paramètres du processus varient dans le temps. Certains auteurs, représentants de la première approche, utilisent des lois elliptiques, la loi de Student, la loi de Bêta généralisée, etc. La seconde approche considère que les paramètres de la loi des rendements, et plus précisément son deuxième moment, varient dans le temps. Les exemples les plus célèbres de cette approche sont les processus de la famille des ARCH et GARCH. Parmi les nombreuses études

qui ont envisagé les deux principales approches, on peut citer celles menées par Aase et P. Guttorp [1], Akgiray et Booth [2], Ball et Torus [3], Bates [4], Boothe et Glassman [5], Chilarescu [6], Domowitz et Hakkio [7], Herzel [8], Hsieh [9], Jarrow et Rosenfeld [11], Jorion [12], Kim, Oh et Brooks [14], Tucker et Pond [16], et Zamfirescu et Chilarescu [18].

La première analyse empirique des variations des logarithmes des taux de change est celle de Boothe et Glassman [5] qui suggère que ces variations puissent être décrites par des distributions de Student ou des combinaisons de lois normales. Finalement leur conclusion insiste sur l'hypothèse de paramètres variables avec le temps, conclusion qui a été confirmée par Hsieh [9].

Les études menées par Akgiray et Booth [2] ou par Tucker et Pond [16] proposent une nouvelle alternative pour représenter les variations du taux de change : le processus mixte diffusion saut (MDS) dont les paramètres doivent certainement varier avec le temps. La réalité perçue par cette approche plaide donc en faveur de l'hypothèse la plus générale des processus markoviens à accroissements aléatoires indépendants et à variance finie. Les tests faits par Jorion [12] concluent en faveur d'une distribution normale - poissonienne. L'hypothèse d'un processus MDS à volatilité stochastique à deux états a été étudiée pour la première fois par Zamfirescu et Chilarescu [18]. Pour un tel processus, ils ont proposé une méthode d'estimation des paramètres de la partie continue.

Il est important de noter ici que si les hypothèses faites sur les paramètres de la partie continue du processus et les hypothèses faites sur les paramètres de la partie discontinue du processus diffèrent, les hypothèses que la partie continue du processus est séparable de la partie discontinue du processus et que la volatilité peut être calculée sur tout intervalle fini à partir d'une seule trajectoire, sont néanmoins généralement communes.

## 2. Le modèle de diffusion–saut dont les paramètres sont des variables aléatoires.

Un processus  $X(t)$ ,  $t \in [0, T]$  est un processus mixte diffusion – saut dont les paramètres sont des variables aléatoires (MDSTVA) si l'évolution de  $X(t)$  peut être décrite de la façon suivante (voir [17]) :

$$\frac{\Delta X(t)}{X_-(t)} = \mu_g(t, X_-)dt + \sigma_g(t, X_-)dW(t) + \varphi_{1g}(t)\Delta N_1(t) + \varphi_{2g}\Delta N_2(t) \quad (2.1)$$

où  $\mu_g(t, X_-)$  et  $\sigma_g(t, X_-)$  ne peuvent pas prendre que l'une des deux valeurs possibles c'est-à-dire :

$$\mu_g(t, X_-) = \begin{cases} \mu_1 \\ \mu_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \sigma_g(t, X_-) = \begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{cases} \quad (2.2)$$

Le lemme d'Itô appliqué à la fonction  $f(x) = \ln(x)$  conduit à :

$$\Delta f = \mu_f(t, X_-)dt + \sigma_g(t, X_-)dW(t) + \ln[1 + \varphi_{1g}(t)]\Delta N_1(t) + \ln[1 + \varphi_{2g}]\Delta N_2(t) \quad (2.3)$$

où :

$$\mu_f(t, X_-) = \begin{cases} \mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} \\ \mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \sigma_g(t, X_-) = \begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{cases} \quad (2.4)$$

Nous supposons donc que la tendance et la volatilité varient au cours du temps de façon aléatoire, prenant deux valeurs distinctes  $\mu_1$  ou  $\mu_2$  ( $\mu_1 \neq \mu_2$ ) et respectivement  $\sigma_1$  ou  $\sigma_2$  ( $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ).

Soit  $f^c(X)$  la partie continue du processus  $f(X) = \ln(X)$ . L'équation différentielle stochastique vérifiée par  $f^c(X)$  peut être écrite de la manière suivante :

$$df^c = \left[ \mu_g(t, X_-) - \frac{\sigma_g^2(t, X_-)}{2} \right] dt + \sigma_g(t, X_-)dW(t) \quad (2.5)$$

Si les fonctions  $\mu_g(t, X_-)$  et  $\sigma_g(t, X_-)$  sont à croissance bornée et elles satisfont les conditions de type Lipschitz, alors, la solution de l'équation différentielle stochastique (2.5) existe, est unique et est donnée par :

$$\ln \frac{X^c(t)}{X^c(0)} = \int_0^t \left[ \mu_g(s, X_-) - \frac{\sigma_g^2(s, X_-)}{2} \right] ds + \int_0^t \sigma_g(s, X_-) dW(s) \quad (2.6)$$

Sans perdre la généralité, nous supposons que  $X^c(0) = 1$  et par conséquent la relation (2.6) devient:

$$\ln[X^c(t)] = \int_0^t \left[ \mu_g(s, X_-) - \frac{\sigma_g^2(s, X_-)}{2} \right] ds + \int_0^t \sigma_g(s, X_-) dW(s) \quad (2.7)$$

L'intégrale d'Itô a, la propriété remarquable suivante (voir [10]) : pour  $t \in [0, T]$ ,

$$f(t, X_-) = \int_0^t \sigma_g(s, X_-) dW(s) \quad (2.8)$$

est une  $F_t$ -martingale de carré intégrable, ou plus précisément :

$$E\{f(t, X_-) / F_t\} = 0 \quad (2.9)$$

$$\text{Var}\{f(t, X_-) / F_t\} = E \left[ \int_0^t \sigma_g^2(s, X_-) ds \right] \quad (2.10)$$

Soit  $\rho(t, X_-)$  définie par la relation suivante :

$$\rho(t, X_-) = \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_g^2(s, X_-) ds \quad (2.11)$$

où :

$$\sigma_g^2(t, X_-) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E[(\ln(X^c(t+h)) - \ln(X^c(t)))^2 / F_t]}{h} \quad (2.12)$$

Nous subdivisons l'intervalle  $[0, t]$  en sous intervalles disjoints  $I_k, k = 1, 2, \dots, n$  sur lesquels  $\sigma_g^2(t, X_-)$  prend les valeurs constantes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  de sorte que  $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n = [0, t]$ . Si  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  représentent la réunion des intervalles où  $\sigma_g(t, X_-)$  est égale à  $\sigma_1$  et, respectivement à  $\sigma_2$ , c'est-à-dire :

$$\Delta_1 = \bigcup_{j \in J_1} I_j \text{ et } \Delta_2 = \bigcup_{j \in J_2} I_j \quad (2.13)$$

alors, la relation (2.11) devient :

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \frac{1}{t} \left[ \sigma_1^2 \int_{\Delta_1} ds + \sigma_2^2 \int_{\Delta_2} ds \right] = \frac{\tau(t)}{t} \cdot \sigma_1^2 + \left( \frac{t - \tau(t)}{t} \right) \cdot \sigma_2^2 \\ &= \delta(t, \tau) \cdot \sigma_1^2 + [1 - \delta(t, \tau)] \cdot \sigma_2^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

où  $\tau(t)$  représente la longueur totale des intervalles dont la réunion est  $\Delta_1$  et :

$$\delta(t, \tau) = \frac{\tau(t)}{t} \quad (2.15)$$

En fait  $\tau(t)$  et  $t - \tau(t)$  sont des variables aléatoires et peuvent être interprétées comme représentant les durées de temps pendant lesquelles le processus  $Y(t, X) = \ln[ X^c(t) ]$  a eu les volatilités  $\sigma_1$  et respectivement  $\sigma_2$ .  $\delta(t, \tau)$  peut être interprétée comme représentant la probabilité que la volatilité du processus  $Y(t, X)$  a été constante sur une durée  $\tau(t)$  de l'intervalle  $[0, t]$  et égale à  $\sigma_1$ , c'est-à-dire:

$$\delta(t, \tau) = P[\sigma(t, X_-) = \sigma_1] \quad (2.16)$$

Soit  $(s, s+h) \subset (0, t)$ , tel que sur cet intervalle la tendance et la volatilité ne peuvent pas prendre que l'une des deux valeurs possibles. Sous les hypothèses concernant la tendance et la volatilité, la solution de l'équation différentielle stochastique (2.6) devient :

$$Y(s+h) - Y(s) = \begin{cases} \left[ \mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} \right] h + \sigma_1 [W_{s+h} - W_s] & \text{si } [s, s+h] \in \Delta_1 \\ \left[ \mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} \right] h + \sigma_2 [W_{s+h} - W_s] & \text{si } [s, s+h] \in \Delta_2 \end{cases} \quad (2.17)$$

Puisque le processus  $Y(t)$ , sur l'intervalle  $(s, s+h) \subset (0, t)$ , est à accroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continues, alors  $\Delta Y(s, h) = Y(s+h) - Y(s)$  est une variable aléatoire gaussienne de moyenne:

$$E[\Delta Y(s, h)] = \begin{cases} \left[ \mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} \right] h & \text{si } [s, s+h] \in \Delta_1 \\ \left[ \mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} \right] h & \text{si } [s, s+h] \in \Delta_2 \end{cases} \quad (2.18)$$

et de variance:

$$\text{Var}[\Delta Y(s, h)] = \begin{cases} \sigma_1^2 h & \text{si } [s, s+h] \in \Delta_1 \\ \sigma_2^2 h & \text{si } [s, s+h] \in \Delta_2 \end{cases} \quad (2.19)$$

Soit  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = t$ , tel que pour chaque  $i = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $t_{i+1} - t_i$  appartient soit à  $\Delta_1$  soit à  $\Delta_2$ . Alors les variables aléatoires :  $Y(t_0)$ ,  $Y(t_1) - Y(t_0)$ , ...,  $Y(t_n) - Y(t_{n-1})$  sont indépendantes et, sur  $(0, t)$  nous avons la propriété suivante (voir [13]):

$$\sum_{i=0}^{n-1} [Y(t_{i+1}) - Y(t_i)]^2 \xrightarrow{P} \int_0^t \sigma^2(s) ds \quad (2.20)$$

où  $\xrightarrow{P}$  signifie la convergence en probabilité.

Par conséquent, en utilisant les relations (2.18), (2.19) et la propriété ci-dessus, nous pouvons donc écrire:

$$E \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} [Y(t_{i+1}) - Y(t_i)]^2 \right\} = \sum_{i=0}^{n-1} E[Y(t_{i+1}) - Y(t_i)]^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \text{Var}[Y(t_{i+1}) - Y(t_i)] \quad (2.21)$$

Tenant compte de l'hypothèse sur la volatilité, il ressort que :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} \text{Var}[Y(t_{i+1}) - Y(t_i)] &= \sigma_1^2 \sum_{j \in J_1} (t_{j+1} - t_j) + \sigma_2^2 \sum_{j \in J_2} (t_{j+1} - t_j) = \\
&= \tau(t) \cdot \sigma_1^2 + [t - \tau(t)] \cdot \sigma_2^2 \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Finalement nous pouvons donc écrire:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} [Y(t_{i+1}) - Y(t_i)]^2 = \frac{\tau(t)}{t} \sigma_1^2 + \left[1 - \frac{\tau(t)}{t}\right] \sigma_2^2 \quad (2.23)$$

Soit  $(s, s+h) \subset (0, t)$  tel que sur cet intervalle la tendance et la volatilité sont variables, pouvant prendre toutes les valeurs, entre les deux valeurs possibles, et soit  $y$  une constante réelle. Sur cet intervalle  $\Delta Y(s, h) = Y(s+h) - Y(s)$  est une variable aléatoire de deux composantes, gaussiennes et indépendantes. En utilisant les propriétés des lois conditionnelles, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
P[\Delta Y(s, h) < y] &= P[\Delta Y(s, h) < y] \cdot P[\sigma_g^2(s, X) = \sigma_1^2] + \\
&+ P[\Delta Y(s, h) < y] \cdot P[\sigma_g^2(s, X) = \sigma_2^2] = \\
&= \delta(s, \tau) \cdot N\left[\left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)\omega, \sigma_1^2\omega, y\right] + [1 - \delta(s, \tau)] \cdot N\left[\left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)\omega, \sigma_2^2\omega, y\right] \quad (2.24)
\end{aligned}$$

où :

$$N(\mu, \sigma, y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2} \cdot \pi} \int_{-\infty}^y \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx \quad (2.25)$$

et  $\omega$  est une constante réelle positive, tel que sur chacun sous - intervalle inclus en  $(s, s + h)$ , de longueur  $\omega$ , la tendance et la volatilité ne peuvent pas prendre que l'une des deux valeurs possibles. Par conséquent, la loi de la variable aléatoire  $\Delta Y(s, h) = Y(s+h) - Y(s)$ , pour chaque  $s \in [0, t]$ , est un mélange de deux lois normales qui peut être écrit sous la forme:

$$\begin{aligned}
F(y, s) = & \delta(s, \tau) \cdot \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi\omega}} \int_{-\infty}^y \exp \left[ -\frac{\left( x - \left( \mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) \omega \right)^2}{2\sigma_1^2 \omega} \right] dx + \\
& + [1 - \delta(s, \tau)] \cdot \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi\omega}} \int_{-\infty}^y \exp \left[ -\frac{\left( x - \left( \mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) \omega \right)^2}{2\sigma_2^2 \omega} \right] dx \quad (2.26)
\end{aligned}$$

Soit deux intervalles  $(0, t)$  et  $(0, t+h)$  tel que  $\delta(t, \tau) \neq \delta(t+h, \tau)$ .

Si  $\delta(t+h, \tau) > \delta(t, \tau)$ , alors la vraie volatilité du processus  $Y(t)$ , sur l'intervalle  $(t, t+h)$  est  $\sigma_1$  et si  $\delta(t+h, \tau) < \delta(t, \tau)$ , alors la vraie volatilité du processus  $Y(t)$ , sur l'intervalle  $(t, t+h)$  est  $\sigma_2$ .

Si  $\delta(t+h, \tau) = \delta(t, \tau)$ , alors sur l'intervalle  $(t, t+h)$  la volatilité du processus  $Y(t)$  ne s'est pas changée.

Par conséquent la vraie volatilité du processus  $Y(t)$ , sur chacune sous-intervalle  $(t, t+h) \subset (0, T)$  de volatilité constante, pourrait être déterminée si :

1. Les deux valeurs possibles, de la volatilité et de la tendance, sont connues ou peuvent être estimées à partir d'une série de valeurs observées du processus  $Y(t)$ .
2. La probabilité  $\delta(t, \tau)$ , à chaque instant  $t \in [0, T]$ , est connue ou peut être estimée à partir d'une série de valeurs observées du processus  $Y(t)$ .

### 3. Une nouvelle méthode d'estimation des paramètres.

La méthode du maximum de vraisemblance consiste à rechercher l'estimation d'un paramètre en maximisant la fonction log-vraisemblance. Des démarches similaires peuvent être suivies en utilisant d'autres fonctions objectives.

Si pour les modèles de diffusion, pour les modèles MDS ou pour les modèles ARCH et GARCH la méthode du maximum de vraisemblance peut être utilisée pour l'estimation des paramètres, dans le cas du modèle MDSTVA l'utilisation de la méthode est pratiquement impossible. Les difficultés à résoudre sont grandes et sont dues, aussi à la théorie, pas encore très claire dans ce cas, qu'aux problèmes liés aux difficultés de calcul.

La méthode que nous présentons s'inspire de celles de Zamfirescu et Chilarescu [18], Quandt et Ramsey [15] et plus particulièrement du commentaire fait par Kumar, Nicklin et Paulson (*JASA*, march 79, Vol. 74, No. 365, 52 – 57) sur l'article de Quandt et Ramsey. L'idée essentielle de la méthode est de minimiser la distance entre la fonction caractéristique théorique et la fonction caractéristique empirique.

Soit  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  la série des observations. Nous supposons qu'il existe la possibilité de séparer l'ensemble  $X$  en deux sous-ensembles indépendants  $X_1$  et  $X_2$ , de dimension  $k_1$  et respectivement  $k_2$  tel que, si  $x_j \in X_1$  alors la loi de  $x_j$  est une loi normale de paramètres  $\mu_1$  et  $\sigma_1$ , et si  $x_j \in X_2$  alors la loi de  $x_j$  est une loi normale de paramètres  $\mu_2$  et  $\sigma_2$ . Soit  $\bar{x}$  la moyenne empirique de la série d'observations et  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  les deux moyennes empiriques des sous-ensembles considérés. Soit  $s^2$  la variance empirique de la série d'observations et  $s_1^2, s_2^2$  les deux variances empiriques des sous-ensembles considérés. Alors nous pouvons écrire :

$$\bar{x} = \delta_n \cdot \bar{x}_1 + (1 - \delta_n) \cdot \bar{x}_2 \quad (3.1)$$

$$s^2 = \delta_n \cdot s_1^2 + (1 - \delta_n) \cdot s_2^2 + \delta_n (1 - \delta_n) \cdot (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 \quad (3.2)$$

où :

$$\delta_n = \frac{k_1}{n} \quad (3.3)$$

Sous l'hypothèse faite sur l'ensemble  $X$ , il ressort que :

$$E(\bar{x}) = [\delta_n \cdot \mu_1 + (1 - \delta_n) \cdot \mu_2] dt \quad (3.4)$$

et :

$$E(s^2) = [\delta_n \cdot \sigma_1^2 + (1 - \delta_n) \cdot \sigma_2^2] dt \quad (3.5)$$

Par conséquent, les éléments de l'ensemble  $X$  sont les valeurs d'une variable aléatoire dont la loi est un mélange de deux lois normales.

Soit les sous-ensembles successifs :  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ ,  $(x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}), \dots, (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , caractérisés par les moyennes empiriques :  $\bar{x}_p, \bar{x}_{p+1}, \dots, \bar{x}_n$  et par les variances empiriques :  $s_p^2, s_{p+1}^2, \dots, s_n^2$ . Alors, pour chaque  $k \geq p$  et  $dt = 1$ , nous avons :

$$E(\bar{x}_k) = \delta_k \cdot \mu_1 + (1 - \delta_k) \cdot \mu_2 \quad (3.6)$$

et :

$$E(s^2) = \delta_k \cdot \sigma_1^2 + (1 - \delta_k) \cdot \sigma_2^2 \quad (3.7)$$

Soit  $X$  une variable aléatoire gaussienne de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$ . Alors la fonction caractéristique théorique de la variable aléatoire  $X$  est définie par :

$$\Phi(\omega, \mu, \sigma^2) = \exp\left(i\mu\omega - \frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right) \quad (3.8)$$

Sous les hypothèses ci-dessus, la fonction caractéristique théorique devient :

$$\Phi(\omega, \gamma) = \delta \cdot \exp\left(i\mu_1\omega - \frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}\right) + (1 - \delta) \cdot \exp\left(i\mu_2\omega - \frac{\sigma_2^2\omega^2}{2}\right) \quad (3.9)$$

La fonction caractéristique empirique est définie par :

$$\Phi_n(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp(i\omega x_j) \quad (3.10)$$

où :

$$\gamma = \begin{bmatrix} \delta \\ \mu_1 \\ \sigma_1^2 \\ \mu_2 \\ \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Soit  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M$  une suite des valeurs de  $\omega$  pour lesquelles on définit la fonction distance :

$$ERF(\gamma) = \sum_{j=1}^M \left| \Phi(\omega_j, \gamma) - \Phi_n(\omega_j) \right|^2 \quad (3.12)$$

Notons par :

$$ERFR(\omega, \gamma) = RET(\omega, \gamma) - REK(\omega) \quad (3.13)$$

$$ERFI(\omega, \gamma) = IMT(\omega, \gamma) - IMK(\omega) \quad (3.14)$$

$$ERF\Phi(\omega, \gamma) = \Phi(\omega, \gamma) - \Phi_n(\omega) \quad (3.15)$$

où :

$$RET(\omega, \gamma) = \delta \cdot \exp\left(-\frac{\sigma_1^2 \omega^2}{2}\right) \cos(\mu_1 \omega) + (1 - \delta) \cdot \exp\left(-\frac{\sigma_2^2 \omega^2}{2}\right) \cos(\mu_2 \omega) \quad (3.16)$$

$$REK(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos(\omega x_j) \quad (3.17)$$

$$IMT(\omega, \gamma) = \delta \cdot \exp\left(-\frac{\sigma_1^2 \omega^2}{2}\right) \sin(\mu_1 \omega) + (1 - \delta) \cdot \exp\left(-\frac{\sigma_2^2 \omega^2}{2}\right) \sin(\mu_2 \omega) \quad (3.18)$$

$$IMK(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sin(\omega x_j) \quad (3.19)$$

nous pouvons alors écrire :

$$ERF(\gamma) = \sum_{j=1}^M \left| ERFR(\omega_j, \gamma) \right|^2 + \sum_{j=1}^M \left| ERFI(\omega_j, \gamma) \right|^2 \quad (3.20)$$

En dérivant par rapport à chaque variable, nous obtenons, en forme matricielle:

$$\varphi(\gamma) = \sum_{j=1}^M ERFR(\omega_j, \gamma) \frac{\partial ERFR(\omega_j, \gamma)}{\partial \gamma} + \sum_{j=1}^M ERFI(\omega_j, \gamma) \frac{\partial ERFI(\omega_j, \gamma)}{\partial \gamma} \quad (3.21)$$

Les solutions du système :

$$\varphi(\gamma) = 0 \quad (3.22)$$

représentent en fait les cinq paramètres inconnus de la fonction caractéristique théorique (3.9).

Le système ci-dessus peut être résolu par la méthode des approximations successives. Selon des calculs qui ne sont pas présentés ici, nous obtenons la solution suivante :

$$\gamma^{m+1} = \gamma^m - [H(\gamma^m)]^{-1} \phi(\gamma^m) \quad (3.23)$$

où  $\gamma^m$  représente l'approximation d'ordre  $m$  de la solution du système. La matrice  $H$  peut être calculée de manière suivante :

$$H_{kh}(\gamma) = HR_{kh}(\gamma) + HI_{kh}(\gamma) \quad (3.24)$$

où :

$$HR_{kh}(\gamma) = \sum_{j=1}^M \frac{\partial RET(\omega_j, \gamma)}{\partial \gamma_k} \frac{\partial RET(\omega_j, \gamma)}{\partial \gamma_h} + \sum_{j=1}^M ERFR(\omega_j, \gamma) \frac{\partial^2 RET(\omega_j, \gamma)}{\partial \gamma_k \partial \gamma_h} \quad (3.25)$$

et :

$$HI_{kh}(\gamma) = \sum_{j=1}^M \frac{\partial IMT(\omega_j, \gamma)}{\partial \gamma_k} \frac{\partial IMT(\omega_j, \gamma)}{\partial \gamma_h} + \sum_{j=1}^M ERFI(\omega_j, \gamma) \frac{\partial^2 IMT(\omega_j, \gamma)}{\partial \gamma_k \partial \gamma_h} \quad (3.26)$$

$k, h = 1, 2, \dots, 5$ .

Par définition, nous avons la relation suivante :

$$E[\Phi n(\omega)] = \phi(\omega, \gamma) \quad (3.27)$$

d'où il ressort que:

$$E[REK(\omega)] = RET(\omega, \gamma) \quad (3.28)$$

$$E[IMK(\omega)] = IMT(\omega, \gamma) \quad (3.29)$$

et par conséquent, pour les résidus, nous pouvons donc écrire :

$$E[ERFR(\omega, \gamma)] = 0 \quad (3.30)$$

et :

$$E[ERFI(\omega, \gamma)] = 0 \quad (3.31)$$

Soit  $\omega_j$  et  $\omega_k$  deux valeurs distinctes de  $\omega$ , pour lesquelles on arrive à:

$$\begin{aligned}
V_{jk} &= E\left[\left(\phi(\omega_j, \gamma) - \phi_n(\omega_j)\right) \cdot \left(\phi(\omega_k, \gamma) - \phi_n(\omega_k)\right)\right] = \\
& n^{-1} \left[ RET(\omega_j - \omega_k, \gamma) - RET(\omega_j, \gamma)RET(\omega_k, \gamma) - IMT(\omega_j, \gamma)IMT(\omega_k, \gamma) \right] + \\
& n^{-1} i \left[ IMT(\omega_j + \omega_k, \gamma) - RET(\omega_j, \gamma)IMT(\omega_k, \gamma) - IMT(\omega_j, \gamma)RET(\omega_k, \gamma) \right]
\end{aligned} \quad (3.32)$$

où  $i = \sqrt{-1}$ .

alors la matrice de variance-covariance de  $ERF\Phi$  peut être calculée de la manière suivante :

$$W = (W_{jk}) \quad (3.33)$$

où :

$$W_{jk} = \sqrt{W1_{jk} + W2_{jk}} \quad (3.34)$$

$$W1_{jk} = \left[ RET(\omega_j - \omega_k, \gamma) - RET(\omega_j, \gamma)RET(\omega_k, \gamma) - IMT(\omega_j, \gamma)IMT(\omega_k, \gamma) \right]^2 \quad (3.35)$$

et :

$$W2_{jk} = \left[ IMT(\omega_j + \omega_k, \gamma) - RET(\omega_j, \gamma)IMT(\omega_k, \gamma) - IMT(\omega_j, \gamma)RET(\omega_k, \gamma) \right]^2 \quad (3.36)$$

Par conséquent, sous les conditions du théorème limite centrale, il ressort que la distribution asymptotique de  $\gamma - \gamma^m$  est normale, de vecteur moyenne nul et de matrice de variance-covariance, donnée par:

$$W(\gamma) = H^{-1} \phi W \phi^* H^{-1} \quad (3.37)$$

La méthode présentée ci-dessus a pour but essentiel l'estimation des paramètres d'un modèle de diffusion à volatilité stochastique à deux états en utilisant des sous-ensembles successifs  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ ,  $(x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}), \dots, (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , caractérisés par les moyennes empiriques :  $\bar{x}_p, \bar{x}_{p+1}, \dots, \bar{x}_n$  et par les variances empiriques :  $s_p^2, s_{p+1}^2, \dots, s_n^2$ . Si les distributions des sous-ensembles :  $(\bar{x}_{1p}, \bar{x}_{1p+1}, \dots, \bar{x}_{1n}), (\bar{x}_{2p}, \bar{x}_{2p+1}, \dots, \bar{x}_{2n}), \dots, (s_{1p}^2, s_{1p+1}^2, \dots, s_{1n}^2)$  et  $(s_{2p}^2, s_{2p+1}^2, \dots, s_{2n}^2)$  sont suffisamment stables, les deux moyennes et les deux volatilités peuvent être estimées, comme conséquence des relations (3.6) et (3.7). Les valeurs des paramètres, estimées successivement, peuvent confirmer la validité de l'hypothèse

faite sur le processus. Si l'hypothèse que le processus est caractérisé par deux volatilités est valable, alors les variations du  $\delta$  font connus les instants de changement.

#### 4. Application au taux de change EURO-DOLAR.

Dans cette section nous présentons les principaux résultats obtenus en utilisant le modèle développé dans la deuxième section et la méthode présentée dans la troisième section. Les paramètres du modèle ont été estimés à partir des cotations journalières des cours de change de l'EURO sur la période du 01.01.2001 au 19.09.2002. La source des données a été Pacific Exchange Rate Service: <http://pacific.commerce.ubc.ca/xr/>. L'évolution du cours de change est présentée dans le graphique no. 1. Le tableau ci-dessus contient un résumé des paramètres statistiques obtenus sur la différence de logarithme de cours.

Paramètres	$\mu$	$\sigma$	Min	Max	S	K	B-P	L-B
Valeurs	-0,000087	0,0065	-0,01799	0,02498	0,308	0,631	4,97	5,04

Pour la période analysée la moyenne des variations logarithmiques a été positive, et ce phénomène peut être interprété par l'appréciation continuée de la monnaie européenne par rapport au dollar. En jugeant le coefficient d'asymétrie (S) et l'excès de kurtosis (K) on peut affirmer que l'hypothèse de normalité ne peut pas être retenue. L'hétéroscédasticité est mise en évidence à partir des statistiques de Box et Pierce (B-P) et de Ljung et Box (L-B), qui permettent de tester l'hypothèse de nullité jointe des k premières autocorrélations des séries (10 dans ce cas). L'hypothèse d'homoscédasticité ne peut pas être acceptée et ce résultat implique la présence d'hétéroscédasticité conditionnelle. L'observation que des variations importantes (positives ou négatives) sont généralement suivies par d'autres variations importantes du cours de change (quel que soit le signe), nous apparaît peu valable dans le cas

analysé. En ces conditions il est moins probable que la modélisation ARCH ou GARCH peut expliquer de façon acceptable l'effet d'hétéroscédasticité conditionnelle.

Conformément aux relations (2.2), (2.3) et (2.4), la différence entre deux variances successives peut prendre les valeurs suivantes:

$$\Delta Var = Var(y_{t+1}) - Var(y_t) = \begin{cases} 0 \\ \frac{|\sigma_2^2 - \sigma_1^2|}{\ln^2(1 + \varphi)} \\ \left| \ln^2(1 + \varphi_2) - \ln^2(1 + \varphi_1) \right| \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $y_{t+1} = \ln(x_{t+1}) - \ln(x_t)$  et  $x_t$  est le cours de change à l'instant t.

Pour séparer la partie continue de la partie saut, tenant compte de la relation ci-dessus, on accepte qu'un saut soit apparu si la valeur de  $\Delta Var$  est supérieure à une limite acceptable  $\Delta$ . Les graphiques no. 2 et no. 3 présentent les rentabilités des cours  $\ln(x_{t+1}) - \ln(x_t)$ , dans les deux cas, avant et après la séparation de la partie discontinue. Les valeurs de la variance historique, sont présentées dans les graphiques no. 4 et no. 5, aussi dans les deux alternatives possibles. Par l'effet de l'hypothèse faite sur la modélisation du taux de change, (hypothèse concernant la présence de deux composantes distinctes), nous avons recalculé les paramètres statistiques, mais cette fois seulement sur la partie continue, c'est-à-dire après la séparation de la partie discontinue. Le tableau suivant contient le résumé des paramètres statistiques ainsi obtenus.

<b>Paramètres</b>	<b><math>\mu</math></b>	<b><math>\sigma</math></b>	<b>Min</b>	<b>Max</b>	<b>S</b>	<b>K</b>	<b>B-P</b>	<b>L-B</b>
<b>Valeurs</b>	-0,000259	0,0057	-0,01422	0,01416	0,0404	-0,297	6,41	6,51

Les valeurs du coefficient d'asymétrie et de l'excès de kurtosis se sont sensiblement améliorées. Il est important de préciser ici que les valeurs obtenues pour le test de Box et Pierce d'une côté, et pour le test de Ljung et Box de l'autre côté ont subi de modifications par rapport au cas précédent. Il est possible d'expliquer cette propriété par la présence

insignifiante de l'effet ARCH. Cette remarque vient de confirmer l'observation faite ci-dessus.

Comme conséquence du rejet de l'hypothèse de normalité et à la suite des considérations faites ci-dessus, nous sommes contraints à rechercher une autre modélisation possible. Plusieurs modèles ont alors été proposés afin de décrire le processus suivi par le cours de change ou plus précisément par ses variations logarithmiques. Notre opinion est qu'il n'y a aucune raison de diriger la recherche en cette direction. La famille des modèles susceptibles d'être utilisés est très nombreuse. En conséquence nous apparaît plus raisonnable et également plus pratique de modifier la loi de distribution. Le modèle proposé dans la deuxième section a comme hypothèse fondamentale que la loi du processus suivi par les différences de logarithme de cours est un mélange de deux lois normales. Cette hypothèse permet, par le modèle qu'elle a généré, entre autre, l'ajustement de l'asymétrie et de l'excès de kurtosis. Il semble, aujourd'hui, définitivement admis que les paramètres du processus suivi par les différences de logarithme de cours de change ne sont ni des constantes, ni des fonctions déterministes mais des variables aléatoires qui évoluent dans le temps suivant des processus spécifiques. Les valeurs des paramètres, estimées à partir du modèle développé dans la deuxième section et de la méthode proposée dans la troisième section sont présentées dans le tableau ci-dessous.

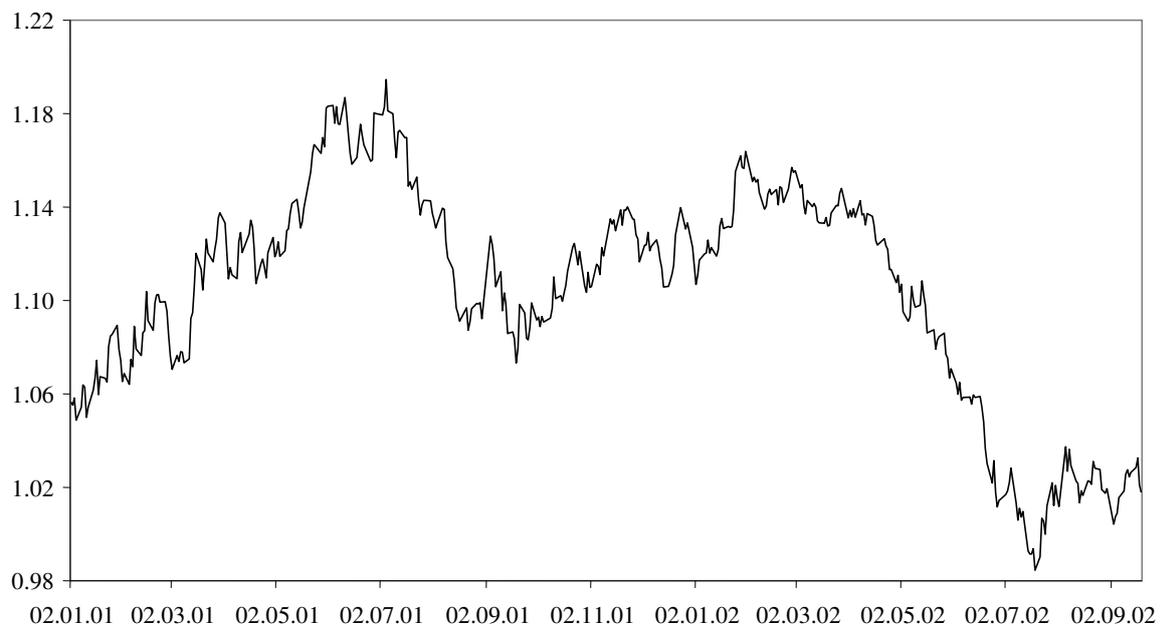
<b>Paramètres</b>	$\mu 1$	$\sigma 1$	$\mu 2$	$\sigma 2$	$\varphi 1$	$\varphi 2$	$\lambda$
<b>Valeurs</b>	-0,000368	0,0059	-0,000155	0,0055	0,0183	0,0156	0,4998

Le graphique no. 6 présente les deux variances : historique et estimée à partir du modèle.

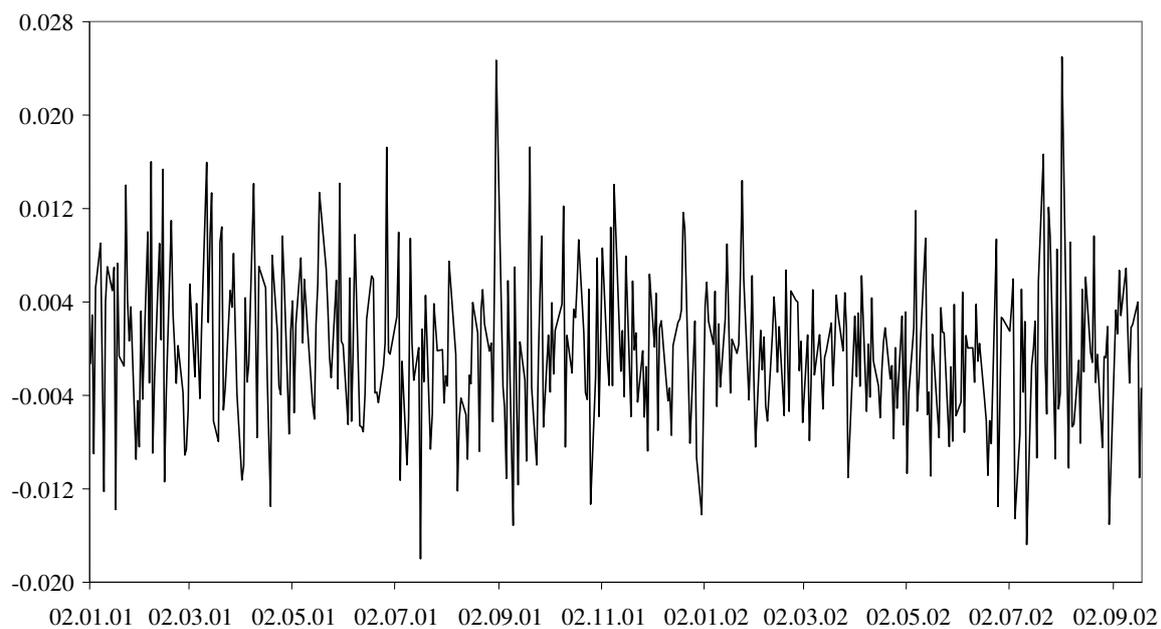
**Conclusions :** Les résultats obtenus en utilisant le modèle proposé dans la deuxième section et la méthode d'estimation développée dans la troisième section ont confirmé la

validité des hypothèses faites sur le comportement du marché de change, et par conséquent l'idée d'un modèle stochastique dont les paramètres sont des variables aléatoires nous apparaît suffisamment acceptable.

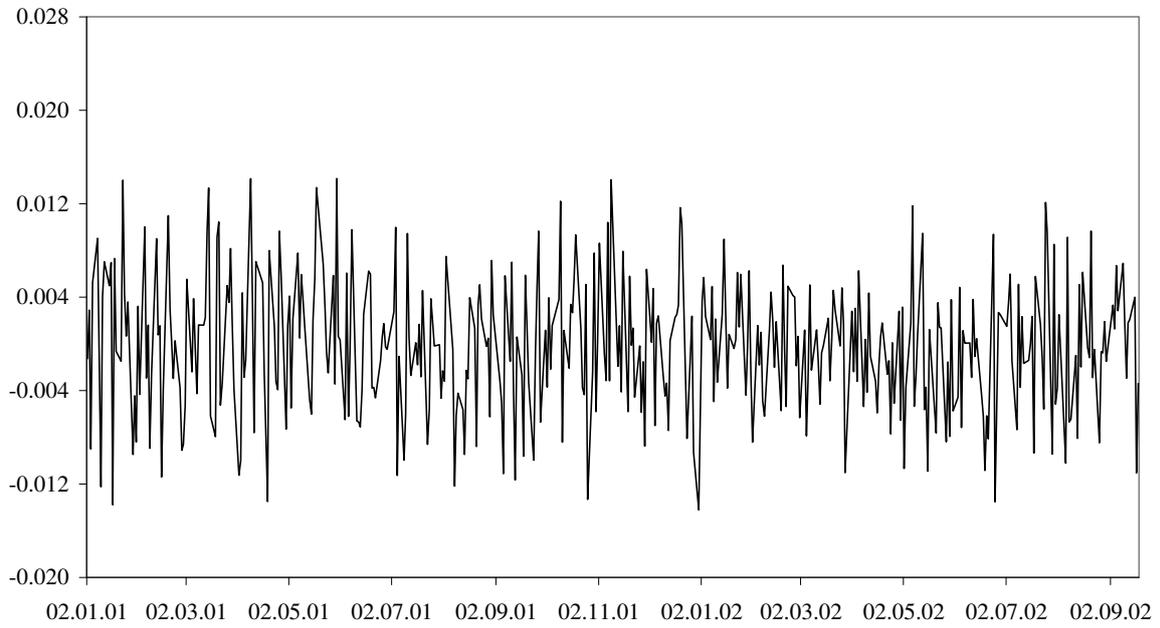
Graphique No. 1 La Dynamique du Cours



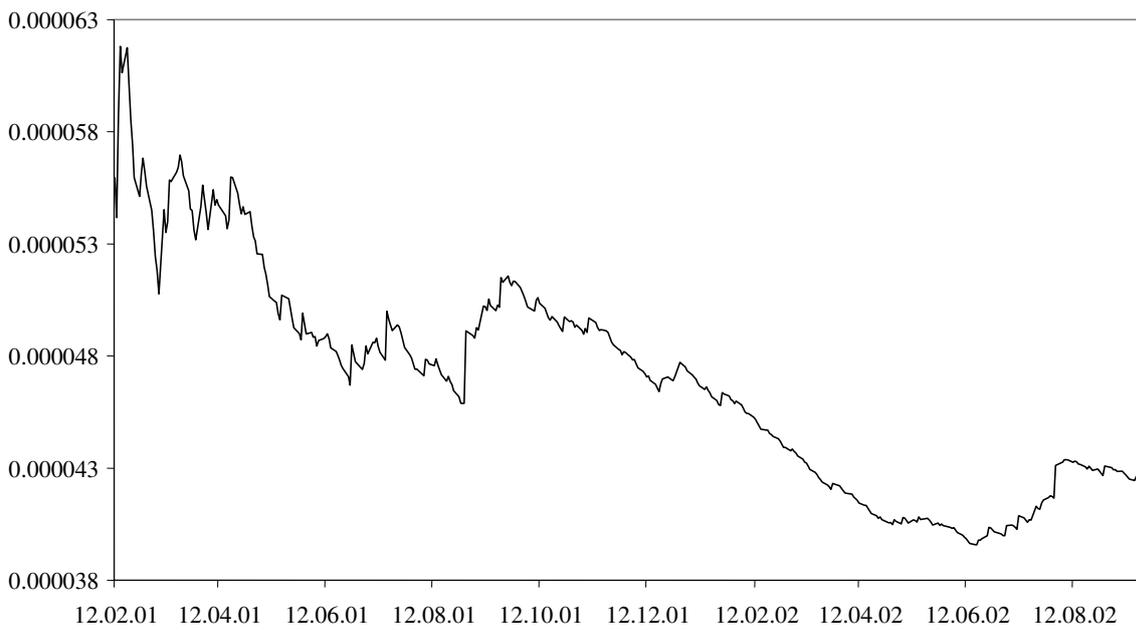
Graphique No. 2 La Dynamique de la Rentabilité



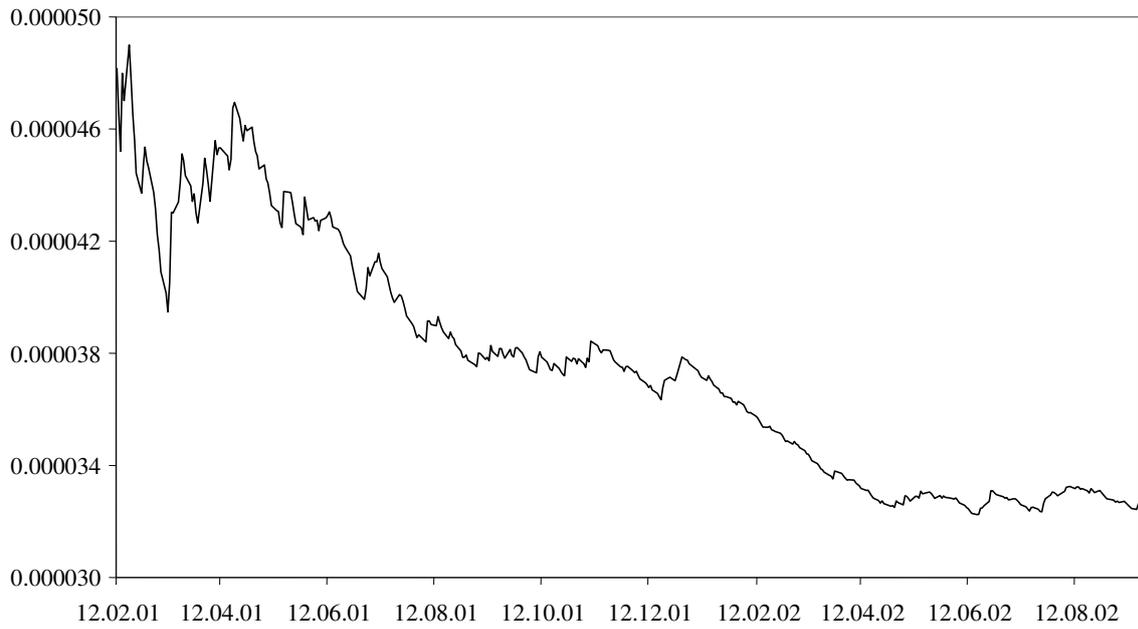
Graphique No. 3 La Dynamique de la Rentabilité - Partie Continue



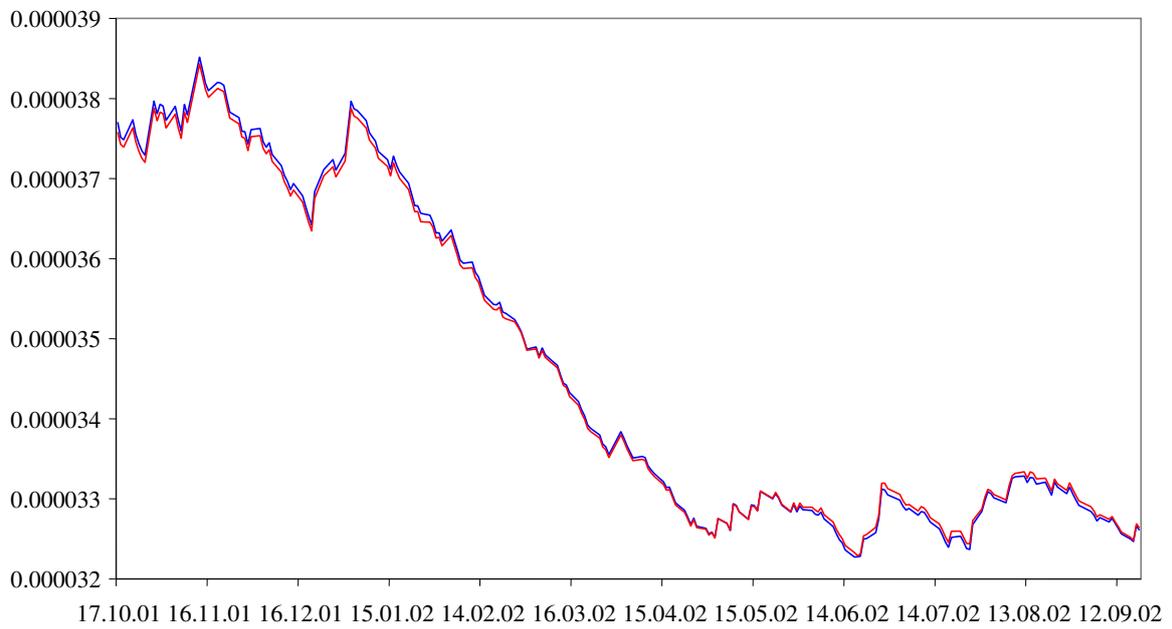
Graphique No. 4 La Dynamique de la Variance Historique



Graphique No. 5 La Dynamique de la Variance Historique - Partie Continue



Graphique No. 6 La Variance Historique et La Variance Calculée a Partir du Modèle  
Partie continue



## **Bibliographie**

1. K. K. Aase and P. Guttorp: Estimation in Models for Security Prices. *Scandinavian Actuarial Journal*, (1987), 213 – 223.
2. V. Akgiray and G. G. Booth: Mixed Diffusion – Jump Process Modeling of Exchange Rate Movements. *Review of Economics and Statistics*, (1988), 631 – 637.
3. C. Ball and W. N. Torus: On Jumps in Common Stock Prices and Their Impact on Call Option Pricing. *Journal of Finance*, 1 (1985), 155 – 173.
4. D. S. Bates: Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Option. *Review of Financial Studies*, 1 (1996), 69 – 107.
5. P. Boothe and D. Glassman: The Statistical Distribution of Exchange Rates. Empirical Evidence and Economic Implications. *Journal of International Economics*, 22 (1987), 297 – 319.
6. C. Chilarescu: *Modélisation du comportement et du risque des actifs financiers roumains et des facteurs explicatifs*. Edition de l'Université de Timisoara, 1996.
7. I. Domowitz and C. S. Hakkio: Conditional Variance and the Risk Premium in the Foreign Exchange Market. *Journal of International Economics*, 19 (1985) 47 – 66.
8. S. Herzel: A Simple Model for Option Pricing with Jumping Stochastic Volatility. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 4 (1998), 487 – 505.
9. D. A. Hsieh: The Statistical Properties of Daily Foreign Exchange Rates : 1974 – 1983. *Journal of International Economics*, 24 (1988), 129 – 145.
10. N. Ikeda and S. Watanabe: *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. North – Holland, 1981.
11. R. Jarrow and E. Rosenfeld: Jump Risk and the Intertemporal Capital Asset Pricing Model. *Journal of Business*. 57 (1984), 337 – 351.

12. Ph. Jorion: On Jump Processes in the Foreign Exchange and Stock Markets. *Review of Financial Studies*, 4 (1988), 427 – 445.
13. I. Karatzas and S. E. Shreve: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer Verlag, 1988.
14. M. J. Kim, Y. H. Oh and R. Brooks: Are Jumps in Stock Return Diversifiable ? Evidence and Implication for Option Pricing. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, (1994), 609 – 631.
15. R. E. Quandt and J. B. Ramsey: Estimating Mixtures of Normal Distributions and Switching Regressions. *Journal of the American Statistical Association*, 364 (1978), 730 – 752.
16. A. L. Tucker and L. Pond: The Probability Distribution of Foreign Exchange Price Changes : Tests of Candidate Processes. *Review of Economics and Statistics*, (1988), 638 – 647.
17. H. von Weizsacker and G. Winkler: *Stochastic Integral*. Vieweg Advanced Lectures in Mathematics, 1990.
18. N. Zamfirescu et C. Chilarescu: Estimation des paramètres d'un mélange de lois normales provenant d'un modèle saut – diffusion à volatilité stochastique à deux états. *Journal de la Société Statistique de Paris*, 2 (1998).