Interval analysis of distributions and ruptures

Harin, Alexander

Moscow Institute of Physics and Technology, Modern University for the Humanities

31 December 2011

Интервальный анализ распределений и разрывы

Александр Александрович Харин
Московский физико-технический институт
Современная Гуманитарная Академия
Москва

Аннотация. *В статье представлены начала систематического изложения нового направления интервального анализа: “Интервальный анализ распределений”. В объеме статьи представлены примеры, условия, ряд формул и вывод некоторых формул. Получены т.н. “Кольцо формул” и обобщенные формулы Новоселова. В рамках интервального анализа распределений рассмотрены разрывы для средних значений величин. Интервальный анализ распределений может быть использован в т.ч., в математической статистике, теории вероятностей, экономике, теории полезности, моделировании, прогнозировании, распознавании, анализе Интернет-распределений.*

Ключевые слова. *Интервальный анализ, неопределённость, распределения, моменты распределений, средние значения, экономика, теория полезности.*

1 Введение

Интервальный анализ – одно из важных направлений математики; весомо и практическое значение интервального анализа (см., напр., [1]). Однако, как отмечено в [2], “… применение интервального анализа часто дает неудовлетворительные результаты из-за чрезмерных длин получаемых интервалов.” Кроме того, до настоящего времени недостаточное внимание уделялось вопросам, касающимся интервалов моментов распределений, в т.ч., интервалов средних значений.

В настоящей статье рассматриваются (в целом неизвестные) распределения величин и интервалы их моментов. Показано, что, при наличии достаточно скудной информации интервального характера о распределении некоторой величины, можно содержательно применять интервальный анализ для интервалов ее моментов, в т.ч. можно получить ряд полезных формул и дополнительные ограничения для параметров интервалов моментов распределения этой величины.

Излагаемый подход позволяет начать формирование нового направления интервального анализа: “Интервальный анализ распределений”. Интервальный анализ распределений как направление сформировался при рассмотрении разрывов [3], [4]. Настоящая статья подготовлена на основании [5].

Интервальный анализ распределений может быть использован, в т.ч., в математической статистике, теории вероятностей, при расчетах Интернет-распределений, в экономике, в т.ч. в теории полезности, в моделировании и прогнозировании.

2 Примеры применения

2.1 Небоскреб

В качестве одного из примеров по теме статьи может быть рассмотрен расчет интервала положения центра тяжести небоскреба (см. рис. 1 и 2) для оценки устойчивости небоскреба при сильном ветре, ураганах, подземных толчках и т.п.:

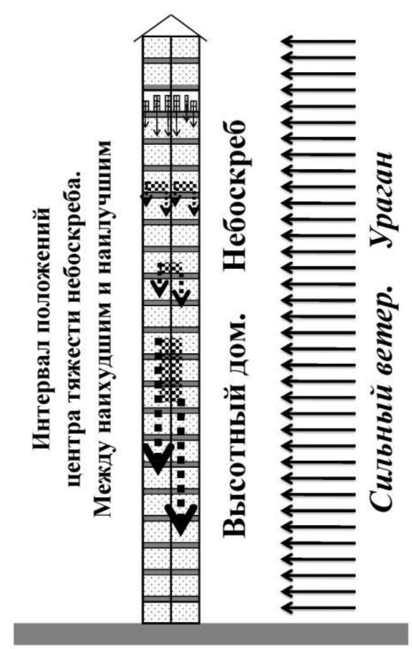

Рис. 1. Интервал положений центра тяжести небоскреба.

1. В каждой комнате каждого этажа небоскреба может находиться некоторое количество тяжестей (люди, мебель и др.) в интервале от нуля (от веса стен, пола и потолков) до некоторого максимального веса. Таким образом, для каждых нескольких этажей, как части небоскреба, центр их тяжести заключен в пределах некоторого одномерного вертикального интервала.

Если центр тяжести каждой части небоскреба заключен в пределах одномерного вертикального интервала, то очевидно, что центр тяжести всего небоскреба тоже будет заключен в пределах некоторого (в общем случае – другого по размеру) одномерного вертикального интервала.

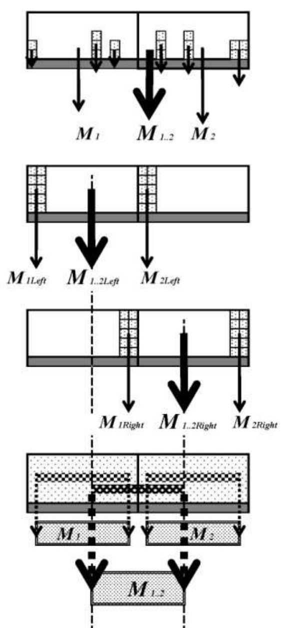

Рис. 2. Формирование интервалов положений центров тяжести комнат и этажа.

2. Люди, мебель и другие тяжести могут произвольно перемещаться в пределах интервалов комнат небоскреба. Таким образом, для каждой комнаты, как для элемента небоскреба, центр тяжести заключен в пределах некоторого двумерного горизонтального интервала.

Если центр тяжести каждого элемента небоскреба заключен в пределах двумерного горизонтального интервала, то очевидно, что центр тяжести всего небоскреба тоже будет заключен в пределах некоторого (в общем случае – другого по размерам) двумерного горизонтального интервала.

3. Таким образом, центр тяжести всего небоскреба будет заключен в пределах некоторого трехмерного интервала.

На рисунке 1 схематично изображен небоскреб. Для простоты показаны всего по две комнаты на этаже. В комнатах одною из этажей схематично показаны примеры расположения тяжестей. В остальных комнатах расположение тяжестей известно только с точностью до некоторого интервала.

Сплошными стрелками схематично показаны веса и точки положения центров тяжести отдельных предметов на том этаже, для которого точно известно расположение тяжестей. Заштрихованными интервалами схематично показаны интервалы положения центров тяжести двух комнат, этажа и всего небоскреба. Очевидно, что в пределах каждого интервала наихудшим положением центра тяжести будет левая (дальняя от ветра) верхняя точка, а наилучшим положением центра тяжести будет правая (ближняя к ветру) нижняя точка. Пунктирными стрелками схематично показаны веса в наихудших и наилучших положениях центров тяжести двух комнат, этажа и всего небоскреба.

На рисунке 2 укрупненно изображено формирование интервалов центров тяжести первой (левой) и второй (правой) комнат и всего этажа. Для простоты, во внимание принимается только одна горизонтальная (слева направо) координата и полагается, что общий вес тяжестей одинаков для каждой из обеих комнат.

Рисунок 2 состоит из четырех фрагментов:

1) На первом сверху фрагменте сплошными стрелками схематично показаны веса и точки положения центров тяжести отдельных предметов, центров тяжести первой $\boldsymbol{M_1}$ и второй $\boldsymbol{M_2}$ комнат и всего этажа $\boldsymbol{M_{1..2}}$, для которого точно известно расположение тяжестей.

2) На втором фрагменте сплошными стрелками схематично показаны веса и точки положения центров тяжести первой $\boldsymbol{M_{1Left}}$ и второй $\boldsymbol{M_{2Left}}$ комнат и всего этажа $\boldsymbol{M_{1..2Left}}$, для случая, когда все тяжести смещены максимально влево.

3) На третьем фрагменте сплошными стрелками схематично показаны веса и точки положения

центров тяжести первой M_{1Right} и второй M_{2Right} комнат и всего этажа $M_{1..2Right}$, для которого точно известно расположение тяжестей, для случая, когда все тяжести смещены максимально вправо.

Очевидно, в рамках каждого интервала, наихудшим положением центра тяжести будет крайняя левая, а наилучшим – крайняя правая точка.
Очевидно, что для каждой комнаты интервал возможных положений центра тяжести комнаты расположен между этими крайними левой и правой точками. Поскольку центр тяжести этажа является суммой центров тяжести комнат, то его возможные положения будут представлять собой интервал так же, как и положения центров тяжести комнат.

4) На четвертом сверху, нижнем фрагменте заштрихованными интервалами схематично показаны интервалы положения центров тяжести первой и второй комнат и всего этажа, для которого неизвестно точное расположение тяжестей. Пунктирными стрелками схематично показаны веса в наихудших и наилучших положениях центров тяжести двух комнат и всего этажа.

Таким образом, если известны общие веса тяжестей, и известны только предельные, крайние возможные положения этих тяжестей в комнатах, то положения центров тяжести комнат и всего этажа будут представлять собой интервалы. Знание интервалов центров тяжести всех комнат позволяет рассчитать интервалы центров тяжести этажей и всего небоскреба и оценить его устойчивость.

2.2 Опломбированный автофургон

Пусть имеются высокие, крытые, пломбируемые автофургоны. Пусть регулярно ставится задача максимально быстро и полно загружать их коробками с грузами и максимально быстро перегонять их из города в город по дороге с частыми крутыми поворотами.
Загрузка ведется в разных складах и разными грузчиками. Коробки примерно одинаковы по размерам (или отличаются по размерам в 2 или 4 раза), то есть ряды по размерам примерно равные. Коробки достаточно прочные и грузы не чрезмерно тяжелые, так что любую коробку можно ставить на любую высоту. Загрузка ведется строго последовательно по рядам от пола до потолка в порядке (произвольной) подачи коробок. Из города в город машину ведет другой водитель. Известен максимальный угол для поворотов дороги.
Для каждого рейса известен свой максимальный и минимальный вес одного коробко-места и общий вес автофургона.
Таким образом, получаем задачу, в которой имеет место произвольное интервальное распределение весов коробок по вертикали и по горизонтали в опломбированном автофургоне. Требуется для каждого рейса найти свою максимальную скорость, с которой можно проезжать частые повороты так, чтобы автофургон не перевернулся.
Эта задача об автофургоне аналогична предыдущей задаче о нахождении интервала положения центра тяжести небоскреба.

2.3 Другие области возможного применения

Аналогичные расчеты, оценки оптимального территориального распределения магазинов, пунктов услуг, размеров автостоянок, ширины трасс и т.п. могут проводиться при строительстве и расширении городов и поселков и улучшении их инфраструктуры; а также для сетей магазинов, автозаправок, сервисов и т.п. крупных фирм; а также для расчета, оценки места наилучшего расположения своего магазина, автозаправки, пункта обслуживания и т.п. малой и средней фирмой при планировании размещения своей единственной, или одной из немногих точек и т.п.
Аналогичные расчеты, оценки оптимального расположения громкоговорителей, колонок, точек питания, услуг, и т.п. могут проводиться при планировании массовых мероприятий.
Аналогичные расчеты, оценки могут применяться при составлении расписаний, например, занятий в ВУЗах, движения поездов и т.п.
Аналогичные расчеты, оценки графиков нагрузок, расхода в течение дня, недели, года могут проводиться обслуживающими ведомствами, организациями и фирмами по таким видам потребления, услуг, как вода, электричество, топливо, питание, товары, перевозки и т.п.
Интервальный анализ распределений может выполняться для текста, речи, музыки, изображений и т.п. и для их машинного распознавания, преобразования и создания [6], [7].
Интервальный анализ распределений может выполняться для анализа объектов сети Интернет [8].
Интервальный анализ распределений может выполняться для анализа экономических распределений и в теории полезности [3], [4], [5].

3 Общие условия

Пусть на некотором отрезке $[A, B]$ дана некоторая величина (распределение плотности (относительных) весов (weights)) $\{w(x_k)\}$: $k=1, 2, \ldots K$: $1 \le K \le \infty$ и

$$\sum_{k=1}^{K} w(x_k) = W < \infty .$$

По умолчанию будем считать

$$W = 1 ,$$

то есть веса $w(x_k)$ (и далее w_k) будем считать относительными.

Пусть величина $\{w(x_k)\}$ известна с точностью до некоторой системы элементарных смежных интервалов $\{\boldsymbol{X}_i\}$: $i=1, 2, \ldots I$:

$2 \le I < \infty$, $\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2 + \ldots + \boldsymbol{X}_I = \boldsymbol{X}_{1..I} \equiv [A, B]$

$$A \equiv \underline{X_{1..I}} = \underline{X_1} < \overline{X_1} = \underline{X_2} \ldots < \overline{X_I} = \overline{X_{1..I}} \equiv B .$$

Веса элементарных интервалов $\{\boldsymbol{X}_i\}$ по определению равны

$$\sum_{x_k \in X_i} w(x_k) \equiv w_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{I} w_i = W = 1 .$$

Важно, что для получения величины общего веса W достаточно выполнить всего одно дополнительное измерение либо общего отрезка $\boldsymbol{X}_{1..I} \equiv [A, B]$, либо последнего (неизмеренного) элементарного интервала (при оптимальном расположении элементарных интервалов). То есть, для применения интервального анализа распределений достаточно, чтобы для исследуемой величины $\{w(x_k)\}$ ее общий вес был известен, или мог быть измерен, вычислен, оценен, и т.п. на отрезке $[A, B]$ в целом и мог быть в целом измерен не менее, чем на одном элементарном интервале, принадлежащем $[A, B]$.

Определим среднее значение M величины $\{w(x_k)\}$

$$M \equiv \sum_{k=1}^{K} x_k w(x_k) .$$

В общем случае, это среднее значение известно с точностью до некоторого интервала $\boldsymbol{M}$.

Заметим, что суммирование величины на смежных интервалах в точках пересечения этих интервалов, во избежание двойного суммирования, должно производиться только один раз. Например, величина в точке пересечения суммируется только для левого (нижнего) интервала.

Заметим, что возможен анализ и для несмежных интервалов.

4 Система интервалов

4.1 Средние значения

Пусть дана система интервалов $\{\boldsymbol{X}_i\}$: $i=1, 2, \ldots, I$: $I < \infty$. Пусть эта система интервалов удовлетворяет условиям раздела 3.

Рассчитаем интервал средних значений $\boldsymbol{M}_{1..I}$ для общего, объединенного интервала $\boldsymbol{X}_{1..I} \equiv [A, B]$:

Для левого конца интервала $\boldsymbol{M}_{1..I}$ получаем через веса

$$\underline{M_{1..I}} = \sum_{i=1}^{I} \underline{X_i} w_i =$$

$$\underline{X_1}(w_1 + \sum_{i=2}^{I} w_i - \sum_{i=2}^{I} w_i) + \sum_{i=2}^{I} \underline{X_i} w_i = ,$$

$$= \underline{X_{1..I}} + \sum_{i=2}^{I} w_i \sum_{m=1}^{i-1} wid\, X_m$$

или через ширины получаем

$$\underline{M_{1..I}} = \underline{X_{1..I}} + \sum_{i=2}^{I} w_i \sum_{m=1}^{i-1} wid\, X_m =$$

$$= \underline{X_{1..I}} + \sum_{i=1}^{I-1} wid\, X_i \sum_{m=i+1}^{I} w_m .$$

Для правого конца интервала $\boldsymbol{M}_{1..I}$ через веса получаем

$$\overline{M_{1..I}} = \sum_{i=1}^{I} \overline{X_i} w_i =$$

$$= \overline{X_{1..I}} - \sum_{i=1}^{I-1} w_i \sum_{m=i+1}^{I} wid\, X_m ,$$

или через ширины получаем

$$\overline{M_{1..I}} = \overline{X_{1..I}} - \sum_{i=1}^{I-1} w_i \sum_{m=i+1}^{I} wid\, X_m =$$

$$= \overline{X_{1..I}} - \sum_{i=2}^{I} wid\, X_i \sum_{1}^{m=i-1} w_m .$$

4.2 Разрывы

Если ширина элементарных интервалов не может быть меньше некоторой ненулевой величины $widX_{Min}>0$ и вес этих интервалов не может быть меньше некоторой ненулевой величины $w_{Min}>0$, то это приводит к наличию ненулевых разрывов между областью средних значений и границами общего интервала

$$R_{Left} \equiv Min(\underline{M}_{1..I} - \underline{X}_{1..I}) = \\ = \frac{I(I-1)}{2} w_{Min} wid\, X_{Min}$$

и

$$R_{Right} \equiv Min(\overline{X}_{1..I} - \overline{M}_{1..I}) = \\ = \frac{I(I-1)}{2} w_{Min} wid\, X_{Min}$$

и

$$R_{Left} = R_{Right} = \frac{I(I-1)}{2} w_{Min} wid\, X_{Min} > 0,$$

то есть, между областью, внутри которой может быть расположен интервал средних значений $\boldsymbol{M}_{1..3}$, и любой из границ общего интервала $\boldsymbol{X}_{1..3}$, при этих условиях, существует ненулевой разрыв. При этом крайнее левое, например, положение области средних значений достигается при следующих условиях: Ширины интервалов равны $widX_1=widX_2=\ldots=widX_{I-1}=widX_{Min}$ и $widX_I=widX_{1..I}-(I-1)widX_{Min}$. Веса интервалов равны $w_2=w_3=\ldots=w_I=w_{Min}$ и $w_1=1-(I-1)w_{Min}$. Веса сконцентрированы на левых краях интервалов.

4.3 «Кольцо» формул

Ширина интервала $\boldsymbol{M}_{1..I}$ равна (через веса)

$$\overline{M}_{1..I} - \underline{M}_{1..I} = wid\, X_{1..I} - \sum_{i=1}^{I} w_i \sum_{m=1,..,N|m\neq i} wid\, X_m$$

или (через ширины)

$$\overline{M}_{1..I} - \underline{M}_{1..I} = wid\, X_{1..I} - \sum_{i=1}^{I} wid\, X_i \sum_{m=1,..,N|m\neq i} w_m$$

или, по формуле Новоселова,

$$\overline{M}_{1..I} - \underline{M}_{1..I} = \sum_{i=1}^{I} w_i \overline{X}_i - \sum_{i=1}^{I} w_i \underline{X}_i = \\ = \sum_{i=1}^{I} w_i wid\, X_i \quad .$$

Можно показать, что три вышеприведенные формулы для ширины интервала средних значений могут быть преобразованы друг в друга:

$$wid\, X_{1..I} - \sum_{i=1}^{I} wid\, X_i \sum_{m=1,..,N|m\neq i} w_m = \\ = wid\, X_{1..I} - \sum_{i=1}^{I} wid\, X_i\, (1-w_i) = \sum_{i=1}^{I} wid\, X_i\, w_i$$

и

$$\sum_{i=1}^{I} w_i wid\, X_i = \sum_{i=1}^{I} w_i (wid\, X_{1..I} - \sum_{m=1,..,N|m\neq i} wid\, X_m) = \\ = wid\, X_{1..I} - \sum_{i=1}^{I} w_i \sum_{m=1,..,N|m\neq i} wid\, X_m$$

Таким образом, мы получили «кольцо» из трех формул для ширины интервала средних значений

$$\sum_{i=1}^{I} w_i wid\, X_i = \\ = wid\, X_{1..I} - \sum_{i=1}^{I} w_i \sum_{m=1,...,N|m\neq i} wid\, X_m = \\ = wid\, X_{1..I} - \sum_{i=1}^{I} wid\, X_i \sum_{m=1,...,N|m\neq i} w_m$$

Оно может быть записано и в упрощенной форме

$$\sum_{i=1}^{I} w_i wid\, X_i = \\ = wid\, X_{1..I} - \sum_{i=1}^{I} w_i (wid\, X_{1..I} - wid\, X_i) = \\ = wid\, X_{1..I} - \sum_{i=1}^{I} wid\, X_i (1-w_i)$$

4.4 Интервалы моментов

Рассчитаем интервалы моментов распределений $\boldsymbol{E}_{1..I}(X\text{-}X_0)^n$ при $n\geq 2$. Из формулы Новоселова получаем обобщенные формулы Новоселова:
Для нечетных степеней n - для любых x_0, а для четных степеней n - только для $x_0\leq A$ и $x_0\geq B$

$$wid\, E(X-X_0)_{1..I}{}^n \equiv$$

$$\equiv \overline{E(X-X_0)_{1..I}{}^n} - \underline{E(X-X_0)_{1..I}{}^n} =$$

$$= \sum_{i=1}^{I} w_i(\overline{X_i}-x_0)^n - \sum_{i=1}^{I} w_i(\underline{X_i}-x_0)^n =$$

$$= \sum_{i=1}^{I} w_i((\overline{X_i}-x_0)^n - (\underline{X_i}-x_0)^n)$$

Для четных степеней n, при $A\leq x_0\leq B$, минимальные значения моментов достигаются, когда вес одного или двух интервалов сконцентрирован в точке x_0.
Рассмотрим $h : 1\leq h\leq I$. Если

$$\underline{X_h} < x_0 < \overline{X_h}$$

тогда

$$wid\, E(X-X_0)^n{}_{1..I} =$$

$$= w_h Max((\overline{X_h}-x_0)^n;(\underline{X_h}-x_0)^n) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{h-1} w_i((\underline{X_i}-x_0)^n - (\overline{X_i}-x_0)^n) +$$

$$+ \sum_{i=h+1}^{I} w_i((\overline{X_i}-x_0)^n - (\underline{X_i}-x_0)^n)$$

Если

$$x_0 = \overline{X_h} = \underline{X_{h+1}}$$

тогда

$$wid\, E(X-X_0)^n{}_{1..I} =$$

$$= w_h(\underline{X_h}-\overline{X_h})^n + w_{h+1}(\overline{X_{h+1}}-\overline{X_h})^n +$$

$$+ \sum_{i=1}^{h-1} w_i((\underline{X_i}-\overline{X_h})^n - (\overline{X_i}-\overline{X_h})^n) +$$

$$+ \sum_{h+1}^{I} w_i((\overline{X_i}-\overline{X_h})^n - (\underline{X_i}-\overline{X_h})^n)$$

Для интервалов центральных моментов распределений $\boldsymbol{E}_{1..I}(X\text{-}M)^n$ положения среднего значения M могут различаться для минимальных и максимальных значений $\boldsymbol{E}_{1..I}(X\text{-}M)^n$.

5 Заключение

В статье представлены начала интервального анализа распределений, в т.ч. анализ разрывов. Интервальный анализ распределений может быть использован, в т.ч., в теории вероятностей, моделировании, прогнозировании и в экономике.

Литература

[1] С.П. Шарый. Конечномерный интервальный анализ. Издательство “XYZ”, Новосибирск, 2010.

[2] Б.С. Добронец. Интервальная математика. Издательство КГУ, Красноярск, 2004.

[3] А. А. Харин. Интервальный анализ. Теоремы о существовании разрывов для числовых отрезков и для шкалы вероятностей. X Международная конференция по финансово-актуарной математике и эвентоконвергенции технологий, 2011.

[4] А. А. Харин. Разрывы в шкале вероятностей. Интервальный анализ. Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», Новосибирск, 2011.

[5] А. А. Харин. Об интервальном анализе распределений. Доклад представлен на XI Международную конференцию по финансово-актуарной математике и эвентологии безопасности, 2012.

[6] А. А. Харин. Интервальный анализ распределений. Интервальные образы текста, речи, музыки, изображений и видеоинформации. Труды 54-й научной конференции МФТИ, Москва, 2011.

[7] А. А. Харин. Интервальные картины и образы. Использование для предварительного анализа и распознавания. XIX Международная конференция "Математика. Компьютер. Образование", 2012 (Принято к публикации).

[8] А. А. Харин. Теорема об интервальности неполных знаний. Введение в интервальный анализ распределений. Анализ Интернет-поиска. XIX Международная конференция "Математика. Компьютер. Образование", 2012 (Принято к публикации).