Notes on consumption theory

Travaglini, Giuseppe

Università di Urbino Carlo Bo

23 January 2012

Note sulla Teoria del Consumo

Giuseppe Travaglini
Università di Urbino "Carlo Bo"
Dipartimento di Economia Società e Politica
Via Saffi 42, 61029, Urbino (PU), Italy
E-mail: giuseppe.travaglini@uniurb.it,

Parte Prima.

Consumo intertemporale in condizioni di certezza

1 Introduzione

In questo capitolo presentiamo gli elementi base della teoria intertemporale del consumo. Studiare il meccanismo che governa le decisioni di consumo intertemporale è fondamentale per capire quale relazione dinamica lega l'evoluzione del reddito a quella del consumo; per analizzare come le variazioni transitorie, e/o permanenti, del reddito si riflettano sulle scelte di risparmio; e, infine, per indagare come le decisioni di consumo corrente possano direttamente e indirettamente influenzare l'evoluzione e la stabilità dei mercati finanziari.

Chiaramente, la rappresentazione analitica di questi complessi processi decisionali richiede l'adozione di rappresentazioni semplificate, che volta per volta, aiutino a focalizzare un elemento oppure un aspetto, tra i tanti, che caratterizzano la decisione di consumo. Se questo metodo di lavoro può, talvolta, limitare il realismo del modello, tale approccio consente altresì di distinguere il ruolo dei diversi fattori che influenzano la decisione di consumo.

Per tale motivo, questi appunti iniziano con l'analisi delle decisioni intertemporali di consumo in un modello biperiodale e in condizioni di certezza. Come vedremo, questo modello base ha in sé tutte le caratteristiche delle rappresentazioni più complesse: i modelli di consumo intertemporale con un più lungo orizzonte di programmazione, a tempo discreto e a tempo continuo, condividono difatti le medesime proprietà. L'assenza d'incertezza consente, infine, di approfondire il significato dell'equazione di Eulero e di apprezzare la sua centralità nel processo che conduce alla scelta ottimale intertemporale; di capire l'importanza della condizione di trasversalità; di analizzare il ruolo del reddito permanente nella funzione del consumo, ed, infine, di interpretare l'evoluzione temporale del risparmio e delle scelte di portafoglio.

2 Consumo intertemporale su due periodi

Consideriamo un individuo che viva per due soli periodi e che debba decidere come allocare il suo consumo tra il periodo corrente e quello futuro. Tutte le decisioni sono prese in assenza d'incertezza. Assumiamo che le scelte (intertemporali) di consumo siano il risultato di un problema di massimizzazione dell'utilità, e, inoltre, che non ci sia alcuna componente ereditaria ad influenzare il piano di consumo. Al tempo corrente $t = 0$, l'individuo ha una ricchezza iniziale data pari ad a_0, e riceve il reddito da lavoro y_0. Il reddito del periodo successivo $t = 1$ è conosciuto con certezza e pari a y_1. Supponiamo che esista un mercato del credito dove si possa prendere e dare a prestito. Infine, assumiamo che tutti i mercati siano efficienti e perfettamente concorrenziali.

Poichè il consumatore, solitamente, non destina tutte le sue risorse finanziarie al consumo corrente, indichiamo con $a_0 + y_0 - c_0$, il risparmio iniziale, essendo c_0 il consumo dello stesso periodo. Infine, chiamiamo r il tasso d'interesse di mercato che si riceve sul risparmio. Possiamo dunque scrivere che la ricchezza a_t è in:

$$t = 0 : a_0 \tag{1}$$
$$t = 1 : a_1 = (1 + r)(a_0 + y_0 - c_0) \tag{2}$$
$$t = 2 : a_2 = (1 + r)(a_1 + y_1 - c_1) \tag{3}$$

- Le tre relazioni scritte sopra rappresentano la ricchezza complessiva che il consumatore-risparmiatore ha a disposizione in ogni periodo. Poichè, però, nel nostro esempio, si è ipotizzato che l'individuo viva per due soli periodi e non vi siano lasciti ereditari, la ricchezza finale in $t = 2$ deve essere $a_2 \leq 0$. Nel nostro ipotetico mondo, difatti, non è ottimizzante lasciare una ricchezza positiva in $t = 1$ (assioma di non sazietà!). In altri termini, stiamo implicitamente assumendo che ogni individuo voglia massimizzare il proprio consumo intertemporale, e che non esista alcun fattore di solidarietà intergenerazionale che lo incentivi a risparmiare per incrementare il benessere dei propri discendenti.

- Oltre ciò, al tempo $t = 2$, deve essere anche verificato che la ricchezza finale sia $a_2 \geq 0$ affinchè sia esclusa la possibilità di avere debiti da onorare al termine dell'orizzonte di programmazione (in $t = 1$ termina di vivere!). In altre parole, non è possibile sostenere il consumo con un crescente grado d'indebitamento (le così dette piramidi finanziarie).

Queste due condizioni insieme implicano che:

$$a_2 = 0 \tag{4}$$

che denominiamo *condizione finale di trasversalità*. Sostituendo nella (3) si ha che in $t = 2$:

$$a_1 = c_1 - y_1 \tag{5}$$

Sostituendo, poi, per a_1 nella (2) si ottiene che in $t = 1$:

$$c_1 - y_1 = (1 + r)(a_0 + y_0 - c_0) \tag{6}$$

ovvero il *vincolo di bilancio intertemporale*:

$$c_0 + \frac{c_1}{1 + r} = a_0 + y_0 + \frac{y_1}{1 + r} \tag{7}$$

La relazione (7) ci assicura che il *valore attuale* del consumo nei due periodi non può essere diverso dal valore attuale della ricchezza complessiva, ossia dalla somma della ricchezza iniziale a_0 con il valore scontato dei redditi da lavoro che si ricevono nei due periodi. Questo significa che se, come nel nostro esempio, il prezzo del consumo corrente è pari a 1, il prezzo del consumo futuro al tempo corrente è $\frac{1}{1+r}$: tale fattore di sconto rappresenta il numero di unità di consumo futuro (e quindi di reddito reale) a cui il consumatore deve rinunciare per incrementare il suo consumo corrente di una unità.

Nella figura 1 è rappresentata la retta del vincolo di bilancio intertemporale (7) sotto l'ipotesi $a_0 = 0$. Tale retta è decrescente con una pendenza, in valore assoluto, pari a $(1 + r)$ che misura il fattore d'interesse. Il punto D individua la dotazione del reddito sui due periodi, ovvero (y_0, y_1). Le due intercette lungo l'asse delle ascisse e quello delle ordinate sono rispettivamente pari a $y_0 + y_1/(1 + r)$ e $(1 + r)y_0 + y_1$. Più precisamente, se il consumatore intende spendere tutta la dotazione intertemporale nel secondo periodo allora $c_0 = 0$ e $c_1 = (1+r)y_0+y_1$. Se invece l'individuo è impaziente e desidera consumare tutto al tempo corrente $c_1 = 0$ e $c_0 = y_0 + y_1/(1 + r)$. Chiaramente, tutti gli altri punti lungo la retta di bilancio identificano le combinazioni intertemporali di consumo che possono essere sostenute dato il valore attuale della dotazione di reddito.

2.1 L'allocazione ottimale

Sia $u(c_0, c_1)$ la funzione di utilità che rappresenta le preferenze individuali tra il consumo corrente e quello futuro. Assumiamo che l'utilità marginale sia decrescente. Il problema di massimizzazione può essere scritto come:

$$\begin{aligned} & \max_{c_0, c_1} u(c_0, c_1) \\ \text{s.c.} \quad : \quad & c_0 + \frac{c_1}{1 + r} = a_0 + y_0 + \frac{y_1}{1 + r} \equiv a_0 + h_0 \end{aligned}$$

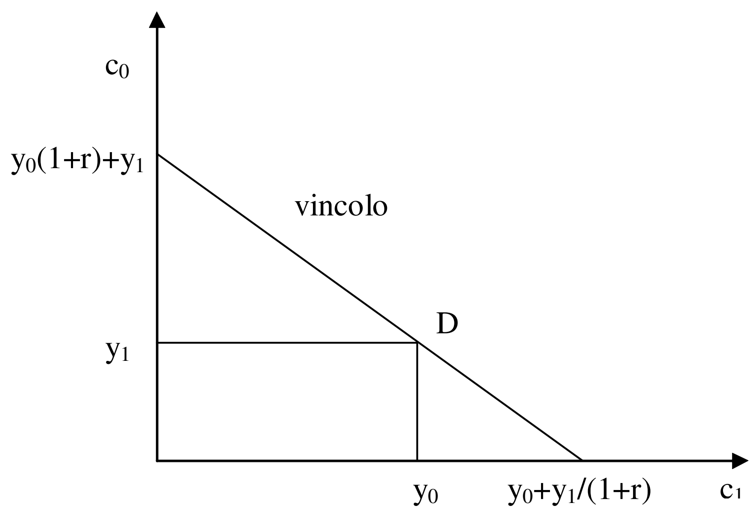

Figure 1: Il vincolo di bilancio intertemporale

con $h_0 \equiv y_0 + \frac{y_1}{1+r}$, a_0 dato, $a_2 = 0$ e $c_{0,}c_1 > 0$. La Lagrangiana corrispondente è:

$$L = u\left(c_0, c_1\right) + \lambda\left(a_0 + h_0 - c_0 - \frac{c_1}{1+r}\right) \tag{8}$$

Come di consueto la condizione di ottimo richiede che il saggio marginale di sostituzione intertemporale (SMS) sia uguale al rapporto tra i prezzi, ossia:

$$\frac{u_{c_0}}{u_{c_1}} = (1+r) \tag{9}$$

dove $u_{c_0} = \frac{\partial u}{\partial c_0}$ e $u_{c_1} = \frac{\partial u}{\partial c_1}$, da cui segue che:

$$u_{c_0} = (1+r)\, u_{c_1} \tag{10}$$

Questa relazione è nota come *Equazione di Eulero.* Nel punto di tangenza (vedi figura 2) che individua la combinazione ottima del consumo presente e futuro l'inclinazione della curva di indifferenza è uguale alla pendenza del vincolo. Essa esprime il fatto che la scelta intertemporale di consumo è ottima quando il valore marginale del consumo tra due periodi consecutivi, ponderato con il fattore di interesse, è uguagliato al margine. In altri termini, un decremento del consumo corrente pari a dc_0 aumenta l'utilità marginale in $t = 0$, e riduce quella futura del valore $(1+r)\, u_{c_1}$, poichè in $t = 1$ il consumo aumenta di un ammontare pari a $(1+r)\, dc_0 > 0$.

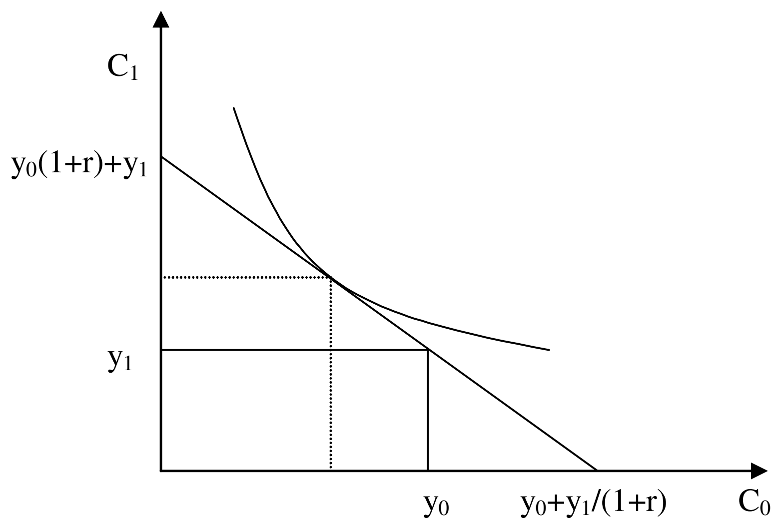

Figure 2: L'ottimo intertemporale

Esempio 1. *Funzione di utilità additiva e separabile.*
Supponi $u(c_0, c_1)$ sia del tipo:

$$u(c_0, c_1) = u(c_0) + \frac{1}{1+\delta} u(c_1)$$

dove δ misura il grado d'impazienza verso il consumo. Le condizioni del primo ordine per il problema (8) sono:

$$\begin{aligned} u_{c_0} &= \lambda \\ u_{c_1} &= \lambda \frac{1+\delta}{1+r} \end{aligned}$$

Combinando queste due relazioni si ottiene la seguente Equazione di Eulero:

$$\frac{u_{c_0}(1+\delta)}{u_{c_1}} = 1 + r$$

la quale implica che nel punto di ottimo il SMS tra il consumo nei due periodi è uguale al saggio marginale di trasformazione, ovvero $(1 + r)$.

Si osservi, che per $u(c_t) = \ln c_t$ la precedente condizione diviene:

$$c_1 = \left(\frac{1+r}{1+\delta}\right) c_0$$

Questa espressione è utile perchè ci informa del fatto che quando:

- $r = \delta$, il consumo è costante nel tempo;
- $r > \delta$, allora $c_1 > c_0$ implicando che il consumo cresce nel tempo. Difatti, se il rendimento del risparmio è sufficientemente elevato, in particolare più alto del tasso individuale di sconto δ, al consumatore conviene procrastinare il consumo al futuro: in questo modo potrà aumentare il consumo in $t = 1$ abbastanza da compensare la sua impazienza.
- $r < \delta$, allora $c_1 < c_0$ implicando che il profilo intertemporale di consumo è decrescente. In altri termini, il tasso di rendimento r non è sufficientemente elevato per compensare l'impazienza verso il consumo misurata da δ.

Esempio 2. *Funzione di utilità Cobb-Douglas.*
Supponiamo che la funzione del consumo sia:

$$u(c_0, c_1) = c_0 c_1$$

che $a_0 = 0$, e che il reddito nei due periodi sia $y_0 = 10$ e $y_1 = 30$. Si ipotizzi inoltre che $r = 0.2$, e che il vincolo di bilancio sia dato dall'espressione (7). La condizione di ottimo è dunque:

$$SMS = \frac{c_1}{c_0} = 1.02$$

Si tratta quindi di risolvere il seguente sistema nelle incognite c_0 e c_1:

$$\begin{aligned} \frac{c_1}{c_0} &= 1.02 \\ c_0 + \frac{c_1}{1.02} &= 10 + \frac{30}{1.02} \end{aligned}$$

La soluzione è $c_0 = 19.7$ e $c_1 = 20.1$. Il risultato implica che il consumatore trova ottimale prendere a prestito nel primo periodo ($c_0 > y_0$), restituendo il credito iniziale (pari a 9.7) nel secondo periodo, aumentato dagli interessi passivi (ossia$(c_0 - y_0)(1 + r) = 9.7(1.02) = 9.9$). Questo spiega perchè in $t = 0$ il consumo è pari ha $c_1 = y_1 - (c_0 - y_0)(1 + r) = 20.1$.

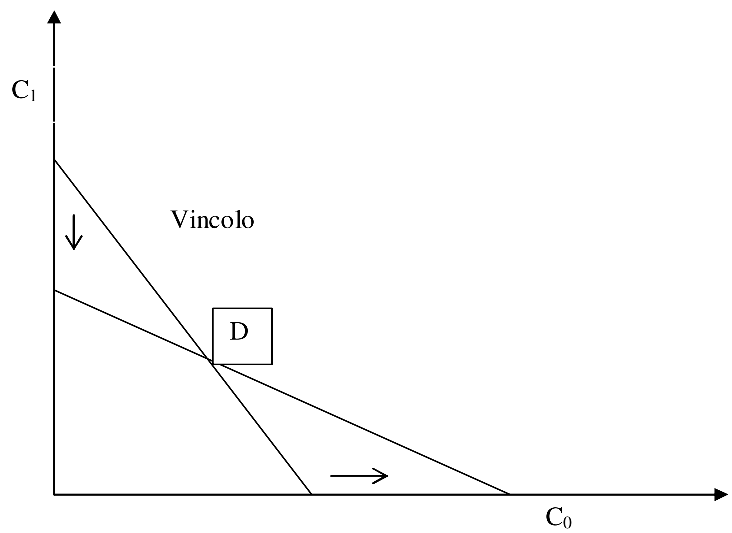

Figure 3: Gli effetti di una riduzione di r sul vincolo di bilancio

2.2 Effetti della variazione del tasso di interesse

Studiamo ora come varia la scelta ottima del consumatore quando cambia il tasso d'interesse r. La variazione di r ha innanzitutto un effetto diretto sul vincolo intertemporale – in quanto varia il prezzo $\frac{1}{1+r}$ del bene futuro c_1 – influenzando la posizione della retta decrescente che lo rappresenta. Se, per esempio, il tasso r diminuisce il nuovo vincolo diviene meno inclinato, ruotando su se stesso e continuando a passare per il paniere D della dotazione di reddito intertemporale: il consumatore ha sempre la possibilità di consumare esattamente ciò che guadagna senza risparmiare nè contrarre debiti. Con un minore tasso d'interesse il valore attuale dei redditi è tuttavia diverso: il valore corrente $y_0+y_1/\,(1+r)$ aumenta, e quindi l'intercetta sull'asse delle ascisse si sposta verso destra, mentre il valore capitalizzato del reddito $(1+r)y_0+y_1$ nel secondo periodo si riduce. Complessivamente, quindi, il vincolo intertemporale ruota intorno alla dotazione D (vedi figura 3).

Per studiare l'effetto finale sul consumo e quindi sul risparmio abbiamo bisogno di sapere come agiscono l'effetto reddito e quello sostituzione. Supponiamo che un individuo sia inizialmente un risparmiatore, ossia $c_0 < y_0$. In questo caso se r diminuisce si verificano i seguenti effetti:

- *effetto sostituzione:* il costo opportunità del consumo presente, ossia il tasso r, diminuisce e questo tende a far aumentare il consumo presente e quindi *diminuire il risparmio.*

- *effetto reddito:* per il risparmiatore la diminuzione del tasso dell'interesse implica una diminuzione dei rendimenti ottenuti sul risparmio e quindi un effetto reddito negativo. Se il consumo corrente è un bene normale la diminuzione del reddito implica una diminuzione del consumo corrente e quindi un *aumento del risparmio.*

Poichè quindi per un risparmiatore l'effetto reddito e l'effetto sostituzione agiscono in direzione opposta, il risultato è incerto.

Cosa accade se invece l'individuo è impaziente e inizialmente prima della riduzione di r anticipa il consumo futuro al tempo corrente prendendo a prestito ($c_0 > y_0$)?

- *effetto sostituzione:* anche in questo caso l'effetto sostituzione implica una diminuzione del risparmio.

- *effetto reddito:* differentemente dal caso precedente l'effetto reddito agisce invece nella stessa direzione. Ciò accade perchè la riduzione del tasso di interesse r rende meno costoso prendere a prestito e quindi incentiva il consumatore, che ha una posizione debitoria nel primo periodo, ad accrescere ulteriormente la domanda di prestiti.

In sintesi, per un debitore l'effetto sostituzione e l'effetto reddito tendono a *diminuire il risparmio.*

3 Consumo intertemporale e mercato dei capitali

Per isolare alcune delle proprietà attribuibili al mercato dei capitali ed ai suoi effetti sia sul consumo che sull'efficienza dello scambio intertemporale costruiamo un esempio molto semplice. Prendiamo in considerazione il caso di un'individuo che debba decidere come allocare ottimamente le risorse a sua disposizione su due periodi, ma che si trovi di fronte al doppio problema di consumare e produrre. L'esempio qui discusso è noto nella letteratura come *modello di Fisher*. La sua principale proprietà è quella di mostrare che in presenza di mercati dei capitali perfetti e mercati dei beni perfettamente concorrenziali le decisioni di consumo e quelle d'investimento sono tra loro separate.

Da sottolineare è inoltre il fatto che questo problema di ottimizzazione intertemporale ha in se tutti gli elementi che caratterizzano il modello della crescita neoclassico noto come "modello di Ramsey" o come modello di crescita ottimale.

Per iniziare è utile cominciare dalle scelte produttive. Per prendere questa decisione sono necessari due tipi di informazione:

1. quelle relative al vincolo tecnologico che esprime la relazione tra produzione corrente e futura;

2. quelle relative alle decisioni di consumo e risparmio da cui dipende il modo in cui il reddito dei consumatori può essere impiegato.

3.1 Vincolo tecnologico.

Per semplificare il nostro problema consideriamo il fatto che un individuo è contemporaneamente un'impresa ed un consumatore e che per ipotesi vive due soli periodi. Indichiamo con c_t il dividendo distribuito in ogni periodo misurato in unità di consumo, e con $t = 0, 1$ i due periodi di attività. L'investimento nel primo periodo è pari a $I_0 = K_1 - K_0$, dove K_0 è la dotazione iniziale (un dato del problema), mentre K_1 è lo stock finale di capitale al tempo $t = 1$. La funzione di produzione impiega un solo input, ed è a rendimenti decrescenti del tipo $F(K_t) = K_t^{\alpha}$ con $\alpha < 1$. Poichè in questo esempio, il bene prodotto e la risorsa utilizzata nel processo produttivo (l'input) sono omogenei possiamo assegnare valore 1 ai prezzi.

Nel periodo iniziale il prodotto è dato poichè dipende dalla dotazione K_0. Ciononostante, può essere ripartito tra i dividendi e la parte destinata al nuovo investimento cioè:

$$F(K_0) = c_0 + I_0 \tag{11}$$

mentre nel secondo periodo si deve verificare che:

$$F(K_1) = c_1 \tag{12}$$

poichè giunti al termine della propria esistenza si preferisce consumare tutta la disponibilità delle risorse (stiamo implicitamente assumendo che gli azionisti-consumatori non abbiano alcun incentivo per i lasciti ereditari e non possano lasciare debiti).

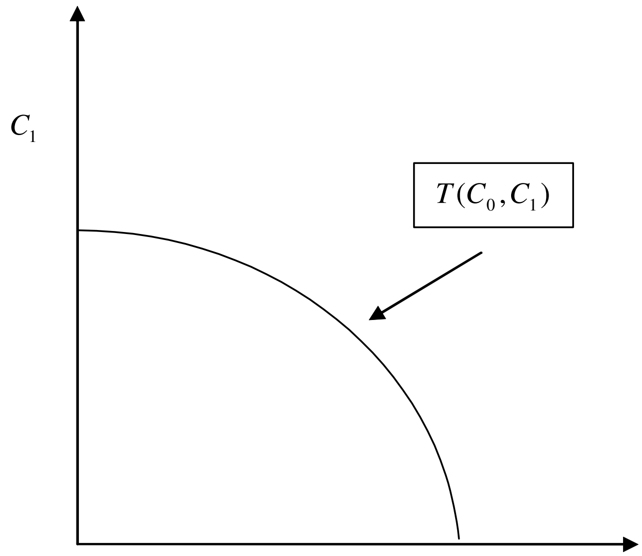

Figure 4: La curva di trasformazione

Combinando queste due relazioni, e ricordando la forma della funzione di produzione si ottiene:

$$\begin{aligned} K_0^\alpha &= c_0 + (K_1 - K_0) \\ K_1^\alpha &= c_1 \text{e } I_1 = 0 \end{aligned}$$

ovvero:

$$(K_0^\alpha + K_0 - c_0)^\alpha - c_1 = 0 \equiv T(c_0, c_1)$$

dove $T(c_0, c_1)$ è facilmente interpretabile come la curva di Trasformazione o frontiera delle possibilità produttive (4).

Per ogni livello del dividendo distribuito, ovvero del corrispondente livello dell'investimento, essa indica qual'è il massimo livello di produzione e quindi di dividendo distribuito nel periodo successivo. Se l'allocazione delle risorse è efficiente allora il sistema economico si trova su un punto della frontiera produttiva (intertemporale) $T(c_0, c_1)$.

3.2 Assenza di mercati finanziari

Supponiamo ora che non esistano mercati dei capitali. Le preferenze degli azionisti tra consumo di oggi e consumo futuro sono rappresentate dalla curva di utilità intertemporale $u(c_0, c_1)$. Se la funzione di utilità ha le proprietà standard (utilità marginale decrescente), la corrispondente curva d'indifferenza è convessa e decrescente ed il problema di massimizzazione può essere scritto come:

$$\begin{cases} \max u(c_0, c_1) \\ s.c. : T(c_0, c_1) = 0 \end{cases}$$

In questo caso l'ottimo dello scambio viene raggiunto quando:

$$SMS = SMT \tag{13}$$

ossia quando:

$$\frac{u_{c_0}}{u_{c_1}} = \alpha \left(K_0^{\alpha} + K_0 - c_0\right)^{\alpha-1} = \alpha \left(K_1\right)^{\alpha-1}$$

Quindi, se non esistono mercati dei capitali il meglio che un consumatore-risparmiatore possa fare è quello di realizzare una allocazione intertemporale di c_0 e c_1 che soddisfi la condizione di tangenza (13). Dato che K_0 è la dotazione iniziale, l'output iniziale è un dato e pari a $F(K_0)$. Quindi se c_0^* è il consumo del primo periodo il risparmio ottimale dello stesso periodo è pari a $K_1^* = F(K_0) - c_0^*$, come è mostrato nella figura 5. In questo caso le decisioni di consumo e quelle di investimento coincidono e sono dipendenti.

3.3 L'equilibrio con mercati finanziari

Il modello del paragrafo precedente può essere interpretato anche come una situazione in cui un "dittatore benevolo" sceglie l'allocazione intertemporale delle risorse dato il vincolo tecnologico. E' interessante notare che lo stesso risultato è ottenuto assumendo che nel mercato perfettamente concorrenziale esistano un gran numero di consumatori e di imprese che prendono decisioni decentralizzate. Il loro comportamento competitivo determina l'equilibrio della figura 5. Ma, prima di arrivare a questo risultato continuiamo ad analizzare il caso di due soli agenti. Dobbiamo perciò chiederci cosa accade al predente equilibrio quando esiste la possibilità di scambiare beni e risorse in presenza dei mercati di capitale. In questo caso ciò che determina l'allocazione è il "principio di assenza di arbitraggio" il quale richiede che attività equivalenti (in caratteristiche merceologiche, disponibilità temporale ed eventualemnte rischio) abbiano in equilibrio lo stesso prezzo.

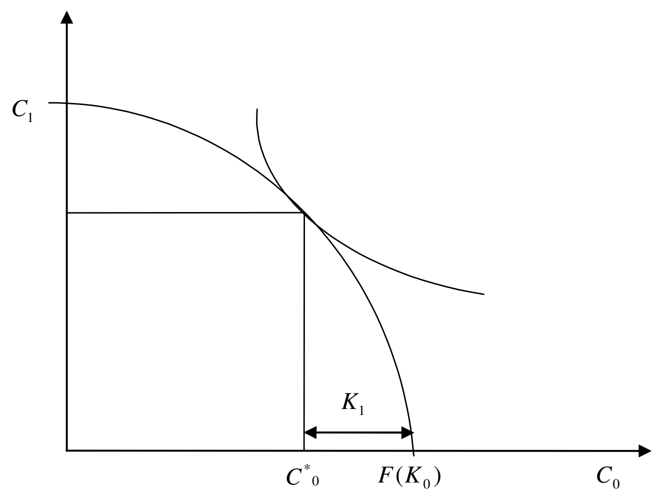

Figure 5: Equilibrio senza mercati finanziari.

Ma andiamo con calma, partendo dal caso di decisioni decentralizzate con un solo consumatore ed una sola impresa. Notiamo subito che nelle economie di mercato le decisioni di risparmio sono naturalmente separate da quelle d'investimento: i consumatori non decidono quanto produrre, nè le imprese producono con l'obiettivo di massimizzare il consumo intertemporale. E' compito del mercato porre in relazione domanda e offerta.

Nel nostro esempio i fattori produttivi sono le risorse stesse che possono essere utilizzate direttamente sia per il consumo che per la produzione. Poichè però imprese e consumatori utilizzano le risorse in momenti temporali diversi, lo scambio e la produzione si devono realizzare attraverso dei particolari mercati. Supponiamo quindi che esista un mercato dei capitali tanto al tempo corrente quanto a quello futuro. Denominiamo:

1. mercati a *pronti,* quelli dove avviene lo scambio dei beni prodotti oggi.

2. mercati a *termine,* quelli dove avviene lo scambio dei beni che verranno prodotti domani.

Una configurazione di questo tipo va sotto il nome di ipotesi di *completezza dei mercati.*

Assumiamo inoltre che i mercati dei capitali siano perfetti, ovvero che:

3. la concorrenza perfetta caratterizza il funzionamento del mercato (il prezzo delle attività è dato per tutti gli operatori, informazione perfetta, contendibilità del mercato).

4. vi è assenza di costi di transazione e tasse.

In questo mercato il prezzo dei prestiti o il valore dei rendimenti è misurato dal tasso di interesse r. Conseguentemente, il prezzo oggi di una unità di risorse disponibile domani è $\frac{1.}{(1+r)}$.

E' evidente che affichè la scelta produttiva intertemporale sia ottima il rendimento dell'investimento reale deve essere pari al tasso d'interesse r. Solo in questo caso difatti non esiste incentivo per l'impresa a cambiare l'allocazione produttiva intertemporale.

Se per esempio, il rendimento reale fosse misurato dal valore $1 + \pi$, e tale fattore di rendimento fosse *superiore* al fattore d'interesse $1 + r$, sarebbe conveniente per un investitore indebitarsi al tempo corrente, sostenendo il costo r, per investire la somma così ottenuta nella produzione di attività reali, ottenendo un rendimento finale netto positivo $(\pi - r > 0)$ senza correre rischi (siamo in un mondo di certezza) e senza investire capitale proprio. Una strategia d'investimento di questo tipo prende il nome di *arbitraggio.*

Ma questa opportunità di arbitraggio non può durare a lungo. Se il mercato è di concorrenza perfetta anche gli altri investitori (consumatori) possono realizzare la medesima strategia di investimento indebitandosi al tempo corrente ed investendo nella produzione. Questo processo determina però un'incremento della domanda di prestiti che causa un aumento del tasso d'interesse r, e congiuntamente una riduzione del rendimento reale π a causa della ipotesi di produttività marginale decrescente. Il processo di riallocazione intertemporale delle risorse si arresta dunque quando il rendimento delle attività finanziarie diventa uguale al tasso di interesse.

Si noti che quando ciò accade il SMT, che nel nostro modello misura effettivamente il rendimento reale, deve essere uguale ad $1 + r$ ossia:

$$1 + r = \left| \frac{-\partial T/\partial c_0}{\partial T/\partial c_1} \right| = SMT$$

ovvero:

$$1 + r = \alpha \left(K_0^{\alpha} + K_0 - c_0\right)^{\alpha - 1} \tag{14}$$

$$1 + r = \alpha \left(K_1\right)^{\alpha - 1} \tag{15}$$

da cui segue che il livello del dividendo nel primo periodo è:

$$c_0^* = K_0^\alpha + K_0 - \left(\frac{1+r}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

Infine, sostituendo nella (12) si ottiene il livello del dividendo del secondo periodo:

$$c_1^* = K_1^\alpha = \left(\frac{1+r}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \tag{16}$$

Si noti che in presenza di mercati dei capitali perfetti l'ottimo di produzione è *indipendente* dalle scelte intertemporali di consumo.

3.3.1 Una soluzione alternativa per la ricerca dell'ottimo tecnico

Lo stesso risultato del paragrafo precedente può essere ricavato se risolviamo il seguente problema di massimo:

$$\begin{cases} \max\limits_{c_0,c_1} V(c) = c_0 + \frac{c_1}{1+r} \\ s.c. : c_1 = (K_0^\alpha + K_0 - c_0)^\alpha \end{cases} \tag{17}$$

In questo caso stiamo ragionando come se esistesse un manager che volesse massimizzare il valore attuale dei dividendi distribuiti agli azionisti – i proprietari dell'impresa – dato il vincolo tecnologico.

La corrispondente Lagrangiana è:

$$L = c_0 + \frac{c_1}{1+r} + \lambda\left[(K_0^\alpha + K_0 - c_0)^\alpha - c_1\right]$$

dove λ è il moltiplicatore di Lagrange che offre una misura di quanto il vincolo influenza il valore della funzione obiettivo. Le condizioni del primo ordine sono:

$$\begin{aligned} c_0 &: \ 1 = \lambda\alpha\left(K_0^\alpha + K_0 - c_0\right)^{\alpha-1} \\ c_1 &: \ \frac{1}{1+r} = \lambda \end{aligned}$$

da cui ri ricava facilmente la condizione (**??**) di ottimo ottenuta in precedenza:

$$1 + r = \alpha\left(K_0^\alpha + K_0 - c_0\right)^{\alpha-1}$$

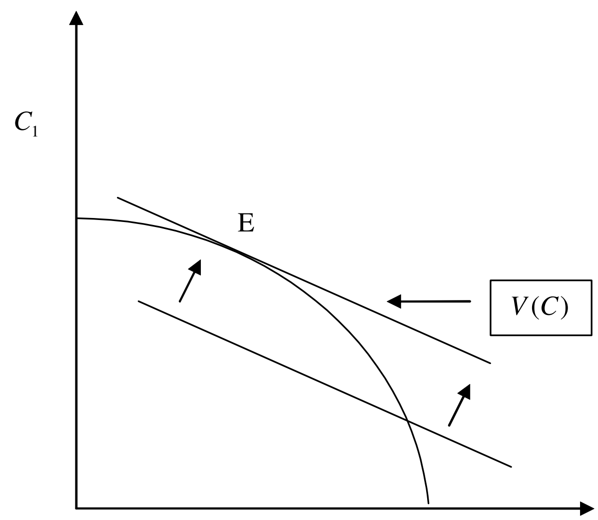

Figure 6: L'ottimo con mercato dei capitali

Per calcolare il valore della ricchezza prodotta dall'impresa è sufficiente sostituire nella funzione obiettivo $V(c)$ il corrispondente valore ottimale dei dividendi. Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} V^*(c) &= c_0^* + \frac{c_1^*}{1+r} \\ V^*(c) &= \left(K_0^{\alpha} + K_0 - \left(\frac{1+r}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \right) + \frac{(1+r)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}} \end{aligned}$$

3.4 L'ottimo del consumatore con il mercato dei capitali

Affrontiamo ora il problema dell'allocazione intertemporale delle risorse dal lato del consumo quando esiste un mercato dei capitali perfetto e completo. Per distinguere tra dotazione intertemporale e scelte di consumo introduciamo una ulteriore simbologia rispetto al caso precedente. Indichiamo con d_0^*, d_1^* i dividendi distribuiti e con c_0 e c_1 la domanda dei beni presenti e futuri nei due periodi.

In questo caso la scelta ottimale è determinata dal confronto tra la curva d'indifferenza e il vincolo di bilancio intertemporale che scriviamo come:

$$c_0 + \frac{c_1}{1+r} = d_0^* + \frac{d_1^*}{1+r} \tag{18}$$

Evidentemente, $\frac{1}{1+r}$ rappresenta il prezzo di una unità di consumo futuro, mentre 1 è il prezzo del consumo corrente. La relazione (18) ci informa del fatto che il valore scontato del consumo deve essere uguale al valore corrente del reddito percepito nei due periodi. Una volta che il vincolo intertemporale della ricchezza è stato definito possiamo risolvere il problema di ottimizzazione:

$$\left\{ \begin{array}{c} \max\limits_{c_0, c_1} u\left(c_0, c_1\right) \\ s.c. : c_0 + \frac{c_1}{1+r} = d_0^* + \frac{d_1^*}{1+r} \end{array} \right. \tag{19}$$

dove $u\left(c_0, c_1\right)$ è la funzione di utilità che assumiamo abbia utilità marginali decrescenti. Le corrispondenti condizioni del primo ordine sono:

$$\begin{aligned} c_0 &: u_{c_0} = \lambda \\ c_1 &: u_{c_1} = \frac{\lambda}{1+r} \end{aligned}$$

da cui si ottiene la condizione intertemporale di ottimalità:

$$\frac{u_{c_0}}{u_{c_1}} = (1+r) \tag{20}$$

nota come equazione di Eulero. Per rendere più esplicito il nostro ragionamento assumiamo che la funzione d'utilità sia logaritmica e additiva nella forma $u\left(c_0, c_1\right) = \ln c_0 + \frac{1}{1+\delta} c_1$, dove δ è il tasso di preferenza intertemporale verso il consumo. La (23) diventa:

$$c_1 = \frac{1+r}{1+\delta} c_0$$

Quest'ultima espressione è molto eloquente perchè ci dà informazioni circa le preferenze intertemporali dei consumatori:

1. se $r = \delta$, il consumo è costante nei due periodi. Quindi il consumatore sceglierà di indebitarsi o meno a seconda che la dotazione d_0^* sia minore o maggiore del consumo c_0 del primo periodo.

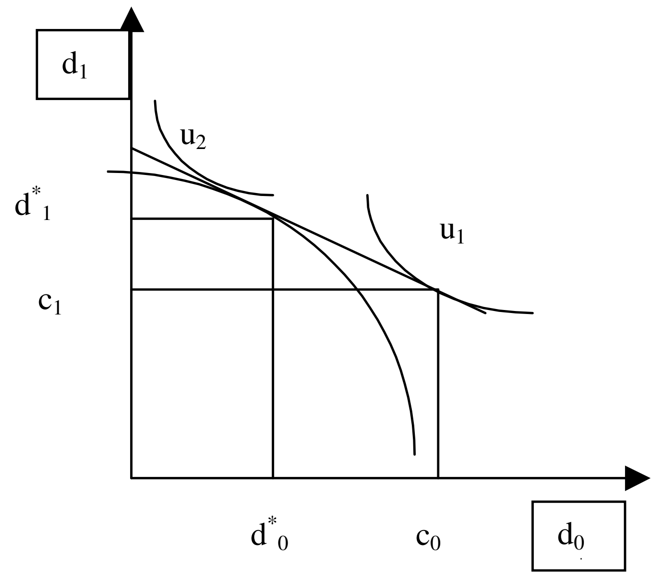

Figure 7: Equilibrio tra consumo e produzione con mercati dei capitali

2. se $r > \delta$, $c_1 > c_0$ e quindi si preferisce consumare di più nel secondo periodo. Anche questa volta, tuttavia, l'indebitamento corrente dipende dalla differenza tra d_0^* e c_0.

3. se $r < \delta$, $c_1 < c_0$ e dunque si desidera consumare di più nel primo periodo. Valgono comunque le stesse avvertenze circa la scelta di indebitamento.

Dalla figura 4 si evincie che la presenza del mercato finanziario consente di *separare* le decisioni di produzione da quelle di consumo. I "manager" delle imprese decidono l'allocazione tecnica delle risorse guardando esclusivamente al vincolo tecnologico ed al costo finanziario dell'investimento. Tale confronto determina l'ottimo tecnico di produzione, ossia il punto E.

Una volta che il processo produttivo è avviato ed il dividendo è distribuito tra i consumatori (per meglio dire tra gli azionisti), questi scelgono di consumarlo sulla base della loro funzione di utilità anticipando o posticipando il consumo corrente sulla base del confronto tra tassi di interesse e tasso di preferenza intertemporale.

Le principali implicazioni di questo modello possono dunque essere così riassunte. In equilibrio:

- In presenza di mercati dei capitali completi e perfetti, vi è separazione tra decisioni di produzione e decisioni di consumo.

- Questa separazione rende possibile anche quella tra proprietà (azionisti) e controllo (manager). Il criterio di massimizzazione del valore dell'impresa garantisce infatti che i manager agiscano nell'interesse dei consumatori-azionisti qualunque siano le preferenze di questi ultimi.

- Infine, il mercato dei capitali consente di migliorare il benessere dei consumatori. La figura 2 mostra, difatti, che in assenza di mercati dei capitali, il meglio che un consumatore può fare è di uguagliare il SMS al SMT. Con i mercati dei capitali questa relazione di dipendenza viene spezzata e il consumatore ha la opportunità di raggiungere curve di indifferenza più alte e spostate verso destra inquanto l'ottimo per il consumo richiede la tangenza tra il SMS e la curva del mercato dei capitali che per costruzione è sempre al di sopra o al più tangente in un punto alla curva di trasformazione.

3.5 Mercati dei capitali imperfetti

Supponiamo di non avere un mercato dei capitali perfetto. In che modo questo può alterare i precedenti risultati?

Come esempio la figura 8 mostra cosa accadrebbe se il tasso d'indebitamento (r_D) fosse superiore a quello d'impiego (r_A).

In questo caso il manager dell'impresa non può più scegliere l'allocazione ottimale guardando esclusivamente al vincolo tecnologico, ma deve conoscere anche le preferenze di consumo degli azionisti. Se per esempio alcuni azionisti preferiscono dare in prestito il loro reddito (curva di utilità u_2), mentre altri preferiscono anticipare al tempo corrente il consumo futuro (curva di utilità u_1), il manager non ha una via semplice per conciliare i due diversi obiettivi. L'ottimo di produzione intertemporale si realizza infatti in corrispondenza di due diversi tassi di interesse. Sebbene l'ipotesi di mercati perfettamente competitivi non sia sempre integralmente soddisfatta, continueremo ad utilizzarla in seguito.

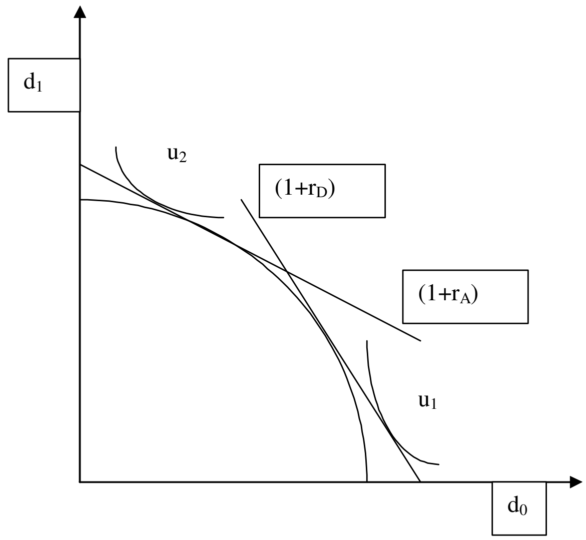

Figure 8: Mercati dei capitali imperfetti

3.6 L'equilibrio di mercato quando esistono molti operatori

Assumiamo, infine, che nel mercato operino molte imprese e altrettanti consumatori. Può considerarsi stazionario l'equilibrio descritto sopra? Detto diversamente, è conciliabile l'indipenza delle decisioni di consumo e di investimento con l'ipotesi di mercato concorrenziale in equilibrio nel lungo periodo?

Per chiarire questo punto chiediamoci cosa accade ai prezzi quando per esempio il consumo del primo periodo è superiore al reddito (dividendo) che si ha in dotazione. In questo caso si registra un eccesso di domanda nel mercato del bene corrente (a pronti) ed un eccesso di offerta in quello del bene futuro (a termine). Questo disequilibrio tra quantità mette in moto un processo di aggiustamento dei prezzi presenti e futuri: il prezzo del bene corrente c_0 aumenta, mentre quello del bene futuro c_1 diminuisce. Poichè il prezzo (futuro) di c_1 è pari a $\frac{1}{1+r}$ la riduzione che ne consegue implica che r aumenta. Conseguentemente la retta del mercato dei capitale che ha inclinazione $(1+r)$ – che rappresenta anche il vincolo di bilancio intertemporale, –ruota su stessa e diviene più ripida, spostando il punto di tangenza che identifica l'ottimo tecnologico verso destra.

Contestualmente a questo cambiamento varia anche l'allocazione intertemporale dei consumatori che trovano conveniente ridurre il consumo del bene corrente aumentando quello futuro. Poichè nel nostro esempio il consumatore è debitore (nel primo periodo) la crescita di r implica un effetto reddito ed un effetto sostituzione che riduce la domanda del bene corrente c_0, spostando il punto che rappresenta l'equilibrio del consumo lungo il vincolo temporale ma verso sinistra. Il processo di aggiustamento va dunque avanti fino a che esiste uno squilibrio tra domanda ed offerta. Nella situazione finale l'allocazione ottimale è tornata nel punto E della figura 2.

Per concludere, il punto E che prima avevamo interpretato come l'allocazione ottenibile senza mercati dei capitali e poi determinata da un ipotetico pianificatore benefico è suscettibile di una terza interpretazione. Essa è intepretabile l'allocazione che emerge dall'operare di mercati reali e finanziari perfetti e concorrenziali. Come vedremo più avanti questa allocazione di equilibrio intertemporale tra produzione e consumo è quella che prevale nel modello dinamico di crescita alla Ramsey con orizzonte infinito.

4 Generalizzazione a T periodi con tempo discreto

Torniamo ora al caso più semplice del solo consumo. Per generalizzare il modello biperiodale di partenza possiamo seguire diverse strade. La più semplice è quella di riscrivere le condizioni del primo ordine dell'esempio 1, per il caso generale di ottimizzazione tra t e $t+1$. Per semplificare, partiamo dalle condizioni di ottimo dell'esempio 1. In questo caso possiamo scrivere:

$$
\begin{aligned}
u^{'}(c_t) &= \lambda \left(\frac{1+\delta}{1+r}\right)^{t} \\
u^{'}(c_{t+1}) &= \lambda \left(\frac{1+\delta}{1+r}\right)^{t+1}
\end{aligned}
$$

dove, questa volta, con $u^{'}(c_t)$ intendiamo la derivata prima rispetto a c_t, e con $u^{'}(c_{t+1})$ la corrispondente derivata rispetto a c_{t+1}. Trasformando con i logaritmi si ottiene:

$$\begin{aligned}\ln u^{'}\left(c_{t}\right) &= \ln\lambda+t\ln\left(\frac{1+\delta}{1+r}\right)\\ \ln u^{'}\left(c_{t+1}\right) &= \ln\lambda+\left(t+1\right)\ln\left(\frac{1+\delta}{1+r}\right)\end{aligned}$$

da cui sottraendo queste due espressioni si ha:

$$\Delta\ln u^{'}\left(c_{t+1}\right)=\ln\left(\frac{1+\delta}{1+r}\right)$$

Questa ultima relazione può essere ulteriormente semplificata espandendo il termine $\ln u^{'}\left(c_{t+1}\right)$ con Taylor, e approssimando con $\ln\left(1+x\right)\simeq x$. Espandendo nell'intorno di c_{t} in serie di Taylor del primo ordine il termine $\ln u^{'}\left(c_{t+1}\right)$, moltiplicando e dividendo per c_{t} si ottiene dunque:

$$c_{t}\frac{u^{''}\left(c_{t}\right)}{u^{'}\left(c_{t}\right)}\frac{c_{t+1-}c_{t}}{c_{t}}\simeq\left(\delta-r\right)$$

da cui segue che:

$$\frac{\Delta c}{c}\simeq\sigma\left(r-\delta\right) \tag{21}$$

dove $\sigma=-u^{'}\left(c_{t}\right)/c_{t}u^{''}\left(c_{t}\right)$ misura l'elasticità di sostituzione intertemporale (ESI). Si noti che essendo per ipotesi $u^{'}\left(c_{t}\right)<0$ allora $\sigma>0$. Evidentemente, anche in questa versione del problema, la dinamica del consumo dipende dalla relazione esistente tra δ e r : si ha difatti che $\Delta c \lesseqgtr 0$ quando $\delta \gtreqless r$.

4.1 Implicazione: avversione e elasticità intertemporale

La forma della funzione di utilità influenza la relazione che lega *l'avversione al rischio* con l'ESI.

Si supponga ad esempio che la funzione di utilità sia di tipo *Constant Relative Risk Aversion* (CRRA):

$$u(c_{t})=\frac{c_{t}^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{22}$$

con $\gamma > 0$ e con $u^{'}(c_t) = c_t^{-\gamma}$. Il grado di avversione relativa al rischio è misurato dall'indice:

$$-c_t \frac{u^{''}(c_t)}{u^{'}(c_t)} = \gamma \tag{23}$$

che è appunto pari alla costante γ. Ora l'equazione di Eulero per la funzione (22) è:

$$\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\gamma} = \left(\frac{1+r}{1+\delta}\right)$$

cioè, approssimando con il logaritmi:

$$\Delta \ln c_{t+1} = \frac{1}{\gamma}(r - \delta)$$

da cui si desume che per una funzione di utilità CRRA l'elasticità di sostituzione intertemporale è pari a σ, ossia il reciproco dell'avversione relativa al rischio ($\sigma = 1/\gamma$).

5 Un modello più formale

La soluzione a T periodi con tempo discreto può essere ovviamente ricavata utilizzando direttamente la funzione lagrangiana come nel caso biperiodale. Il problema può essere scritto nel seguente modo:

$$\max_{c_t} \sum_{s=0}^{T-t} \frac{u(c_{t+s})}{(1+\delta)^s} \tag{24}$$

$$s.c.: \;\; a_{t+s+1} = (1+r)(a_{t+s} + y_{t+s} - c_{t+s}) \tag{25}$$

$$e \; s.c.: (1+r)^{-T} a_{T+1} = 0 \tag{26}$$

Il vincolo (26) richiede che il valore attuale della ricchezza a_{T+1} sia pari a zero, il che evidentemente implica che $a_{T+1} = 0$ essendo $(1+r)^{-T} > 0$. Come per il caso biperiodale, questo vincolo prende il nome di *condizione di trasversalità.*

Per capirne il significato economico poniamo $s = 0$ e riscriviamo il vincolo nella forma:

$$a_t = \frac{1}{1+r} a_{t+1} - y_t + c_t \tag{27}$$

Questa è una equazione alle differenze del primo ordine in a_t che può essere risolta sostituendo iterativamente in avanti fino a raggiungere il tempo T. Quando $s = 1$ abbiamo:

$$a_{t+1} = \frac{1}{1+r} a_{t+2} - y_{t+1} + c_{t+1}$$

da cui sostituendo per a_{t+1} nella (73) si ottiene:

$$a_t = \frac{1}{1+r} \left(\frac{1}{1+r} a_{t+2} - y_{t+1} + c_{t+1} \right) - y_t + c_t$$

cioè semplificando:

$$a_t = \frac{1}{(1+r)^2} a_{t+2} + \frac{c_{t+1}}{1+r} + c_t - \frac{y_{t+1}}{1+r} - y_t$$

Procedendo fino a $s = T - t$ si ottiene infine:

$$\sum_{s=0}^{T-t} \frac{c_{t+s}}{(1+r)^s} + \frac{a_{T+1}}{(1+r)^T} = a_t + \sum_{s=0}^{T-t} \frac{y_{t+s}}{(1+r)^s} \tag{28}$$

che sotto la condizione (26) di trasversalità $(1+r)^{-T} a_{T+1} = 0$ implica, anche in questo caso generale, che sull'intero orizzonte di programmazione il valore scontato del consumo deve essere pari al valore scontato dei redditi futuri aumentati del valore iniziale della ricchezza a_t (se esiste in t).

Si noti che, come nel caso biperiodale, se la (26) fosse positiva, ossia se $(1+r)^{-T} a_{T+1} > 0$, il valore attuale dei consumi sarebbe *minore* del valore scontato dei redditi in quanto dal vincolo si ha:

$$\sum_{s=0}^{T-t} \frac{c_{t+s}}{(1+r)^s} = a_t + \sum_{s=0}^{T-t} \frac{y_{t+s}}{(1+r)^s} - \frac{a_{T+1}}{(1+r)^T}$$

Il criterio di ottimizzazione afferma però che il benessere del consumatore è massimizzato quando il consumo è in valore attuale pari a quello delle risorse. Dunque non sarebbe ottimale avere al termine dell'orizzonte di programmazione T uno stock positivo di ricchezza, $a_{T+1} > 0$, perchè esso potrebbe invece essere consumato nei periodi precedenti. Questo implica che $\frac{a_{T+1}}{(1+r)^T} = 0$.

D'altra parte, e sempre in assonanza con il modello a due periodi, non è possibile avere al periodo finale una ricchezza negativa $a_{T+1}/(1+r)^T < 0$. Questo implicherebbe, difatti, che il valore attuale dei consumi *ecceda* quello dei redditi futuri. In altre parole, il consumatore si indebita continuamente per ripagare i suoi debiti precedenti, piuttosto che trasferire attività reali ai suoi creditori, ovvero riducendo c_{t+s} al disotto di y_{t+s}. Come risultato il suo debito cresce ad un tasso almeno pari al tasso di interesse $(1+r)$. Questa situazione di debiti non rimborsati non è però sostenibile in quanto questo implicherebbe la possibilità di alimentare il consumo con un debito via via crescente. Affinchè questo non accada si richiede quindi che al termine dell'intervallo di ottimizzazione il valore della ricchezza sia pari a zero, o meglio che $a_{T+1} = 0$. Questa condizione di trasversalità è anche nota nella letteratura come *no Ponzi game condition,* dal nome del personaggio che, negli Stati Uniti degli anni '20, perfezionò la truffa delle piramidi finanziarie.

La lagrangiana del problema (24) può dunque essere scritta come:

$$L_t = \sum_{s=0}^{T-t} \frac{u(c_{t+s})}{(1+\delta)^s} - \lambda \left(\sum_{s=0}^{T-t} \frac{c_{t+s}}{(1+r)^s} - a_t - \sum_{s=0}^{T-t} \frac{y_{t+s}}{(1+r)^s} \right) \tag{29}$$

dove λ è il moltiplicatore di Lagrange, e dove abbiamo posto $\frac{a_{T+1}}{(1+r)^T} = 0$. Differenziando L_t in t e $t+s$ si ottiene:

$$\begin{aligned} u'(c_t) &= \lambda \\ \frac{u'(c_{t+s})}{(1+\delta)^s} &= \frac{\lambda}{(1+r)^s} \end{aligned}$$

ovvero:

$$u'(c_t) = \frac{(1+r)^s}{(1+\delta)^s} u'(c_{t+s}) \tag{30}$$

Per esempio, se $u(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, l'equazione di Eulero tra t e $t+1$ diviene:

$$\left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{\gamma} = \left(\frac{1+r}{1+\delta} \right)$$

che è uguale alla equazione di Eulero ricavata nel paragrafo precedente.

5.1 Ancora sulla condizione di trasversalità

Per chiarire meglio quale sia il significato economico della condizione di trasversalità (26), riprendiamo la condizione di Eulero (30). Proviamo a risolvere questa equazione alle differenze del primo ordine con il metodo delle sostituzioni visto in precedenza, fino al tempo T. Partendo da $t+1$ la prima sostituzione in avanti implica che:

$$u^{'}(c_t) = \frac{1+r}{1+\delta}\left[\frac{1+r}{1+\delta}u^{'}(c_{t+2})\right] = \left(\frac{1+r}{1+\delta}\right)^2 u^{'}(c_{t+2})$$

e quindi sostituendo iterativamente fino T si ricava l'espressione:

$$u^{'}(c_t) = \left(\frac{1+r}{1+\delta}\right)^T u^{'}(c_T) \tag{31}$$

E' possibile mostrare che l'ottimalità di questa condizione implica il rispetto della condizione di trasversalità (26).

Per mostrare ciò, si noti che se non imponiamo alcuna condizione di trasversalità al vincolo di bilancio (28) l'espressione del vincolo nella funzione lagrangiana:

$$\lambda\left(\sum_{s=0}^{T-t}\frac{c_{t+s}}{(1+r)^s} - a_t - \sum_{s=0}^{T-t}\frac{y_{t+s}}{(1+r)^s}\right) = 0$$

può essere riscritta come:

$$\lambda\left(\frac{a_{T+1}}{(1+r)^T}\right) = 0$$

Ora, utilizzando la condizione del primo ordine $\lambda = u^{'}(c_t)$ questa espressione diventa:

$$u^{'}(c_t)\left(\frac{a_{T+1}}{(1+r)^T}\right) = 0$$

Si noti che essendo, per ipotesi, $u^{'}(c_t)$ strettamente positivo questo implica che a_{T+1} debba essere pari a zero affinchè sia rispettata la condizione di ottimalità 31. E' inoltre utile rimarcare che il rispetto della *condizione di trasversalità* implica il rispetto della no ponzi game condition e assicura che nel lungo periodo il consumo non può essere superiore al valore scontato dei redditi futuri.

La principale conseguenza di ciò è che la trasversalità è una condizione *necessaria e sufficiente* per risolvere il problema di ottimo. Essa può tuttavia assumere diverse forme, che riportiamo qui di seguito:

$$
\begin{aligned}
(1+r)^{-T} a_{T+1} &= 0 \\
u^{'}(c_t)(1+r)^{-T} a_{T+1} &= 0 \\
a_{T+1} &= 0
\end{aligned}
$$

6 Consumo e risparmio in tempo continuo

Fino ad ora abbiamo assunto che il tempo trascorra ad intervalli regolari di tipo discreto. Estendiamo ora il modello precedente al caso di tempo continuo. Assumiamo ancora l'esistenza di certezza e di assenza di moventi ereditari. Consideriamo nel caso specifico un consumatore con funzione di utilità di tipo CRRA. Il problema di ottimo può essere scritto come:

$$\int_0^T \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \exp\left(-\delta t\right) dt$$

$$s.c. : \dot{a}_t = r a_t + y_t - c_t$$

$$e\ s.c. : (1+r)^{-T} a_T = 0$$

con a_0 data, e $c_t > 0$,e dove $\dot{a}_t = da_t/dt$.

Anche se adesso siamo nel continuo, possiamo applicare la soluzione equivalente alla Lagrangiana che prende il nome di funzione *Hamiltoniana* (si veda appendice 1):

$$H_t = \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \exp\left(-\delta t\right) + \lambda_t \left(r a_t + y_t - c_t\right)$$

λ_t è denomivata variabile di costato ed è una misura del peso ombra del vincolo. Le condizioni del primo ordine sono:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial C} &= 0 : c_t^{-\gamma} \exp\left(-\delta t\right) = \lambda_t && (32) \\
-\frac{\partial H}{\partial a} &= \dot{\lambda} : r = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda_t} && (33) \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda} &= \dot{a} : \dot{a}_t = r a_t + y_t - c_t && (34)
\end{aligned}
$$

con la condizione aggiuntiva di trasversalità:

$$\lambda_T a_T = 0 \tag{35}$$

Dalla (32) si evince che al tempo T vale la relazione di ottimalità:

$$c_T^{-\gamma} \exp\left(-\delta T\right) = \lambda_T > 0$$

in quanto abbiamo richiesto che il consumo sia positivo in ogni istante t. Di conseguenza, per rispettare la (35) deve essere imposto che al termine del periodo di programmazione $a_T = 0$. Questa ultima condizione soddisfa quella di trasversalità.

Il sentiero di crescita del consumo può invece essere ricavato dalla (33), sostituendo l'espressione di λ_t e $\dot{\lambda}$ ricavate dalla (32). Si ha cioè:

$$r = -\frac{-\delta c_t^{-\gamma} \exp\left(-\delta t\right) - \gamma c_t^{-(\gamma+1)} \exp\left(-\delta t\right) \dot{c}}{c_t^{-\gamma} \exp\left(-\delta t\right)}$$

ovvero:

$$\frac{\dot{c}}{c_t} = \frac{1}{\gamma}\left(r - \delta\right) \tag{36}$$

che descrive la stessa dinamica, ma nel continuo, del consumo intertemporale del modello discreto (vedi paragrafo 2). La (36) è una equazione differenziale a coefficienti costanti del primo ordine che riscriviamo come:

$$c_t = \left(\frac{\gamma}{r - \delta}\right) \dot{c}$$

la cui soluzione è:

$$c_t = c_0 \exp\left\{\left(\frac{r - \delta}{\gamma}\right) t\right\} \tag{37}$$

Dunque per un dato valore di γ (l'ESI) la dinamica del consumo cresce oppure decresce al trascorrere del tempo a secondo che r sia maggiore o minore di δ. Questo è un risultato già noto, ma in un senso incompleto: sebbene questa equazione ci descriva difatti la dinamica di c_t essa non fornisce informazioni su quali variabili influenzano il consumo in ogni periodo.

6.1 La funzione del consumo

Per ottenere queste informazioni integriamo il vincolo di bilancio $\dot{a}_t = ra_t + y_t - c_t$, e moltiplichiamo per $\exp(-rt)$:

$$\int_0^T (\dot{a}_t - ra_t)\exp(-rt)dt = \int_0^T y_t \exp(-rt)dt - \int_0^T c_t \exp(-rt)dt$$

Dato che la primitiva di $(\dot{a}_t - ra_t)\exp(-rt)$ è la funzione esponenziale $a_t \exp(-rt)$, segue che:

$$[a_t \exp(-rt)]_0^T = a_T \exp(-rT) - a_0 = \int_0^T y_t \exp(-rt)dt - \int_0^T c_t \exp(-rt)dt$$

ossia:

$$\int_0^T c_t \exp(-rt)dt = a_0 + \int_0^T y_t \exp(-rt)dt \equiv a_0 + h_0 \tag{38}$$

poichè per la condizione di trasversalità in T deve essere verificato che $a_T = 0$ in T , e dove con h_0 indichiamo il valore scontato dei redditi da lavoro futuri.

Ora, per ricavare la funzione del consumo, sostituiamo la (37) nella (38) ottenendo:

$$\int_0^T c_0 \exp(-\alpha t)dt = a_0 + h_0$$

e dove abbiamo posto $\alpha = \left[r - \frac{r-\delta}{\gamma}\right] > 0$. Risolvendo l'integrale a sinistra del segno di uguaglianza si ottiene:

$$\left[-\frac{c_0 \exp(-\alpha t)}{\alpha}\right]_0^T = a_0 + h_0$$

cioè:

$$-\frac{c_0 \exp(-\alpha T)}{\alpha} + \frac{c_0}{\alpha} = a_0 + h_0$$

da cui si ricava la *funzione del consumo*:

$$c_0 = \frac{\alpha}{1 - \exp(-\alpha T)}(a_0 + h_0) = \beta(a_0 + h_0) \tag{39}$$

Il parametro $\beta = \frac{\left[r - \frac{r-\delta}{\gamma}\right]}{1-\exp(-\alpha T)}$ può essere utilmente interpretato come una propensione marginale al consumo, che dipende dai parametri del modello, dal tempo, ma non dal livello assoluto della ricchezza.

Si noti che il consumo è una funzione lineare della ricchezza totale che è la somma della ricchezza finanziaria iniziale a_0 e del valore attuale dei redditi futuri h_0. Quindi la distribuzione delle risorse nel tempo non influenza la scelta di consumo.

Vediamo cosa accade quando $T \to \infty$. In questo caso la funzione del consumo diviene $c_0 = \alpha (a_0 + h_0)$. Se, inoltre, $\delta = r$ la propensione marginale al consumo è pari al tasso di interesse r :

$$c_0 = r (a_0 + h_0)$$

ovvero il consumo è costante nel tempo e pari al flusso di risorse che non modifica la ricchezza nel tempo. Il tasso r misura quindi il fattore di rendita perpetua della ricchezza.

Si osservi che, anche in questo caso, l'effetto di una variazione del tasso di interesse sul consumo è ambiguo. Se per semplicità consideriamo il caso di $T \to \infty$ abbiamo che:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial r} = \left[1 - \frac{1}{\gamma} \right]$$

implicando che il segno della derivata dipende dal reciproco dell'avversione relativa al rischio $1/\gamma$. Se per esempio $\gamma = 1$ allora la variazione del tasso di interesse lascia inalterata la propensione marginale al consumo. E' questo il caso dell'utilità logaritmica in cui l'effetto reddito e quello sostituzione si conmpensano esattamente. Alternativamente, se $\gamma < 1$ l'effetto reddito prevale e la derivata è positiva, ovvero il consumo corrente aumenta e la ricchezza diminuisce.

Si tenga infine presente che quando $T \to \infty$ la condizione di trasversalità deve essere sempre rispettata, ma che ora prende la forma:

$$\lim_{t \to \infty} a_t \exp(-rt) = 0$$

per assicurare che nel lungo periodo il valore del debito tenda comunque a zero.

6.2 La funzione del risparmio

Il risultato precedente implica che il consumo di un periodo non dipende dal reddito corrente di quel periodo, ma dal valore complessivo del reddito percepito sull'intero orizzonte di vita. Più precisamente, l'espressione $\beta (a_0 + h_0)$

corrisponde alla definizione di *reddito permanente,* e la differenza tra questo valore ed il reddito corrente misura il *reddito transitorio.*

Per capire l'importanza di questa distinzione consideriamo il caso in cui in t il reddito aumenti in maniera transitoria di un ammontare Y. Sebbene il reddito corrente risulti pari a $y_t + Y$, il consumo aumenta solo della parte $\beta Y = \left[\frac{\alpha}{1-\exp(-\alpha T)}\right] Y$. Quindi più lungo è l'orizzonte di programmazione del consumatore, ossia più elevato è T, minore è la propensione al consumo β e minore è l'effetto della variazione del reddito corrente sul consumo in ogni periodo.

La seconda importante implicazione riguarda il *risparmio.* Difatti, sebbene il reddito corrente non sia importante nel determinare il consumo corrente, lo è invece nell'influenzare la dinamica del risparmio. Dalle nostre equazioni precedenti possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} s_t &= y_t - c_0 \\ s_t &= (y_t - \beta h_0) - \beta a_0 \end{aligned}$$

Quest'ultima espressione ci informa del fatto che il risparmio cresce quando il reddito corrente y_t è relativamente più alto del reddito medio βh_0, ovvero quando disturbi transitori positivi generano un incremento di breve periodo del livello del reddito. Al contrario, il risparmio si riduce quando il reddito corrente scende al di sotto del reddito medio.

La principale implicazione di questo comportamento è che il consumatore utilizza il risparmio come una sorta di ammortizzatore per mantenere il consumo sostanzialmente *stabile* al trascorrere del tempo. Più formalmente, poichè la funzione del consumo (39) è il risultato della scelta ottima intertemporale che si ricava dall'equazione di Eulero (33), la dinamica del risparmio agisce come un fattore di compensazione del reddito intertemporale con l'obiettivo di assicurare uno sviluppo dei consumi che sia caratterizzato dalla *assenza di sbalzi e discontinuità.* Difatti, se ciò non avvenisse questo significherebbe che tra due istanti successivi di tempo sarebbe violata l'uguaglianza tra il SMS intertemporale e il rapporto tra i prezzi, segnalando la non ottimalità della scelta di consumo. Questa preferenza dei consumatori verso uno sviluppo graduale della traiettoria intertemporale dei consumi è noto nella letteratura come *consumption smoothing.*

Appendice 1.

Il Principio di massimo.

In questa appendice presentiamo gli elementi essenziali della Teoria del controllo ottimo e della funzione nota come Hamiltoniano. Il Principio di massimo è l'elemento centrale di questa teoria.

Consideriamo un sistema dinamico. Dividiamo le variabili in due categorie.

- Quelle di *stato*, per esempio la ricchezza degli individui oppure lo stock di captale delle imprese.

- E quelle di *controllo*, per esempio il consumo oppure l'investimento delle imprese in beni strumentali.

Le equazioni che descrivono il tasso di crescita delle variabili di stato sono generalmente delle equazioni dinamiche differenziali. Esiste una relazione ben determinata di causa ed effetto tra le due variabili: una volta che il valore della variabile di controllo è scelto, è conseguentemente determinato il cambiamento nella variabile di stato per ogni periodo. Per esempio, scegliendo il flusso dell'investimento ottimale (controllo) un'impresa determina la dinamica dello stock di capitale, data la dotazione iniziale e l'intervallo di programmazione. Alternativamente, il consumo (controllo) in ogni periodo implica un risparmio (positivo o negativo) che influisce sulla dinamica della ricchezza finanziaria (stato), dati i tassi di rendimento delle diverse attività in cui la ricchezza è impiegata.

Ovviamente, il problema fondamentale è quello di scegliere una sequenza di controlli ottimi che assicuri la massimizzazione (o minimizzazione) della funzione obiettivo (per esempio, l'utilità intertemporale piuttosto che il valore dell'impresa, o la ricchezza degli azionisti).

La caratteristica saliente del controllo ottimo è quella di ricavare una sequenza di valori ottimali per la variabile di controllo in ogni istante. In altre parole, il principio richiede di trovare una forma funzionale che, sull'intero intervallo di ottimizzazione (programmazione), descriva l'evoluzione ottimale della variabile di controllo, e quindi della corrispondente variabile di stato che assicuri il massimo (minimo) valore della funzione obiettivo.

Nella sua forma più semplice un problema di controllo ottimo può essere scritto nel seguente modo. Per ogni t troviamo $c(t)$ che massimizzi:

$$V = \int_0^T v\left[c(t), s(t)\right] dt \tag{40}$$

sapendo che:

$$\dot{s} = g\left[s(t), c(t)\right] \tag{41}$$

con:

$$s(0) = s_0 \text{ e } s(T) = s_T \tag{42}$$

dove $s(t)$ è la variabile di stato, $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$ è la sua variazione rispetto al tempo, $c(t)$ è la variabile di controllo; $[0, T]$ è l'orizzonte di programmazione. s_0 e s_T è il valore iniziale e finale della variabile di stato. Se $c(t)$ è scelto ottimamente sull'intero intervallo $[0, T]$, l'equazione differenziale (**??**) e le condizioni (**??**) determinano l'evoluzione di $s(t)$ sull'orizzonte di programmazione, ed il corrispondente valore massimo di $V\left[c(t), s(t)\right]$. Assumiamo che il controllo ottimo esista, sia unico e differenziabile rispetto al tempo.

Le condizioni necessarie che costituiscono il Principio di massimo richiedono l'introduzione di una variabile di comodo, simile ad un moltiplicatore di Lagrange, detta variabile di *costato* denotata con $\lambda(t)$.Definiamo, quindi, in ogni istante una nuova funzione chiamata Hamiltoniana che per il nostro problema è scritta come:

$$H\left[c(t), s(t), \lambda(t)\right] = v\left[c(t), s(t)\right] + \lambda(t) g\left[s(t), c(t)\right] \tag{43}$$

Principio di massimo Una soluzione di ottimo al precedente problema è per ogni istante t una *tripletta di valori* $c(t), s(t), \lambda(t)$ che soddisfa le seguenti condizioni:

1. $c(t)$ massimizza $H\left[c(t), s(t), \lambda(t)\right]$, ossia:

$$\frac{\partial H}{\partial c(t)} = 0; \tag{44}$$

2. le variabili di costato $\lambda(t)$ e di stato $s(t)$ soddisfano una coppia di equazioni differenziali:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial s(t)} && (45)\\ \dot{s}(t) &= \frac{\partial H}{\partial \lambda(t)} && (46)\end{aligned}$$

con le due condizioni al contorno della (40).

Quindi, la tripletta ottimale consiste in due equazioni differenziali che descrivono la dinamica della variabile di costato $\lambda(t)$ e di quella di stato $s(t)$, più un'equazione algebrica ottenuta dalla condizione del primo ordine che consente di scegliere ottimamente il controllo $c(t)$.

6.2.1 Relazione tra il criterio di Lagrange e controllo ottimo

Per rendere più intuitivo il principio alla base del precedente criterio di controllo ottimo è utile mostrare quale relazione lega il Principio di massimo alla soluzione standard di Lagrange per un problema di massimo vincolato.

Per semplificare la discussione assumiamo che il tempo sia una variabile discreta: l'orizzonte consiste di T periodi , $t = 1, 2, 3, ..., T$ invece che di un intervallo continuo. L'analogo del problema precedente è di trovare la sequenza $c(1)$, $c(2)$, $c(3)$ che massimizzi:

$$V = \sum_{t=1}^{T} v\left[c(t), s(t)\right] \tag{47}$$

sapendo che:

$$\begin{aligned}s(t+1) - s(t) &= g\left[s(t), c(t)\right],\ t = 1, 2, ..., T && (48)\\ s(1) &= s_1 \text{ e } s(T+1) = s_{T+1} && (49)\end{aligned}$$

dove la (48) descrive la dinamica discreta della variabile di stato. E' importante notare che con tempo discreto i simboli $s(t)$ e $c(t)$ denotano i due valori delle variabili di stato e controllo all'*inizio* del generico periodo t; quindi specificare un valore finale per $s(T+1)$ equivale a imporre lo stesso valore alla fine del periodo T. La Lagrangiana del problema è:

$$\begin{aligned}
L &= v\left[s(1),c(1)\right]+v\left[s(2),c(2)\right]+...+v\left[s(t-1),c(t-1)\right]+ \\
&+v\left[s(t),c(t)\right]+...+v\left[s(T),c(T)\right]+\lambda(1)\left[s(1)+g\left(s(1),c(1)\right)-s(2)\right] \\
&+\lambda(2)\left[s(2)+g\left(s(2),c(2)-s(3)\right]+...+\right. \\
&+\lambda(t-1)\left[s(t-1)+g\left(s(t-1),c(t-1)\right)-s(t)\right]+ \\
&+\lambda(t)\left[s(t)+g\left(s(t),c(t)\right)-s(t+1)\right]+...+ \\
&+\lambda(T)\left[s(T)+g\left(s(T),c(T)\right)-s(T+1)\right]
\end{aligned}$$

e le tre corrispondenti condizioni del primo ordine sono:

$$\begin{aligned}
c(t) &: \quad v_{c(t)}+\lambda(t)g_{c(t)}=0,\ t=1,2...,T \\
s(t) &: \quad \lambda(t+1)-\lambda(t)=-v_{s(t)}-\lambda(t)g_{s(t)},\ t=2,3,...,T \\
\lambda(t) &: \quad s(t+1)-s(t)=g\left[s(t),c(t)\right],\ t=1,2,...,T
\end{aligned}$$

Se ora noi definiamo la nuova funzione:

$$H\left[c(t),s(t),\lambda(t)\right]\equiv v\left[c(t),s(t)\right]+\lambda(t)g\left[s(t),c(t)\right]$$

le tre precedenti condizioni del primo ordine diventano:

$$\begin{aligned}
c(t) &: \quad \frac{\partial H}{\partial c(t)}=0,\ t=1,2...,T \\
s(t) &: \quad \lambda(t+1)-\lambda(t)=-\frac{\partial H}{\partial s(t)},\ t=2,3,...,T \\
\lambda(t) &: \quad s(t+1)-s(t)=\frac{\partial H}{\partial \lambda(t)},\ t=1,2,...,T
\end{aligned}$$

ossia sono le tre condizioni che compongono la tripletta che risolve l'Hamiltoniano presentato sopra (anche se questa volta sono espresse in termini discreti).

Parte Seconda.

Consumo intertemporale in condizioni di incertezza

7 Introduzione

Introduciamo ora l'incertezza. Possiamo fare diverse ipotesi:

1. il consumatore è incerto circa il livello del reddito da lavoro futuro;
2. il consumatore è incerto circa il rendimento delle attività che compongono la sua ricchezza;
3. o entrambe le ipotesi.

Per facilitare lo studio della relazione tra incertezza e consumo partiamo dal primo scenario. Assumiamo cioè che il reddito futuro sia generato da qualche processo stocastico e che il consumatore debba esprimere una valutazione circa il suo valore atteso. Questa ipotesi, congiuntamente a quella di *utilità marginale del consumo lineare* consente di ricavare una particolare forma del modello di consumo intertemporale in condizioni di incertezza nota come *"equivalente al caso di certezza".* Come vedremo, questa forma del modello, sebbene storicamente importante, è di rilevanza limitata perchè consente di analizzare solo alcuni effetti che l'incertezza sul reddito ha sulle scelte di consumo-risparmio.

8 Redditi incerti

In accordo con il modello del primo capitolo assumiamo che il mercato dei capitali sia perfetto ed efficiente. Esiste una sola attività finanziaria non rischiosa che offre un rendimento certo pari a $(1+r)$. Il tempo scorre in maniera discreta e l'orizzonte temporale di programmazione è finito. Assumiamo, però, che ci sia incertezza circa il livello dei futuri redditi da lavoro y_{t+s}.

Il problema di massimizzazione dell'utilità *attesa* può allora essere scritto come:

$$\max_{c_t} E_t \left[\sum_{s=0}^{T-t} \frac{u(c_{t+s})}{(1+\delta)^s} \right] \tag{50}$$

$$s.c.: \; a_{t+s+1} = (1+r)(a_{t+s} + y_{t+s} - c_{t+s}) \tag{51}$$

dove $u(c_{t+s})$ è la funzione di utilità supposta additiva e separabile, $E_t[.]$ è l'aspettativa del consumatore riguardo al reddito futuro condizionata alle informazioni disponibili al tempo t. Come per i problemi di ottimo studiati in precedenza assumiamo che la ricchezza iniziale a_t sia data, e che valga la condizione di trasversalità:

$$(1+r)^{-T} a_{T+1} = 0 \tag{52}$$

8.1 La programmazione dinamica

Sebbene anche in questo caso sia possibile utilizzare la funzione Lagrangiana, in quanto segue si preferisce risolvere il problema (80-**??**) con il metodo della *programmazione dinamica.* Per questa ragione definiamo la funzione valore:

$$V_t(a_t) = \max_{c_t} E_t \left[\sum_{s=0}^{T-t} \frac{u(c_{t+s})}{(1+\delta)^s} \right] \tag{53}$$

$V_t(a_t)$ rappresenta, cioè, il valore attuale dell'utilità attesa (in $s=0$) che il consumatore ottiene dalla sequenza ottimale di consumo, dato il valore iniziale della ricchezza a_t. Il consumo c_{t+s} è la variabile di *controllo,* mentre a_{t+s} è la variabile di *stato* la cui dinamica dipende dalle scelte di consumo.

- Con la definizione di $V_t(a_t)$ il problema multiperiodale si riduce ad una sequenza di problemi biperiodali recursivi che si possono esprimere con *l'equazione di Bellman*:

  $$V_t(a_t) = \max_{c_t} \left\{ u(c_t) + \frac{1}{1+\delta} E_t \left[V_{t+1}(a_{t+1}) \right] \right\} \tag{54}$$

  $u(c_t)$ è l'utilità che si ottiene al tempo presente dal consumo c_t, mentre $\frac{1}{1+\delta} E_t \left[V_{t+1}(a_{t+1}) \right]$ è il valore attuale dell'utilità attesa che il consumatore ottiene sul rimanente intervallo di tempo scegliendo opportunamente il livello del consumo futuro.

- Per chiarire il procedimento, supponiamo che l'orizzonte di programmazione abbia inizio in t e termine in $t+1$. Consideriamo il problema di massimizzazione nel periodo finale $t+1$. L'obiettivo è quello di massimizzare $u(c_{t+1})$ scegliendo opportunamente c_{t+1}, dati i vincoli del problema. La caratteristica di separabilità intertemporale della funzione di utilità, e la forma recursiva del vincolo di bilancio, consentono di ricavare una soluzione che fornisce il livello ottimale $c^*_{t+1}(a_{t+1})$;

questo valore del consumo massimizza la funzione valore in $t+1$, ovvero ci offre il valore massimo di $V_{t+1}(a_{t+1})$. Una volta che questa soluzione è stata ottenuta si procede a ritroso risolvendo con la stessa procedura il problema consumatore in t, sapendo qual'è il livello ottimale della ricchezza in $t+1$.

- Dalla sostituzione del vincolo a_{t+1} si ottiene:

$$V_t(a_t) = \max_{c_t} \left\{ u(c_t) + \frac{1}{1+\delta} E_t \left[V_{t+1} \left((1+r)(a_t + y_t - c_t) \right) \right] \right\} \quad (55)$$

La condizione del primo ordine rispetto a c_t è:

$$u'(c_t) = \frac{1+r}{1+\delta} E_t \left[V'_{t+1}(a_{t+1}) \right] \quad (56)$$

- Purtroppo la condizione (56), che corrisponde in questo contesto alla equazione di Eulero, non può essere risolta direttamente perchè la forma della funzione valore $V_t(a_t)$ non è nota. Esiste comunque una relazione di inviluppo tra $V'_t(a_t)$ e $u'(c_t)$ lungo il percorso ottimale del consumo che può essere utilizzata per risolvere la condizione del primo ordine. Consideriamo, dunque, cosa accade alla (55) quando la ricchezza a_t varia in maniera infinitesimale. Per fare ciò, si tenga presente che la $V_t(a_t)$ esprime il valore dell'utilità che si ottiene *dopo* avere risolto il problema di ottimizzazione. Essa è quindi la funzione di *utilità indiretta* che si ricava sostituendo nella funzione di utilità attesa la sequenza delle soluzioni ottimali $c^*_{t+s}(a_{t+s})$.

- Formalmente, differenziando rispetto ad a_t si ottiene:

$$V'_t(a_t) = u'(c_t) \frac{\partial c_t}{\partial a_t} + \frac{1+r}{1+\delta} E_t \left[V'_{t+1}(a_{t+1}) \right] - \frac{1+r}{1+\delta} E_t \left[V'_{t+1}(a_{t+1}) \right] \frac{\partial c_t}{\partial a_t}$$

ovvero:

$$V'_t(a_t) = \left[u'(c_t) - \frac{1+r}{1+\delta} E_t \left(V'_{t+1}(a_{t+1}) \right) \right] \frac{\partial c_t}{\partial a_t} + \frac{1+r}{1+\delta} E_t \left[V'_{t+1}(a_{t+1}) \right]$$

Dalla condizione del primo ordine risulta però che:

$$u'(c_t) - \frac{1+r}{1+\delta} E_t \left[V'_{t+1}(a_{t+1}) \right] = 0$$

e dunque l'inviluppo rispetto ad a_t implica che:

$$V_t'(a_t) = \frac{1+r}{1+\delta} E_t \left[V_{t+1}'(a_{t+1}) \right]$$

- Quest'ultima espressione risolve la (56). Difatti, sostituendo nell'equazione di Eulero si ha che:

  $$u'(c_t) = V_t'(a_t)$$

  cioè lungo la traiettoria ottimale l'utilità marginale del consumo coincide con l'utilità marginale della ricchezza. Chiaramente, questa relazione di ottimalità si deve realizzare in ogni periodo e quindi anche in $t+1$:

  $$u'(c_{t+1}) = V_t'(a_{t+1})$$

  Da questa espressione sostituendo nella (56) si ricava:

  $$u'(c_t) = \frac{1+r}{1+\delta} E_t u'(c_{t+1}) \tag{57}$$

  che è la condizione di ottimo intertemporale tra due periodi successivi di tempo: in equilibrio un aumento dell'utilità marginale causata da una riduzione del consumo in t è controbilanciata da una riduzione dell'utilità marginale $t+1$ causata da un aumento di $c_{t+1.}$

- E' infine utile sottolineare una particolare forma della (57) che si manifesta quando $\delta = r$. In questo caso la precedente condizione diviene:

  $$u'(c_t) = E_t u'(c_{t+1}) \tag{58}$$

  Questa equazione ci dice che in t il valore atteso dell'utilità marginale in $t+1$ è pari al valore corrente dell'utilità marginale. *Ex ante* il miglior previsore dell'utilità marginale è dunque $u'(c_t)$ del periodo precedente.

9 Il caso dell'utilità quadratica

Riprendiamo l'equazione di Eulero riscrivendola nella forma:

$$\frac{1+\delta}{1+r} u'(c_t) = E_t u'(c_{t+1}) \tag{59}$$

Se la funzione di utilità è quadratica del tipo $u(c_t) = ac_t - \frac{b}{2}c_t^2$ si ottiene:

$$\frac{1+\delta}{1+r}(a - bc_t) = E_t(a - bc_{t+1}) \tag{60}$$

(dove per evitare che l'utilità marginale divenga negativa poniamo la restrizione $0 < c_t < a/b$). Riordinando si ricava:

$$E_t(c_{t+1}) = \alpha + \beta c_t \tag{61}$$

dove $\alpha = \frac{a}{b}\frac{r-\delta}{1+r}$ e $\beta = \frac{1+\delta}{1+r}$, ossia il consumo segue un processo AR(1). Se, poi l'aspettativa è razionale e l'errore di previsione ha la proprietà $\varepsilon_t \backsim N(0, \sigma^2)$ possiamo scrivere che *ex ante:*

$$c_{t+1} = \alpha + \beta c_t + \varepsilon_{t+1}$$

che, se $\delta = r$ diviene:

$$c_{t+1} = c_t + \varepsilon_{t+1}$$

ossia

$$E_t(c_{t+1}) = c_t \tag{62}$$

La principale implicazione di questo risultato è che il *livello del consumo*, e non solo l'utilità marginale, è una martingala: il miglior previsore del consumo è il consumo del periodo precedente.

9.1 La soluzione equivalente al caso di certezza.

Poichè y_t è una variabile casuale dobbiamo considerare il valore *atteso* del vincolo di bilancio intertemporale:[1]

$$\sum_{s=0}^{T-t} \frac{E_t(c_{t+s})}{(1+r)^s} = a_t + \sum_{s=0}^{T-t} \frac{E_t(y_{t+s})}{(1+r)^s} \tag{63}$$

Ma, con utilità quadratica, dalla condizione del primo ordine sappiamo che quando $\delta = r$ allora $E_t(c_{t+1}) = c_t$. Il consumo resta dunque costante nel tempo implicando che $c_t = c_{t+1} = \cdots = c_T$.

[1] Anche in questo caso la soluzione della dinamica del vincolo di bilancio viene ottenuta sostituendo recursivamente fino a T il valore della ricchezza. Si veda per il caso di certezza il paragrafo (3) della parte prima.

- Dunque sostituendo nella (63) si ha che:

$$c_t \sum_{s=0}^{T-t} \frac{1}{(1+r)^s} = a_t + \sum_{s=0}^{T-t} \frac{E_t\left(y_{t+s}\right)}{(1+r)^s}$$

Ora dato che:

$$\sum_{s=0}^{T-t} \frac{1}{(1+r)^s} = \left[1 - \frac{1}{(1+r)^{T-t+1}}\right] \frac{1+r}{r} \equiv \frac{1}{\theta}$$

segue che la funzione del consumo può essere scritta come:

$$c_t = \theta \left[a_t + \sum_{s=0}^{T-t} \frac{E_t\left(y_{t+s}\right)}{(1+r)^s}\right] = \theta\left(a_t + E_t\left(h_t\right)\right)$$

che evidentemente è la soluzione del consumo corrispondente all'equazione (25) del capitolo precedente, ma ora generalizzata al caso di incertezza sul reddito futuro. θ è una misura della propensione marginale al consumo. Inoltre quando $T \to \infty$ otteniamo che:

$$c_t = \frac{r}{1+r}\left[a_t + E_t\left(h_t\right)\right] \tag{64}$$

dove l'espressione a destra del segno di uguaglianza rappresenta il reddito permanente.

- La (64) è l'equazione fondamentale del *modello equivalente al caso di certezza*. Il rapporto $\frac{r}{1+r}$ misura la propensione marginale al consumo ed è denominato fattore di rendita perpetua. Si noti che sebbene il comportamento dei consumatori sia influenzato dall'incertezza, solo i valori attesi di y_t entrano nella definizione del reddito permanente, mentre la variabilità di y_t non influenza il consumo.

10 Implicazione: cosa determina ε_{t+1}?

Per affrontare questo problema partiamo dal caso semplice di funzione di utilità quadratica, con l'ulteriore ipotesi $\delta = r = 0$, e di scelta intertemporale di consumo per un individuo che vive T periodi. Sappiamo che in questo caso l'equazione di Eulero si riduce a:

$$E_t\left(c_{t+s}\right) = c_t \tag{65}$$

o corrispondentemente:

$$c_{t+s} = c_t + \varepsilon_{t+s}$$

ossia il modello del reddito permanente implica che il consumo segue un processo *random walk*. Ci chiediamo cosa determina il cambiamento ε_{t+s} del consumo?

- Sotto l'ipotesi $\delta = r = 0$ il vincolo di bilancio (63) si riduce a:

$$c_t = \frac{1}{T}\left[a_t + \sum_{s=0}^{T-t} \frac{E_t\left(y_{t+s}\right)}{\left(1+r\right)^s}\right] \tag{66}$$

  perchè in t vale la relazione (65). Ora per lo stesso ragionamento possiamo scrivere che in $t+1$ il livello del consumo c_{t+1} deve essere pari a $1/\left(T-1\right)$ della ricchezza complessiva attesa sul rimanente orizzonte temporale:

$$c_{t+1} = \frac{1}{T-1}\left[a_{t+1} + \sum_{s=1}^{T-t} \frac{E_{t+1}\left(y_{t+s}\right)}{\left(1+r\right)^s}\right]$$

  che dalla relazione del vincolo di bilancio possiamo riscrivere come:

$$c_{t+1} = \frac{1}{T-1}\left[\left(a_t + y_t - c_t\right) + \sum_{s=1}^{T-t} \frac{E_{t+1}\left(y_{t+s}\right)}{\left(1+r\right)^s}\right]$$

  Ora sommiamo e sottraiamo da quest'ultima espressione il valore $\sum_{s=1}^{T-t} \frac{E_t(y_{t+s})}{(1+r)^s}$, che rappresenta l'aspettativa dei redditi da $t+1$ in poi, ma espressa al tempo t. Si ricava l'espressione:

$$c_{t+1} = \frac{1}{T-1}\left[\left(a_t + y_t - c_t\right) + \sum_{s=1}^{T-t} \frac{E_t\left(y_{t+s}\right)}{\left(1+r\right)^s} + \left(\sum_{s=1}^{T-t} \frac{E_{t+1}\left(y_{t+s}\right)}{\left(1+r\right)^s} - \sum_{s=1}^{T-t} \frac{E_t\left(y_{t+s}\right)}{\left(1+r\right)^s}\right)\right]$$

  Ma dalla (66) segue che:

$$c_{t+1} = \frac{1}{T-1}\left[c_t\left(T-1\right) + \left(\sum_{s=1}^{T-t} \frac{E_{t+1}\left(y_{t+s}\right)}{\left(1+r\right)^s} - \sum_{s=1}^{T-t} \frac{E_t\left(y_{t+s}\right)}{\left(1+r\right)^s}\right)\right]$$

  da cui semplificando si ottiene:

$$c_{t+1} = c_t + \frac{1}{T-1}\left(\sum_{s=1}^{T-t} \frac{E_{t+1}\left(y_{t+s}\right)}{\left(1+r\right)^s} - \sum_{s=1}^{T-t} \frac{E_t\left(y_{t+s}\right)}{\left(1+r\right)^s}\right)$$

Quest'ultima relazione ci mostra che la variazione del consumo $c_{t+1} - c_t$ è pari al cambiamento della stima dei redditi futuri diviso l'orizzonte temporale restante. Se per esempio le aspettative sul reddito in $t+2$ fossero al ribasso l'individuo troverebbe ottimale comprimere il consumo e accumulare più risorse (accresce il risparmio) per fare fronte alla riduzione del reddito atteso.

11 Rendimenti incerti: il caso di un titolo rischioso

Affrontiamo ora il problema della scelta intertemporale di consumo quando l'individuo è incerto sul rendimento delle attività che compongono la sua ricchezza finanziaria. Più precisamente, ipotizziamo che esista una sola attività finanziaria rischiosa a_t, che offre un rendimento incerto pari a $(1 + z_t)$. La rischiosità dipende dal fatto che il rendimento $(1 + z_t)$ si manifesta in $t+1$, dopo che la decisione di consumo c_t è stata presa. Assumiamo che i rendimenti si distribuiscano come una variabile stocastica indipendentemente distribuita. Per semplicità si ipotizzi che y_t sia nullo.

- Il problema di ottimo può dunque essere riscritto come:

$$\begin{aligned} & \max_{c_t} \; E_t \left[\sum_{s=0}^{T-t} \frac{u(c_{t+s})}{(1+\delta)^s} \right] \\ s.c \quad : \quad & a_{t+1} = (1 + z_t)(a_t - c_t) \end{aligned}$$

con la condizione di trasversalità che ora prende la forma:

$$E_t \prod_{s=0}^{T-t} (1 + z_{t+s})\, a_{T+1} = 0$$

Si tenga infine presente che a_t è la variabile di stato (l'unico asset del problema), mentre il risparmio:

$$s_t = (a_t - c_t)$$

può essere utilmente utilizzato come variabile di controllo.

11.1 L'equazione di Eulero

L'equazione di Bellman corrispondente è:

$$V_t(a_t) = \max_{c_t} \left\{ u(c_t) + \frac{1}{1+\delta} E_t \left[V_{t+1}(a_{t+1}) \right] \right\}$$

ovvero:

$$V_t(a_t) = \max_{s_t} \left\{ u(c_t) + \frac{1}{1+\delta} E_t \left[V_{t+1}((1+z_t)s_t) \right] \right\}$$

in quanto il vincolo di bilancio può essere riscritto come $a_{t+1} = (1+z_t)s_t$. Quindi differenziando rispetto a s_t si ottiene la condizione del primo ordine:

$$u'(c_t) = \frac{1}{1+\delta} E_t \left[V'_{t+1}((1+z_t)s_t) \right] (1+z_t)$$

Come di consueto poi, dato che dalla condizione di inviluppo risulta:

$$V'_t(a_t) = u'(c_t)$$

spostando il tempo in avanti di un periodo, e sostituendo nella condizione di ottimo si ottiene la corrispondente *equazione di Eulero*:

$$u'(c_t) = \frac{1+z_t}{1+\delta} E_t \left[u'(c_{t+1}) \right] \tag{67}$$

11.2 Una soluzione esplicita nel caso della logaritmica

Facciamo l'ipotesi che la funzione di utilità sia $u(c_t) = \ln(c_t)$, e ipotizziamo che la funzione del consumo (*optimal policy function*) abbia la forma:

$$c_t = \varphi a_t$$

dove φ è una costante da determinare. In altri termini, assumiamo che il consumo dipende dalla ricchezza a_t in qualche proporzione fissa φ. La precedente equazione (67) diviene:

$$\frac{1}{c_t} = \frac{1+z_t}{1+\delta} E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} \right]$$

ma dato che $c_{t+1} = \varphi a_{t+1} = \varphi(1+z_t)(a_t - c_t)$, possiamo scrivere che:

$$\frac{1}{\varphi a_t} = \frac{1+z_t}{1+\delta} E_t \left[\frac{1}{\varphi(a_t - \varphi a_t)(1+z_t)} \right]$$

da cui risulta che $\varphi = \left(1 - \frac{1}{1+\delta}\right)$. La funzione del consumo prende quindi la forma:

$$c_t = \left(1 - \frac{1}{1+\delta}\right) a_t$$

12 Rendimenti incerti: il caso di n titoli rischiosi

Supponiamo ora che esistano n titoli rischiosi. Indichiamo con $1+z_{it}$ il rendimento dell'asset i in t. Assumiamo che i rendimenti dei diversi titoli abbiano una correlazione nulla e che siano distribuiti normalmente. Per semplificare il nostro problema assumiamo inoltre che l'orizzonte di programmazione sia infinito. Il problema di massimo prende ora la forma:

$$\begin{aligned}
& \max_{c_t} E_t \left[\sum_{s=0}^{\infty} \frac{u\left(c_{t+s}\right)}{(1+\delta)^s} \right] \\
s.c. \quad : \quad & c_t + \sum_{i=1}^{n} s_{it} = a_t \qquad \text{per } t \geq 0 \\
s.c. \quad : \quad & a_{t+1} = \sum_{i=1}^{n} s_{it}\left(1+z_{it}\right) \qquad \text{per } t \geq 0 \\
s.c. \quad : \quad & \lim_{t \to \infty} E_t \left(1+z_t\right) a_t = 0
\end{aligned}$$

con a_0 dato, e dove s_{it} è il risparmio ossia l'ammontare di titoli i comprati in t.

- L'equazione di Bellman prende la forma:

$$V_t\left(a_t\right) = \max_{s_{it}} \left\{ u\left(c_t\right) + \frac{1}{1+\delta} E_t\left[V_{t+1}\left(a_{t+1}\right)\right] \right\}$$

  cioè sostituendo per c_t e a_{t+1} :

$$V_t\left(a_t\right) = \max_{s_{it}} \left\{ u\left(a_t - \sum_{i=1}^{n} s_{it}\right) + \frac{1}{1+\delta} E_t\left[V_{t+1}\left(\sum_{i=1}^{n} s_{it}\left(1+z_{it}\right)\right)\right] \right\}$$

Da quest'ultima espressione si ottiene la condizione del primo ordine rispetto a s_{it} :

$$u'\left(a_t - \sum_{i=1}^{n} s_{it}\right) = \frac{1+z_{it}}{1+\delta} E_t V'_{t+1}\left(\sum_{i=1}^{n} s_{it}\left(1+z_{it}\right)\right) \tag{68}$$

mentre la condizione di inviluppo rispetto ad a_t risulta essere:

$$V'_t\left(a_t\right) = u'\left(a_t - \sum_{i=1}^{n} s_{it}\right)$$

Quindi, seguendo la solita procedura si ricava dalla (68) l'equazione di Eulero:

$$u'\left(a_t - \sum_{i=1}^{n} s_{it}\right) = \frac{1+z_{it}}{1+\delta} E_t u'\left(a_{t+1} - \sum_{i=1}^{n} s_{it+1}\right) \tag{69}$$

12.1 Una soluzione esplicita nel caso della CRRA

Per risolvere l'equazione di Eulero (33) assumiamo che la funzione di utilità sia del tipo $\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, e ipotizziamo che la funzione del risparmio ottimale prenda la forma:

$$s_{it} = wa_t \qquad \text{per ogni } i = 1...n$$

con w da determinare. Sostituendo nell'equazione di Eulero l'espressione $u^{'}\left(c_t\right) = c_t^{-\gamma}$ si ha dunque:

$$c_t^{-\gamma} = \frac{1+z_{it}}{1+\delta} E_t\left(c_{t+1}^{-\gamma}\right) \tag{70}$$

Ma, dalle condizioni iniziali sappiamo che per l'ennesimo titolo vale la relazione $c_t = a_t - s_{it}$, che possiamo riscrivere come:

$$c_t = \left(1-w\right) a_t$$

Sostituendo nella (70) si ottiene quindi che:

$$\begin{aligned}
\left[\left(1-w\right) a_t\right]^{-\gamma} &= \frac{1+z_{it}}{1+\delta} E_t\left[\left(1-w\right) a_{t+1}\right]^{-\gamma} \\
\left[\left(1-w\right) a_t\right]^{-\gamma} &= \frac{1+z_{it}}{1+\delta} E_t\left[\left(1-w\right)\sum_{i=1}^{n} wa_{it}\left(1+z_{it}\right)\right]^{-\gamma}
\end{aligned}$$

perchè dalla condizioni iniziali $a_{t+1} = \sum_{i=1}^{n} s_{it} \left(1 + z_{it}\right).$ Dividendo e semplificando si ottiene infine:

$$w = \left(\frac{1 + z_{it}}{1 + \delta}\right)^{\frac{1}{\gamma}} E_t \left(\sum_{i=1}^{n} \left(1 + z_{it}\right)\right)^{-1}$$

Il significato economico di quest'ultima espressione è che in presenza di una funzione CRRA, e di rendimenti normalmente e indipendentemente distribuiti, il consumatore-risparmiatore alloca una frazione costante di ricchezza per ogni attività. Questo dipende dalle ipotesi di indipendenza dei rendimenti $1+z_{it}$ nel tempo, e dalle ipotesi di normalità e indipendenza della distribuzione dei rendimenti.

Appendice 2.

Due esempi di programmazione dinamica con certezza

Esempio 1A. *Il caso della funzione di utilità CRRA*

Utilizziamo il metodo della programmazione dinamica, ma sotto l'ipotesi di certezza. Ipotizziamo che il consumatore riceva il reddito esclusivamente sotto forma degli *interessi* percepiti sulla ricchezza detenuta in ogni periodo. I redditi da lavoro sono invece nulli, $y_t = 0$. Supponiamo infine che la funzione di utilità sia $u(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$.

L'equazione di Bellman di questo problema è:

$$V_t(a_t) = \max_{c_t} \left\{ \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{1}{1+\delta} \left[V_{t+1}\left((1+r)(a_t - c_t) \right) \right] \right\}$$

sotto il vincolo:

$$a_{t+1} = (1+r)(a_t - c_t)$$

La condizione del primo ordine che ricaviamo direttamente dalla (57) è:

$$c_t^{-\gamma} = \frac{1+r}{1+\delta} c_{t+1}^{-\gamma} \tag{71}$$

- Per risolvere questa equazione alle differenze del primo ordine facciamo l'ipotesi che la *optimal policy function*, ossia la *funzione del consumo* corrispondente abbia la forma:

  $$c_t = \varphi a_t \tag{72}$$

  dove φ è una costante da determinare. Si noti che in $t+1$ si ha che $c_{t+1} = \varphi a_{t+1}$, o meglio:

  $$\begin{aligned} c_{t+1} &= \varphi(1+r)(a_t - c_t) \\ c_{t+1} &= \varphi(1+r)(a_t - \varphi a_t) \end{aligned}$$

  Sostituendo per c_t e c_{t+1} nella (71) si ha quindi:

  $$(\varphi a_t)^{-\gamma} = \frac{1+r}{1+\delta} \left(\varphi(1+r)(a_t - \varphi a_t) \right)^{-\gamma}$$

da cui riducendo e semplificando si ricava:

$$\varphi = 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{\frac{1}{\gamma}} (1+r)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}$$

Sostituendo, infine, per φ nella (72) si ottiene la funzione del consumo:

$$c_t^* (a_t) = \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{\frac{1}{\gamma}} (1+r)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} \right) a_t \tag{73}$$

dove con $c_t^* (a_t)$ indichiamo la soluzione ottima dell'equazione di Bellman.

- Dal valore ottimo del consumo possiamo ricavare la forma della funzione valore $V_t (a_t)$. Supponiamo che essa abbia la medesima forma della funzione di utilità CRRA, e possa essere quindi scritta come:

$$V_t (a_t) = \phi \frac{a_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

dove ϕ è una costante da determinare. La corrispondente equazione di Bellman calcolata nel suo valore ottimale $c_t^* (a_t)$ è:

$$\phi \frac{a_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} = \left\{ \frac{\left(\left(1 - \frac{1}{A}\right) a_t\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{1}{1+\delta} \phi \frac{a_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right\}$$

con $A = \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{\frac{1}{\gamma}} (1+r)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$. Da questa espressione possiamo ricavare il valore della costante ϕ. Ricordando l'espressione del vincolo e la soluzione (73) per c_t la precedente equazione diviene:

$$\phi \frac{a_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} = \left\{ \frac{\left(\left(1 - \frac{1}{A}\right) a_t\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{1}{1+\delta} \phi \frac{\left[(1+r)\left(a_t - \left(1 - \frac{1}{A}\right) a_t\right)\right]^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right\}$$

da cui si ottiene:

$$\phi = \left[\frac{1 - \frac{1}{A}}{1 - \left(\frac{1+r}{1+\delta}\right) \left(\frac{\frac{1}{A} - \gamma}{1-\gamma}\right)} \right]$$

La funzione valore ha quindi la forma:

$$V_t(a_t) = \left[\frac{1 - \frac{1}{A}}{1 - \left(\frac{1+r}{1+\delta}\right)\left(\frac{\frac{1}{A}-\gamma}{1-\gamma}\right)} \right] \frac{a_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

Esempio 2A. *Beni durevoli*

Fino ad ora abbiamo assunto che in ciascun periodo la funzione di utilità dipenda solamente dal consumo nello stesso periodo, ed abbiamo denominato questa ipotesi sulle preferenze come *additività*. Ci sono tuttavia casi in cui questa separabilità non può essere verificata. E' questo per esempio il caso dei beni durevoli, ossia di beni che generano un servizio che perdura nel tempo. La presenza di beni durevoli nella funzione di utilità complica il problema di ottimizzazione perchè introduce una dipendenza temporale tra le decisioni di consumo su più periodi. Difatti, l'utilità di un bene durevole si manifesta attraverso la fornitura di un servizio che produce effetti anche sull'utilità dei periodi successivi. Si manifestano così in ogni periodo due effetti sulla funzione di utilità: uno diretto che è relativo alla domanda di beni di immediato consumo, ed un indiretto che coinvolge il confronto tra le utilità marginali dei beni di consumo immediato con il flusso del servizio generato in ogni periodo dal consumo di beni durevoli.

- Supponiamo che la funzione di utilità del consumatore abbia la forma $u(c_t, D_t)$, dove con D_t indichiamo lo stock *lordo* di beni durevoli disponibili in t. La dinamica dell'accumulazione di questi beni è:

$$D_{t+1} = d_t + (1-\eta) D_t \tag{74}$$

  Il vincolo di bilancio è $a_{t+1} = (1+r)(a_t + y_t - c_t - d_t)$. Sostituendo per d_t in quest'ultima espressione si ottiene:

$$a_{t+1} = (1+r)\left[a_t + y_t - c_t - (D_{t+1} - (1-\eta) D_t)\right] \tag{75}$$

- Il problema del consumatore è dunque quello di massimizzare la funzione valore:

$$V_t(a_t) = \left[\sum_{s=0}^{T-t} \frac{u(c_{t+s}, D_{t+s})}{(1+\delta)^s} \right]$$

  scegliendo ottimamente c_te D_t, dato il vincolo (75) e la condizione di trasversalità $(1+r)^{-T} a_{T+1} = 0$.

- L'equazione di Bellman corrispondente è:

$$V_t(a_t) = \max_{c_t, D_t} \left\{ u(c_t, D_t) + \frac{1}{1+\delta} [V_{t+1}(a_{t+1})] \right\}$$

Sostituendo il vincolo (75) nella Bellman il problema di massimo può essere riscritto come:

$$V_t(a_t) = \max_{c_t, D_t} \left\{ u(c_t, D_t) + \frac{1}{1+\delta} V_{t+1} [(1+r)[a_t + y_t - c_t - (D_{t+1} - (1-\eta) D_t)]] \right\}$$

Le condizione del primo ordine sono:

$$c_t \; : \; u_{c_t} - \frac{1+r}{1+\delta} V'_{t+1}(a_{t+1}) = 0 \quad (76)$$

$$D_t \; : \; -u_{c_t} + u_{D_t} + \frac{1+r}{1+\delta} (1-\eta) V'_{t+1}(a_{t+1}) = 0 \quad (77)$$

Attraverso la condizione di inviluppo si ricava dalla (76) che $u_{c_{t+1}} = V'_{t+1}(a_{t+1})$, e quindi sostituendo nel sistema precedente si ottiene:

$$u_{c_t} = \frac{1+r}{1+\delta} u_{c_{t+1}}$$

$$u_{c_t} = u_{D_t} + \frac{1+r}{1+\delta} (1-\eta) u_{c_{t+1}}$$

- Se la funzione di utilità è additiva e logaritmica nei due argomenti, ossia ha la forma:

$$u(c_t, D_t) = \gamma \log c_t + (1-\gamma) \log D_t$$

possiamo riscrivere le due condizioni di ottimalità come:

$$\frac{\gamma}{c_t} = \frac{1+r}{1+\delta} \frac{\gamma}{c_{t+1}} \quad (78)$$

$$\frac{\gamma}{c_t} = \frac{1-\gamma}{D_t} + \frac{1+r}{1+\delta} (1-\eta) \frac{\gamma}{c_{t+1}} \quad (79)$$

Come di consueto, la (78) è la tradizionale equazione di Eulero per il consumo. La (79) invece enfatizza il fatto che la domanda di beni durevoli è assimilabile all'investimento in beni capitali. Affinchè la domanda per D_t sia ottimale l'utilità marginale di acquistare beni durevoli deve eguagliare la *riduzione* dell'utilità corrente che ne deriva in t in quanto:

$$\frac{1-\gamma}{D_t} = \frac{\gamma}{c_t} - \left(\frac{1+r}{1+\delta} (1-\eta) \frac{\gamma}{c_{t+1}} \right)$$

In altri termini, l'utilità che deriva dal consumo di c_t in t deve essere pari all'utilità marginale in t che deriva dal servizio di D_t più il valore marginale delle risorse che un aumento dello stock di beni durevoli rende disponibile per il consumo in $t+1$.

Parte Terza.

Modelli di consumo e "asset pricing"

13 Introduzione

Fino ad ora abbiamo per semplicità espositiva supposto che l'incertezza nelle decisioni intertemporali di consumo sia causata *alternativamente* dalla dinamica aleatoria del reddito da lavoro y_t, oppure dalla variabilità dei rendimenti $(1 + z_t)$ dei titoli finanziari. Consideriamo ora il caso più generale in cui *entrambe* le grandezze y_t e z_t siano variabili stocastiche.

Più precisamente, assumiamo che il consumatore sia *incerto* tanto sulla evoluzione del reddito y_t, quanto sull'andamento futuro dei rendimenti delle attività che compongono la propria ricchezza. Egli deve scegliere *congiuntamente,* in ogni periodo, il consumo e l'allocazione ottimale del risparmio con l'obiettivo di massimizzare la sua utilità attesa. Evidentemente, il risultato di questo processo dipende dai diversi fattori che influenzano la scelta tra cui il grado di avversione al rischio dell'individuo e la covarianza tra il consumo e i rendimenti.

Con questa estensione il modello fornisce importanti implicazioni sullo andamento dinamico del consumo e dei tassi di rendimento. Come vedremo, da questo modello si deriva una relazione di valutazione dei rendimenti attesi delle attività finanziarie nota come *Consumption Capital Asset Pricing Model.* Questo tipo di problema è stato in origine discusso da Samuelson (1969) e Merton (1969).

14 Consumo ottimale e composizione ottima di portafoglio

Consideriamo il seguente problema di ottimizzazione del consumo su un orizzonte finito:

$$V_t(a_t) = \max_{c_t} E_t \left[\sum_{s=0}^{T-t} \frac{u(c_{t+s})}{(1+\delta)^s} \right] \tag{80}$$

dove $u(c_t)$ è la funzione di utilità ipotizzata separabile e additiva, a utilità marginale decrescente, e δ è il tasso soggettivo di preferenza intertemporale. Rispetto ai problemi studiati nel capitolo precedente assumiamo che tanto i redditi da lavoro quanto i rendimenti siano incerti. Ipotizziamo tuttavia che esistano due sole attività finanziarie: una è rischiosa ed ha un rendimento incerto pari a $(1 + z_t) = Z_t$, l'altro è un asset privo di rischio che offre il rendimento certo $(1 + r_t) = R_t$.

Il vincolo di bilancio intertemporale può essere scritto come:

$$a_{t+s+1} = (a_{t+s} + y_{t+s} - c_{t+s}) \left[R_{t+s}w + Z_{t+s}(1-w)\right]$$

dove w è la quota del portafoglio finanziario investito nell'attività non rischiosa.

- La corrispondente equazione di Bellman è:

$$V_t(a_t) = \max_{c_t, w_t} \left\{ u(c_t) + \frac{1}{1+\delta} E_t \left[V_{t+1}(a_{t+1})\right] \right\}$$

che sostituendo il vincolo diviene:

$$V_t(a_t) = \max_{c_t, w_t} \left\{ u(c_t) + \frac{1}{1+\delta} E_t \left[V_{t+1}\left((a_t + y_t - c_t)\left[R_t w + Z_t(1-w)\right]\right)\right] \right\}$$

La risoluzione del problema (80) richiede quindi il soddisfacimento di due condizioni di massimo, una calcolata rispetto a c_t e l'altra rispetto a w:

$$c_t \ : \ u'(c_t) = \frac{1}{1+\delta} E_t \left[V'_{t+1}(a_{t+1})\left(R_t w + Z_t(1-w)\right)\right] \qquad (81)$$

$$w \ : \ 0 = \frac{1}{1+\delta} E_t \left[V'_{t+1}(a_{t+1})(R_t - Z_t)\right] \qquad (82)$$

Per risolvere queste due equazioni di Eulero sfruttiamo come di consueto la relazione di inviluppo tra $V'_t(a_t)$ e $u'(c_t)$ lungo il sentiero ottimale:

$$V'_t(a_t) = \frac{1}{1+\delta} E_t \left[V'_{t+1}(a_{t+1})\left(R_t w + Z_t(1-w)\right)\right]$$

Quindi, sostituendo nella (81), spostando in avanti di un periodo, e infine risostituendo nelle due condizioni del primo ordine si ottiene:

$$\begin{aligned} u'(c_t) &= \frac{1}{1+\delta} E_t \left[\left(R_t w + Z_t(1-w)\right)\right] u'(c_{t+1}) \\ E_t\left[u'(c_{t+1}) R_t\right] &= E_t\left[u'(c_{t+1}) Z_t\right] \end{aligned}$$

In maniera equivalente, possiamo sostituire la (81) direttamente nella (82), ricavando le seguenti condizioni:

$$u'(c_t) = \frac{R_t}{1+\delta} E_t u'(c_{t+1}) \qquad (83)$$

e:

$$u'(c_t) = \frac{1}{1+\delta} E_t \left[Z_t u'(c_{t+1}) \right] \tag{84}$$

Il significato economico di queste due equazioni è che in presenza di incertezza sul reddito e sui rendimenti il SMS tra il consumo nei due periodi consecutivi deve essere *comunque* pari al SMT.

- Per spiegare questa implicazione, prendiamo, per esempio, in considerazione la condizione (84). Per quest'equazione una riduzione del consumo in t pari a dc_t provoca un immediato aumento di $u'(c_t)$ in t. La (84) ci dice, dunque, che dc_t è investito al tasso rischioso Z_t e consumato in $t+1$ con utilità marginale $u'(c_{t+1})$. Ovviamente, come dalla stessa equazione sempre si desume, la condizione di ottimalità intertemporale vale per il titolo rischioso solo in termini attesi, perchè dipende dal fattore $E_t [Z_t u'(c_{t+1})]$, essendo poi condizionata alla effettiva realizzazione dei rendimenti. In partenza però non si può fare di meglio.

- I problemi indotti dall'incertezza dei rendimenti non coinvolgono invece la relazione (83) per cui uno spostamento intertemporale del consumo implica come di consueto che l'utilità marginale in t deve essere pari al valore scontato dell'utilità marginale nel periodo successivo.

Le equazioni (83) e (84) definiscono un insieme di *restrizioni* sul processo dinamico del consumo e dell'asset pricing. Più precisamente, esse possono essere interpretate in due modi alternativi:

1. esse impongono delle restrizioni al comportamento del consumo dato il processo che governa i rendimenti (considerati esogeni);

2. esse impongono delle restrizioni di equilibrio ai rendimenti dei titoli dato il processo ottimale di consumo (considerato esogeno).

Nel primo caso si studia la dinamica del consumo, per esempio il modello equivalente al caso di certezza (esogenamente dati i valori dei rendimenti delle attività finanziarie). Nel secondo caso si può invece studiare la relazione di equilibrio tra i tassi di rendimento, che dipende dalla forma della funzione di utilità, dall'avversione al rischio, e dal grado di covarianza tra il rendimento e il consumo. In questa seconda ipotesi si ricava la relazione di equilibrio tra i rendimenti rischiosi e non rischiosi nota come *Consumption Capital Asset Pricing Model (ccapm).*

15 Il *consumption capm*

Per ricavare questa relazione di equilibrio partiamo, anzitutto, dall'osservazione che nel caso in cui esistano n titoli rischiosi la condizione (84) deve valere per ogni titolo. Possiamo dunque scrivere che per ogni attività rischiosa $i = 1, 2...n$ deve essere verificato che:

$$u'(c_t) = \frac{1}{1+\delta} E_t \left[Z_{it} u'(c_{t+1}) \right] \tag{85}$$

Eguagliando la (83) e (85) si ottiene l'espressione:

$$E_t \left[u'(c_{t+1}) (z_{it} - r_t) \right] = 0 \tag{86}$$

- Quest'ultima relazione può essere ulteriormente manipolata ricordando che il valore atteso del prodotto di due variabili stocastiche x e y normalmente distribuite è pari a $E(xy) = E(x)E(y) + Cov(x, y)$. Sfruttando questa relazione la (86) diviene:

  $$E_t u'(c_{t+1}) E_t (z_{it} - r_t) + Cov \left[u'(c_{t+1}), z_{it} \right] = 0$$

  dove $Cov \left[u'(c_{t+1}), z_{it} \right]$ misura la covarianza tra le due variabili stocastiche. Quindi il rendimento atteso z_{it} dell'attività rischiosa può essere espresso come:

  $$E_t (z_{it}) - r_t = -\frac{Cov \left[u'(c_{t+1}), z_{it} \right]}{E_t u'(c_{t+1})} \tag{87}$$

  Questa espressione è l'equazione fondamentale del *ccapm*.

- Essa ci informa del fatto che per detenere una attività rischiosa un individuo avverso al rischio richiede un *premio per il rischio*

  $$E_t (z_{it}) - r_t \tag{88}$$

  misurato come valore eccedente al tasso non rischioso, il cui ammontare è commisurato alla *covarianza* tra il rendimento incerto e l'utilità marginale del consumo. In altri termini, l'equazione (87) implica che nel valutare la rischiosità di un asset un individuo non si riferisce alla varianza di quell'attività ma alla sua capacità di covariare con l'utilità marginale. Questo accade perchè un asset che covaria negativamente con l'utilità marginale - e quindi positivamente con il consumo - tende a *destabilizzare* il consumo stesso, aumentandone la variabilità. Questa covarianza $Cov\left[u'\left(c_{t+1}\right)z_{it}\right]$ è quindi *negativa*, e conseguentemente l'espressione a destra del segno di uguaglianza nell'equazione (87) è positiva (difatti positivo deve essere il premio per il rischio (87)).

- Come ulteriore spiegazione di questo fatto si noti che la negatività della covarianza è determinata dal fatto che la ricchezza finanziaria viene detenuta per garantire il consumo futuro. Ma se l'attività finanziaria offre un rendimento basso proprio quando i consumi sono bassi - ossia l'utilità marginale corrispondente è elevata - la covarianza tra rendimenti e utilità marginali è negativa. In altre parole, l'attività finanziaria è rischiosa proprio in quanto non offre rendimenti elevati quando questi sarebbero più apprezzati dal consumatore-risparmiatore. Quindi, con utilità marginale decrescente, gli individui saranno disposti a detenere titoli rischiosi *solo se* a questi è attribuito un premio per il rischio crescente.

15.1 La *security market line*

Evidentemente, la relazione (87) fa dipendere il premio per il rischio dalla funzione di utilità e dal grado di avversione al rischio: più convessa è la funzione $u\left(c_t\right)$ più elevato sara il rapporto $-\frac{Cov\left[u'\left(c_{t+1}\right),z_{it}\right]}{E_t u'\left(c_{t+1}\right)}$. Questa proprietà è effettivamente poco attraente poichè fa dipendere il grado di rischiosità di un titolo scambiato nel mercato direttamente dalla forma della funzione di utilità. Sembrerebbe dunque che individui con diversa avversione al rischio possano raggiungere un accordo per lo scambio di un titolo, che ne sancisca il prezzo e il corrispondente premio per il rischio, solo con grande difficoltà. E' tuttavia possibile costruire una relazione di *equilibrium asset pricing* che sotto particolari ipotesi sia indipendente da $u\left(c_t\right)$.

- Per fare ciò supponiamo che esista un titolo o una attività composita, per esempio un portafoglio particolare m, il cui rendimento z_{mt} sia negativamente correlato con $u'\left(c_{t+1}\right)$ tale che:

$$u'\left(c_{t+1}\right) = -\mu z_{mt} \tag{89}$$

dove μ è un parametro che misura il grado della correlazione con l'utilità marginale. Quindi per il portafoglio m l'equazione (87) può essere riscritta come:

$$E_t(z_{mt}) = r_t - \frac{Cov[-\mu z_{mt}, z_{mt}]}{E_t u'(c_{t+1})}$$

ossia:

$$E_t(z_{mt}) = r_t - \frac{\mu var(z_{mt})}{E_t u'(c_{t+1})}$$

da cui si ricava:

$$\frac{1}{E_t u'(c_{t+1})} = \frac{E_t(z_{mt}) - r_t}{\mu var(z_{mt})} \tag{90}$$

Quindi, sostituendo la (89) e la (90) nella (87) si ottiene l'espressione:

$$E_t(z_{it}) = r_t + \beta_i [E_t(z_{mt}) - r_t] \tag{91}$$

con $\beta_i = Cov[z_{it}, z_{mt}] / var(z_{mt})$.

- L'equazione (91) è nota come *security market line (*SML). Essa ci dice che dato il portafoglio m, denominato *portafoglio di mercato*, ovvero attività composita che rappresenta tutti i titoli scambiati sul mercato finanziario, il premio per il rischio β_i attribuito ad ogni singola attività rischiosa è commisurato alla sua covarianza con m, piuttosto che alla varianza del titolo i. Quindi in questo contesto un titolo può essere rischioso di per sé mentre può essere meno rischioso nell'ambito del portafoglio se i suoi rendimenti sono correlati negativamente con quelli delle attività comprese in m. Se quindi il titolo i covaria negativamente con m esso offre una implicita copertura contro il rischio di mercato. Rispetto alla (87) la (91) ha l'esplicito vantaggio di rendere la relazione di asset pricing *indipendente* dalle preferenze e dall'avversione al rischio.

15.2 Il beta come misura del rischio

Un utile modo di riscrivere la (91) si ha quando ai termini di varianza e covarianza vengono sostituite le rispettive definizioni $Cov[z_{it}, z_{mt}] = \rho_{im}\sigma_i\sigma_m$, e $var(z_{mt}) = \sigma_m^2$, dove $-1 \leq \rho_{im} \leq 1$ è l'indice di correlazione tra il titolo rischioso ed il portafoglio di mercato. Utilizzando queste due relazione la SML diviene:

$$E_t(z_{it}) = r_t + \beta_i^* \lambda \tag{92}$$

dove $\beta_i^* = \rho_{im}\sigma_i$, mentre $\lambda = \frac{[E_t(z_{mt}) - r_t]}{\sigma_m}$. Per una rappresentazione grafica si veda la figura 9.

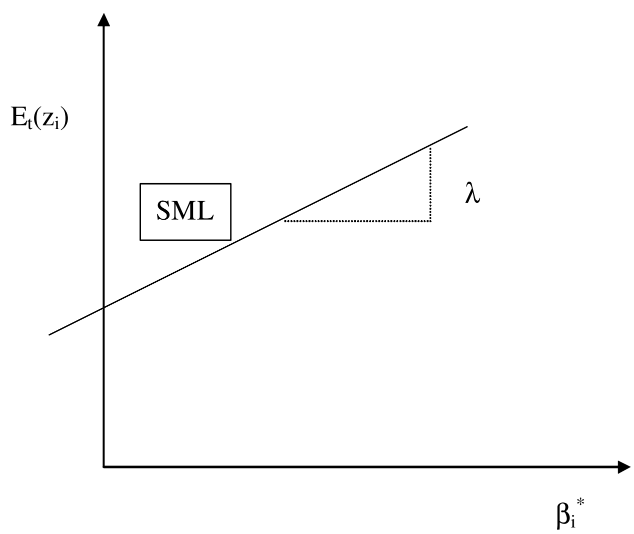

Figure 9: La Security Market Line

- In questa formulazione il premio per il rischio viene scomposto in due componenti: una parte $\frac{[E_t(z_{mt})-r_t]}{\sigma_m}$ misura il prezzo del premio per *unità* di rischio e ci informa di quanto debba crescere il rendimento atteso se la quantità detenuta in portafoglio del titolo rischioso aumenta di una unità. Poichè questa componente non è influenzata da elementi che sono direttamente riconducibili alla funzione di utilità ed al grado di avversione al rischio degli individui, il premio così calcolato definisce una misurazione del rischio unitario che il mercato nel suo complesso attribuisce all'*asset*. Tale valutazione risulta quindi condivisa da tutti gli agenti che partecipano agli scambi.

- L'altra parte β_i^* da invece conto di quale sia il rischio attribuito al titolo i quando viene confrontato con il portafoglio di mercato. Per esempio, se $\rho_{im} = 0$ allora $\beta_i^* = 0$ e il titolo rischioso i tende a stabilizzare i rendimenti del portafoglio individuale contribuendo a ridurre il rischio complessivo. Anche questa componente non dipende dalle funzioni di utilità, e rappresenta quindi una misura "oggettiva" del rischio complessivo, rapportato al rischio del portafoglio m.

- Conseguentemente, per una attività i detenuta in un portafoglio diverso da m la misura appropriata del rischio non è la varianza complessiva, ma soltanto quella parte della rischiosità che risulta correlata col rischio del portafoglio m. Questa componente del rischio riguarda, difatti, l'intero mercato, e quindi non può essere eliminata attraverso la diversificazione. Più precisamente, possiamo dire che:

1. σ_i, ossia il momento secondo della distribuzione di probabilità che governa la realizzazione dei rendimenti z_{it}, rappresenta il *rischio complessivo* attribuito al titolo preso isolatamente;

2. $\beta_i^* = \rho_{im}\sigma_i$ rappresenta il rischio residuale attribuito al titolo una volta che questo viene confrontato con le altre attività scambiate nel mercato. Per questa ragione la parte β_i^* viene denominata componente *sistematica* o *non diversificabile* del rischio.

3. La differenza:
$$[\sigma_i - \beta_i^*] \tag{93}$$
tra il rischio totale e quello non diversificabile misura la parte del rischio totale che *può essere eliminata* attraverso la diversificazione, e quindi è il *rischio diversificabile* o *non sistematico.*

- L'indice ρ_{im} può essere utilmente interpretato come la percentuale del rischio totale che *non può* essere eliminata attraverso la diversificazione, senza sacrificare una parte del rendimento atteso. Se, per esempio, per un titolo i vale la seguente relazione:

$$[1-\rho_{im}]\,\sigma_i = 0$$

questo significa che il titolo rischioso è perfettamente correlato con il portafoglio di mercato, $\rho_{im} = 1$, e che quindi il rischio complessivo non può essere diversificato ($\beta_i^* = \sigma_i$).

16 Stime empiriche

Per studiare le implicazioni empiriche del *ccapm* riprendiamo la condizione (84) che riscriviamo come:

$$1 = E_t\left[Z_t \frac{u'(c_{t+1})}{(1+\delta)\,u'(c_t)}\right] \tag{94}$$

dove l'espressione $\frac{u'(c_{t+1})}{(1+\delta)u'(c_t)} \equiv m_{t+1}$ è il saggio marginale di sostituzione intertemporale anche conosciuto come *fattore di sconto stocastico.* Riscrivendo l'epressione (94) nella forma:

$$1 = E_t\left(Z_t m_{t+1}\right) \tag{95}$$

si spiega facilmente il perchè della denominazione fattore di sconto stocastico. m_{t+1} attualizza al tempo corrente il rendimento incerto Z_t che si ottiene, in $t+1$, da un'attività che al tempo t ha un prezzo pari ad 1. Il fattore m_{t+1} generalizza, dunque, il termine di sconto: l'aggiustamento per il rischio dipende anche dalla correlazione tra le componenti stocastiche del consumo e quelle dei rendimenti, e quest'ultima determina un tasso d'interesse aggiustato per il rischio *diverso* per ogni attività rischiosa. Dal paragrafo precedente, sappiamo però che un inconveniente importante di questa relazione è che per ogni diversa funzione di utilità avremo un diverso fattore di sconto stocastico, e quindi una diversa funzione che pone in relazione m_{t+1} ai dati osservati. Per tale ragione al fine di valutarne la robustezza empirica equazione (94) è necessario studiare diverse forma alternative dell'espressione (95).

16.1 La funzione CRRA

E' utile cominciare la nostra analisi ipotizzando (vedi Mehra e Prescott, 1985) che esista un consumatore rappresentativo che massimizzi una funzione di tipo CRRA definita sul consumo c_t :

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

dove, come di consueto, γ è il coefficiente di avversione relativa al rischio.

- Sostituendo per $u'(c_{t+s})$ la precedente condizione diviene:

$$1 = \frac{1}{1+\delta} E_t \left[Z_t \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma} \right] \tag{96}$$

  che espressa in logaritmi, utilizzando l'approssimazione $\lg(1+x) \simeq x$ si riduce a:

$$0 = -\delta + \lg E_t \left[Z_t \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma} \right] \tag{97}$$

  Per semplificare questa espressione è utile assumere che la distribuzione di probabilità congiunta dei rendimenti e del fattore di sconto stocastico sia lognormale e omoschedastica. Sotto questa ipotesi di lognormalità una variabile stocastica x ha un valore atteso pari a:

$$\lg E_t(x) = E_t \lg(x) + \frac{1}{2} Var_t \lg(x)$$

  dove $Var_t \lg(x) = E_t \left[(\lg x - E_t(\lg(x)))^2 \right]$. Nel caso di due variabili lognormali, come nel caso dell'equazione (97), la corrispondente trasformazione è:

$$0 = -\delta + E_t \lg(Z_{it}) - \gamma E_t(g) + \frac{1}{2} Var_t \lg \left[Z_t \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma} \right]$$

  dove con $g = \Delta \lg c_{t+1}$ indichiamo il tasso di crescita del consumo tra t e $t+1$.

- Per le due variabili lognormali la varianza complessiva è data dalla espressione:

$$Var_t \lg \left[Z_{it} \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma} \right] = \sigma_i^2 + \gamma^2 \sigma_c^2 - 2\gamma\sigma_{ic}$$

  dove σ_i^2 è la varianza del rendimento dell'i-esimo titolo rischioso, σ_c^2 è la varianza del consumo e σ_{ic} è la covarianza delle due variabili stocastiche.

16.2 Il titolo rischioso

Per il titolo rischioso i si può, quindi, scrivere che:

$$E_t(z_{it}) = \delta + \gamma E_t(g) - \frac{1}{2}\left(\sigma_i^2 + \gamma^2\sigma_c^2 - 2\gamma\sigma_{ic}\right) \tag{98}$$

Questa espressione mostra che per il *ccapm* il tasso atteso di crescita del consumo $\gamma E_t(g)$ incide in eguale misura su tutti i titoli. La differenza nei rendimenti è quindi misurata dalla varianza di z_{it} e dalla covarianza tra rendimenti e consumo.

Più precisamente, quando la funzione di utilità è una CRRA la variabilità del rendimento (σ_i^2) e del consumo (σ_c^2) riduce il valore d'equilibrio del rendimento atteso $E_t(z_{it})$, mentre la covarianza σ_{ic} può spingere verso l'alto o verso il basso il rendimento atteso $E_t(z_{it})$ a secondo che sia positiva oppure negativa. Se σ_{ic} è *positiva* l'attività i rende di più nei periodi in cui il consumo è crescente, ossia quando $u'(c_t)$ tende a diminuire, contribuendo così a *destabilizzare* i consumi. Questa caratteristica del titolo i deve quindi essere compensata da un maggiore rendimento atteso affinchè gli individui siano disposti a detenerla nel loro portafoglio finanziario. Per la ragione inversa una covarianza *negativa* tende, invece, a *stabilizzare* il consumo nel tempo e quindi comanda un premio per il rischio minore.

16.3 Il titolo privo di rischio

L'equazione (98) è anche utile per ricavare altre implicazioni dal processo di *asset pricing*. Consideriamo l'attività finanziaria priva di rischio che offre in t un rendimento certo pari a $R_t = (1 + r_t)$. Per questo titolo, la varianza σ_i^2 e la covarianza σ_{ic} sono evidentemente pari a zero, tale per cui il tasso d'interesse non rischioso risponde alla relazione:

$$r_t = \delta + \gamma E_t(g) - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_c^2 \tag{99}$$

Il valore di r_t dipende dal tasso di preferenza intertemporale δ, dal tasso di crescita del consumo e dalla sua variabilità σ_c^2. Più precisamente, dato il tasso di preferenza intertemporale δ, un più elevato tasso di crescita dei consumi richiede un maggiore tasso r_t per compensare l'incentivo a trasferire risorse al presente limitando la differenza tra i livelli di consumo corrente e futuro. Si noti infine che la componente $-\frac{1}{2}\gamma^2\sigma_c^2$ misura il peso del momento secondo della distribuzione di probabilità. Per questa ragione è solitamente interpretata come un parametro che offre informazioni circa la *componente precauzionale* del risparmio.

16.4 *Equity premium puzzle*

Sottraendo la (99) dalla (98) si ottiene una espressione dell'*eccesso di rendimento* del titolo rischioso rispetto al rendimento certo:

$$[E_t(z_{it}) - r_t] + \frac{\sigma_i^2}{2} = \gamma\sigma_{ic} \tag{100}$$

Il termine di varianza $\frac{\sigma_i^2}{2}$ che appare sul lato sinistro dell'equazione (100) dipende solamente dall'ipotesi di lognormalità della distribuzione dei rendimenti. Se difatti la (100) viene espressa come logaritimo dell'aspettativa essa diviene semplicemente:

$$\log E_t[(1 + r_t)(1 + z_{it})] = \gamma\sigma_{ic} \tag{101}$$

Evidentemente, il valore dell'aspettativa dipende dal valore del coefficiente di avversione al rischio γ.

- Questa equazione è stata utilizzata da Mehra e Prescott (1985) per illustrare il così detto *equity premium puzzle* (EPP). In particolare, questi autori hanno mostrato che per i valori osservati di σ_i^2 e σ_{ic} dei titoli azionari statunitensi e del consumo rispetto ai titoli privi di rischio, la (100) è soddisfatta solo per valori di γ talmente elevati da risultare incompatibili con un plausibile atteggiamento dei consumatori verso il rischio. Più di recente, Mankiw e Zeldes (1991) utilizzando i dati del mercato finanziario statunitense per il periodo 1890-1979 hanno confermato questa anomalia. In particolare, dai loro conti risulta che l'eccesso di rendimento atteso è pari a $[E_t(z_{it}) - r_t] = 0.06$, lo scarto quadratico medio dei rendimenti rischiosi è $\sigma_i = 0.036$, mentre quello relativo al consumo risulta essere $\sigma_c = 0.167$. Infine, l'indice di correlazione tra le due grandezze ammonta a $\rho_{ic} = 0.4$. Sulla base di questi valori la covarianza tra i rendimenti e i consumi ha il seguente valore:

$$\sigma_{ic} = \rho_{ic}\sigma_i\sigma_c = 0.0024$$

L'equazione (100) implica quindi che per rispettare la relazione di *asset pricing* ricavata dal *ccapm* il grado di avversione relativa al rischio può essere ricavato dalla relazione

$$0.06 = \gamma 0.0024 - \frac{0.00129}{2}$$

ossia $\gamma = 25.27$. Questo valore è particolarmente poco convincente in quanto genera dei risultati paradossali circa l'atteggiamento verso il rischio degli individui. Per esempio, per $\gamma = 25$ risulta che un individuo preferisca una riduzione certa dei consumi del 17% all'alternativa di vedere ridotti i propri consumi del 20% con probabilità 0.5.

Paese	periodo	coefficiente di avversione γ
USA	1947.2-96.3	246.55
Germania	1978.4-96.2	343.13
Italia	1971.2-95.2	2465.32
Olanda	1977.2-96.1	1050.92
Svezia	1982.2-96.2	7215.17
UK	1970.1-96.2	156.31
USA	1970.1-96.3	150.13

Tabella 1 - Dati tratti da Campbell (1999)

E' importante sottolineare che questa anomalia diviene ancora più evidente se l'analisi empirica è sviluppata utilizzando i dati economici e finanziari degli ultimi 50/60 anni. Moltissimi successivi lavori empirici hanno confermato il precedente risultato anche con riferimento ai dati di altri paesi (tabella 1). Per tutti questi lavori risulta che γ è di gran lunga superiore al valore 10, il massimo livello di avversione al rischio considerato plausibile da Mehra e Prescott.

16.5 *Riskfree rate puzzle*

E' importante, osservare che valori plausibili di γ possono essere ricavati dalla (100) ipotizzando che il tasso di interesse non rischioso r_t (generalmente quello di breve periodo) sia estremamente elevato, ipotesi quest'ultima che è, però, contraddetta dai dati storici (vedi tabella 2).

Oltre ciò, se γ è molto elevato si presenta un *secondo paradosso* che coinvolge la relazione (99). Per illustrare questa ulteriore anomalia, tralasciamo per il momento il termine $-\frac{1}{2}\gamma^2\sigma_c^2$ e riscriviamo la relazione come:

$$r_t = \delta + \gamma E_t(g) \tag{102}$$

Si tenga poi presente che le serie storiche del consumo sono caratterizzate dalla presenza di un *drift* positivo, e che quindi un alto valore per il coefficiente γ implica anche un elevato valore per l'espressione $\gamma E_t(g)$. L'equazione (102) mostra che per riconciliare i dati storici di r_t con quelli stimati si dovrebbe ipotizzare che il tasso di preferenza intertemporale δ debba essere *negativo* affinchè la differenza tra δ e $\gamma E_t(g)$, generi un basso valore di r_t compatibile con quello osservato (tabella 2).

Paese	periodo	media tasso di interesse r	δ
USA	1947.2-96.3	0.794	-76.7
Germania	1978.4-96.2	3.338	-12.1
Italia	1971.2-95.2	2.064	-9.02
Olanda	1977.2-96.1	3.705	-11.2
Svezia	1982.2-96.2	1.52	-6.12
UK	1970.1-96.2	1.081	-21.6
USA	1891-1994	1.955	-10.4

Tabella 2 - Dati tratti da Campbell (1999)

Intuitivamente, l'anomalia di questo risultato risiede nel fatto che per un investitore avverso al rischio con funzione di utilità CRRA (come nel caso studiato da Mehra e Prescott e da noi discusso) dovremmo registrare una prefernza verso il risparmio risparmio e dunque una resistenza ad anticipare il consumo, ossia ad indebitarsi. Questo caso richiederebbe che $\delta > r$, e che il profilo temporale del consumo sia decrescente. Tuttavia, l'esistenza di tasso medio di crescita dei consumi storici *positivo*, di un valore *negativo* del tasso di preferenza intertemporale δ, e della *positività* del tasso di interesse r_t di breve periodo contraddicono questa implicazione. Questa contraddizione tra dato storico e implicazione teorica è stato battezzato da Weil (1989) con il nome di *riskfree rate puzzle* (RRP).

E' importante infine osservare che la presenza del termine negativo $-\frac{1}{2}\gamma^2\sigma_c^2$ non cambia il precedente risultato. Il termine quadratico riflette difatti la componente precauzionale del risparmio: gli individui avversi al rischio in presenza di un consumo incerto preferiscono risparmiare oltre la quota che garantisce il *consumption smoothing*, e questa è evidentemente una componente della scelta intertemporale che dovrebbe ridurre ulteriormente l'incentivo ad anticipare al tempo corrente i redditi futuri.

17 Ipotesi alternative sulle preferenze

La ricerca più recente ha tentato di risolvere l'EPP e l'RRP attraverso l'adozione di ipotesi diverse circa la forma delle funzione di utilità. In particolare, il tentativo seguito in molti lavori è stato quello di rimuovere l'ipotesi di additività e separabilità delle preferenze. Questi contributi possono essere suddivisi in due proncipali gruppi:

1. quello in cui si è introdotta una *separazione* tra l'avversione al rischio e l'elasticità di sostituzione intertemporale utilizzando una funzione di utilità attesa generalizzata;

2. e quello in cui si è impiegata una forma funzionale delle preferenze che incorpora le *abitudini di consumo*.

17.1 Funzioni di utilità attesa generalizzata

L'analisi del paragrafo precedente ha mostrato che la funzione di utilità isoelastica di tipo CRRA utilizzata da Mehra e Prescott può essere consistente con i dati osservati solo se il grado avversione relativa al rischio è eccessivamente elevato. Come abbiamo visto, una forte restrizione imposta da questa classe di funzione di utilità è che l'*elasticità di sostituzione intertemporale* (ESI) sia pari al reciproco dell'avversione relativa al rischio. La principale implicazione di questa proprietà è che se in presenza d'incertezza, e in un dato periodo di tempo, un individuo è restio a modificare i propri consumi (a causa di un alto γ), allora risulta anche che egli è riluttante a cambiare il consumo nel tempo (a causa di un basso $1/\gamma$). Evidentemente, non c'è nessuna ragione particolare affinchè questa sia una ipotesi plausibile ed economicamente rilevante. L'avversione al rischio descrive la riluttanza dei consumatori a sostituire il consumo nei diversi stati del mondo ed è una misura adatta a descrivere le scelte in condizioni di incertezza anche in un modello statico; l'ESI descrive invece la disponibilità di un consumatore a sostituire il consumo *nel tempo* ed è una grandezza utile anche in un modello deterministico. Per questa ragione, alcuni autori hanno tentato di rompere il legame tra questi due parametri.

- In particolare, Epstein e Zin (1989, 1991) hanno proposto l'adozione di una funzione di *utilità attesa generalizzata* (UAG) e recursiva definita come:
$$U_t = \left\{ (1-\beta)\, c_t^{\frac{1-\gamma}{\theta}} + \beta \left(E_t U_{t+1}^{1-\gamma} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right\}^{\frac{\theta}{1-\gamma}} \tag{103}$$
dove $\beta = \frac{1}{1+\delta}$, $\theta = (1-\gamma)/(1-1/\psi)$, γ è il grado di avversione relativa al rischio, ψ è l'ESI, e δ è il tasso di preferenza intertemporale. Per questa funzione il livello di utilità corrente è una funzione ad elasticità costante del consumo corrente e dell'utilità futura. Si noti che quando $\gamma = 1/\psi$, allora $\theta = 1$ e l'equazione (103) diviene lineare, e risolvendola in avanti si riduce al modello standard con funzione di utilità additiva e separabile. Il maggiore vantaggio nell'utilizzo della forma generalizzata è che un elevato valore del coefficiente di avversione al rischio γ non necessariamente implica che gli individui trovano ottimale stabilizzare il consumo al trascorrere del tempo. Questa proprietà può risolvere l'EPP.

- Se il vincolo di bilancio prende la forma:
$$a_{t+1} = (1 + r_{mt})(a_t - c_t)$$
dove con r_{mt} indichiamo il rendimento complessivo ottenuto dal portafoglio m, l'equazione di Eulero corrispondente è:
$$1 = E_t \left\{ \left[\beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{\frac{1}{\psi}} \right]^{\theta} \left[\frac{1}{(1 + r_{mt})} \right]^{1-\theta} (1 + z_{it}) \right\}$$

essendo $(1 + z_{it})$ il rendimento rischioso del titolo *iesimo*. Da questa espressione sotto l'ipotesi di lognormalità dei rendimenti e del consumo si ricava che il tasso di interesse non rischioso risponde alla relazione:

$$r_t = \delta + \frac{1}{\psi} E_t(g) - \left(\frac{\theta}{2\psi^2} \sigma_c^2 - \frac{\theta - 1}{2} \sigma_m^2 \right) \tag{104}$$

Quindi il valore del rendimento non rischioso è dato da δ, più $\frac{1}{\psi}$ volte il tasso di crescita dei consumi, meno una costante che dipende dalle varianze. Si noti che per $\frac{1}{\psi} = \gamma$ e $\theta = 1$ ritroviamo la relazione (99) che si ricava partendo dalla funzione CRRA.

- In questo contesto, il corrispondente *premio per il rischio* commisurato al titolo rischioso risulta essere:

$$[E_t(z_{it}) - r_t] + \frac{\sigma_i^2}{2} = \theta \frac{\sigma_{ic}}{\psi} + (1 - \theta) \sigma_{im} \tag{105}$$

ossia il premio per il rischio del titolo i è una combinazione ponderata delle due covarianze del titolo con il consumo (diviso l'ESI) e con il portafoglio di mercato m. I pesi sono rispettivamente θ e $(1 - \theta)$.

- L'equazioni (104) e (105) sembrano offire una soluzione ai due paradossi discussi sopra. Per quanto riguarda l'RRP si noti che nella (104) un'alta avversione relativa al rischio *non ha* implicazioni sul livello medio dell'interesse non rischioso, perchè con la funzione recursiva il tasso di crescita atteso dei consumi $E_t(g)$ è diviso per ψ, che è indipendente dal valore di γ.

- Relativamete all'EPP si noti che l'equazione (105) non richiede l'esistenza di un'alta avversione al rischio per spiegare il premio per il rischio. Difatti, se $\theta \neq 1$ il premio per il rischio dipende dal valore delle due covarianze σ_{ic} e σ_{im} e dall'ESI. Nessuno di questi valori è influenzato da γ. Inoltre, la variabilità osservata della ricchezza è molto superiore a quella del consumo - il valore di σ_{im} è maggiore di σ_{ic}- e questo può spiegare empiricamente l'esistenza del premio di rischio.

Sfortunatamente, esistono alcune importanti difficoltà che limitano la rilevanza dei risultati appena esposti.

1. Innanzitutto, per quanto riguarda l'EPP le analisi empiriche mostrano che il valore di ψ è molto basso e dunque θ elevato; questo implica che per avere un congruo premio per il rischio, la verifica empirica dovrebbe attribuire una grande importanza alla covarianza tra consumi e rendimenti, mentre i fatti stilizzati mostrano che σ_{ic} è piuttosto piccolo.

2. Quest'ultimo fatto stilizzato crea anche un ulteriore problema. Si tenga presente che il consumo e la ricchezza sono uniti dal vincolo di bilancio intertemporale: se il consumo è tendenzialmente piatto mentre la ricchezza è volatile questo stesso aspetto è un ulteriore paradosso che deve essere spiegato, e non può essere assunto come fatto esogeno per spiegare l'EPP.

3. Infine, si osservi che nel testare questa struttura alternativa delle preferenze si deve attribuire una rilevante importanza al valore atteso dell'utilità in $t+1$; e questo fatto rende la calibrazione del modello estremamente delicata. Per esempio Mehra (2003) sostiene che le proxy utilizzate da Epstein e Zin per calibrare l'utilità attesa generalizzata del periodo successivo sono sovrastimate.

17.2 Le abitudini di consumo

Abbiamo visto in precedenza che l'RRP è una conseguenza di una scarsa domanda per il risparmio quando gli individui sono avversi al rischio ed hanno una funzione di utilità isoelastica. Le preferenze di tipo UAG rappresentano un modo di generare un risparmio sufficiente quando gli individui sono avversi al rischio. Un secondo approccio ha tentato di modificare la struttura delle preferenze, incorporando nella funzione di utilità le abitudini di consumo (Costantinides, 1990; Heaton, 1995). In questo caso, pur continuando ad adottare una funzione di tipo CRRA, viene rimossa l'ipotesi di separabilità temporale delle preferenze, assumendo che l'utilità è influenzata non solo dal consumo corrente ma anche dal livello del consumo passato.

Una forma tipica di queste funzioni di preferenza è la seguente:

$$u(c_t) = E_t \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(c_{t+s} - \phi c_{t+s-1})^{1-\gamma}}{1-\gamma} \qquad \text{con } \phi > 0 \tag{106}$$

dove ϕ è un parametro che rappresenta gli effetti del *consumo passato* su quello corrente. Questa formalizzazione cattura l'idea che l'utilità è una funzione decrescente del consumo passato, mentre l'utilità marginale corrente è una funzione crescente del consumo dei periodi precedenti. Questa formulazione consente di risolvere il *riskfree rate puzzle* perchè l'aggiuntivo grado di avversione al rischio implica una crescente domanda di titoli non rischiosi e quindi una riduzione del tasso d'interesse certo.

Il modo più semplice di scrivere una funzione d'utilità che dipenda anche dalle abitudini di consumo è di ipotizzare che ogni consumatore abbia un livello di consumo di riferimento definito dal livello medio dei consumi effettuati dal gruppo sociale di riferimento. Con questa ipotesi l'utilità del consumo in ogni periodo diviene una funzione *relativa* della distanza del consumo individuale da quello degli altri individui appartenenti alla medesima classe (livello desiderato). Il vantaggio di utilizzare questo tipo di funzione è che l'individuo risulta particolarmente riluttante alle variazione del consumo, rispetto al valore di riferimento, anche quando l'avversione relativa al rischio γ è molto bassa. Abel (1990) definisce questo approccio come "keeping up with with the Joneses" (stare al passo con i Joneses). Questo livello di riferimento può essere denominato *norma* del consumo.

La funzione di utilità può dunque essere scritta come:

$$u(c_t) = \frac{(c_t - N_t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

dove N_t è la norma del consumo. Se definiamo la grandezza $n_t = (c_t - N_t)/c_t$, intesa come scostamento percentuale da N_t, la funzione di utilità diviene:

$$u(c_t, N_t) = \frac{(n_t c_t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

con derivata prima rispetto a c_t uguale a $u_{c_t} = (c_t - N_t)^{-\gamma} = (n_t c_t)^{-\gamma}$. La condizione del primo ordine è dunque:

$$1 = \frac{1}{1+\delta} E_t \left[Z_{it} \left(\frac{n_{t+1}}{n_t} \right)^{-\gamma} \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma} \right] \tag{107}$$

per ogni titolo i.

Assumiamo ora che l'evoluzione nel tempo della norma sia data dalla espressione:

$$\Delta \lg (n_{t+1}) \equiv \eta_t = \alpha \varepsilon_{t+1} \tag{108}$$

mentre il consumo risponde alla dinamica:

$$\Delta \lg (c_{t+1}) \equiv g_t = \pi + \varepsilon_{t+1} \tag{109}$$

ε_t è un disturbo idiosincratico con la seguenete proprietà $\varepsilon_t \backsim N\left[0, \sigma^2\right]$, mentre α è il parametro che cattura gli effetti dell'abitudine del consumo. Se n_t e c_t hanno una distribuzione lognormale la (107) diviene:

$$\begin{aligned} 0 &= -\delta + E_t\left(z_t\right) - \gamma E_t\left(\eta_t\right) - \gamma E_t\left(g_t\right) + \\ & +\frac{1}{2} Var_t \lg\left[Z_{it}\left(\frac{n_{t+1}}{n_t}\right)^{-\gamma}\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\gamma}\right] \end{aligned} \quad (110)$$

Per le tre variabili lognormali la varianza complessiva è data dalla seguente espressione:

$$Var_t \lg(.) = \sigma_i^2 + \gamma^2\sigma_c^2 + \gamma^2\sigma_n^2 - 2\gamma\sigma_{ic} - 2\gamma\sigma_{in} - 2\gamma^2\sigma_{cn}$$

La (110) può allora essere riscritta come:

$$E_t\left(z_t\right) = \delta + \gamma\pi - \frac{1}{2}\left(\sigma_i^2 + \gamma^2\sigma_c^2 + \gamma^2\sigma_n^2\right) + \left(\gamma\sigma_{ic} + \gamma\sigma_{in} + \gamma^2\sigma_{cn}\right) \quad (111)$$

che per il titolo certo si riduce a:

$$r_t = \log\delta + \gamma\pi - \frac{1}{2}\gamma^2\left(\sigma_c^2 + \sigma_n^2 - 2\sigma_{cn}\right) \quad (112)$$

Sottraendo, infine, la (111) dalla (112) si ottiene una espressione del *premio per il rischio*, in cui quest'ultimo è influenzato dalle abitudini di consumo:

$$\left[E_t\left(z_t\right) - r_t\right] + \frac{\sigma_i^2}{2} = \gamma\left(\sigma_{ic} + \sigma_{in}\right)$$

ossia dato che $\sigma_{in} = \alpha\sigma_{ic}$:

$$\left[E_t\left(z_t\right) - r_t\right] + \frac{\sigma_i^2}{2} = \gamma\left(1 + \alpha\right)\sigma_{ic} \quad (113)$$

Questo risultato può riassorbire l'anomalia dell'EPP. Le abitudini di consumo, che si manifestano attraverso il coefficiente α, spiegano il premio per il rischio senza ricorrere a ipotesi poco plausibili circa il valore di γ. Se, per esempio, i titoli rischiosi hanno un rendimento negativo essi causano una riduzione del consumo individuale (σ_{ic} è positivo) ed uno scostamento dal valore della norma, riducendo fortemente il livello di utilità. Quindi, più elevata è la sensibilità dell'individuo all'allontanamento del suo consumo dalla norma, ovvero più elevato è il valore di α, più alto è il premio per il rischio richiesto per detenere i titoli rischiosi in portafoglio. Le simulazioni e calibrazioni realizzate con questo tipo di modelli (Campbell e Cochrane, 1998) hanno mostrato che valori plausibili dei parametri tendono a far riassorbire i paradossi empirici dell'EPP.

Per quanto riguarda l'RRP si noti che sostituendo la (108) nella (109) si ottiene la relazione:

$$\eta_t = \alpha \left[g_t - \pi \right] \tag{114}$$

Questa espressione mostra che l'abitudine di consumo misurata da η_t si modifica solo se il tasso di crescita del consumo g_t si allontana dal valore deterministico di crescita π. Quindi, un'elevata sensibilità della norma (ossia un valore elevato di α) alle innovazioni in c_t accresce l'importanza della componente del risparmio precauzionale misurata da σ_c^2. L'espressione (112) relativa al tasso d'interesse certo r_t raccoglie questa implicazione. Un più alto livello del risparmio precauzionale si traduce in una crescente domanda di titoli obbligazionari a cui corrisponde un più basso rendimento atteso (riduzione misurata dal valore della componente $-\frac{1}{2}\gamma^2\sigma_c^2$).

18 Alcune conclusioni

- L'analisi quantitativa della relazione di *ccapm* basata sulla funzione di utilità CRRA genera dei risultati molto deboli sul piano empirico che si riassumono nelle due anomalie note come *equity premium puzzle* e *riskfree rate puzzle.* Ricerche più recenti hanno studiato le conseguenze empiriche dell'utilizzo di una più ampia classe di funzioni di utilità. I risultati possono essere riassunti come segue.

- In primo luogo, l'RRP può essere risolto rompendo la relazione che esiste tra avversione al rischio e crescita dei consumi, che caratterizza invece il modello base.

- Come seconda conclusione, l'EPP risulta molto più robusto. Weil (1989) ha mostrato che l'utilizzo di modelli generalizzati di consumo implicano comunque che sul piano empirico si richieda una forte avversione al rischio per spiegare il valore osservato del premio per il rischio.

Bibliografia essenziale.

Cochrane John (2001). Asset Pricing, Princeton University Press.

Deaton A. (1992). Understanding Consumption, Claredon Lectures in Economics, Oxford.

Obstfeld M. e K. Rogoff (1996). Foundation of International Macroeconomics, MIT Press.

Romer D. (2006). Advanced Macroeconomics, The McGraw Hill Companies.

Sargent T. (1987). Dynamic Macroeconomic Theory, Harvard University Press.

Saltari, E. e G. Travaglini (2006). "The effects of future financing constraints on capital accumulation: Some new results on the constrained investment problem", *Research in Economics*, Elsevier, vol. 60(2), pages 85-96, June.

Saltari E. e G. Travaglini (2010). "Behavioral Portfolio Choice and Disappointment Aversion: An Analytical Solution with "Small" Risks", in *Nonlinear Dynamics in Economics, Finance and Social Sciences*, Essays in Honour of John Barkley Rosser Jr, edited by Gian Italo Bischi, Carl Chiarella and Laura Gardini, Springer–Verlag Berlin.

Travaglini G. (2008). "An exact consumption rule with liquidity constraints and stochastic income", Economics Bulletin, vol. 5(6), pages 1-9.

Turnovsky S. (2000). Methods of Macroeconomic Dynamics, MIT Press.