Пересада В.П.

Концепция В. Леонтьева «затраты – выпуск», как основа формирования системы динамических уравнений в пространстве состояний экономики.

1. Расширенная матрица «затраты – выпуск», две формы ее представления

В модели В. Леонтьева «затраты - выпуск» экономика рассматривается как совокупность N производителей – потребителей, связанных между собой взаимным спросом и предложением. Объемы предложения (годового выпуска продукции) каждого производителя и объемы спроса (объемы их продаж), являются характеристиками состояния экономики. Данные матрицы «затраты – выпуск» отражают мгновенное (статическое) состояние экономики в N – мерном пространстве состояний.

Система таблиц межотраслевого баланса (МОБ), в состав которых входит матрица "затраты - выпуск", содержит обширный хорошо упорядоченный статистический материал о состоянии экономики (всей страны или отдельного региона) на конец каждого прошедшего года, т.е. на начало текущего года.

Данные таблиц МОБ позволяют выделить экономические характеристики двух видов. Первый из них – условно постоянные (медленно изменяющиеся) характеристики, которые определяют основные свойства и характер взаимодействия каждого субъекта экономики с другими субъектами.

К числу условно постоянных характеристик можно отнести следующие три экономические характеристики:

– $\boldsymbol{P_J}$ [руб.]/[ед. прод.] – цена – стоимость единицы продукции каждого вида. Совокупность всех цен образует диагональную матрицу цен.

- $\boldsymbol{Pc_J}$ [руб.]/[ед. прод.] – себестоимость - производственные затраты на единицу продукции. Совокупность всех себестоимостей образует вектор себестоимостей $\boldsymbol{Pc}$.

– $\boldsymbol{Fa_J}$ [руб.] стоимость основного капитала (основных фондов) каждого субъекта экономики.

Второй вид – переменные характеристики состояния, которые определяют состояние экономики каждого субъекта и экономики в целом. По аналогии с механикой, где переменными состояния являются координаты (векторы) положения точки $\boldsymbol{X(t)=(X_1, X_2, X_3)}$ [метры] и ее скорости $\boldsymbol{V(t)=(V_1, V_2, V_3)}$ [метры]/[секунду], в экономике переменными состояния являются $\boldsymbol{X(t)}$ [руб.] – продажи каждого вида продукции и выпуски, характеризующие скорость производства $\boldsymbol{I(t)}$ [руб.]/[год].

Первый из них - вектор объема продаж в денежном выражении с составляющими $\boldsymbol{X_I=P_I Xn_I}$. Эти составляющие представляют собой произведение цены $\boldsymbol{P_i}$ на объем продаж $\boldsymbol{Xn_i}$ в натуральном выражении, с размерностью [руб.]. Составляющие вектора продаж обычно изменяются во времени, т.е. $\boldsymbol{X(t)=(X_1(t), X_2(t),...X_N(t))}$.

Второй вектор – годовой выпуск продукции в денежном выражении, с составляющими $\boldsymbol{I_I=P_I In_I}$, имеющими размерность [руб.]/[год]. Вектор выпусков также является переменным во времени, т.е. $\boldsymbol{I(t)=(I_1(t), I_2(t), ...I_N(t))}$, и имеет те же составляющие, что и объемы продаж.

Для дальнейшего анализа экономики, как динамической системы, необходимо подробней рассмотреть свойства квадратной матрицы «затраты – выпуск» $\mathbf{A_P}=\{p_{IJ}\}$ входящей в таблицы МОБ и две формы ее представления.

Указанная квадратная матрица $\mathbf{A_P}=\{p_{IJ}\}$, имеет размерность на единицу больше, чем число секторов экономики, представленных в МОБ, т.е. (N+1)x(N+1). Она обычно представляется состоящей из четырех частей-квадрантов. Размер первого квадранта $\mathbf{A_{P1}}$ матрицы $\mathbf{A_P}$ NxN. В его строках приводятся стоимости продукции p_{IJ}, которую i-й сектор экономики (рассматриваемый как производитель) поставляет за год каждому j-му сектору-потребителю для производства его собственной продукции.

Элементы $\boldsymbol{p_{IJ}=P_I a_{IJ} In_J}$ представляют собой произведение трех сомножителей. Первый из них – цена продукции каждой i-й отрасли - $\boldsymbol{P_I}$; второй - технологический коэффициент $\boldsymbol{a_{IJ}}$, который определяет затраты i – го вида продукции в натуральном выражении, необходимые для выпуска единицы продукции J – го вида в единицу времени. Его размерность [ед.продукции i]/([ед.продукции j]/[год]).

Наконец, третий сомножитель – объём годового выпуска $\boldsymbol{In_J}$ в натуральном выражении. Все диагональные элементы матрицы «затраты – выпуск» - $\boldsymbol{p_{JJ}=a_{IJ} In_J}$ представляют собой затраты каждой отрасли на собственные нужды.

Второй квадрант – N+1-ый столбец **Y** с N элементами вида $\boldsymbol{Y_I=P_I Yn_I}$, содержит данные о стоимостях продукции конечного потребления, каждого сектора экономики, представленного в МОБ.

Сумма всех элементов каждой строки (включая стоимость конечного потребления), равна валовому объему реализованной продукции (продажам) каждого сектора экономики

$$X_I=P_I(\Sigma_J^N In_J a_{IJ}+Yn_I). \qquad (1)$$

Валовой объем продаж равен выпуску I_i, за вычетом годового изменения запасов Xr_I, т.е. $X_i=I_i-Xr_i$. Если считать, что такие изменения не существенны, то продажи окажутся равны годовым выпускам $X=I$.

Сумма элементов каждого столбца первого квадранта, т.е. элементов матрицы A_{P1}, представляет собой затраты J-ого сектор на материалы и изделия других секторов, необходимые для производства собственной продукции (без зарплаты). Они составляют стоимость *промежуточного потребления* этого сектора

$$Ci_J=In_J\Sigma_I^N P_I a_{IJ}. \qquad (2)$$

Разность между стоимостью годового выпуска продукции этого сектора и стоимостью промежуточного потребления в нём определяет *добавленную стоимость*, созданную этим сектором

$$I_J-Ci_J=P_J\,In_J-In_J\Sigma_I^N P_I\,a_{IJ}=Va_J\,. \qquad (3)$$

Данные о добавленной стоимости, созданной каждым сектором с N элементами вида $Va_J=I_J-Ci_J$ составляют строку добавленной стоимости. Она представляет собой третий квадрант матрицы A_P. Строка добавленной стоимости состоит из двух подстрок. Первая из них – данные о фонде оплаты труда (зарплате) Wp_J, а вторая с данными о прибыли Pr_J. В сумме обе составляющие образуют добавленную стоимость $Va_J=Wp_J+Pr_J$.

Следует отметить, что элементы подстроки заработной платы, как и элементы других строк первого квадранта, представляют собой произведение следующего вида $Wp_J=P_T a_{TJ} In_J$. Здесь, P_T – цена труда; a_{TJ} – трудозатраты (технологический коэффициент затрат труда), которые определяют число работников, необходимых для производства единицы J – ой продукции в год.

Сумма стоимости промежуточного потребления и заработной платы составляют *производственные затраты*, необходимые для годового выпуска продукции, т.е.

$$Cs_J=Ci_J+Wp_J=In_J(\Sigma_I^N P_I\,a_{IJ}+P_T a_{TJ}).$$

Сумма, стоящая в скобках представляет собой производственные затраты на единицу продукции, т.е. себестоимость.

$$Pc=\Sigma_I^N P_I\,a_{IJ}+P_T a_{TJ}\,. \qquad (4)$$

Разность между стоимостью продаж X_J и производственными затратами, определяет валовую прибыль, полученную в каждом секторе экономики т.е.

$$Pr_J=X_J-Cs_J=P_JXn_J- In_J(\Sigma_I^N P_I a_{IJ}+P_T a_{TJ}). \qquad (5)$$

Если при этом учесть, что продажи равны разности между выпуском и запасами, т.е. $X=I-Xr$, то полученная прибыль окажется тем меньше, чем больше будут запасы.

Первый и третий квадранты в совокупности содержат данные, которые характеризуют *производственную сферу экономики*. К этой сфере могут быть отнесены только те производители, которые выплачивают зарплату из созданной ими добавленной стоимости, а не из бюджета.

В четвертом квадранте, который расположен в строке добавленной стоимости (под столбцом второго квадранта – конечного потребления), необходимо размещать данные о бюджетных расходах. Как и данные в строке добавленной стоимости, производственной сферы, они должны состоять из двух составляющих. Данных о зарплате, пенсиях и других социальных выплатах бюджетникам - Wg и данных о бюджетных расходах на содержание и развитие инфраструктуры сферы потребления экономики (школы, больницы, управление, оборона) – Prg.

Второй и четвертый квадранты в совокупности содержат данные, характеризующие *сферу потребления* экономики. Бюджетные затраты $Vg=Wg+Prg$ в этой сфере играют роль добавленной стоимости. Матрица A_P с данными о бюджете в четвертом квадранте, без которого не возможен макроэкономический анализ, является *расширенной матрицей «затраты – выпуск»*.

Сумма добавленных стоимостей, созданных в производственной сфере $\Sigma Va_J=Va$, вместе с бюджетными затратами Vg равна *валовому внутреннему продукту* (GDP), созданному в экономике: $GDP=Va+Vg$. Валовой внутренний продукт (ВВП) следует рассматривать как «годовой выпуск» сферы потребления, т.е. ВВП=I_{N+1}.

В сбалансированной экономике, сумма элементов каждой строки первого квадранта – матрицы $\mathbf{A_{P1}}$ плюс стоимость конечной продукции $Y_I=P_IYn_I$ этой строки равна стоимости годового выпуска продукции рассматриваемой отрасли экономики

$$I_i=P_IIn_I=P_I\, \Sigma_J^N a_{IJ}In_J + P_IYn_I. \qquad (6)$$

Отсюда следует, что суммарная стоимость конечного потребления Y, определится равенством

$$Y=\Sigma_I P_IYn_I=\Sigma_I P_IIn_I - \Sigma_I P_I\Sigma_J^N a_{IJ}In_J\,. \qquad (7)$$

Сумма добавленных стоимостей, созданных только в производственной сфере экономики составляет добавленную стоимость этой сферы Va.

$$\mathbf{Va=\Sigma_J Va_J = \Sigma_J^N P_J In_J - \Sigma_J^N In_J \Sigma_I P_I a_{IJ}}\ . \qquad (8)$$

Сравнение (7) и (8) показывает, что в обоих выражениях двойные суммы одинаковы. Это означает, что суммарная добавленная стоимость, созданная в производственной сферы экономики, равна суммарной стоимости конечного продукта ***Va=Y***.

Отмеченное равенство является важным свойством модели "затраты – выпуск", так как добавленная стоимость производственной сферы ***Va*** - может быть определена через суммарное конечное потребление ***Y***. Данные о расходах на конечное потребление являются наиболее достоверными, т.к. они получаются в результате учета продаж (сбыта) готовой продукции, который налажен достаточно хорошо.

Отношение зарплаты в сфере потребления к зарплате в производственной сфере ***Kg=Wg/Wp*** называется *коэффициент бюджетной нагрузки.*

Госбюджет ***Vg***, который формируется за счет налогов, представляет собой некоторую долю от валового внутреннего продукта (GDP), т.е ***Vg=rgGDP***, поэтому величину ***rg*** следует назвать *ставкой обобщенного налога*.

Используя это соотношение, можно записать следующее равенство: ***GDP=Va+rgGDP***, и далее:

$$GDP=Va/(1-rg)\ ; \qquad Vg=rgVa/(1-rg). \qquad (9)$$

В статистической практике данные о потребностях каждого сектора экономики в продукции и услугах других секторов формируются по результатам обследования ряда типовых предприятий каждого сектора. Полученные данные образуют матрицу $R=\{R_{IJ}\}$, элементами которой являются, так называемые, *коэффициенты прямых затрат* $\mathbf{R_{IJ}=P_I a_{IJ}/P_J}$. Матрица ***R*** являются аналогом матрицы технологических коэффициентов $A=\{a_{IJ}\}$ с элементами a_{IJ}, но представленных в денежном выражении. Эти коэффициенты показывают, какой необходим объем продукции i – ой отрасли (в денежном выражении $P_I a_{IJ}$), для производства единицы продукции отрасли j, тоже в денежном выражении.

Представляемая в Системе таблиц «затраты – выпуск» стандартная матрица $A_P=\{p_{IJ}\}$ с элементами $p_{IJ}=P_I a_{IJ} In_J$ в денежном выражении формируются как результат умножения элементов каждого J – го столбца матрицы $R=\{R_{IJ}\}$ на стоимость J – го вида продукции, представленной в МОБ $I_J=P_J In_J$.

Однако, динамический анализ удобней вести, используя матрицу R с элементами $\mathbf{R_{IJ}=P_I a_{IJ}/P_J}$ [руб.i]/([руб.j]/[год]). Для обратного перехода к представлению в виде матрицы $\boldsymbol{R}$, с элементами $\mathbf{R_{IJ}=P_I a_{IJ}/P_J}$, все элементы матрицы $\boldsymbol{A_P}$, представленные в денежном выражении, необходимо нормировать по стоимости годового выпуска продукции соответствующего сектора экономики $\boldsymbol{I_J=P_J In_J}$,. Такая матрица далее будет называться *матрицей относительных цен*.

Соотношение между ценой собственной продукции $\boldsymbol{P_J}$ и ценами потребляемых материалов $\boldsymbol{P_I}$ при устоявшейся технологии значительное время поддерживаются постоянными, поэтому $\boldsymbol{R_{IJ}=a_{IJ}P_i/P_j}$ оказываются практически постоянными длительное время.

Элементы N+1-го столбца расширенной матрицы относительных цен **R** определяются путем деления (нормирования) стоимости конечной продукции на валовой внутренний продукт $\boldsymbol{GDP=I_{N+1}}$, который является “продукцией” трудовых ресурсов. Их величина равна $\boldsymbol{R_{I,N+1}=P_I Yn_I/GDP}$. Так как сумма затрат на конечное потребление равна добавленной стоимости в производственной сфере, то $\boldsymbol{Yp=\Sigma Y_I=Va=(1-rg)GDP}$ и, следовательно, нормирование по GDP даст для каждого элемента столбца конечного потребления следующее выражение

$$R_{I,N+1} = Y_I(1-rg)/\Sigma Y_I=(1-rg)Y_I/Va\ .$$

Для диагонального элемента $\boldsymbol{R_{N+!,N+1}=R_{TT}=Wg/GDP}$, после подстановки $\boldsymbol{Vg=rgGDP}$, найдется выражение

$$R_{N+1,N+1}=R_{TT}=rw(1-rg)Kg.$$

Последняя, N+1-я строка расширенной матрицы относительных цен $\boldsymbol{R}$, как и матрицы $\boldsymbol{A_P}$, состоит из двух подстрок. Первая из них представляет собой относительную зарплату, выплаченную в каждой отрасли, т.е. зарплату нормированную (как и все остальные элементы), по соответствующей составляющей годового выпуска - $\boldsymbol{R_{N+1,J}=Wp_J/P_J In_j=P_T a_{TJ}/P_J}$. В этом выражении $\boldsymbol{a_{TJ}}$ - технологический коэффициент затрат трудовых ресурсов. Он определяет численность работников, необходимых для производства единицы выпуска продукции каждого вида. Произведение $\boldsymbol{a_{TJ}In_J=Mp_J}$ есть полные трудовые затраты (численность работающих в рассматриваемом секторе экономики). Статистические данные о численности занятых в каждом секторе экономики обычно представляются отдельно.

Последний, элемент N+1-й подстроки, т.е. диагональный элемент $\boldsymbol{R_{N+1,N+1}=R_{TT}=Wg/GDP}$, представляет собой отношение зарплаты бюджетников в сфере потребления $\boldsymbol{Wg}$ к $\boldsymbol{GDP}$. Он, как диагональный элемент, характеризует относительные затраты на собственные нужды в этой сфере.

Зарплата в каждом секторе производственной сферы экономики составляет некоторую долю rw_J от добавленной стоимости созданной в этом секторе $Wp_j=rw_J Va_j$, где - rw_J *ставка зарплаты* в этом секторе. Суммарная прибыль в производственной сфере экономики Pr определится через суммарную добавленную стоимость $Va=\Sigma_J Va_J$ соотношением $Pr=(1-rw)Va$, где $rw=Wp/Va=\Sigma rw_J Va_J/Va$ есть средневзвешенная ставка зарплаты в производственной сфере.

Тот факт, что суммарные продажи каждого производителя I_i, складываются из его продаж каждому потребителю, может быть отражен в виде матричного уравнения для матрицы R_1 (первого квадранта матрицы R), которое называется *уравнением баланса*

$$(E-R_1)I=Y. \qquad (10)$$

Здесь E – единичная диагональная матрица; $Y=(P_1Yn_1,\ P_2Yn_2,\ \ldots\ P_NYn_N)$ – вектор конечного потребления в денежном выражении.

Использование этого уравнения позволяет вычислить все составляющие вектора выпусков, которые необходимы для обеспечения требуемых уровней конечного потребления по формуле

$$I=(E-R_1)^{-1}Y.$$

Суммы элементов столбцов расширенной матрицы относительных цен $Rs_J=\Sigma_I^{N+1}P_I a_{IJ}/P_J$ образуют вектор Rs. Составляющие этого вектора Rs_J представляют собой *относительные себестоимости* каждой отрасли. По своему определению относительные себестоимости Rs_J связаны с рентабельностью соответствующей отрасли Prf_J соотношениями

$$Prf_J=1/Rs_J-1 \qquad Rs_J=1/(Prf_J+1)\ . \qquad (11)$$

Составляющие относительной себестоимости Rs_J позволяют вычислить величину налогооблагаемой прибыли каждой отрасли

$$Pr_J=I_J(1-Rs_J). \qquad (12)$$

Обобщенная рентабельность экономики $Prfs$ определится как отношение суммарной по всем отраслям прибыли (включая и сферу потребления) $Prs=\Sigma Pr_J$ к суммарной себестоимости $\Sigma Rs_J P_J In_J$. Их отношение дает следующее выражение:

$$Prfs=(\Sigma P_J In_J-\Sigma Rs_J P_J In_J)/\Sigma Rs_J P_J In_J.=1/Rss-1. \qquad (13)$$

Здесь $Rss=\Sigma Rs_J P_J In_J/\Sigma I_J$ представляет собой средневзвешенную величину относительных затрат, у которой в качестве весовых коэффициентов выступают уровни годовых выпусков в денежном выражении $P_J In_J=I_J$.

Кроме отмеченных выше свойств матрицы относительных цен R следует отметить еще одно ее, принципиально важное, свойство.

Матрица $\boldsymbol{R=\{R_{IJ}\}}$ и исходная матрица технологических коэффициентов $\boldsymbol{A=\{a_{IJ}\}}$ связаны между собой соотношением $\boldsymbol{R=PAP^{-1}}$, где $\boldsymbol{P}$ – диагональная матрица цен. Такая их связь указывает на то, что эти матрицы подобны и, следовательно, их собственные числа одинаковы.

Так как элементы $\boldsymbol{R_{IJ}=P_I a_{IJ}/P_J}$ матрицы $\boldsymbol{R}$ меньше единицы и всегда положительны (или равны нулю), то, в соответствии с теоремой Фробениуса, среди ее собственных чисел всегда найдется хотя бы одно положительное собственное число λ_f. Это собственное число есть ни что иное, как относительная себестоимость ***Rss***, и, следовательно, в соответствии с (11) она определяет рентабельность экономики. Собственному числу λ_f, одинаковому для матрицы $\boldsymbol{R}$ и матрицы $\boldsymbol{A}$ (они подобны), соответствует собственный вектор матрицы $\boldsymbol{A=\{a_{IJ}\}}$, который имеет только положительные составляющие. Составляющие собственного вектора представляет собой «*справедливые» (собственные) цены* каждого вида продукции, представленной в МОБ [4]. Их величина оказывается выражена в единицах зарплаты $\boldsymbol{P_T}$ и определяется только технологическими коэффициентами $\boldsymbol{a_{IJ}}$.

Таким образом, использование расширенной матрицы относительных цен (включая данные о годовом бюджете), позволяет обеспечить единый подход к вычислению важнейших экономических показателей. К их числу относятся – показатели рентабельности каждого сектора экономики $\boldsymbol{Prf_J}$ и ее обобщенной рентабельности ***Prfs***; ставок зарплаты ***rw*** и обобщенного налога ***rg***, а так же коэффициента бюджетной нагрузки ***Kg***.

2. Описание экономики как динамической системы в пространстве состояний.

Матрица “затраты - выпуск” в таблицах межотраслевого баланса (МОБ) определяет сложившиеся в экономике на конец года взаимные потребности субъектов экономики - “производителей - потребителей”. Однако экономика является динамической системой, которая непрерывно меняет свое состояние во времени, так как всякое изменение спроса ведет к перераспределению объемов продаж и выпусков, т.е. к изменению состояния экономики.

Для описания характера этих изменений, и для оценки ожидаемого состояния экономики в любой, наперед заданный, момент времени, необходима разработка объективных и надежных методов прогнозирования воздействия на ход экономического развития таких экономических факторов как, инвестиции в развитие определенных производств, изменение ставок налога, уровней зарплаты и т.п.

Существующие методы прогнозирования обычно основываются на одной из двух концепций.

Первая из них - концепция *статистической экстраполяции*. Ее суть состоит в использовании накопленной информации о тенденциях изменения состояния экономики в прошлом и предположении о неизменности этих тенденций в обозримом будущем. Такой подход не позволяет выявить влияние различных экономических факторов на развитие экономики.

Вторая - концепция подхода к экономике как к сложной динамической системе, изменение состояния которой во времени описывается системой дифференциальных уравнений. Это требует создания динамической модели экономики как совокупности взаимосвязанных производителей – потребителей.

При таком подходе открывается возможность исследования влияния различных экономических факторов и внешних воздействий на характер изменения состояния экономики во времени, т.е. оказывается возможным получить объективный, воспроизводимый и многовариантный экономический прогноз ее ожидаемого состояния.

Характеристиками состояния экономики является вектор, который состоит из двух групп векторов – $J(t)=(I_1(t), I_2(t)...I_{N+1}(t), X_1(t), X_2(t)...X_{N+1}(t))$.

Выпуски продукции $I(t)$, как скорости производства представляют собой производные по времени от валовых объемов реализации $X(t)$, т.е. $I(t)=dX(t)/dt$. Соответствующие валовые объемы производства представляют собой интеграл по времени от текущих выпусков $X(T)=\int I(t)dt$.

Если рассматривать экономику как динамическую систему, то ее можно описать линейными дифференциальными уравнениями стандартного вида,

$$J'(t)=D(t)J(t)+B(t)U(t) \qquad (14)$$

$$Y(t)=C(t)J(t)$$

Обозначения, используемые в этих соотношениях, имеют следующий экономический смысл: $U(t)$ – вектор *управляющих воздействий* (например инвестиции). Он является экзогенной переменной, т.е. величиной, которая может быть выбрана путем принятия административного решения. $B(t)$ – матрица приложения инвестиций. $Y(t)$ – вектор выходных переменных, которые могут наблюдаться.

Определяющее значение имеет динамическая матрица $\boldsymbol{D\{d_{IJ}\}}$, размерность которой на единицу больше удвоенного числа секторов экономики, представленных в МОБ, т.е. равна 2(N+1). Ее элементы со временем несколько изменяются, но настолько медленно, что могут быть условно приняты постоянными и определятся через элементы матрицы МОБ. При таком предположении экономику можно рассматривать как линейную, стационарную динамическую систему с постоянными коэффициентами.

Анализ такой экономики на ограниченном отрезке времени позволяет получить ответы на многие важные вопросы экономической практики. Модель экономики, как линейной динамической системы является основой для дальнейшего уточнения характера процессов протекающих в экономике при ее рассмотрении как нелинейной системы.

Важнейшими задачами, которые приходится решать в экономике, являются *задачи регулирования* ее развития и задачи *программного управления* этим развитием.

Задача регулирования возникает в связи с тем, что неточное задание начальных условий состояния экономики, неточное определение элементов динамической матрицы, наличие случайных внешних воздействий и т.д., ведет к отклонению реального состояния экономики от намеченного к контрольному моменту времени. При обнаружении такого отклонения необходимо сформировать определенное корректирующее (управляющее) воздействие, которое через некоторое время приведет экономику в намеченное состояние.

Задача программного управления развития экономики состоит в том, что бы определить такую функцию управления U(t), которая обеспечит к концу определенного периода времени T достижение желательного состояния экономики. Для решения перечисленных задач следует стандартное динамическое уравнение (14) конкретизировать. Это означает, что необходимо найти хорошо обоснованный, регулярный метод определения элементов динамической матрицы $\boldsymbol{D}$, для каждой рассматриваемой экономики, т.е. необходимо создание динамической модели экономики.

В динамической модели необходимо отразить причины возможного расширения производства, т.е. причины изменения годового выпуска. Для этого следует ввести слагаемое, отражающее расходы на расширение производства. Изменение выпуска $\boldsymbol{I(t)}$ во времени записывается как производная $\boldsymbol{I(t)/dt=I'(t)}$, но так как $\boldsymbol{I(t)=X'(t)}$

то $\boldsymbol{I'(t)=X''(t)}$, т.е. изменение выпуска является второй производной от объема произведенной продукции с размерностью [руб.]/[время]^2.

При неизменной технологии относительное расширение выпуска $\boldsymbol{\Delta I/I_0}$ требует такого же относительного увеличения стоимости основных фондов $\boldsymbol{\Delta Fa/Fa_0}$, т.е $\boldsymbol{\Delta I/I_0= \Delta Fa/F_0}$. Следовательно, расширение выпуска требует инвестиций $\boldsymbol{Cp}$, величина которых должна быть пропорциональна *относительной стоимости основных фондов* $\boldsymbol{Fy=Fa/I_0}$ [годы], т.е.

$$\boldsymbol{Cp=\Delta Fa=\Delta I\ Fa_0/I_0 =\Delta I\ Fy}. \qquad (15)$$

Так как создание новых основных фондов требует определенного времени $\boldsymbol{Tsz}$, то можно записать равенство, которое определяет объем инвестиций, требующихся для обеспечения определенной скорости роста выпуска

$$\boldsymbol{Cp=Fe\ dI(t)/dt=Fe\ d^2X(t)/dt^2=FeI'(t)}. \qquad (16)$$

Здесь коэффициент пропорциональности

$$\boldsymbol{Fe=TszFa_0/I_0 =Tsz\ Fy}$$

представляет собой *фондоемкость* рассматриваемого производства. Она определяет коэффициент пропорциональности между ростом выпуска $\boldsymbol{I'(t)}$ и объемом инвестиций, необходимых для его обеспечения.

Аналогично фондоемкости $\boldsymbol{Fe}$ следует рассматривать коэффициент амортизации $\boldsymbol{dp}$. Он равен стоимости основных фондов $\boldsymbol{Fa}$, отнесенных к начальному выпуску I(0) и умноженной на время полной амортизации $\boldsymbol{Ta}$, т.е. на время срока службы существующих производственных мощностей

$$\boldsymbol{dp=Fa\cdot Ta/I_O=FyTa}.$$

Обычно считается, что годовые амортизационные потери равномерно распределены по всему времени срока службы основных фондов $\boldsymbol{Ta}$, т.е. по мере амортизации выпуск падает линейно во времени

$$\boldsymbol{I(t) = I_O(1 - t/Ta)}.$$

К концу времени амортизации $\boldsymbol{t=Ta}$ выпуск окажется равен нулю. Скорость падения выпуска в результате амортизации $\boldsymbol{dI/dt=I'(t)=-I_0/Ta}$.

Это означает, что годовые амортизационные потери составляют

$$\boldsymbol{Pa= -Fy\ I_O/Ta=-Fa/Ta}\ .$$

В действительности, амортизация сказывается в том, что по мере старения основных фондов возрастает вероятность поломок и отказов оборудования, что влечет за собой его простои и, следовательно, падение среднего годового выпуска. При фиксации стоимости основных фондов на начальном уровне, падение выпуска означает повышение относительной стоимости основных фондов ***Fy*** (снижение ее обратной величины – фондоотдачи ***Fod=I/Fa)***.

Сумма обоих факторов определяет результирующее изменение выпуска продукции, т.е.

$$I'(t)=(Cp/Fe-I_0/Ta)=(Cp-FaTsz/Ta)/Fe.$$

Для роста выпуска, т.е. для расширения производства, необходимы инвестиции ***Cp***, которые превышают амортизационные потери ***FaTsz/Ta***. Только при таком условии выпуск будет расти, т.е. произойдет ускорение производства продукции. Если, наоборот, инвестиции окажутся меньше амортизационных потерь, то ***I'(t)*** станет отрицательным и начнется замедление производства. Величину ***(Cp-FaTsz/Ta)=Cp**** следует называть *эффективными инвестициями*. Именно эта величина должна использоваться в соотношении для ускорения производства ***I'(t)=Cp*/Fe***. Однако, обычно время создания ***Tsz***=1 – 2 года, а время амортизации ***Ta=20*** годам, поэтому отношение ***Tsz/Ta*** мало и вторым слагаемым в выражении для ***Cp**** зачастую можно пренебречь.

Для разработки регулярного метода формирования системы дифференциальных уравнений, описывающих экономику как динамическую систему необходимо ее представление в виде определенной функциональной схемы связей ее субъектов.

Переход к представлению взаимодействия субъектов экономики, в виде функциональной схемы является принципиально важным шагом. Только схематическое представление взаимодействия производителей - потребителей, позволяет наглядно изобразить это взаимодействие; единообразно и однозначно учесть все элементы производства; отметить специфическую роль каждого элемента условным изображением; увязать все элементы между собой общей переменной - выпуском продукции; и, в конце концов получить систему дифференциальных уравнений.

Следует при этом подчеркнуть, что процедура формирования схемы взаимосвязей производителей принципиально не может быть формализована и требует участия человека. Только после того, как будет выбрана определенная схема, отражающая все необходимые связи производителей, будет возможно уже формализованным путем получить систему дифференциальных уравнений, свойственную данной схеме, т.е. математически описать задаваемую модель системой дифференциальных уравнений.

Получаемая система уравнений далее может быть решена известными методами. Такое решение отражает состояние рассматриваемой экономики в любой, разумно заданный, упреждающий момент времени, т.е. дает прогноз ожидаемого состояния экономики.

Для представления динамической модели экономики в виде функциональной схемы, необходимо учесть, что каждый производитель должен произвести затраты на приобретение материалов и комплектующих изделий, необходимые ему для производства собственной продукции. Схематически все затраты конкретного производителя можно изображается в виде цепочки последовательно соединенных элементов, отображающих затраты каждого вида. Сумма затрат на производство плюс прибыль должна быть равна стоимости продаж. Указанное требование называется *законом контуров*.

Сложное взаимодействие производителей изображается в виде схемы, содержащей множество контуров, соответствующих каждому потребителю, и узлов, отражающих их связи. Пример схемы четырех производителей – потребителей, приведенный на рисунке1 представляет собой "этажерку" из четырех контуров, расположенных один над другим. Каждый контур соответствует одному производителю - потребителю. Такая схема является условным графическим изображением имеющихся взаимосвязей.

В ней, каждый из потребителей представлен в виде последовательного соединения элементов производства, которые образуют замкнутый контур. В каждом из этих субъектов экономики используется одинаковый набор *элементов производства*.

Одним из видов элементов производства являются материалы, комплектующие изделия и труд, т.е. производственные затраты, необходимые для производства собственной продукции. Каждые из этого вида относительных затрат на схеме изображаются следующим знаком ———[R_{IJ}]———.

Каждый потребленный вид продукции определяется некоторым элементом столбцов матрицы «затраты – выпуск» в форме матрицы относительных цен - $\boldsymbol{R_{IJ}}$. Их сумма $\boldsymbol{Rs=\Sigma R_{IJ}}$ определяет производственные затраты.

Другим видом элементов производства является накопительная структура (склад запасов продукции ценой $\boldsymbol{P_I}$), которая изображается на схеме знаком ———<S_I>———.

Третьим видом элементов производства являются основные производственные фонды, которые на схеме изображаются знаком ———{Fe}———.

Инвестиции ***Cp****, вкладываемые в развитие производства, обеспечивают рост выпуска продукции ***I’(t)***, пропорциональный этим инвестициям, т.е. ***Cp*=FeI’(t)***.

Наконец, еще одним элементом производства (результатом производства) является прибыль ***Pr=X-RsI***, (изображенная на схеме знаком ***Q***).

Каждый из этих элементов осуществляет определенные функциональные преобразования, которые обуславливают некоторые затраты.

Взаимная связь производителей-потребителей отражена на схеме тем, что определенная часть продукции одного из них используется другим. Такое разветвление потоков продукции происходит в местах соединения элементов производства, которые называются *узлами*. Поток продукции, входящий в каждый из узлов должен быть равен потоку исходящему из него. Это утверждение называется *законом узлов*.

В соответствии с этим законом сумма входящих в узел потоков равна сумме потоков из него выходящих.

$$\sum \mathrm{I}_{\mathrm{IBX}} = \sum \mathrm{I}_{\mathrm{IBЫX}} .$$

Уравнения, составленные для узлов и контуров подобной схемы, формируют систему дифференциальных уравнений. Их число обычно равно удвоенному числу, рассматриваемых субъектов экономики 2(N+1). Такая система уравнений однозначно определяет характер взаимодействия производителей, отраженных на схеме.

Как видно из приведенной схемы, каждый i-ый производитель использует продукцию множества поставщиков, что отражается на схеме последовательным включением его закупок $\boldsymbol{R_{1J}}$, $\boldsymbol{R_{2J}}$, $\boldsymbol{R_{3J}}$, ***…***

С другой стороны, поставки i-ым производителем своей продукции, необходимой всем потребителям, отражаются на ней в виде параллельного подключения к его накопительной структуре <S_I> затрат j-ых потребителей $\boldsymbol{R_{i1}}$,$\boldsymbol{R_{i2}}$, ***…***, $\boldsymbol{R_{iN}}$. Чем больше число потребителей, тем больший выпуск продукции должен обеспечиваться i-ым производителем.

Для сложной сети, изображенной на рисунке 1 можно записать систему из восьми дифференциальных уравнений в пространстве состояний, которые характеризуются во-первых, выпусками $\boldsymbol{I_J}$, т.е.

скоростями производства продукции каждым производителем; во-вторых, объемом продаж каждым из них $\boldsymbol{X_J}$.

Для нахождения элементов динамической матрицы $\boldsymbol{D}$ необходимо рассмотреть схему рисунка 1, используя метод узлов и контуров анализа сложных сетей.

Из закона узлов (на данной схеме по 4 узла для каждого из четырех контуров) следует, что для каждого из узлов должно удовлетворяться равенство, которое для первого узла имеет следующий вид:

$$I_1+I_2+I_3+I_4=Is_1+I_{R11}+I_{R12}+I_{R13}+I_{R14}\ ;$$

Запись этого равенства относительно Is_1 дает уравнение

$$Is_1= I_1+I_2+I_3+I_4 - I_{R11} - I_{R12} - I_{R13} - I_{R14}. \qquad (17)$$

Первые четыре слагаемых $\sum_I I_I=I_1+I_2+I_3+I_4$ представляют собой суммарную стоимость годовых выпусков всех видов продукции рассматриваемой экономики.

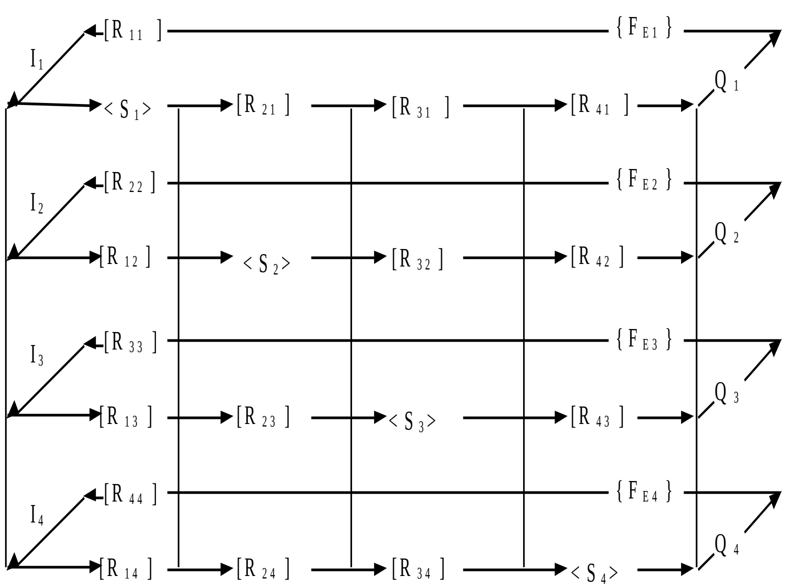


Рис.1 Функциональная схема четырех взаимосвязанных производителей-потребителей

Вторая сумма - $(I_{R11} + I_{R12} + I_{R13} + I_{R14})$ определяет величину спроса на продукцию рассматриваемого производителя $\boldsymbol{Ig_1}$. Спрос равен отношению продаж $X_1=I_1R_{11}+I_2R_{12}+I_3R_{13}+I_4R_{14}$ к относительной цене спроса $\boldsymbol{Rg_1}$ продукции первого производителя, т.е. $Ig_1=X_1/Rg_1$. Относительная цена спроса $\boldsymbol{Rg_1}$ определится отношением продаж к суммарной стоимости годовых выпусков в начальный момент времени, т.е. $Rg_1 = X_1(0)/\sum_I I_I(0)$.

Действуя аналогичным образом для 2-го, 3-го и 4-го узлов первого контура, лежащих правее 1-го узла, получают 4 уравнения для годового сбыта Is_I, которые с учетом равенства $Is_I(t)=X_I'(t)$ примут вид четырех дифференциальных уравнений первой группы для продаж

$$X'_I(t) = -X_I(t)/Rg_I + \sum_J I_J(t). \qquad (18)$$

Для получения второй группы дифференциальных уравнений - уравнений выпусков, используется закон контуров, в соответствии с которым, для каждого j-го контура, олицетворяющего производителя, стоимость продаж X_J равна сумме всех затрат, включая и расширение производства - P_{F1}, плюс прибыль Pr_J , т.е. справедливо равенство:

$$X_1 = P_{R11} + P_{R21} + P_{R31} + P_{R41} + Pr_1 + P_{F1}.$$

Записав это равенство относительно P_{FJ}, можно получить (с учетом инвестиций Cp_J) уравнения, следующего вида

$$P_{FJ} = X_J - \sum_I P_{RIJ} - Pr_J + Cp_J .$$

Каждая составляющая производственных затрат P_{RIJ} равна стоимости закупок j-го потребителя у каждого i-го производителя, т.е. $\Sigma P_{RIJ} = I_J Rs_J$, а прибыль $Pr_J = I_J(1-Rs_J)$, поэтому $-\sum_I P_{RIJ} - Pr_J = -I_J$.

Имея в виду, что $P_{FJ}(t) = Fe_J I_J'(t)$, в результате подстановки, вторая группа дифференциальных уравнений для выпусков примет следующий вид

$$Fe_J I'_J(t) = X_J(t)_I - I_J(t) + Cp_J . \qquad (19)$$

Обе группы уравнений для четырех взаимосвязанных потребителей - производителей в развернутом виде запишутся:

$$\begin{aligned}
X_1'(t) &= -X_1(t)/Rg_1 + I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t)\\
X_2'(t) &= -X_2(t)/Rg_2 + I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t)\\
X_3'(t) &= -X_3(t)/Rg_3 + I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t)\\
X_4'(t) &= -X_4(t)/Rg_4 + I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t) \qquad (20)\\
I'_1(t) &= (X_1(t) - I_1(t) + Cp_1)/Fe_1\\
I'_2(t) &= (X(t) - I_2(t) + Cp_2)/Fe_2\\
I'_3(t) &= (X_3(t) - I_3(t) + Cp_3)/Fe_3\\
I'_4(t) &= (X_4(t) - I_4(t) + Cp_4)/Fe_4
\end{aligned}$$

Благодаря тому, что в матрице «затраты – выпуск» кроме данных об уровне потребления (столбцы матрицы) имеются данные и об уровнях продаж (строки матрицы), группу дифференциальных уравнений для выпусков можно решать независимо от группы продаж. При этом, следует иметь в виду, что в действительности выпуск ***I*** равен продажам ***X*** плюс запасы ***Xr***, т.е. ***IT*=X+Xr*** и следовательно ***X=I(1-Rr)***. До тех пор, пока относительные запасы ***Rr=Xr/I*** малы, можно считать, что весь выпуск реализуется, т.е. ***X=IT****. При таком предположении группа уравнений для выпусков ***I(t)*** окажется независимой от продаж ***X(t)***. Если запасы быстро растут, т.е. появляется тенденция к перепроизводству, обе группы уравнений следует рассматривать совместно.

Используя данные строк о продажах каждого производителя (о спросе на его продукцию), которые равны сумме стоимостей покупок каждого потребителя, для каждой строки матрицы следует записать следующее равенство

$$X_I = I_1 R_{I1} + I_2 R_{I2} + \dots I_{N+1} R_{IN+1} \,. \qquad (21)$$

В примере считается, что число рассматриваемых производителей N=3, составляющих производственную сферу экономики, а четвертым субъектом является сфера потребления. Элементами последней, 4 – ой (N+1-ой) строки, являются добавленные стоимости, созданные в каждом секторе экономики производственной сферы. Последнее, N+1-ое слагаемое (в рассматриваемом примере четвертое) этой строки, представляет собой бюджет ***Vg***.

Замена, в группе уравнений для выпусков системы (20), продаж X_I их выражением (21), обеспечивает получение системы из (N+1)=4 дифференциальных уравнений для выпусков. Такая система дифференциальных уравнений позволяет определять выпуски всех субъектов экономики вне зависимости от продаж.

Величину продаж X(t) далее можно алгебраически вычислить, используя равенство (21). Соответствующая сокращенная система дифференциальных уравнений примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
I'_1(t) &= (-I_1(t)(1-R_{11}) + I_2(t)R_{12} + I_3(t)R_{13} + I_4(t)R_{14} + Cp_1)/Fe_1 \\
I'_2(t) &= (I_1(t)R_{21} - I_2(t)(1-R_{22}) + I_3(t)R_{23} + I_4(t)R_{24} + Cp_2)/Fe_2 \\
I'_3(t) &= (I_1(t)R_{31} + I_2(t)R_{32} - I_3(t)(1-R_{33}) + I_4(t)R_{34} + Cp_3)/Fe_3 \qquad (22) \\
I'_4(t) &= (I_1(t)rw_1(1-Ri_1) + I_2(t)rw_2(1-Ri_2).\,. - I_4(t)(1-rg) + I_4(t)(1-Rs_4))/Fe_4
\end{aligned}$$

Последняя строка системы уравнений (22) приняла представленный вид в связи с тем, что только часть добавленной стоимости $rw_J=W_J/Va_J$, созданной в каждом секторе производственной сферы экономики, идет на зарплату W_J, т.е. $R_{TJ}=rw_J(1-Ri_J)$. Другая ее часть

– прибыль делится между налогами, которые уходят в бюджет, и остатком – чистой прибылью, которая должна идти на инвестиции в развитие производства (не обязательно того, где она получена).

Эти инвестиции представляют собой внешние воздействия $\boldsymbol{Cp_i}$ для каждого из субъектов производственной сферы экономики. Их целесообразно выразить в долях прибыли, т.е. в величине чистой прибыли (накоплении $\boldsymbol{Ch_J}$), как источника инвестирования, т.е. $\boldsymbol{Cp_i=k_jPr_i=kI_i(1-Rs_i)}$. Величина накопления определяется уровнем налогов и зарплаты. Чем они больше, тем меньшая доля прибыли k_J, может идти на инвестиции. В тех случаях, когда инвестиции осуществляются только за счет своих внутренних ресурсов, т.е. за счет чистой прибыли, и не обеспечивают желательный темп развития экономики, оказывается необходимым привлекать инвестиции извне.

В сфере потребления остаток бюджета, после выплаты зарплаты бюджетникам $\boldsymbol{Prg=I_4(t)(1-Rs_4)}$, весь может идти на развитие и содержание инфраструктуры этой сферы (школы, больницы и т.д.). Он представляет собой инвестиции в эту сферу $\boldsymbol{Cp_4}$.

Коэффициенты при переменных $\boldsymbol{I_i}$ определяют динамическую матрицу $\boldsymbol{D_c}$ сокращенной системы уравнений. Все ее элементы оказываются выраженными через элементы матрицы относительных цен $\boldsymbol{R}$.

Каждое слагаемое уравнения (22) имеет размерность затрат [руб.]

$\boldsymbol{FeI'(t)=P_F}$ [руб]; $\boldsymbol{RsI(t)=P_C}$ [руб]; $\boldsymbol{X(t)=PXn(t)=\int I(t)dt+X(0)}$ [руб];

Экономическая сущность каждого из этих слагаемых различна. Затраты $\boldsymbol{P_F}$, которые пропорциональны производной от выпуска $\boldsymbol{X''(t)=I'(t)}$, отражают вложения в расширение основных фондов (либо на компенсацию амортизации). Продажи $\boldsymbol{X(t)=\int I(t)dt+X(0)}$, равные интегралу от выпуска, отражают спрос на произведенную продукцию. Эти затраты можно назвать потенциально ликвидными, так как прибыль, полученная от продажи продукции, может быть потрачена на капитальные вложения в создание новых основных фондов, в рост капитала. Производственные затраты $\boldsymbol{P_C}$ не являются ликвидными, так как они полностью переходят в стоимость новой продукции, которая затем потребляется.

Для предельного случая - двух субъектов экономики (N=2) - агрегированной производственной сферы и сферы потребления, система уравнений (22) примет вид:

$$\boldsymbol{I'_1(t)=(-I_1(t)(1-R_{11})+I_2(t)(1-rg)\ \ +Cp_1)/Fe_1} \qquad (23)$$

$$I'_2(t)=(I_1(t)(1-R_{11})rw - I_2(t)(Rs_2-rg))/Fe_2 .$$

Из последней строки (23) следует, что рост валового внутреннего продукта (GDP), т.е. $I'_2(t)$ определяется величиной агрегированного выпуска продукции производственной сферы $I_1(t)$. Для оценки характера его роста необходимо решить полную систему уравнений (23).

Система двух дифференциальных уравнений первой степени может быть представлена в виде одного дифференциального уравнения второго порядка следующего вида

$$I''_1(t)+SpI'_1(t)+d_0I_1(t)=Cp_1/Fe_1. \qquad (24)$$

Здесь $Sp=d_{11}+d_{22}=(1-R_{11})/Fe_1+(Rs_2-rg)/Fe_2$ – след динамической матрицы системы (23) с обратным знаком; а $d_0=d_{11}d_{22}-d_{12}d_{21}=(1-R_{11})(Rs_2-rg(1-rw)-rw)/Fe_1Fe_2$ – определитель этой матрицы. Оба собственных числа этой матрицы $\lambda_1= -Sp/2+\sqrt{(Sp/2)^2-d_0}$ и $\lambda_2= -Sp/2-\sqrt{(Sp/2)^2-d_0}$ отрицательны. Действительно, в выражениях для собственных чисел λ_1 и λ_2 подкоренная разность $(Sp/2)^2-d_0$ всегда будет положительна и меньше $Sp/2$, так как $((d_{11}+d_{22})^2-4(d_{11}d_{22}-d_{12}d_{21}))/4=((d_{11}-d_{22})^2+4d_{12}d_{21})/4$.

Пусть $R_{11}=0.7; R_{22}=0.7; R_{12}=0.2; R_{21}=0.2; Fe_1=2; Fe_2=3; rg=0.4; rw=0.6$. При таких экономических характеристиках межотраслевого баланса двух производителей-потребителей след динамической матрицы $Sp/2=0.14$, а ее определитель $d_0=0.002$. Собственные числа, при этом, окажутся равными $\lambda_1= -0.007$ и $\lambda_2= -0.275$.

Решение дифференциального уравнения, у которого оба собственных числа λ_1 и λ_2 отрицательны, будет иметь апериодический характер. В присутствии инвестиций в расширение производства Cp_1, выпуски обоих производителей станут расти до предела, который определен этими инвестициями.

Таким образом, для функционирования экономики, помимо производителя, требуется присутствие хотя бы одного потребителя, который является не просто объектом сбыта продукции, но должен быть описан своими экономическими характеристиками. Наименьшее число субъектов экономики, взаимодействие которых должно быть отражено в функциональной схеме модели, является два.

Обсуждаемая динамическая модель является первым приближением, т.к. она описывает экономическую систему с постоянными во времени коэффициентами. Уточнением этой модели будет введение переменных во времени элементов матрицы относительных цен R(t). Следующим шагом уточнения модели является учет случайного характера оценок затрат и выпусков. В этом случае система дифференциальных уравнений в пространстве состояний будет описывать не только сами процессы затрат и выпуска, но и статистические параметры этих процессов, как случайных. Каждый из этих шагов все более полно учитывает особенности реальной экономики и соответственно ведет к все более сложной модели. Существующий математический аппарат решения упомянутых видов уравнений и использование компьютерной технологии позволяют решать такие задачи.

3. Использование методов программного управления в экономике.

Примером необходимости использования методов программного управления развитием экономики, как динамической системы, является требование удвоения валового регионального продукта за 10 лет. Его суть состоит в переводе начального состояния экономики региона в желательное конечное состояние к заданному моменту времени. Для достижения требуемого состояния экономики необходима программа ежегодного инвестирования развития, которая и определяет *закон управления* состоянием экономики во времени.

В качестве примера методологии синтезирования закона управления будем рассматривать экономику, описываемую таблицей «затраты – выпуск», агрегированной до двух субъектов – производственной сферы и сфера потребления.

Характеристиками состояние такой экономики являются - агрегированная: стоимость годового выпуска продукции и услуг в производственной сфере $\boldsymbol{I_1(t)}$ [руб]/[год] и валовой региональный продукт $\boldsymbol{GRP=I_2(t)}$ [руб]/[год].

В таблицах 1 и 2 приведен пример матриц МОБ агрегированных экономик города С. Петербурга и Ленинградской области. При ее формировании использовались макроэкономические показатели экономики С.Петербурга и Ленинградской области за 2002 год.

Таблица 1.

Матрица МОБ экономики С.Петербурга (млрд.руб)

Производители / Потребители	Сфера производства Затраты	Конечное потребление Yp	Полный выпуск I_i
Сфера производства – продажи p_{IJ} Относительные показатели R_{IJ}	359,4 0,697	156,16 0,70	515,56
– зарплаты Wp и Wg Относительные показатели R_{2J}	89,9 0,174	32,8 0,148	GRP=222,14

Прибыль Pr_J	66,26	33,13	
Добавленная стоимость $V_J=W_J+Pr_J$	156,16	65,93	

Таблица 2.

Матрица МОБ экономики Ленинградской области (млрд.руб)

Производители / Потребители	Сфера производства Затраты	Конечное потребление Yp	Полный выпуск I_i
Сфера производства – продажи p_{IJ} Относительные показатели R_{IJ}	118,35 0,678	56,26 0,755	174,6
– Зарплаты Wp и Wg Относительные показатели R_{2J}	24,23 0,139	8,56 0,115	GRP=74,43
Прибыль Pr_J	32,03	9,69	
Добавленная стоимость $V_J=W_J+Pr_J$	56,26	18,25	

Из равенства для валового регионального продукта $GRP=Va+Vg$ следует, что добавленная стоимость, созданная в производственной сфере экономики определяется соотношением $Va=(1-rg)GRP$. В экономике города ставка обобщенного налога, равна $rg=65,93/222=0,3,$ в экономике области $rg=0,245$.

Помимо данных о затратах в денежном выражении в таблице приведены относительные затраты $R_{IJ}=p_{IJ}/I_J$, которые определяются путем нормирования затрат по стоимости годового выпуска продукции. В первом столбце нормирование затрат осуществляется по стоимости годового выпуска продукции производственной сферы, т.е. $R_{1J}=p_{1J}/I_1$.

Первый элемент таблицы МОБ агрегированной экономики R_{11} представляет собой относительное промежуточное потребление Ri. Для города $Ri=R_{11}=359,4/515,6=0,697$, для области $R_{11}=0,678$. Второй элемент первого столбца таблицы $R_{21}=Wgp/I_1$ представляет собой относительную зарплату. Сумма $Rs_1=Ri+R_{21}$ определяет относительную себестоимость продукции производственной сферы. Относительная себестоимость позволяет оценить макроэкономическую рентабельность этой сферы следующим соотношением

$$Rnt_1=1/Rs_1-1.$$

Во втором столбце, который характеризует сферу потребления, нормирование осуществляется по $GRP=I_2$. Для него относительное конечное потребление $R_{12}=156,16/222=0,7$ – для города и $R_{12}=0,755$ для области.

Второй элемент столбца сферы потребления R_{22} - относительные выплаты бюджетникам R_{22}. Сумма $Rs_2=R_{12}+R_{22}$, по аналогии с производственной сферой может быть названа относительной себестоимостью сферы потребления.

В таблице 3 приведен перечень важнейших относительных показателей, которые используются далее при динамическом моделировании и сопоставлении экономик города и области.

Таблица 3

Перечень важнейших экономических показателей

	Наименование показателя	Город	Область
1	Относительное промежуточное потребление $Ri=Pp/I_1$	0,697	0,678
2	Относительная себестоимость производственной сферы $Rs_1=R_{11}+R_{12}$	0,871	0,817
3	Относительная себестоимость сферы потребления $Rs_2=R_{12}+R_{22}=1-rg+R_{22}$	0,848	0,87
4	Ставка заработной платы $pw=Wgp/Va$	0,576	0,43
5	Ставка обобщенного налога $rg=Va/GRP$	0,3	0,245
6	Отношение зарплат в сфере потребления и производства $Kg=Wg/Wp$	2,74	2,83

После формирования матрицы МОБ агрегированной экономики, оказывается возможным, используя (22), записать систему дифференциальных уравнений для двух субъектов экономики – производственной сферы и сферы потребления. У нее коэффициентами при переменных являются элементы матрицы таблицы 3.

$$
\begin{aligned}
I'_1(t)&=(-I_1(t)(1-R_{11})+I_2(t)(1-rg)+Cp_1(t))/Fe_1\\
I'_2(t)&=(I_1(t)(1-R_{11})-I_2(t)(Rs_2-rg))/Fe_2
\end{aligned}
\qquad (25)
$$

Динамическая матрица этой системы дифференциальных уравнений D_I имеет следующий вид:

$$
\begin{bmatrix} -(1-Ri)/Fe_1 & (1-rg)/Fe_1 \\ (1-Ri)/Fe_2 & -(Rs2-rg)/Fe_2 \end{bmatrix} \qquad (26).
$$

Результаты решения записанной системы уравнений определяют динамику изменения характеристик состояния экономики $I_1(t)$ [руб]/[год] и $I_2(t)$ [руб]/[год] [4].

Для целенаправленного развития экономики от начального значения ее состояния $I_1(0)$ и $I_2(0)$ до заданного конечного состояния $Ik_1=I_1(T)$ и $Ik_2=I_2(T)$ в течении заданного времени T необходимы ежегодные инвестиции, которые и определяют функцию управления $U(t)$. Ее зависимость от времени будем искать в виде некоторого полинома n-ой степени.

$$U(t)=C_0+C_1t+C_2t^2+\ldots \qquad (27)$$

Порядок полинома равен числу условий n, накладываемых на конечные значения состояния экономики. Это число может быть равно порядку системы дифференциальных уравнений - r, которые описывают экономику как динамическую систему, может быть больше и меньше его. При единственном требовании – достижении определенного конечного уровня $GDP=Ik_2$ через T=10 лет функция управления оказывается постоянной $U(t)=C_0$. При этом, величина годового выпуска продукции $I_1(t)$ не ограничивается. Использование только одного ограничения может привести к чрезмерному увеличению этой характеристики состояния, что нарушит баланс производства и потребления.

При двух условиях - достижении определенного конечного уровня $GDP=Ik_2$ и конечного объема выпуска продукции Ik_1 через T=10 лет, функция управления оказывается состоящей из двух слагаемых $U(t)=C_0+C_1t$. Однако при этом может оказаться, что дальнейшее развитие экономики начнет замедляться. Для исключения такой ситуации целесообразно задавать три условия (n=3) – на конечное значение $GDP=Ik_2$, на конечное значение объема выпускаемой продукции Ik_1 и дополнительное условие на функцию управления, которая к конечному моменту времени должна принимать заданное конечное значение ускорения U_K. Функция управления при этом оказывается состоящей из трех слагаемых $U(t)=C_0+C_1t+C_2t$.

Для определения коэффициентов полинома (27), описывающего функцию управления в каждом из перечисленных вариантов, необходимо перейти от исходной системы уравнений (25) к ее представлению в виде канонической системы уравнений

$$Z_1'(t)=Z_2(t); \quad Z_2'(t)=U(t) \qquad (28)$$

Функция управления, при таком переходе, оказывается состоящей из двух составляющих $U(t)=V(t)+Up(t)$. Первая из них, составляющая обратной связи $V(t)=-d_0Z(t)+TrZ(t)$, где d_0 – определитель динамической матрицы D_1 (26), а Tr – ее “след”. Вторая составляющая – программная $Up(t)$, которую и надо найти.

Переход к каноническому представлению означает преобразование переменных, которое осуществляется с помощью матрицы преобразования Gr, т.е.

$$Z=Gr^{-1}I \quad \text{и наоборот} \quad I=GrZ \qquad (29).$$

Для динамической системы второго порядка матрица преобразования определяется соотношением $Gr=(B_I,D_IB_I)(B,DB)^{-1}$.
Вектор столбец для уравнения (25) $B_I=(1,0)$, а для (28) $B=(0,1)$.

Матрица канонически представленной системы дифференциальных уравнений (25) - D, имеет следующий вид:

$$D=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1d & -Tr \end{bmatrix}.$$

С учетом этих соотношений матрица преобразования найдется как произведение двух матриц

$$Gr=\begin{bmatrix} 1 & (1-\mathrm{Ri})/\mathrm{Fe}_1 \\ 0 & (1-\mathrm{Ri})/\mathrm{Fe}_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Tr & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (\mathrm{Rs}_2-\mathrm{rg})/\mathrm{Fe}_2 & 1 \\ (1-\mathrm{Ri})/\mathrm{Fe}_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (31).$$

Использование приведенной матрицы преобразования позволяет найти функцию управления $U(t)$, которая обеспечивает достижение заданного конечного значения состояния экономики.

При этом следует иметь в виду, что начальные и конечные значения для переменных канонической системы $Z(0)$ и Zk должны быть пересчитаны из известных начальных значений исходной системы переменных $I(t)$ через обратную матрицу преобразования Gr, т.е. $Z(0)=Gr^{-1}I(0)$ и $Zk=Gr^{-1}Ik$. Для матрицы преобразования (31) эти соотношения примут вид:

$$Z_1(0)=I_2(0)Fe_2/(1-Ri); \quad Z_2(0)=I_1(0)-I_2(0)(Rs_2-rg)/(1-Ri).$$

В частности, если на конечные значения переменных накладывается три ограничения (три условия), то это означает, что к концу заданного периода времени T должны выполнятся записанные ниже равенства (32). Первое из них для конечного значения функции управления $U(T)$. Второе – для результата первого интегрирования этой функции, который определяет конечное значение первой производной $Z_1'(T)=Zk_1'$. Третье – для результата второго интегрирования, который определяет конечное значение самой переменной $Z_1(T)=Zk_1$.

$$U(T)= \qquad C_0 \quad +C_1T \quad +C_2T^2 \qquad (32)$$

$$Z_1'(T)=Z_1'(0) \qquad +C_0T \quad +C_1T^2/2+C_2T^3/3$$
$$Z_1(T)=Z_1(0)+Z_1'(0)T+C_0T^2/2+C_1T^3/6+C_2T^4/12$$

Решение записанной системы алгебраических уравнений относительно C_0, C_1, C_2, позволяет их найти

$$C_0= -12(Z_1(0)-Zk_1)/T^2-6(Z_1'(0)+Zk_1')/T+U_K$$
$$C_1= 48(Z_1(0)-Zk_1)/T^3+6(3Z_1'(0)+5Zk_1')/T^2-6U_K/T$$
$$C_2= -36(Z_1(0)-Zk_1)/T^4-12(Z_1'(0)+2Zk_1')/T^3-6U_K/T^2 \qquad (33)$$

В случае только двух ограничений $C_2=0$, и в системе уравнений (32) остаются только два последних уравнения. При одном ограничении $C_1=0$ и $C_2=0$. Функция управления становиться постоянной величиной, так как должно выполняться равенство $Z_1(T)=Z_1(0)+Z_1'(0)T+C_0T^2/2$ и следовательно

$$C_0=2(Zk_1-Z_1(0))/T^2-2Z_1'(0)/T.$$

Таким образом, коэффициенты C_0, C_1, и C_2, которые определяют функцию управления, оказались выражены через начальные и конечные условия и время их достижения T. Программная составляющая $Up(t)$ функции управления найдется как разность

$$Up(t)=U(t)-V(t)= C_0+C_1t+C_2t+Z_1(t)d_0+Z_2(t)Tr. \qquad (34)$$

Так сформированная программная составляющая функции управления для канонической системы, будучи использована в исходной системе уравнений, которые описывают реальную экономику, обеспечивает необходимый конечный результат. Эта функция определяет величину ежегодных инвестиций, которые необходимы для достижения требуемого конечного состояния экономики к заданному моменту времени $Wk(t)=Fe_1Up(t)$.

Однако, в каждый момент времени экономика располагает ограниченными внутренними ресурсами, которые могут быть инвестированы в развитие производственной сферы. Их величина определяется уровнем накопления Rh, остающимся в распоряжении производителя после выплаты всех налогов и сборов.

Уровень накопления равен разности между созданной в производственной сфере добавленной стоимостью Va и налогами, выплаченными производителем в бюджет $Vg=rgVa/(1-rg)$. При этом должны быть исключены налоги на зарплату физических лиц, которые составляют $0,13rwVa$. Здесь $rw=Wp/Va$ представляет собой ставку зарплаты (долю зарплаты в созданной добавленной стоимости). Таким образом, величина относительного накопления $Rh=Ch/Va$ определяется выражением

$$Rh=(1-rg/(1-rg)-rw(1-0.13(1+Kg))) \qquad (35)$$

Разность между требуемыми инвестициями (34) и располагаемыми внутренними ресурсами $\boldsymbol{Ch=RhVa}$ определяет величину необходимых внешних инвестиций $\boldsymbol{Wi=Fe_1Up-Ch}$. Их отношение к уровню накопления $\boldsymbol{dWi=Wi/Ch}$ определит возможное ее превышение.

$$\boldsymbol{dWi=Fe_1Up/Ch-1} \qquad (36).$$

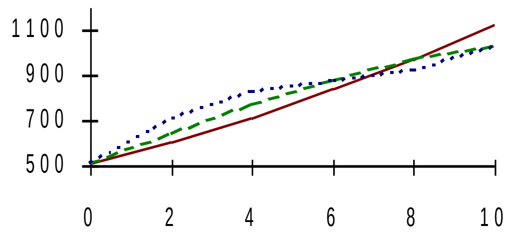
Отрицательное значение этого отношения означает, что накопления превышает необходимые инвестиции.

Таким образом, описанный выше метод синтезирования закона управления состоянием экономики позволяет определить ожидаемую динамику развития экономики и оценить долю внешних инвестиций, необходимых для достижения заданных конечных результатов.

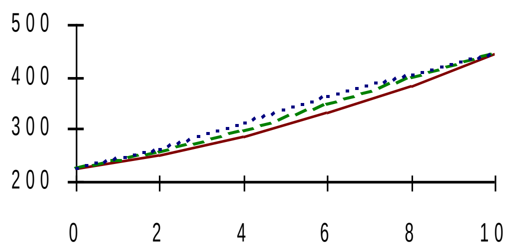
На рис. 2 и рис. 3 представлены результаты моделирования динамики изменения состояния экономики города и области, т.е. роста годового выпуска продукции $\boldsymbol{I_1(t)}$ и изменения $\boldsymbol{GDP=I_2(t)}$ в течение десяти лет, для одного конечного условия, двух и трех условий. Моделирование осуществлялось при ежегодных объемах инвестирования в развитие экономики, соответствующих найденным программным функциям управления каждого из вариантов.

На рис.2а и 3а представлены кривые динамики роста выпуска продукции $\boldsymbol{I_1(t)}$, которые показывают, что при единственном требовании к удвоению ***GDP*** за десятилетие (сплошная кривая), выпуск продукции растет почти линейно и через 10 лет увеличивается в 2,2 раза для города и в 2,28 раз для области. Такой рост выпуска превышает рост ***GDP***, что ведет к нарушению баланса производства и потребления. При двух и трех требованиях к состоянию экономики, рост выпуска идет быстрее в первые четыре года, но к концу десятилетия он удваивается, как это и требовалось.

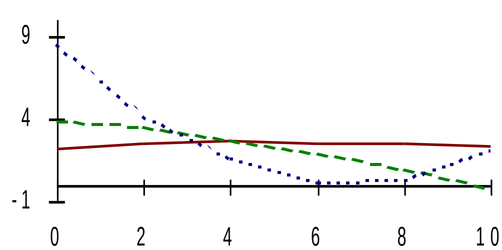
На рис.2б и 3б представлены кривые динамики роста $\boldsymbol{GDP=I_2(t)}$. Они начинаются при одинаковых начальных значениях $\boldsymbol{I_2(0)}$ и заканчиваются при удвоенном его значении. Однако ход развития ***GDP*** для каждого из вариантов ограничений различен.



2а Динамика роста выпуска продукции города $I_1(t)$



2б Динамика роста GRP=$I_2(t)$ города



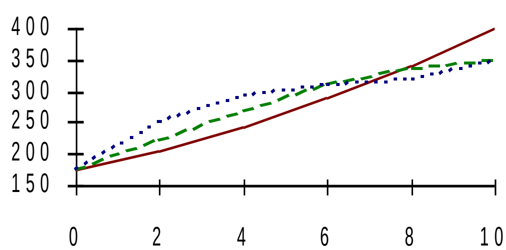
2в. Изменение относительных внешних затрат города dW(t)

Рис.2 Динамика изменения состояния экономики города.

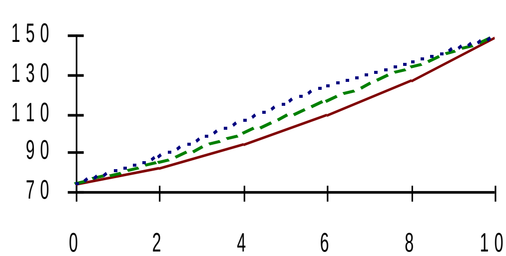
При единственном условии – достижение удвоенного конечного значения ***GDP*** через 10 лет, его рост идет медленнее, чем при двух и трех условиях. Следует отметить, что при меньших инвестициях в области, рост ее ***GDP*** протекает интенсивнее, чем в городе.

При этом, как видно из рис. 1в и 2в, при одном ограничении, ежегодно требуются почти неизменные объемы инвестиций (сплошные кривые). Для города они оказываются почти в два раза больше чем для области. Несмотря на то, что их значения меньше чем начальные значения затрат при двух или трех условиях, суммарно, за десять лет, они оказываются больше.

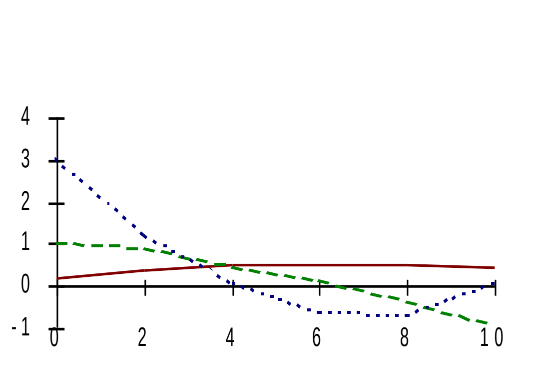
Приведенные на рис. 2в и 3в кривые изменения потребности в годовых внешних инвестициях, для каждого из рассматриваемых вариантов, характеризуют требуемый объем инвестиций, измеренный в величинах накопления. При одном ограничении начальные инвестиции наименьшие. С годами потребность в них меняется мало.



3а. Динамика роста выпуска продукции области $I_1(t)$



.3б. Динамика роста $GRP=I_2(t)$ области



3в. Изменение относительных

внешних затрат области dW(t)

Рис. 3 Динамика изменения состояния

экономики области.

При двух условиях (прерывистая кривая) необходимые начальные внешние инвестиции возрастают. Их потребность составляет ***3,88Rh*** для города и ***1,04Rh*** для области. Однако с годами потребность в них падает. Для города необходимость во внешних инвестициях исчезает к конце десятилетия. У области потребность в них исчезает на шестом году, и наоборот накопления начинают превосходить требуемые инвестиции.

При трех условиях (пунктирная кривая), когда поставлена задача сохранения ускоренного развития экономики на уровне ***Uk=0,04*** I_1 млрд.руб/год^2, начальная потребность в инвестициях возрастает. Однако, уже на шестом году развития для города и на четвертом году развития для области, потребность во внешних инвестициях исчезает. При этом, как отмечалось выше, суммарная потребность во внешних инвестициях за 10 лет наивысшая при задании одного условия.

Самое существенное влияние на требуемый объем инвестиций оказывает уровень промежуточного потребления. Если бы экономики снизили уровень относительного промежуточного потребления ***Ri*** до ***Ri=0,6***, то общая потребность в инвестициях снизилась бы на 5 – 8%.

Таким образом, изложенный подход к экономике как к динамической системе показывает, что требование удвоения ВВП за ограниченный промежуток времени, должно рассматриваться как динамическая задача программного управления. Приведенные примеры динамики развития экономики в условиях программного управления, показывают, что моделирование позволяет рассматривать различные варианты развития экономики и на основе их анализа принимать решение о наиболее приемлемом из них. Учет иных субъектов экономики, например, экспортеров и импортеров потребует рассмотрения динамической системы более высокого прядка (большего числа дифференциальных уравнений), но методология вычисления функции управления, моделирования и анализа результатов останется подобной изложенной выше.

Литература :

1.Леонтьев. В. Экономическое эссе. М.: Политическая литература, 1990 г.

2. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. Издательство «Наука» М.1976 г.

3. Пересада В.П. Модель динамики затрат-выпуска в регионе Экономика и математические методы 1993, т.29,вып.1.с.152-155.

4.Пересада В.П. Динамика инвестирования экономики города и области, обеспечивающая удвоение ВРП за 10 лет. Экономика Северо-запада: проблемы и перспективы. 2004 г.3, с.51-57.

4.Пересада В.П. Управление динамикой развития экономики на базе межотраслевого баланса. С. Петербург: Издательство «Плитехника - сервис», 2010 г. 169 с.