Consumer theory: the individual demand.

Eloy, Ávalos

Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Instituto de Estudios Sociales del Rímac

10 December 2010

CIEC

Centro de Investigaciones Económicas

Documento de Trabajo Nº 7

La Teoría del Consumidor: La Demanda Individual

por

Eloy Ávalos

Diciembre 10, 2010

Instituto de Estudios Sociales del Rímac

Lima, Perú

LA TEORÍA DEL CONSUMIDOR: LA DEMANDA INDIVIDUAL

Eloy ÁVALOS[1]
Universidad Nacional Mayor de San Marcos e IESR

Primera versión: Diciembre 2010

Resumen

En el presente documento se aborda el estudio de la formulación del problema de elección del consumidor como un problema de optimización, especificando las condiciones formales que deben cumplirse para tal caso. Por otro lado, derivaremos algunos teoremas relevantes a partir de la existencia de la función de utilidad para la demanda marshalliana y de la demanda hicksiana, mostrando una clasificación de los bienes derivadas de las preferencias.

Número de Clasificación JEL: D01, D11.
Palabras Claves: Función de demanda individual, demanda marshalliana, demanda hicksiana, efecto sustitución, efecto ingreso.

Abstracts

This paper discusses the formulation of the problem of consumer choice as an optimization problem, specifying the formal conditions to be met for such a case. Furthermore, some relevant theorems be derived from the existence of the utility function for the marshallian demand and the hicksian demand showing a classification of the goods derived from the preferences.

Classification Number JEL: D01, D11.
Key Words: Individual demand function, marshallian demand, hicksian demand, substitution effect, income effect.

---

[1] Contacto: Departamento de Economía, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima 01, Teléfono 619-7000 Anexo 2207; y Centro de Investigaciones Económicas del Instituto de Estudios Sociales del Rímac, Pueblo Libre. Email: eavalosa@unmsm.edu.pe.

1. INTRODUCCIÓN

La derivación de la demanda individual a partir de una relación de preferencia que cumple un conjunto de propiedades determinadas, dado un conjunto de posibilidades de consumo también particular; puede presentarse como la solución de un problema de optimización, donde se maximiza la denominada función de utilidad (función objetivo) sujeto a una restricción de gasto. Asimismo, este enfoque permite revertir el planteamiento de la elección del consumidor, cuando se tiene por objetivo minimizar el gasto dado un nivel de utilidad.

2. LA FUNCIÓN DE DEMANDA INDIVIDUAL

Consideremos para el i – ésimo consumidor, un conjunto de consumo tal que $X_i = \mathbb{R}_+^n$. Además, sea este consumidor precio aceptante en todos los mercados de bienes que participa; así él enfrenta un vector de precios dado, $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}_+^n$.[2] Entonces, el costo de cualquier canasta que compre vendrá dado por $\mathbf{p}_0\mathbf{x}' = \sum_{k=1}^{n} p_k^0 x_k$.

Supondremos que el consumidor tiene una relación de preferencia débil, $\succsim_i$, definida sobre $X_i = \mathbb{R}_+^n$, la que es completa, transitiva, continua, estrictamente convexa y monótona. Además, es representada por una función matemática $u_i(\mathbf{x}): \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ continua, estrictamente cuasi – cóncava y monótona. Asumiremos que nuestro vector de precios es estrictamente positivo, $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$, y que el i – ésimo consumidor tiene un ingreso estrictamente positivo, $m_i^0 > 0$.[3]

Bajo las condiciones mencionadas, entonces el problema de elección del consumidor se presenta como un problema de optimización (maximización), que queda formulado como,

---

2 Donde $\mathbf{p}_0 = (p_1^0, p_2^0, \ldots, p_n^0)$.

3 Así, el conjunto alcanzable del consumidor es un conjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo. Ver ÁVALOS (2010: p. 14).

$$\left.\begin{array}{l}\max u_i(\mathbf{x}) \\ \text{s. a. } \mathbf{p}_0\mathbf{x}' \le m_i^0 \\ \qquad \mathbf{x} > \mathbf{0}\end{array}\right\}[P]$$

Y cuya solución es el vector demanda del i – ésimo consumidor, que consiste en la mejor canasta que este consumidor puede comprar a los precios vigentes y dado su ingreso monetario. La solución de $[P]$ nos permite determinar las funciones de demanda del i – ésimo consumidor, la demanda individual de cada bien, donde para cada bien se tendrá la función $x_k^m = x_k^m(\mathbf{p}, m_i) : \mathbb{R}_+^{n+1} \to \mathbb{R}_{++}$. A esta función de demanda se le llama función de demanda ordinaria o marshalliana.

La función de demanda individual de un bien es una función matemática continua y bien definida. Por otro lado, dada la propiedad que posee el conjunto presupuestario del i – consumidor de homogeneidad de grado cero en precios e ingreso, se deduce que la demanda individual de un bien del i – ésimo consumidor será también una función homogénea de grado cero en precios e ingreso. Así, se verifica que $x_k^m(\theta\mathbf{p}, \theta m_i) = x_k^m(\mathbf{p}, m_i), \quad \forall\theta \in \mathbb{R}_{++}$. De esta propiedad se deduce que la función de demanda individual de un bien depende de variables reales y no de variables nominales, tales como el costo relativo, Θ; y el ingreso real, r_k. Así, $x_k^m(\Theta, r_k)$, donde el vector costo relativo consiste en $\Theta = \left(\theta_{1l}, \ldots \theta_{(k-1)l}, \theta_{(k+1)l}, \ldots, \theta_{nl}\right)$.[4]

En consecuencia, de las propiedades del conjunto alcanzable y de las preferencias del consumidor, podemos enunciar el siguiente teorema,

---

4 Como bien sabemos, el costo relativo se expresa en términos de un bien referencial y el ingreso real se puede expresar en términos de ese mismo bien referencial o en términos del bien en cuestión. En este caso particular, el ingreso real están expresado en unidades del bien *k* y el costo relativo en términos de un bien referencial, denotado como el bien *l*. Al respecto, "*Corresponde muy bien este punto de vista a la opinión común, según la cual hay dos clases de fuerzas que afectan a la cantidad de un producto demandada por un individuo: 1) cambios en el conjunto de bienes de que puede disponer –cambios en su renta "*real*" o capacidad general de compra de bienes y servicios–, y 2) cambios en la relación en que se puede sustituir un bien por otro –variaciones en los precios relativos –.*" Ver FRIEDMAN (1976: p. 39).

Teorema 1

Sea $u_i(\mathbf{x}) = \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ una función matemática continua, estrictamente cuasi – cóncava y monótona, y si además se tiene $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$ y $m_i > 0$. Entonces:

i. El problema $[P]$ tiene una única solución, $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(\mathbf{p}, m_i)$ que varía continuamente con los precios y el ingreso monetario.

ii. El costo de la canasta solución agota todo el ingreso del i – ésimo consumidor, así $\mathbf{p}_0 \mathbf{x}^{*\prime} = m_i^0$.

iii. $u_i(\mathbf{x}) > u_i(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \mathbf{p}_0 \mathbf{x}' > \mathbf{p}_0 \mathbf{x}^{*\prime}$.

La primera implicancia nos señala que la función de demanda del i – ésimo consumidor está bien definida y es continua respecto a precios e ingreso monetario. Esto tiene que ver fundamentalmente con el axioma de convexidad estricta de las preferencias. La segunda, indica que la canasta solución agota el ingreso monetario del consumidor; es decir, la solución no será una canasta $\mathbf{x}^*$, tal que $\mathbf{x}^* \in \operatorname{Int} \phi(\mathbf{p}_0, m_i^0)$.[5] Aquí, el axioma de monotonocidad de las preferencias y los axiomas de elección, implicarían que la solución es un punto frontera del conjunto alcanzable. Por último, la tercera implicancia, indica que no puede existir una canasta de consumo que sea estrictamente preferida a la canasta solución y que a la vez sea alcanzable (costo menor al ingreso monetario).

3. OPTIMIZACIÓN Y DEMANDA MARSHALLIANA

Dado que las preferencias se pueden representar por una función de utilidad que es continua y estrictamente cuasi – cóncava, esto restringe nuestro problema de optimización, "liberándonos" de una serie de inconvenientes formales. Para proceder con la solución de $[P]$ tomaremos en cuenta los siguientes teoremas matemáticos,

---

[5] Recuérdese que $\operatorname{Int} \phi(\mathbf{p}, m_i) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : m_i^0 > \mathbf{p}_0 \mathbf{x}' \wedge \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\right\}$. Ver ÁVALOS (*Ob. Cit.*: p. 14).

Teorema 2

Sea $u_i(\mathbf{x}):\mathbb{R}^n_{++}\to\mathbb{R}$ una función C^1 y no estacionaria. En tal caso, $u_i(\mathbf{x})$ es estrictamente cuasi – cóncava si, y solamente si,

$\forall\mathbf{x},\bar{\mathbf{x}}\in\mathbb{R}^n_{++},\mathbf{x}\neq\bar{\mathbf{x}}\wedge u_i(\mathbf{x})\geq u_i(\bar{\mathbf{x}})\Rightarrow(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})\mathbf{u}_{\mathbf{x}'}(\bar{\mathbf{x}})>0$.[6]

Este teorema permite caracterizar las funciones estrictamente cuasi – cóncavas mediante derivadas primeras.

Teorema 3

Si $u_i(\mathbf{x}):\mathbb{R}^n_{+}\to\mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R}^n_{+}$ y estrictamente cuasi – cóncava en $\mathbb{R}^n_{++}$, entonces $u_i(\mathbf{x})$ es también estrictamente cuasi – cóncava sobre $\mathbb{R}^n_{+}$.

Este teorema nos permite establecer la estricta cuasi – concavidad de la función aún cuando no posea derivada (no sea C^1 o C^2) en la totalidad de su dominio (sobre $\mathbb{R}^n_{+}$).

Luego, con estos teoremas enunciados estamos en condiciones de expresar el problema de elección del consumidor como un programa de optimización estrictamente cuasi – cóncavo.

3.1 Programación estrictamente cuasi – cóncava

Dados los teoremas 2 y 3, se tiene una formulación del problema de elección del consumidor *i* – ésimo, como si fuese una programación estrictamente cuasi – cóncava.

$$\begin{aligned}\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n_{++}} \quad & u_i(\mathbf{x})\\ \text{s. a.} \quad & m_i^0-\mathbf{p}\mathbf{x}'\geq\mathbf{0}\end{aligned}$$

Nótese que la solución implica que el consumidor debe consumidor alguna cantidad de todos los bienes. No es posible que la solución sea una canasta donde el consumo de algunos bienes sea igual a cero.

6 Sea el vector columna de las utilidades marginales dado por $\mathbf{u}_{\mathbf{x}'}=\begin{bmatrix}u_i^1(\mathbf{x})\\u_i^2(\mathbf{x})\\\vdots\\u_i^n(\mathbf{x})\end{bmatrix}_{n\times1}$. Respecto al teorema, ver MADDEN (1987: p. 285).

Teorema 4

Supongamos que $u_i(\mathbf{x}):\mathbb{R}^n_{++}\to\mathbb{R}$ sea estrictamente cuasi – cóncava, no – estacionaria y C^1, y $\phi(\mathbf{p},m_i):\mathbb{R}^{n+1}_{++}\to\mathbb{R}^n_{+}$ no estacionaria y sea C^1. Además, el conjunto $\phi(\mathbf{p},m_i)$ es no vacío, $\mathbf{x}^*$ será solución única si, y solamente si, existe un λ^* tal que,

i. $\dfrac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x_k}(\mathbf{x}^*,\lambda^*)=0$, $k=1,2,\ldots,n$

ii. $\lambda^*>0$

iii. $m_i-\mathbf{p}\mathbf{x}^{*\prime}=0\wedge\mathbf{x}^*\in\mathbb{R}^n_{++}$

Siendo $\mathfrak{L}(\mathbf{x},\lambda)=u_i(\mathbf{x})+\lambda\phi(\mathbf{p},m_i)$.

Sea el espacio de consumo del consumidor i – ésimo, $X_i=\mathbb{R}^2_+$. Dados los teoremas 3 y 4, formulamos el siguiente programa de optimización estrictamente cuasi – cóncava como sigue,

$$\left.\begin{array}{ll}\max & u_i(x_1,x_2)\\ \text{s. a.} & p_1x_1+p_2x_2=m_i^0\end{array}\right\}\quad[P]$$

Que equivale a resolver la siguiente función de Lagrange,[7]

$$\max\quad\mathfrak{L}(x_1,x_2,\lambda)=u_i(x_1,x_2)+\lambda\left(m_i^0-p_1^0x_1-p_2^0x_2\right)$$

Las condiciones de primer orden (condiciones necesarias) del problema son,

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x_1}=u_i^1-\lambda p_1^0=0\\ \dfrac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x_2}=u_i^2-\lambda p_2^0=0\end{array}\right\}\ \lambda=\frac{u_i^1}{p_1^0}=\frac{u_i^2}{p_2^0}\quad\ldots\quad[1]$$

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x_2}=m_i^0-p_1^0x_1-p_2^0x_2=0\qquad\ldots\quad[2]$$

Obteniéndose de la diferenciación de la función de Lagrange un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, x_1,x_2 y λ.[8] Así, de $[1]$ y $[2]$ se obtiene la solución

[7] Donde, en este caso particular, la función de Lagrange es aquella función $\mathfrak{L}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$.

[8] De [1] y [2] se deriva que en equilibrio necesariamente se verifica $\dfrac{u_i^1(x_1^*,x_2^*)}{u_i^2(x_1^*,x_2^*)}=\dfrac{p_1^0}{p_2^0}=\mathrm{TMgS}_{21}$.

$\mathbf{x}^* = \left(x_1^*, x_2^*\right)$ y λ^*. Sin embargo estas condiciones son condiciones necesarias más no suficientes.

Por otro lado, la condición de segundo orden (condición suficiente) se obtiene diferenciando totalmente las ecuaciones de las condiciones de primer orden respecto a las variables endógenas. Así, se tiene,

$$\begin{aligned} &u_i^{11} dx_1 + u_i^{12} dx_2 - p_1^0 d\lambda = 0 \\ &u_i^{21} dx_1 + u_i^{22} dx_2 - p_2^0 d\lambda = 0 \\ &-p_1^0 dx_1 - p_2^0 dx_2 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Dado el teorema de Young,[9] se tiene la matriz hessiana, con $n = 2$,

$$\mathbf{H} \equiv \begin{bmatrix} u_i^{11} & u_i^{12} & -p_1^0 \\ u_i^{21} & u_i^{22} & -p_2^0 \\ -p_1^0 & -p_2^0 & 0 \end{bmatrix}$$

De donde, la condición de segundo orden consiste en que la matriz hessiana sea una matriz definida negativa, así se garantiza que la solución de $[P]$ es un máximo local.[10] Luego, formulamos el siguiente teorema acerca de la solución del programa de optimización.

---

9 Este teorema enuncia, que si $u_i(\cdot)$ es C^2, la matriz hessiana es una matriz simétrica, ya que se verifica que $u_i^{kl} = u_i^{lk}$, $\forall k, l = 1, 2, \ldots, n \quad \wedge \quad k \neq l$. Ver MADDEN (*Ob. Cit.*: p. 72).

10 Una matriz simétrica $\mathbf{A}$ de dimensión $n \times n$ es definida negativa si verifica que para $k = 1, 2, \ldots, n$, los menores principales son todos de signo $(-1)^k$. Para la determinación de la "definición" de la matriz, es suficiente precisar el signo de uno de los menores, para cada orden *k*, llámese el menor principal *fundamental* de k – ésimo orden de $\mathbf{A}$, que es igual al determinante resultante de eliminar en $\mathbf{A}$ las $n - k$ últimas filas y columnas. Entonces, si para $k = 1, 2, \ldots, n$ el menor principal fundamental de orden *k*, de una matriz simétrica **A** de dimensión $n \times n$, tiene signo $(-1)^k$; la matriz **A** será definida negativa. Así, para un espacio de consumo $\mathbb{R}_+^n$, se tendrán,

$u_i^{11} < 0, \begin{vmatrix} u_i^{11} & u_i^{12} \\ u_i^{21} & u_i^{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} u_i^{11} & u_i^{12} & u_i^{13} \\ u_i^{21} & u_i^{22} & u_i^{23} \\ u_i^{31} & u_i^{32} & u_i^{33} \end{vmatrix} > 0 \cdots (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} u_i^{11} & \cdots & u_i^{1n} & -p_1^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_i^{n1} & \cdots & u_i^{nn} & -p_n^0 \\ -p_1^0 & \cdots & -p_n^0 & 0 \end{vmatrix} > 0$. Véase MADDEN (*Ob. Cit.*: p. 87).

Teorema 5

Sea $u_i(\mathbf{x}):\mathbb{R}^n_{++}\to\mathbb{R}$ una función C^2. Si en el punto $\mathbf{x}^*\in\mathbb{R}^n_{++}$ se verifican las condiciones,

i. $\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x_k}\left(\mathbf{x}^*,\lambda^*\right)=0$, $k=1,2,\ldots,n$ (condiciones de 1er. Orden).

ii. $\mathbf{H}$ sea definida negativa (condiciones de 2do. Orden).

Entonces, el punto $\mathbf{x}^*$ es máximo local (estricto) de $u_i(\cdot)$, condicionado a $m_i^0-\mathbf{p}\mathbf{x}^{*\prime}=0$.

Por tanto, la condición de segundo orden para un máximo condicionado (restringido) requiere que todos los determinantes orlados alternen de signo, empezando con el signo positivo (+).[11] Así, para el caso donde $X_i=\mathbb{R}^2_+$, debe cumplirse,

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix} u_i^{11} & u_i^{12} & -p_1^0 \\ u_i^{21} & u_i^{22} & -p_2^0 \\ -p_1^0 & -p_2^0 & 0 \end{vmatrix}>0$$

Es decir, la condición suficiente exige que,

$$\Delta\equiv\left[u_i^{12}p_1^0p_2^0+u_i^{21}p_1^0p_2^0-u_i^{22}\left(p_1^0\right)^2-u_i^{11}\left(p_2^0\right)^2\right]>0$$
$$\Delta\equiv\left[2u_i^{12}p_1^0p_2^0-u_i^{22}\left(p_1^0\right)^2-u_i^{11}\left(p_2^0\right)^2\right]>0$$

Por otro lado, por la condición necesaria dada por [1], se tiene $p_1^0=\frac{u_i^1}{\lambda^*}$ y $p_2^0=\frac{u_i^2}{\lambda^*}$; entonces el hessiano queda como,

$$\begin{vmatrix} u_i^{11} & u_i^{12} & -\frac{u_i^1}{\lambda^*} \\ u_i^{21} & u_i^{22} & -\frac{u_i^2}{\lambda^*} \\ -\frac{u_i^1}{\lambda^*} & -\frac{u_i^2}{\lambda^*} & 0 \end{vmatrix}$$

---

11 Ya no se trata del hessiano en sí, sino del hessiano orlado, y que para una maximización condicionada (restringida), si existen m restricciones; tal que $m<n+1$, se orlan las menores principales fundamentales de orden superior a $m+1$ con las derivadas parciales de las m restricciones. Así, la condición suficiente para un máximo condicionado se satisface si los determinantes alternan de signo, empezando con el signo de $(-1)^{m+1}$. Entonces para el caso de $n=2$, se tiene $(-1)^{1+1}\left|\mathbf{H}_{3\times3}\right|>0$.

Desarrollando, obtenemos, $\Delta \equiv -\frac{1}{\lambda^{*2}}\left[u_i^{22}\left(u_i^1\right)^2 - 2u_i^{12}u_i^1u_i^2 + u_i^{11}\left(u_i^2\right)^2\right] > 0$.

Donde $\left[u_i^{22}\left(u_i^1\right)^2 - 2u_i^{12}u_i^1u_i^2 + u_i^{11}\left(u_i^2\right)^2\right] < 0$ señala que la función de utilidad tiene cierta particularidad, la representación gráfica del contorno de $u_i(\cdot)$ correspondiente a un valor real, como u_i^0, debe tener pendiente negativa y ser creciente. Justamente está pendiente es la llamada tasa marginal de sustitución (*TMgS*), y el hecho de que $-\frac{dTMgS_{21}}{dx_1} > 0$ implica que el conjunto contorno superior es un conjunto estrictamente convexo.[12] Por tanto, se sabe que toda función que posea un conjunto contorno superior estrictamente – convexo es una función estrictamente cuasi – cóncava. Precisemos,

Teorema 5

Sea $u_i(\mathbf{x}) : \mathbb{R}_{++}^n \to \mathbb{R}$ una función C^2, monótona creciente, y que $\forall \mathbf{x}^* \in \mathbb{R}_{++}^n \wedge \forall k = 2,\ldots,n$, el menor diagonal principal orlado de k – ésimo orden de $u_i(\cdot)$ en $\mathbf{x}^*$ tenga signo $(-1)^k$. En tal caso, $u_i(\mathbf{x})$ es estrictamente cuasi – cóncava.[13]

3.2 Implicancias de la optimización

Nuevamente, para $X_i = \mathbb{R}_+^n$, dados los teoremas matemáticos enunciados, se pueden obtener los siguientes teoremas para la demanda individual del consumidor,

Teorema 6 (Ordinalidad)

El equilibrio es invariante ante cualquier transformación monótona creciente de $u_i(\mathbf{x})$.

---

12 El contorno de $u_i(\cdot)$ correspondiente al valor u_i^0, es $C_{u_i}\left(u_i^0\right) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : u_i(\mathbf{x}) = u_i^0\right\}$. La representación gráfica es la llamada curva de indiferencia. El contorno superior de $u_i(\cdot)$ correspondiente al valor u_i^0, es $CS_{u_i}\left(u_i^0\right) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : u_i(\mathbf{x}) \geq u_i^0\right\}$. Y este conjunto es justamente el conjunto MI_i asociado a una canasta tal que la función de utilidad le genera el valor real u_i^0. Ver MADDEN (*Ob. Cit.*: p. 68).

13 Así, dado este teorema, se cuenta con un procedimiento para identificar las funciones cuasi – cóncavas. Ver MADDEN (*Ob. Cit.*: p 295).

Veamos, para $\mathbb{R}_+^2$, formulemos una transformación monótona creciente de la función de utilidad $F(u_i) = F\left[u_i(x_1, x_2)\right]$ donde $F' > 0$. Luego, la función de Lagrange queda formulada como,

$$\mathfrak{T} = F\left[u_i(x_1, x_2)\right] + \lambda\left(m_i^0 - p_1^0 x_1 - p_2^0 x_2\right)$$

Hallando las condiciones de primer orden se tiene,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x_1} &= F' u_i^1 - \lambda p_1^0 = 0 \\ \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x_2} &= F' u_i^2 - \lambda p_2^0 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \lambda = \frac{F' u_i^1}{F' u_i^2} = \frac{u_i^1}{u_i^2} = \frac{p_1^0}{p_2^0} \quad \ldots \quad [1']$$

$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} = m_i^0 - p_1^0 x_1 - p_2^0 x_2 = 0 \quad \ldots \quad [2']$$

Como se deduce de $[1']$ queda inalterada la condición necesaria del equilibrio del consumidor. En cuanto a las condiciones suficientes (condiciones de segundo orden), tenemos la hessiana,

$$\begin{vmatrix} F''\left(u_i^1\right)^2 + F' u_i^{11} & F'' u_i^1 u_i^2 + F' u_i^{12} & -p_1^0 \\ F'' u_i^1 u_i^2 + F' u_i^{21} & F''\left(u_i^2\right)^2 + F' u_i^{22} & -p_2^0 \\ -p_1^0 & -p_2^0 & 0 \end{vmatrix}$$

Y como de $[1']$ se tiene que, $p_1^0 = \dfrac{F' u_i^1}{\lambda}$ y $p_2^0 = \dfrac{F' u_i^2}{\lambda}$; entonces,

$$\begin{vmatrix} F''\left(u_i^1\right)^2 + F' u_i^{11} & F'' u_i^1 u_i^2 + F' u_i^{12} & -\dfrac{F' u_i^1}{\lambda} \\ F'' u_i^1 u_i^2 + F' u_i^{21} & F''\left(u_i^2\right)^2 + F' u_i^{22} & -\dfrac{F' u_i^2}{\lambda} \\ -\dfrac{F' u_i^1}{\lambda} & -\dfrac{F' u_i^2}{\lambda} & 0 \end{vmatrix}$$

A continuación, multiplicamos la última fila y la última columna por $\dfrac{\lambda}{F'}$ se obtiene,

$$\left(\frac{F'}{\lambda}\right)^2 \begin{vmatrix} F''\left(u_i^1\right)^2 + F' u_i^{11} & F'' u_i^1 u_i^2 + F' u_i^{12} & -u_i^1 \\ F'' u_i^1 u_i^2 + F' u_i^{21} & F''\left(u_i^2\right)^2 + F' u_i^{22} & -u_i^2 \\ -u_i^1 & -u_i^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Sumando $F''u_i^1$ veces la última fila a la primera y $F''u_i^2$ veces la última a la segunda, se tiene,

$$\left(\frac{F'}{\lambda}\right)^2 \begin{vmatrix} F'u_i^{11} & F'u_i^{12} & -u_i^1 \\ F'u_i^{21} & F'u_i^{22} & -u_i^2 \\ -u_i^1 & -u_i^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Luego, sustituyendo $-\dfrac{\lambda p_1^0}{F'}$ por $-u_i^1$ y $-\dfrac{\lambda p_2^0}{F'}$ por $-u_i^2$; para en seguida multiplicar la última fila y la última columna por $\dfrac{F'}{\lambda}$, resulta,

$$\begin{vmatrix} F'u_i^{11} & F'u_i^{12} & -p_0^1 \\ F'u_i^{21} & F'u_i^{22} & -p_0^2 \\ -p_0^1 & -p_0^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Finalmente, multiplicamos la última columna por F' y dividimos las dos primeras filas por F', quedando,

$$F' \begin{vmatrix} u_i^{11} & u_i^{12} & -p_0^1 \\ u_i^{21} & u_i^{22} & -p_0^2 \\ -p_0^1 & -p_0^2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

Por tanto la condición suficiente sigue cumpliéndose.

Teorema 7 (Existencia)

Las cantidades demandadas de cada bien en equilibrio y el multiplicador son funciones de los precios y el ingreso monetario.

En $X_i = \mathbb{R}_+^2$, donde los precios y el ingreso monetario son variables exógenas, y diferenciando totalmente las condiciones de primer orden, se obtiene el siguiente sistema matricial,

$$\begin{bmatrix} u_i^{11} & u_i^{12} & -p_1^0 \\ u_i^{21} & u_i^{22} & -p_2^0 \\ -p_1^0 & -p_2^0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ x_1 & x_2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp_1^0 \\ dp_2^0 \\ dm_i^0 \end{bmatrix}$$

Como señalamos anteriormente, el determinante de los coeficientes de variación es $\Delta \neq 0$, lo cual es relevante para aplicar el teorema de la función implícita y luego efectuar el análisis de estática comparativa. Por tanto existen las soluciones,

$$\begin{aligned} &x_k^* = x_k^*(\mathbf{p}, m_i) \quad \forall k = 1,2,\ldots,n. \\ &\lambda = \lambda(\mathbf{p}, m_i) \end{aligned}$$

Teorema 7 (Homogeneidad)

Las funciones $\mathbf{x}^m(\mathbf{p}, m_i)$ son homogéneas de grado cero en $(\mathbf{p}, m_i)$.

Como ya mencionamos, esta propiedad es una herencia de la homogeneidad de grado cero en precios e ingreso monetario del conjunto presupuestario. Así, siendo los nuevos precios y el ingreso monetario,

$$\left.\begin{aligned} p_k^1 &= \theta p_k^0 \\ m_i^1 &= \theta m_i^0 \end{aligned}\right\} \quad (\theta > 0)$$

La reformulación del problema de optimización, tal que la función del Lagrange ahora contemple este ajuste equiproporcional de los precios e ingreso, ahora será,

$$\mathfrak{L} = u_i(x_1, x_2) + \lambda\left(\theta m_i^0 - \theta p_1^0 x_1 - \theta p_2^0 x_2\right)$$

De donde, las condiciones de primer orden serán,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_1} &= u_i^1 - \lambda\theta p_1^0 = 0 \\ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_2} &= u_i^2 - \lambda\theta p_2^0 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \lambda = \frac{u_i^1}{u_i^2} = \frac{\theta p_1^0}{\theta p_2^0} = \frac{p_1^0}{p_2^0} \qquad \ldots \quad [1'']$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_2} = \theta m_i^0 - \theta p_1^0 x_1 - \theta p_2^0 x_2 = m_i^0 - p_1^0 x_1 - p_2^0 x_2 = 0 \quad \ldots \quad [2'']$$

Entonces, de [1″] se deduce que las condiciones de primer orden no resultarán afectadas. Asimismo, como el conjunto presupuestario no ha variado, las condiciones de segundo orden serán iguales ya que $\theta > 0$; por tanto no altera su verificación. Veamos,

$$\begin{vmatrix} u_i^{11} & u_i^{12} & -\theta p_1^0 \\ u_i^{21} & u_i^{22} & -\theta p_2^0 \\ -\theta p_1^0 & -\theta p_2^0 & 0 \end{vmatrix}$$

Y a continuación, multiplicando la última fila y la última columna por $\frac{1}{\theta}$, quedando,

$$\theta^2 \begin{vmatrix} u_i^{11} & u_i^{12} & -p_1^0 \\ u_i^{21} & u_i^{22} & -p_2^0 \\ -p_1^0 & -p_2^0 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

Teorema 8

El multiplicador de Lagrange es la utilidad marginal del ingreso gastado.

Dado que $x_k^* = x_k^*(\mathbf{p}, m_i)$, podemos diferenciar la función compuesta de la función de utilidad dada por $u_i(\mathbf{x}) = u_i\left[\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, m_i)\right]$ y asimismo diferenciamos la restricción presupuestaria respecto a un cambio en el ingreso monetario,

$$du_i(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} u_i \frac{\partial x_k^*}{\partial m_i} dm_i \text{ y } \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial x_k^*}{\partial m_i} dm_i = dm_i$$

Luego, reemplazando el segundo resultado en el primero, y considerando $[1]$, se obtiene,

$$\frac{du_i(\mathbf{x})}{dm_i} = \lambda$$

Teorema 9 (Continuidad)

Si se cumplen los axiomas de las preferencias, para cualquier $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$ y $m_i^0 > 0$, las funciones de demanda $\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, m_i)$ son continuas.

Si se tiene el problema de elección del consumidor formulado como,

$$\left.\begin{array}{l} \max \;\; u_i(\mathbf{x}) \\ \text{s. a. } m_i^0 - \mathbf{p}\mathbf{x}' \geq 0 \end{array}\right\} \;\; [P]$$

Este presenta una solución $\mathbf{x}^*\left(\mathbf{p}, m_i^0\right)$ que es continua en $\mathbf{p}$ y en m_i^0 – valor de los parámetros – si $\mathbf{x}^*\left(\mathbf{p}, m_i^0\right)$ es única, $u_i(\mathbf{x})$ es estrictamente cuasi – cóncava en $\mathbf{x}$, $\phi\left(\mathbf{p}, m_i^0\right)$ es convexo en $\mathbf{x}$, entonces ambas funciones son continuas en $\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}, m_i^0\right)$, y el rango de u_i es compacto.

4. ANÁLISIS DE ESTÁTICA COMPARATIVA

Del teorema 6, se tiene el sistema matricial,

$$\begin{bmatrix} u_i^{11} & u_i^{12} & -p_1^0 \\ u_i^{21} & u_i^{22} & -p_2^0 \\ -p_1^0 & -p_2^0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx_1^* \\ dx_2^* \\ d\lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^* & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^* & 0 \\ x_1^* & x_2^* & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dp_1^0 \\ dp_2^0 \\ dm_i^0 \end{bmatrix}$$

Ahora supongamos cambios infinitesimales de las variables exógenas, tanto de los precios como del ingreso.

4.1 Variación del precio de un producto

Sea un cambio del precio del bien B_1, *ceteris paribus*; por tanto se tiene,

$$\begin{bmatrix} u_i^{11} & u_i^{12} & -p_1^0 \\ u_i^{21} & u_i^{22} & -p_2^0 \\ -p_1^0 & -p_2^0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1^m}{dp_1^0} \\ \dfrac{dx_2^m}{dp_1^0} \\ \dfrac{d\lambda^*}{dp_1^0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^* \\ 0 \\ x_1^m \end{bmatrix}$$

Donde, como bien sabemos, $\Delta > 0$. Luego, aplicando la regla de Cramer obtenemos la tasa de cambio,[14]

$$\frac{dx_1^m}{dp_1^0} = \frac{\lambda^* \Delta_{11}}{\Delta} + \frac{x_1^m \Delta_{31}}{\Delta} \gtreqless 0$$

Donde, $\Delta_{11} = -\left(p_2^0\right)^2 < 0$ y $\Delta_{31} = -u_i^{12} p_2^0 + u_i^{22} p_1^0 \gtreqless 0$. Es decir, el efecto de un cambio del precio de B_1 sobre la cantidad demandada del mismo bien puede ser negativo, positivo o nulo. Esta indeterminación se debe al segundo componente, ya que el primero es indudablemente negativo. Por otro lado, también tenemos la tasa de cambio,

$$\frac{dx_2^m}{dp_1^0} = -\frac{\lambda^* \Delta_{12}}{\Delta} - \frac{x_1^m \Delta_{32}}{\Delta}$$

---

14 La solución del primal se identifica con la función de demanda marshalliana, por eso notacionalmente, será indistinto el uso de $\mathbf{x}^*$ o de $\mathbf{x}^m$, salvo que se indique lo contrario. Entonces, $\dfrac{dx_1^m}{dp_1^0}$ indicaría la pendiente de la función de demanda marshalliana en el punto evaluado.

Donde, $\Delta_{12} = -p_1^0 p_2^0 < 0$ y $\Delta_{32} = -u_i^{11} p_2^0 + u_i^{21} p_1^0 \gtreqless 0$. Es decir, el efecto de un cambio del precio de B_1 sobre la cantidad demandada del bien B_2 puede ser negativo, positivo o nulo. Esta ambigüedad se debe al segundo componente de la tasa de cambio, ya que el primero sin lugar a dudas es positivo.

4.2 Variación del ingreso monetario

Sea un cambio del ingreso monetario, *ceteris paribus*; entonces se tiene el sistema,

$$\begin{bmatrix} u_i^{11} & u_i^{12} & -p_1^0 \\ u_i^{21} & u_i^{22} & -p_2^0 \\ -p_1^0 & -p_2^0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{dx_1^e}{dm_i^0} \\ \dfrac{dx_2^e}{dm_i^0} \\ \dfrac{d\lambda^*}{dm_i^0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Luego, aplicando la regla de Cramer obtenemos las tasas de cambio respecto a un cambio del ingreso monetario,

$$\frac{dx_1^e}{dm_i^0} = -\frac{\Delta_{31}}{\Delta}$$

Donde, $\Delta_{31} = -u_i^{12} p_2^0 + u_i^{22} p_1^0 \gtreqless 0$.[15] Según el sentido cualitativo del cambio que posea esta tasa, corresponderá a un tipo de bien determinado para el bien B_1. Así, se pueden tener los siguientes casos,

---

15 Esta tasa de cambio señala la pendiente de la curva de Engel para la situación inicial de equilibrio evaluada. Formalmente, tanto la demanda marshalliana como la demanda – ingreso (que da origen a la curva de Engel) son la misma, diferenciándose únicamente porque para la primera el precio p_2 y el ingreso monetario son los parámetros de la función; mientras que para la curva de Engel, lo son ambos precios, p_1 y p_2. Entonces para hacer referencia a este punto, cuando derivemos las funciones de demanda marshalliana respecto al ingreso notacionalmente utilizaremos x_k^e en referencia a la demanda – ingreso (curva de Engel).

$\frac{dx_1^e}{dm_i^0} = -\frac{\Delta_{31}}{\Delta} > 0 \Leftrightarrow B_1$ es un bien normal o superior.

$\frac{dx_1^e}{dm_i^0} = -\frac{\Delta_{31}}{\Delta} = 0 \Leftrightarrow B_1$ es un bien neutro.

$\frac{dx_1^e}{dm_i^0} = -\frac{\Delta_{31}}{\Delta} < 0 \Leftrightarrow B_1$ es un bien inferior

Por otro lado, esta tasa de cambio nos permite identificar el segundo componente de la tasa de cambio de la cantidad demandada de B_1 ante un cambio de su precio, $\frac{dx_1^e}{dp_1^0}$. Si evaluamos a partir de una situación inicial de equilibrio, entonces $x_1^m \frac{dx_1^e}{dm_i^0} = -\frac{x_1^m \Delta_{31}}{\Delta}$ indicaría que tras un cambio en el precio de un bien, ceteris paribus, existe un efecto similar a que si se modificase el ingreso monetario (y que por la condición *ceteris paribus* es igual a una variación del ingreso real). A este componente le llamaremos efecto ingreso, por lo que nuestra primera tasa de cambio va quedando como,

$$\frac{dx_1^m}{dp_1^0} = \frac{\lambda^* \Delta_{11}}{\Delta} - x_1^m \frac{dx_1^e}{dm_i^0} \gtreqless 0$$

Y también queda claro, que el valor de la tasa de cambio $\frac{dx_1^m}{dp_1^0}$, dependerá de cómo tipifique el consumidor al bien B_1. Así, tendremos los siguientes casos posibles,

$\frac{dx_1^m}{dp_1^0} = \frac{\lambda^* \Delta_{11}}{\Delta} + \frac{x_1^m \Delta_{31}}{\Delta} < 0 \Leftrightarrow \frac{dx_1^e}{dm_i^0} = -\frac{\Delta_{31}}{\Delta} > 0 \Leftrightarrow B_1$ es un bien normal.

$\frac{dx_1^m}{dp_1^0} = \frac{\lambda^* \Delta_{11}}{\Delta} + \frac{x_1^m \Delta_{31}}{\Delta} < 0 \Leftrightarrow \frac{dx_1^e}{dm_i^0} = -\frac{\Delta_{31}}{\Delta} = 0 \Leftrightarrow B_1$ es un bien neutro.

$\frac{dx_1^m}{dp_1^0} = \frac{\lambda^* \Delta_{11}}{\Delta} + \frac{x_1^m \Delta_{31}}{\Delta} \gtreqless 0 \Leftrightarrow \frac{dx_1^e}{dm_i^0} = -\frac{\Delta_{31}}{\Delta} < 0 \Leftrightarrow B_1$ es un bien inferior.

Se observará, que en las dos primeras tipificaciones de B_1 la tasa de cambio $\frac{dx_1^m}{dp_1^0}$ queda definida. En tanto que, con el tercer tipo, como bien inferior, se tendrán tres situaciones posibles adicionales. Luego, dado que $\frac{dx_1^e}{dm_i^0} = -\frac{\Delta_{31}}{\Delta} < 0$; entonces $\frac{x_1^m \Delta_{31}}{\Delta} > 0$, siendo de signo opuesto al primer componentes. Para evaluar el resultado neto tomaremos valores absolutos de ambos componentes, siendo posible obtener,

$$\frac{dx_1^m}{dp_1^0} < 0 \Leftrightarrow \left|\frac{\lambda^*\Delta_{11}}{\Delta}\right| > \left|\frac{x_1^m\Delta_{31}}{\Delta}\right| \Leftrightarrow B_1 \text{ es un bien inferior.}$$

$$\frac{dx_1^m}{dp_1^0} = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{\lambda^*\Delta_{11}}{\Delta}\right| = \left|\frac{x_1^m\Delta_{31}}{\Delta}\right| \Leftrightarrow B_1 \text{ es un bien inferior.}$$

$$\frac{dx_1^m}{dp_1^0} > 0 \Leftrightarrow \left|\frac{\lambda^*\Delta_{11}}{\Delta}\right| < \left|\frac{x_1^m\Delta_{31}}{\Delta}\right| \Leftrightarrow B_1 \text{ es un bien inferior Giffen.}$$

Nótese, que en el primer caso, el efecto ingreso contrarresta sólo parcialmente el efecto del primer componente. En el segundo, ambos efectos se cancelan y en el tercer tipo, el efecto ingreso supera al primer componente, por lo que la tasa de cambio de la cantidad demandada de un bien respecto a su precio es positiva (es el único caso donde la demanda marshalliana tiene pendiente negativa).

Por otro lado, la segunda tasa de cambio derivada será,

$$\frac{dx_2^e}{dm_i^0} = \frac{\Delta_{32}}{\Delta} \gtreqless 0$$

Donde $\Delta_{32} = -u_i^{11}p_2^0 + u_i^{21}p_1^0 \gtreqless 0$. De igual forma, este resultado aparece como parte del segundo componente de $\frac{dx_2^e}{dm_i^0}$. Así, sustituyendo se obtiene que $\frac{dx_2^m}{dp_1^0} = -\frac{\lambda^*\Delta_{12}}{\Delta} - x_1^*\frac{dx_2^e}{dm_i^0}$. Y nuevamente se esclarece que la indeterminación de la tasa de cambio de B_2 respecto al cambio del precio de B_1 obedece a cómo las preferencias del consumidor tipifican el bien B_2. Entonces es posible tener los siguientes casos,

$$\frac{dx_2^m}{dp_1^0} = -\frac{\lambda^*\Delta_{12}}{\Delta} - \frac{x_1^*\Delta_{32}}{\Delta} \gtreqless 0 \Leftrightarrow \frac{dx_2^e}{dm_i^0} = \frac{\Delta_{32}}{\Delta} > 0 \Leftrightarrow B_2 \text{ es un bien normal.}$$

$$\frac{dx_2^m}{dp_1^0} = -\frac{\lambda^*\Delta_{12}}{\Delta} - \frac{x_1^*\Delta_{32}}{\Delta} > 0 \Leftrightarrow \frac{dx_2^e}{dm_i^0} = \frac{\Delta_{32}}{\Delta} = 0 \Leftrightarrow B_2 \text{ es un bien neutro.}$$

$$\frac{dx_2^m}{dp_1^0} = -\frac{\lambda^*\Delta_{12}}{\Delta} - \frac{x_1^*\Delta_{32}}{\Delta} > 0 \Leftrightarrow \frac{dx_2^e}{dm_i^0} = \frac{\Delta_{32}}{\Delta} < 0 \Leftrightarrow B_2 \text{ es un bien inferior.}$$

Ahora también se observará, que en las dos últimas tipificaciones de B_2 la tasa de cambio $\frac{dx_2^m}{dp_1^0}$ queda definida. En tanto que, con el primer tipo, se tendrán tres situaciones posibles más. Dado que $\frac{dx_2^e}{dm_i^0}=\frac{\Delta_{32}}{\Delta}>0$; entonces $-\frac{x_1^m\Delta_{32}}{\Delta}<0$. Entonces, para evaluar el resultado neto tomaremos valores absolutos de ambos componentes, siendo posible obtener,

$$\frac{dx_2^m}{dp_1^0}>0 \Leftrightarrow \left|-\frac{\lambda^*\Delta_{12}}{\Delta}\right|>\left|-\frac{x_1^m\Delta_{32}}{\Delta}\right| \Leftrightarrow B_2 \text{ es un bien normal}$$

$$\frac{dx_2^m}{dp_1^0}=0 \Leftrightarrow \left|-\frac{\lambda^*\Delta_{12}}{\Delta}\right|=\left|-\frac{x_1^m\Delta_{32}}{\Delta}\right| \Leftrightarrow B_2 \text{ es un bien normal.}$$

$$\frac{dx_2^m}{dp_1^0}<0 \Leftrightarrow \left|-\frac{\lambda^*\Delta_{12}}{\Delta}\right|<\left|-\frac{x_1^m\Delta_{32}}{\Delta}\right| \Leftrightarrow B_2 \text{ es un bien normal.}$$

La determinación de esta tasa nos permite precisar cómo el consumidor tipifica los bienes B_1 y B_2 . Así, se tiene,

$$\frac{dx_2^m}{dp_1^0}>0 \Leftrightarrow B_1 \text{ y } B_2 \text{ son bienes sustitutos brutos.}$$

$$\frac{dx_2^m}{dp_1^0}=0 \Leftrightarrow B_1 \text{ y } B_2 \text{ son bienes independientes.}$$

$$\frac{dx_2^m}{dp_1^0}<0 \Leftrightarrow B_1 \text{ y } B_2 \text{ son bienes complementarios brutos.}$$

Esta clasificación, se desprende de las preferencias del consumidor. Anteriormente Pareto y Edgeworth hacían referencia a los coeficientes u_i^{12} y u_i^{21} para determinar la complementariedad entre los bienes.[16]

5. LA DEMANDA COMPENSADA (DEMANDA HICKSIANA)

Proposición 1

Sea $u_i(\cdot):\mathbb{R}_+^n\rightarrow\mathbb{R}$ continua, estrictamente cuasi – cóncava y monótonamente creciente. Además sea $\mathbf{p}\in\mathbb{R}_{++}^n$ y $\mathbf{x}^*\in\mathbb{R}_+^n$, tal que,

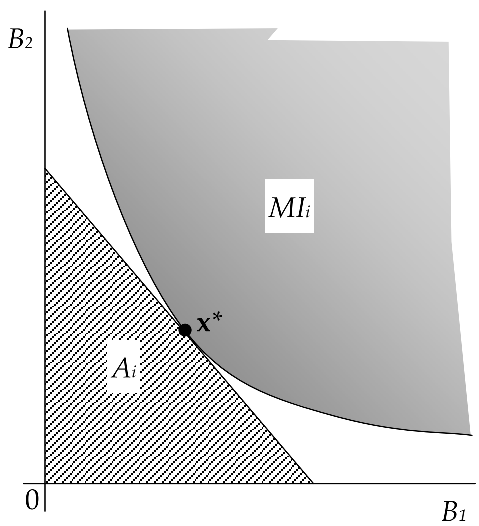
16 Ver HICKS (1945: pp. 42 – 54).

i. La solución de $[P]$, $\mathbf{x}^*$, minimiza el $\mathbf{px}'$ en $MI_i\left(\mathbf{x}^*\right)=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}_+^n : u_i(\mathbf{x})\geq u_i\left(\mathbf{x}^*\right)\right\}$.

ii. $\mathbf{px}^{*\prime}>0$. Entonces $\mathbf{x}^*$ maximiza la función de utilidad $u_i(\mathbf{x})$ en $A_i\left(\mathbf{p},\mathbf{x}^*\right)=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}_+^n : \mathbf{px}'\leq\mathbf{px}^{*\prime}\right\}$.

Esta proposición se deriva del punto (ii) del teorema 1. Ya que si la canasta solución se encuentra en la frontera del conjunto de posibilidades de consumo; entonces se cumple $\mathbf{px}^{*\prime}=m_i^0$. Por lo que dicho ingreso monetario, a su vez, puede interpretarse como un gasto mínimo requerido para alcanzar el conjunto de canastas $MI\left(\mathbf{x}^*\right)$. También podemos afirmar que esta proposición indica que la solución de $[P]$, que es única por las propiedades anteriormente enunciadas y que maximiza la función objetivo $u_i(\mathbf{x})$, a su vez minimiza el gasto que se requiere para alcanzar el conjunto $MI_i\left(\mathbf{x}^*\right)$. La resolución del problema planteado en (i) como minimización, es el dual $[D]$ de $[P]$, que se formula como,[17]

$$\left.\begin{array}{ll}\text{min} & \mathbf{px}' \\ \text{s. a.} & u_i^0-u_i(\mathbf{x})\leq 0 \\ & \mathbf{x}\geq\mathbf{0}\end{array}\right\}\ [D]$$



[17] Que igual al problema $[P]$ debe cumplir ciertas condiciones que se tratarán cuando se estudie la dualidad del consumidor.

Podemos tener una representación gráfica de la relación entre el primal y el dual. (Ver gráfico anterior)

Luego, para un espacio de consumo, donde $X_i = \mathbb{R}_+^2$, este problema equivale a resolver la siguiente función de Lagrange sólo para tres variables,

$$\mathfrak{Z} = p_1^0 x_1 + p_2^0 x_2 + \mu\left[u_i^0 - u_i(x_1, x_2)\right]$$

Hallando las condiciones de primer orden,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x_1} &= p_1^0 - \mu u_i^1 = 0 \\ \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x_2} &= p_2^0 - \mu u_i^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{u_i^1}{p_1^0} = \frac{u_i^2}{p_2^0} \quad \ldots \quad [1''']$$

$$\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial \mu} = u_i^0 - u_i(x_1, x_2) = 0 \qquad \ldots \quad [2''']$$

Luego, de $[1''']$ y $[2''']$ se obtienen las soluciones, $\mathbf{x}^h\left(\mathbf{p}, u_i^0\right)$ y μ^*, llamándose a las primeras demandas hicksianas o demandas compensadas. Y de la misma forma que se estableció el teorema de existencia para la solución de $[P]$, igual aquí podemos sostener que las cantidades solución de $[D]$ de cada bien y el multiplicador μ^* son funciones de los precios, pero ya no del ingreso monetario sino de un nivel de utilidad referencial, u_i^0. Así, en $X_i = \mathbb{R}_+^2$, considerando los precios y el nivel de utilidad referencial como variables exógenas y diferenciando totalmente las condiciones de primer orden, se obtiene el siguiente sistema matricial,

$$\begin{bmatrix} -\mu u_i^{11} & -\mu u_i^{12} & -u_i^1 \\ -\mu u_i^{21} & -\mu u_i^{22} & -u_i^2 \\ -u_i^1 & -u_i^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1^h \\ dx_2^h \\ d\mu^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp_1^0 \\ dp_2^0 \\ du_i^0 \end{bmatrix}$$

Donde, el determinante de la matriz de los coeficientes de variación es $\Delta^h < 0$.[18] A continuación podemos realizar ejercicios de estática comparativa, fundamentalmente queremos hallar la tasa de cambio $\frac{dx_1^h}{dp_1^0}$ y $\frac{dx_2^h}{dp_1^0}$ ya que serán las que nos darán información sobre los primeros componentes desconocidos de $\frac{dx_1^m}{dp_1^0}$ y $\frac{dx_2^m}{dp_1^0}$. Entonces, aplicando la regla de Cramer, se tiene,

$$\frac{dx_1^h}{dp_1^0} = -\frac{\Delta_{11}^h}{\Delta^h} = \frac{\Delta_{11}^h}{\frac{1}{\mu}\Delta} = -\frac{\left(\frac{1}{\mu^*}\right)^2 \Delta_{11}}{\frac{1}{\mu^*}\Delta} = -\frac{\frac{1}{\mu^*}\Delta_{11}}{\Delta} = -\frac{\lambda^*\Delta_{11}}{\Delta}$$[19]

Que inmediatamente reconocemos como el primer componente de la tasa de cambio $\frac{dx_1^m}{dp_1^0}$. Este es el llamado efecto sustitución, que como ya sabemos es definitivamente negativo, $\frac{dx_1^h}{dp_1^0} < 0$.[20]

Mientras que la segunda tasa de cambio que buscamos es,

$$\frac{dx_2^h}{dp_1^0} = \frac{\Delta_{12}^h}{\Delta^h} = -\frac{\Delta_{12}^h}{\frac{1}{\mu}\Delta} = -\frac{\left(\frac{1}{\mu^*}\right)^2 \Delta_{12}}{\frac{1}{\mu^*}\Delta} = -\frac{\frac{1}{\mu^*}\Delta_{12}}{\Delta} = -\frac{\lambda^*\Delta_{12}}{\Delta}$$

Y como ya se sabe que $\Delta_{12} < 0$, entonces se sigue que $\frac{dx_2^h}{dp_1^0} > 0$. Es decir, un aumento del precio de B_1 genera un descenso de la cantidad demandada de B_2. Esta relación inversa tiene que ver con la propiedad de monotonía de las preferencias, ya que de ella

18 El hessiano es negativo dado que ahora la optimización trata de hallar un mínimo. Así, desarrollando encontramos la relación entre los hessianos resultante de las condiciones de primer orden para $[P]$ y para $[D]$, $\Delta^h \equiv -\frac{1}{\mu}\left[2u_i^{12}p_1^0p_2^0 - u_i^{11}\left(p_2^0\right)^2 - u_i^{22}\left(p_1^0\right)^2\right] = -\frac{1}{\mu}\Delta < 0$.

19 Recuérdese que en equilibrio se cumple, $\lambda^* = \frac{u_i^1}{p_1^0}$ y $\frac{1}{\mu^*} = \frac{u_i^1}{p_1^0}$; por tanto, $\lambda^* = \frac{1}{\mu^*}$.

20 Esta tasa vendría a ser la pendiente de la demanda hicksiana evaluada en un equilibrio inicial.

depende que las curvas de indiferencia tengan pendiente negativa y por tanto se infiere el efecto sustitución para un nivel dado de utilidad, u_i^0.[21]

Finalmente, con la demanda hicksiana tenemos una primera aproximación de la descomposición del efecto de un cambio del precio de un bien sobre la cantidad demandada del mismo bien o de otro bien. Finalmente nos quedamos con,

$$\frac{dx_1^m}{dp_1^0} = -\frac{dx_1^h}{dp_1^0} - x_1^m \frac{dx_1^e}{dm_i^0} \quad \text{y} \quad \frac{dx_2^m}{dp_1^0} = \frac{dx_2^h}{dp_1^0} - x_2^m \frac{dx_2^e}{dm_i^0}$$

Que nos muestra cómo el efecto total de un cambio del precio se divide en dos componentes, el efecto sustitución y el efecto ingreso.[22] Ahora podemos representar gráficamente la demanda marshalliana así como la demanda hicksiana, para el caso en el que el bien B_1 es un bien inferior del subtipo (iii), donde $\left|\frac{\lambda^* \Delta_{11}}{\Delta}\right| = \left|\frac{x_1^* \Delta_{31}}{\Delta}\right|$. Recuérdese que para este caso, la tasa de cambio relevante es,

$$\frac{dx_1^m}{dp_1^0} = \overbrace{\frac{\lambda^* \Delta_{11}}{\Delta}}^{(-)} + \overbrace{\frac{x_1^m \Delta_{31}}{\Delta}}^{(+)} = 0$$

Para la construcción gráfica de este caso, asumiremos una situación inicial donde a un precio relativo de B_1 el consumidor consume una cantidad x_1^0 de B_1. Dado que en esta situación inicial, con su ingreso exógeno está maximizando la utilidad, el punto $\left(x_1^0, \frac{p_1^0}{p_2^0}\right)$ pertenece a la curva de demanda marshalliana. Sin embargo, en esta misma

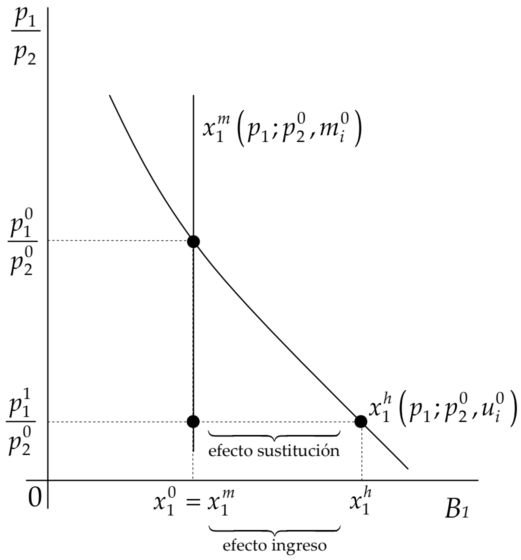
---

21 Sin embargo Becker tiene una postura diferente, pues señala: "*Hemos indicado que el teorema más importante en economía es que un incremento "puro" en el precio relativo (o en términos de intercambio) del bien X reducirá la cantidad demandada de X. Este teorema reaparece a través de la teoría económica bajo varios aspectos. Tradicionalmente, ha estado asociado con supuestos de comportamiento racional, ya que se derivó y se consideró la principal implicación del análisis de curvas de utilidad e indiferencia. Si n embargo, intentaré demostrar que igual que los efectos ingreso ya discutidos, se deriva básicamente de la escasez, y no de la racionalidad, y sostengo que es aplicable también para muchas clases de comportamiento*." Ver BECKER (1977: p. 33 – 34).

22 Otra forma de medir el efecto ingreso sería utilizando el método de Slutsky, que al fijar una canasta de consumo, entonces ya no se requiere del dual, sino se trabaja sobre el mismo primal, considerando el costo de la canasta inicial evaluada a los nuevos precios. Ver FRIEDMAN (*Ob. Cit.*: p. 65).

situación también podemos interpretar que su ingreso es a la vez un gasto mínimo que le permite alcanzar un nivel de utilidad dado, por lo que dicho punto $\left(x_1^0, \frac{p_1^0}{p_2^0}\right)$ también sería parte de la curva de demanda hicksiana. Así, en el caso de que B_1 es considerado por el consumidor como un bien inferior $\left|\frac{\lambda^* \Delta_{11}}{\Delta}\right| = \left|\frac{x_1^* \Delta_{31}}{\Delta}\right|$, el efecto ingreso es contrarresta totalmente al efecto sustitución, por lo que el efecto total es nulo.

Veamos gráficamente,



REFERENCIAS

[1] ÁVALOS, Eloy. (2010), *La teoría del consumidor: preferencias y utilidad*. Documento de Trabajo Nº 5. Lima: Centro de Investigaciones Económicas del Instituto de Estudios Sociales del Rímac.

[2] BECKER, Gary. (1977), *Teoría económica*. México: Fondo de Cultura Económica.

[3] FRIEDMAN, Milton, R. (1976), *Teoría de los precios*. Madrid: Alianza Editorial.

[4] HICKS, John. (1945), *Valor y capital. Investigación sobre algunos principios fundamentales de teoría económica*. México: Fondo de Cultura Económica.

[5] MADDEN, Paul. (1987), *Concavidad y optimización en microeconomía*. Madrid: Alianza Editorial.