Investors and managers relationship in investment funds industry

Yao, Jean-Marie

June 2006

Les relations investisseurs - Gérants dans l'industrie des fonds d'investissement

Juin 2006

Dans cette étude nous nous proposons de cerner l'impact du comportement des investisseurs sur les stratégies des firmes de fonds d'investissement. Dans un premier temps, nous définissons le profil idéal d'un investisseur potentiel en fonds en tenant compte de son aversion pour le risque. Nous présentons un modèle usuel à générations successives dans une économie ouverte pour caractériser les choix de ventilations de produits actifs risqués et actifs sans risques. Cette approche nous permettra de comprendre les stratégies de recherche de clientèle des firmes de fonds d'investissement. Dans un second temps, l'analyse des stratégies de différenciation nous permettra de comprendre le niveau de concurrence que se livrent les firmes localisées sur une place donnée. Nous cherchons à comprendre le niveau de différenciation dans la sélection de clientèle. Ce résultat devrait nous permettre de définir les conditions dans lesquelles les firmes privilégient une stratégie de différenciation maximale par rapport à leurs concurrentes.

Mots clés: Fonds d'investissement, investisseurs, manageurs, différenciation, économie spatiale.

JEL: L1, G2, H3

23emes journées internationales d'économie monétaire et bancaire (Lille, 22-23 Juin 2006)

1 Introduction

Une étude des attentes de la clientèle et de la concurrence que se livrent les firmes d'une industrie pour satisfaire cette clientèle est nécessaire à l'analyse de la concurrence au sein de ladite industrie. Il existe une littérature abondante portant sur les stratégies des investisseurs dans leur choix de produits. De plus, l'aversion pour le risque chez l'investisseur a fait l'objet de nombreuses recherches.

Dans le cadre d'une telle analyse, l'idée centrale est de déterminer un profil idéal de l'investisseur potentiel en fonds. En d'autres termes, comment ce dernier évalue-t-il son aversion pour le risque? Ainsi, supposons-nous que les firmes de fonds n'ont accès qu'à seulement deux types d'actifs. Alors que le rendement de l'actif sans risque peut baisser en fonction d'un paramètre lié à la réglementation, nous présumons que l'actif risqué correspond à un investissement dans le capital des entreprises.

En ce qui concerne les questions de concurrence spatiale sur les marchés, elles font aussi l'objet d'une abondante littérature ces dernières années. Dans les modèles d'économie spatiale, il convient de différencier d'un côté, les modèles unidimensionnels qui établissent une concurrence dans laquelle chaque firme est en concurrence directe avec ses deux seules voisines qui l'entourent[1]; et, de l'autre, les modèles de concurrence monopolistique[2] qui admettent le fait que la concurrence ne soit pas seulement globale mais aussi symétrique.

L'un des points centraux des questions de concurrence dite spatiale est d'expliquer le processus de différenciation sur les marchés. En évolution croissante, certains modèles de produits différenciés se situent aux croisements des modèles unidimensionnels et des modèles de concurrence monopolistique. On

[1] Voir [Liang & Weisbenner (2002)]

[1] *Modèles linéaire [Hotelling (1929)], circulaire [Salop (1979)] ou vertical [Gabszewicz and Thisse (1979)]*

[2] *[Chamberlin (1933)], [Spense (1976)], [Dixit and Stiglitz (1977)]*

citera par exemple Lancaster (?), Baumol (?) et Gorman (?) qui montrent avec une approche - demande que les produits rivalisent entre eux suivant plusieurs dimensions.

Dans les modèles de différenciation verticale, il est d'usage de faire une partition entre biens de haute qualité et biens de basse qualité. La littérature établit que les équilibres obtenus sont généralement asymétriques. Dans son modèle de différenciation avec concurrence en prix (?), Tirole conclut que la firme qui produit le bien de haute qualité obtient des revenus plus élevés que celle qui produit des biens de basse qualité. Ce résultat tient de la capacité des firmes à différencier leurs produits, mais aussi à l'hétérogénéité des préférences des consommateurs pour la qualité. Par ailleurs, cette même étude conclut que les firmes se différencient pour réduire la concurrence à certaines caractéristiques du marché.

Dans cet article, nous traitons de l'impact des choix des investisseurs sur les stratégies des managers de fonds. Dans une première section, nous supposons que les produits de fonds sont des arrangements de proportions entre actifs risqués et actifs sans risque. L'hypothèse d'ouverture de l'économie permettra de prendre en compte une mobilité parfaite des capitaux. Cette section présentera un modèle théorique qui aidera à déterminer les proportions d'actifs idéales pour l'investisseur, par l'étude de sa fonction d'utilité.

Dans une seconde section, nous décrivons un modèle de comportement des managers par la différenciation en produit. Nous y analysons le type de concurrence et le niveau de risque couvert par les fonds d'investissement afin de proposer un produit correspondant au mieux aux attentes des investisseurs. Une troisième section ébauchera le cas complexe des stratégies pures c'est-à-dire que les préférences des investisseurs sont fonctions du produit proposé. La dernière section résume l'article.

2 Les attentes de l'investisseur

Avec un modèle usuel à générations successives[3] dans une économie ouverte, nous caractérisons les ventilations de produits actifs risqués et actifs sans risque. Le choix de ce type de modèle est motivé par la prise en compte de l'horizon fini de l'investisseur. En étudiant ce dernier sur deux périodes de vie, nous pouvons prendre en compte le rendement de l'investissement.

Nous supposons dans ce modèle que les managers ne proposent que des produits mixtes (actifs risqués et actifs sans risque). Dans cette section, nous décrirons dans un premier temps, le modèle théorique de comportement des investisseurs. Par la suite, une modification de la fonction d'utilité des investisseurs nous permettra de cerner la détermination des proportions d'actifs.

2.1 Le modèle de comportement des investisseurs

Dans une économie ouverte composée d' investisseurs, de firmes de fonds et d' entreprises productrices, l'industrie étudiée (l'industrie de fonds d' investissement) propose des produits de fonds sur la place financière. Nous supposons que les produits commercialisés sont du même type (action, obligation, mixte....) ou de type analogue (mixte 50-50, mixte 20-80....). Cette hypothèse implique que les produits s'intéressent au même type d'investisseurs potentiels.

Les produits sont différenciés horizontalement par leur profil d'allocation de portefeuille (composition actifs sans risque / actifs risqués), et verticalement par le niveau de rentabilité espéré. Cette rentabilité est caractérisée par le niveau de risque sous-jacent qui influence les coûts de gestion.

Nous supposons que les firmes de fonds d'investissement ont accès à deux actifs. D'une part, elles peuvent utiliser un actif sans risque de rendement $r - \delta$ où r est le taux d'intérêt international. Une parfaite mobilité internationale des capitaux permet de garantir que le taux mondial s'impose donc à ce pays.

[3] [Debonneuil (2002)]

Afin de contrôler l'activité économique, un paramètre δ de baisse du rendement sans risque due à la réglementation est fixé. D'autre part, les firmes de fonds utilisent un actif risqué de rendement R qui correspond à un investissement dans le capital des entreprises du pays d'analyse.

Les managers de fonds, neutres au risque, proposent des produits mixtes (arrangements entre actifs risqués et actifs sans risque). Dans un premier temps, nous supposons que les caractéristiques de l'offre (coûts de production) et de la demande (fixation des commissions, droit d'entrée....) sont identiques, quel que soit le type de fonds[4].

Les investisseurs ont une aversion pour le risque et sont suivis sur deux périodes. Cela permet de prendre en compte leur horizon fini et d'expliquer le rendement de l'investissement. Ils choisissent le produit-fonds en fonction de sa ventilation actifs risqués et actifs sans risque.

En première période, l'investisseur dispose d'une allocation w qui correspond au salaire qu'il perçoit des entreprises du pays. Il la répartit en consommation et en investissement en fonds. En seconde période, l'investisseur ne vit que du revenu de ses investissements réalisés la période précédente. Il n'a plus de salaire et il n'investit plus.

2.2 La fonction d'utilité des investisseurs

Dans cette section, nous cherchons à caractériser le profil des investisseurs. Ce profil sera caractérisé, par la suite, comme variable continue et est le couple d'allocation actifs risqués et actifs non risqués du portefeuille optimal pour l'investisseur.

Une modification de la contrainte budgétaire des modèles à générations im-

[4] *Des caractéristiques différente en fonction du type de fonds alourdiraient inutilement l'analyse*

briquées nous permet de construire la matrice de contrainte budgétaire suivante:

$$\begin{cases} C_t = w_t - e_t \\ e_t = \alpha \ e_t + (1-\alpha) \ \ e_t \\ C_{t+1} = (1-f) \ \ e^{\tau} \ \ [\alpha \ e_t \ \ (1 + r \ - \delta) \ + e_t \ \ (1 \ - \alpha) \ \ (1 + \ R_{t+1})] \end{cases} \tag{1}$$

où

- C_t et C_{t+1} sont respectivement la consommation en première et seconde période;
- e_t est le niveau d'épargne. Nous supposons que l'épargne est intégralement investit dans des produits fonds;
- $\alpha \ e_t$ et $(1-\alpha) \ \ e_t$ sont respectivement les parts d'épargne investies dans l'actif sans risque (de rendement $r - \delta$) et dans le capital des entreprises (de rendement R_{t+1} entre t et $t+1$);
- τ est un paramètre d'actualisation;
- f est le taux de commissions payées;
- α peut être interprété, de part sa composition, comme une aversion au risque. En effet, l'investisseur fait sa répartition actifs sans risque / actifs risqués en fonction de son aversion au risque.

Hypothèse (H1) : nous supposons le taux de commissions exogène et identique quelque soit la ventilation du fonds.

En supposant que les entreprises de fonds sont neutres au risque avec une productivité des facteurs suivant une loi normale $A_{t+1} \to N \ \left(\bar{A}; \, \sigma^2\right)$. La contrainte budgétaire des investisseurs peut être exprimée sous la forme de l'équation (6a en Annexe 1):

$$\begin{cases} C_t = w_t - e_t \\ e_t = \alpha \; e_t + (1-\alpha) \;\; e_t \\ C_{t+1} = (1-f) \;\; e^{\tau} \;\; \left[\alpha \; e_t \, (1+r-\delta) + (1-\alpha) \;\; e_t \;\; \left(1 + r \; \frac{A_{t+1}}{\overline{A}}\right)\right] \\ \qquad\quad = e_t \;\; (1-f) \;\; e^{\tau} \;\; [\alpha \;\; (1+r-\delta) + (1-\alpha) \left(1 + r \; \frac{A_{t+1}}{\overline{A}}\right)] \end{cases} \tag{2}$$

Ensuite, nous cherchons à déterminer la combinaison idéale pour l'investisseur en étudiant son utilité. Afin d'avoir une concavité dans la fonction d'utilité des investisseurs, nous préférons une forme logarithmique. La fonction d'utilité de l'investisseur est donc de la forme (Annexe 2):

$$U_t = Ln\,(C_t) + \frac{1}{1+p} \; Ln\,(C_{t+1}) \tag{3}$$

Une approximation de l'espérance de cette fonction d'utilité est donnée par l' équation (11a de l'annexe 2) suivante:

$$\begin{aligned} E_t\,(U_t) \quad = \quad & Ln\,(w_t - e_t) + \frac{1}{1+p} \,[\; Ln[e_t \; e^{\tau} \, (1-f)] + \; Ln\,[1 + r - \delta \;\, \alpha]] \\ & - \frac{1}{1+p} \; \frac{\sigma^2}{2.\overline{A}^2} \; \frac{[r \;\; (1-\alpha)]^2}{[1 + r - \delta.\alpha]^2} \end{aligned} \tag{4}$$

Nous remarquons que la variabilité du rendement du capital de l'entreprise, σ^2, réduit l'espérance de l'utilité des investisseurs.

2.3 La détermination des proportions d'actifs

Les conditions de premier ordre appliquées à l'équation (4) montrent que :

$$\frac{\partial E_t\,(U_t)}{\partial e_t} = 0 \Leftrightarrow \quad e_t = \frac{w_t}{(2+p)} \tag{5}$$

Ainsi, comme dans tout modèle à générations imbriquées, on remarque que l' épargne totale croît avec le salaire, mais décroît avec la préférence pour le présent. Plus la préférence pour le présent est forte, plus le futur est dévalorisé. L'agent économique préfère consommer que de recourir aux fonds d'investissement. De plus, l'aversion au risque et la structure des marché n'influenceraient pas l'épargne-investissement.

Par ailleurs, en posant $\frac{\partial E_t(U_t)}{\partial \alpha} = 0$, nous trouvons deux expressions de α différentes en fonction du signe devant la racine. Toutefois l'on montre qu'il convient de sélectionner la formule ci-dessous:

$$\alpha = \frac{2\overline{A}^2 \sigma^2 \left[(1+r)\right] + r\ \sigma \left(1+r-\delta\right) \left[r\ \sigma + \sqrt{\left(2.\overline{A}.\delta\right)^2 + (r.\delta)^2}\right]}{2\overline{A}^2 \delta^3} \tag{6}$$

Nous en déduisons la répartition suivante:

$$\begin{cases} \text{Part de l'actif sans risque} = \alpha\ \frac{w_t}{(2+p)} \\ \text{Part de l'actif risqué} = (1-\alpha) \cdot \frac{w_t}{(2+p)} \end{cases} \tag{7}$$

$$\alpha = \frac{2\overline{A}^2 \sigma^2 \left[(1+r)\right] + r\ \sigma \left(1+r-\delta\right) \left[r\ \sigma + \sqrt{\left(2.\overline{A}.\delta\right)^2 + (r.\delta)^2}\right]}{2\overline{A}^2 \delta^3}$$

Finalement, la matrice de contrainte budgétaire (1) devient:

$$\begin{cases} C_t = \frac{p+1}{p+2}\ w_t \\ e_t = \alpha \frac{w_t}{(2+p)} + (1-\alpha)\ \frac{w_t}{(2+p)} \\ C_{t+1} = (1-f)\ e^{\tau}\ \left[\alpha \frac{w_t}{(2+p)} \left(1+r-\delta\right) + (1-\alpha)\ \frac{w_t}{(2+p)} \left(1 + r\frac{A_{t+1}}{\overline{A}}\right)\right] \\ \qquad = \frac{w_t}{(2+p)}\ e^{\tau}\ \ (1-f)\ \left[\alpha \left(1+r-\delta\right) + (1-\alpha) \left(1 + r\frac{A_{t+1}}{\overline{A}}\right)\right] \end{cases} \tag{8}$$

Une étude de la variation de l'équation (6) nous permet de tirer les conclusions suivantes :

1. La part d'investissement en actif sans risque :

   - croît avec r , le taux d'intérêt international applicable à l'actif sans risque; Ainsi, la bonne conjoncture économique internationale influence l'attrait aux actifs sans risque.

- croît avec σ^2, la variabilité du rendement de l'actif risqué. Nous en déduisons qu'une économie nationale peu soutenue conduit à une préférence pour l'actif non risqué d'où une forte exposition aux fluctuations économiques internationales.
- décroît avec δ, la perte de rendement sur l'actif sans risque; ce qui induit qu'une forte réglementation dans le cadre d'une petite économie ouverte concourt au renforcement de l'économie nationale, étant donné que l'investisseur va préférer l'actif risqué (sous jacent à un investissement dans les entreprises nationales) à l'actif sans risque.
- décroît avec $\overline{A}$, la valeur moyenne du progrès technique. Ainsi une anticipation d'évolution favorable de l'économie nationale conduit à une préférence pour les actifs risqués au détriment des actifs sans risque. Cela suppose aussi une parfaite information de l'investisseur; d'où la mise sur pied d'un service nationale fiable de régulation et d'étude économique.

2. La ventilation du portefeuille n'est pas influencée par:

   - f , les commissions payées;
   - τ , le taux d'actualisation

Pour la suite nous posons

$$\theta^m \equiv \left(\alpha.\frac{w_t}{2+p}\, ,\ (1-\alpha)\,.\frac{w_t}{2+p}\right)$$

θ^m étant le profil moyen idéal de l'investisseur.

Les firmes de fonds sont en concurrence pour proposer des produits qui correspondent au mieux aux attentes des investisseurs en proposant des rendements meilleurs. Cette quête du rendement induit une prise de risque de plus en plus importante en investissant dans le capital des entreprises qui est source de risque. Les attentes des investisseurs sont déterminées par leur profil dans l'allocation des actifs.

Dans la suite de l'article, nous supposons cette métrique comme variable continue. Elle détermine le profil d'un investisseur, en caractérisant le portefeuille optimal de son point de vue dans sa ventilation de portefeuille entre actifs sans risque et actifs risqués.

3 Le comportement des managers face aux attentes des investisseurs

Dans cette seconde section, nous développons un modèle ordinaire de concurrence pour l'analyse de la différenciation par le produit dans une industrie de fonds. Cela nous permettra de comprendre les comportements stratégiques des firmes de fonds dans leur recherche d'un rendement espéré meilleur. Supposant que la hausse du rendement espéré est source de risque, nous adoptons que le risque est caractérisé par un investissement dans le capital des entreprises.

Le but fondamental est de cerner les stratégies d'offre de produits. Nous présentons deux firmes de fonds d'investissement proposant le même type de produit (fonds mixtes obligations –actions, par exemple) sur un marché domestique donné. Il s'agit d'étudier les caractéristiques de la concurrence dans l'industrie des fonds. Dans cette section, nous présentons le modèle d'analyse permettant de trouver des équilibres en situation de concurrence, décrivant ainsi les différents niveaux de différenciation.

3.1 Le modèle de comportement des managers

Dans cette sous section, nous considérons une industrie nationale composée de deux firmes de fonds que nous nommerons A et B se partageant le marché. Chaque firme de fonds dispose d'une préférence pour un profil de produit; ce qui induit un coût de gestion sous-jacent à la gestion d'actifs risqués.

On supposera, d'une part, que le coût fixe C_f représente le coût de production d'un fonds exclusivement composé d'actifs sans risque et d'autres parts, que le coût variable correspond au coût de production inhérent à la détention d'un actif risqué dans le portefeuille. La détention d'actifs risqués nécessitant un investissement dans le capital des entreprises, nous établissons le coût variable comme fonction $C = g(A, k) = h(R)$.

La taille, N_p, du marché est constante. Les investisseurs se répartissent uniformément sur le segment $[0, 1]$. Un investisseur est identifié par son profil θ^m (qui représente la composition actifs risqués et actifs sans risque du portefeuille). Sa position sur le segment unitaire $[0, 1]$ traduit son aversion au risque.

Si aucun gérant de fonds ne lui propose son allocation de portefeuille préféré, l'investisseur se déplace sur le segment. Il renonce ainsi au portefeuille qu'il désire pour se contenter d'un autre plus proche de ses préférences. Il subit ainsi un coût de renonciation $d > 0$ pour un déplacement unitaire.

Le surplus brut d'un investisseur, lorsqu'il investit dans son type de portefeuille préféré, est égal à:

$$r - \delta + (1 - \eta) .R. \tag{9}$$

- $R = \varphi.A_{t+1}\, k_{t+1}^{\varphi-1} = r\, \frac{A_{t+1}}{\overline{A}}$
- $r - \delta$ est le surplus brut du portefeuille sans risque.
- $(1 - \eta) .R$ est le surplus brut associé au portefeuille risqué (contenant une part d'action)
- $0 < \eta < 1$ est le paramètre d'aversion pour le risque.

Hypothèse (H2) :$r - \delta > d > 0$. Cette hypothèse garantit que tous les investisseurs achètent des fonds d'investissement.

Les investisseurs évaluent de façon analogue leurs préférences pour les portefeuilles. Leur portefeuille moyen est défini par l'équation (7'). Le surplus brut est donc le même pour tous les investisseurs. Soit x_i et C_i respectivement, la part de marché et le coût d'investissement dans l'actif risqué de la firme i. Supposons (sans perte d'information) que les profils étant fixés, leur somme devrait couvrir l'intervalle unitaire, c'est-à-dire $\theta_i + \theta_j = 1$. Ainsi, soit θ_1 le profil de fonds dans la firme 1, celui de la firme 2 est donc $(1 - \theta_2)$

L'utilité de l'investisseur de type θ en firme i est

$$U(\theta^m, i) = \begin{cases} (1-f)(r-\delta) + (1-f)(1-\eta) R_2 - d(\theta^m - \theta_1)^2, \text{ si } i = 1 \\ (1-f)(r-\delta) + (1-f)(1-\eta) R_2 - d(\theta^m - (1-\theta_2))^2, \text{ si } i = 2 \end{cases} \tag{10}$$

Dans cette section nous ne prenons pas en compte la structure de ventilation admissible de l'investisseur. Notre objectif est de trouver une allocation (actifs sans risque, actifs risqués) pour un niveau d'investissement donné (de l'investisseur). Nous adoptons la trivialité que les portefeuilles risqués ont une plus forte espérance de rendement. Cependant, nous n'étudierons pas à ce stade la volatilité des investissements risqués.

Hypothèse H3 : les commissions sont perçues comme une proportion de l'intérêt de l'investisseur[5].

Le profit des firmes de fonds est essentiellement composé par les commissions perçues.

$$f = F(N_1, N_2) \tag{11}$$

où N_i représente la taille d'investisseurs successibles d'investir dans la firme i, le niveau de risque étant fixé.

Hypothèse H4 : la clientèle potentielle , N_p, est constante et tous les agents économiques sont investisseurs.

[5] *Limite sous-jacente: Les commissions varient en fonction de la différence entre les deux produits proposés par les firmes, de la différence entre chacun de ces produits, du produit idéal de l'investisseur et du coût de renonciation.* $f = 1 + \frac{d\ [\theta_1 - (1-\theta_2][(\theta^m - \theta_1) + (\theta^m - (1-\theta_1)\ ]}{(1-\eta)\ (R_1 - R_2).}$

Hypothèse H5: le taux de commissions payées par un investisseur, f^*, est exogène et constant.

Cela suppose que les investisseurs ont tous le même "intérêt" pour les fonds[6]. La valeur des commissions perçues à l'équilibre, f^*, reste constante et égale à $f^* = F\ (N_p)$.

On suppose ici que les firmes établissent des allocations contenant des actifs risqués afin de maximiser leur profit. Le profit de la firme i est:

$$\Pi_i\left(x_i, R_i\right) = f^* N_p\ x_i - C_i - C_f \tag{12}$$

Avec x_i la part de marché.

3.2 Concurrence et niveau de risque

Nous considérons le développement du modèle par deux niveaux de jeu :

• Etape 1 : les gérants choisissent le profil du produit qu'ils vont proposer.

• Etape 2 : étant donné les différents produits, les firmes décident simultanément le montant d'investissement en production.

Logiquement, l'investisseur a quatre choix :

1. Ne pas investir si $U\left(\theta^m, i\right) < 0$

   $\Rightarrow$ Impossible compte tenu de l'analyse H 2)

2. Investir seulement dans la firme 1 si et seulement si $U\left(\theta^m, 1\right) > U\ \left(\theta^m, 2\right)$

   $\Rightarrow (1-f)\,(1-\eta)\,R_1 - d\left(1-\ \theta^m-\theta_1\right)^2 > (1-f)\,(1-\eta)\,R_2 - d\left(1-\theta^m\ -\theta_1\right)^2$

3. Investir seulement dans la firme 2 si et seulement si $U\left(\theta^m, 1\right) < U\left(\theta^m, 2\right)$

   $\Rightarrow (1-f)\,(1-\eta)\,R_1 - d\left(1\ -\ \theta^m-\theta_1\right)^2 > (1-f)\,(1-\eta)\,R_2 - d\left(1-\theta^m-\theta_1\right)^2$

4. Investir simultanément dans les deux firmes si et seulement si

[6] On pourrait aussi considérer que la fixation des commissions est globalement dépendante de l'horizon d'investissement et du niveau d'actifs investis.

$U\left(\theta^{m},\,1,\,2\right) > Max\left[U\left(\theta^{m},\,i\right)\right]$

$\Rightarrow$Restriction est faite pour n'investir que dans un seul fonds à la fois :

Soit $\theta^{*} \in [0,1]$ le profil du produit proposé

Si $\theta^{m} > \theta^{*}$, les investisseurs investissent dans la firme 2

Si $\theta^{m} < \theta^{*}$, les investisseurs investissent dans la firme 1

$U\left(\theta,\,1\right) = U\left(\theta,\,2\,\right) \qquad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta^{*} = \left(\frac{1-\theta_2+\theta_1}{2}\right) + \left(\frac{(1-\eta)\,(1-f)\,.\,(R_1-R_2)}{2d\,(1-\theta_2-\theta_1)}\right) \\ x_2 &= 1-a_1 = \left(\frac{1-\theta_1+\theta_2}{2}\right) + \left(\frac{(1-\eta)\,(1-f)\,(R_2-R_1)}{2\,d\,(1-\theta_1-\theta_2)}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

En égalisant l'utilité de consommation chez l'une ou l'autre des firmes, nous déterminons les parts de marchés respectives de chacune des firmes

$U\left(\theta^{m},\,1\right) = U\left(\theta^{m},\,2\,\right) \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta^{*} = \left(\frac{1-\theta_2+\theta_1}{2}\right) + \left(\frac{(1-\eta)\,(1-f)\,.\,(R_1-R_2)}{2d\,(1-\theta_2-\theta_1)}\right) \\ x_2 &= 1-x_1 = \left(\frac{1-\theta_1+\theta_2}{2}\right) + \left(\frac{(1-\eta)\,(1-f)\,(R_2-R_1)}{2\,d\,(1-\theta_1-\theta_2)}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

Résultat : En posant $\lambda = (1-\theta_2) - \theta_1$, la différence de profil entre les deux firmes dans l'expression (13), la part de marché de la firme i peut aussi s'écrire sous la forme suivante:

$$x_i = \theta_i + \frac{\lambda}{2} + \left(\frac{(1-\eta)\,(1-f)\,(R_i-R_j)}{2\,d\lambda}\right) \quad i,j=1,2\ \ et\ i\neq j \tag{15}$$

Cette nouvelle matrice de parts de marché nous permet de faire le commentaire suivant

1. Le premier terme garantit que la taille de clientèle potentielle dans la firme i est $\theta_i\ N_p$;

2. Le second terme montre que les firmes se partagent de façon équitable la clientèle comprise entre elles:
3. Le troisième terme montre que la taille de la clientèle est fonction des niveaux relatifs d'investissement en actifs risqués et des commissions perçues. Ce terme permet de déplacer la clientèle vers la firme proposant le meilleur rendement espéré avec le minimum de commissions.

3.3 La recherche d'équilibres de Nash

Pour la suite, il convient de maximiser la fonction de profit (11)
$f^* N_p \, x_i - C_i - C_f$

$$Max_{C_i} \; [f^* N_p \, x_i \; - \; C_i - C_f] \tag{16}$$

Afin de garantir la concavité de la fonction de profit en C_i, nous faisons l'hypothèse suivante : $R_i = C_i^{\phi}$

L'équation (11) devient :

$$f^* N_p \left[\theta_i + \frac{\lambda}{2} + \left(\frac{(1-\eta)\;(1-f)\left(C_i^{\phi} - C_j^{\phi}\right)}{2.d.\lambda} \right) \right] - C_i - C_f \tag{17}$$

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial C_i} = f^*.N_p. \left(\frac{\phi \; (1-\eta) \; (1-f) \, C_i^{\phi-1}}{2.d.\lambda} \right) - 1$$

$$\left[\frac{\partial \left[f^* N_p . x_i - C_i - C_f \right]}{\partial C_i} \right] = 0 \Leftrightarrow f^*.N_p. \left(\frac{\phi \, (1-\eta) \, (1-f) \, .C_i^{\phi-1}}{2.d.\lambda} \right) - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \hat{C} &= \left[\frac{2.d.\lambda}{\phi f^* N_p \, (1-\eta) \, (1-f^*)} \right]^{\frac{1}{\phi-1}} \\ & \text{et} \\ \hat{R} &= \left[\frac{2.d.\lambda}{\phi f^* N_p \; (1-\eta) \; (1-f^*)} \right]^{\frac{\phi}{\phi-1}} \qquad 0 < \phi < 1 \end{aligned} \tag{18}$$

De par sa formulation, la fonction de profit est concave en C_i. Elle atteint donc son maximum en $\hat{C}_i$ d'où en $\hat{R}_i$. Ainsi, aucune firme n'augmente son profit en augmentant ou en diminuant la part d'actifs risqués dans son portefeuille.

Résultat : la stratégie $(R_1^*, R_2^*) = \left(\hat{R}_1, \hat{R}_2\right)$ est un équilibre de Nash unique.

Ainsi, la part des actifs risqués à l'équilibre de sous-jeu ne dépend pas réellement de la composition du portefeuille de chacune des firmes, mais de la différence existant entre les portefeuilles.

Aussi, l'impact de l'augmentation du coût variable, donc de la part des actifs risqués est-elle identique quelle que soit la taille de la clientèle potentielle θ_i. Chacune des firmes attire la partie de la clientèle intermédiaire comprise entre elles, sans que cette recherche de clientèle n'engendre d'externalités négatives sur sa clientèle potentielle.

Nous trouvons que pour une allocation de portefeuille donnée, la part de l'actif risqué croît avec :

- Les commissions payées, f^* (jusqu'à $f^* = 0.5$) puis décroît; mais, logiquement, les taux de commissions n'atteignent pas ce niveau);
- Le coefficient de production ϕ (croissance monotone);
- La taille du marché N_p.

On a R qui suit une loi normale. En effet $A_{t+1} \rightarrow N\left(\bar{A}; \sigma^2\right)$ et $R = r.\frac{A_{t+1}}{\bar{A}}$

De plus, pour une allocation de portefeuille donnée, la part de l'actif risqué est décroissante avec :

- le degré d'aversion au risque, η, des investisseurs (trivialité);
- le coût de renonciation, d, des investisseurs (les investisseurs se contentent facilement d'un produit donné);

- le degré de différenciation, λ , des firmes.

Cette sous-section conduit aux résultats suivants :

1. La concurrence entre les deux firmes de fonds dépend uniquement de la composition des portefeuilles.
2. La concurrence est d'autant plus importante que la composition du portefeuille est un élément primordial pour les choix des investisseurs. Si les firmes sont peu différenciées, elles ont de plus en plus tendance à prendre des risques sur le marché d'actifs risqués.
3. Il existe un équilibre de Nash unique au sous-jeu d'accès au "marché risqué". Dans ce cas, les deux firmes réalisent des investissements en actifs risqués identiques.

4 La différence de profils

Dans cette sous section, nous considérons l'étape 1 du jeu. Ainsi, les firmes de fonds adoptent des allocations des portefeuilles qu'elles vont commercialiser. Nous supposons que la firme i maximise son profit en fonction de son θ_i et de celui de sa concurrente. Les firmes évaluent leur profit respectif en anticipant l'étape 2 du jeu.

On montre (Annexe 5) que

$$\lambda^* = \left[\frac{N_p.f^*.(1-\phi)}{2} \left[\frac{2.d}{\phi.(1-f^*).(1-\eta).N_p.f^*} \right]^{\phi-1} \right]^{\left(\frac{\phi-1}{2-\phi}\right)} \tag{19}$$

Quelle que soit la variation des premiers paramètres, on montre que la valeur de λ^* a une décroissance monotone[7] en N_p. Elle décroît aussi avec le taux des commissions jusqu'à une valeur $f^* \geq 80\%$. Nous n'étudierons donc pas ce cas de figure vu qu'aucun fonds ne fixera des commissions de cet ordre.

[7] Toutefois, il existe un entassement en fonction de la valeur de la clientèle potentielle

On en déduit le comportement des firmes de fonds selon le schéma suivant:

1) Si $\lambda^* = 1$ cela suppose que $\theta_i^* + \theta_j^* = 0$. Etant sur un intervalle unitaire, cela suppose que $\left(\theta_i^*, \theta_j^*\right) = (0,0)$. La solution optimale[8] veut que les firmes choisissent des allocations extrêmes. Dans ce cas, la différenciation entre les deux firmes est maximale. Le coût de gestion des investissements risqués, respectivement le rendement de ces investissement est à l'équilibre égal à:

$$\begin{aligned} \hat{C}_{(\lambda=1)} &= \left[\frac{2.d}{\phi.f^*.N_p.(1-\eta).(1-f^*)}\right]^{\frac{1}{\phi-1}} \\ &\text{et} \\ \hat{R}_{(\lambda=1)} &= \left[\frac{2.d}{\phi.f^*.N_p.(1-\eta).(1-f^*)}\right]^{\frac{\phi}{\phi-1}} \end{aligned} \tag{20}$$

Les firmes se placent ainsi aux extrémités de l'intervalle. Leur clientèle est simplement déterminée en fonction des goûts[9] des investisseurs. Les parts de marché sont de la forme :

$$x_{i_{(\lambda=1)}} = \theta_i + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \tag{21}$$

Il s'agit d'un équilibre de Nash. La fonction de profit, dans ce cas, se présente sous la forme:

$$\Pi^*_{i,(\lambda=1)} = \frac{N_p.f^*}{2} - \hat{C}_{\lambda=1} - C_f \tag{22}$$

2) Si $\lambda^* = 0$, cela équivaut à $\theta_i = 1 - \theta_j$. Intuitivement, lorsque $\lambda^* \to 0$, les firmes se rapprochent l'une de l'autre. Le profil optimal devrait être le milieu de notre segment, ce qui suppose que $\theta_i = \theta_j = \frac{1}{2}$. On définit donc l'intervalle de variation de $\theta_i \in [0.5 - \lambda^*, 0.5]$ lorsque $\lambda^* \to 0$. Dans ce cas, l'envergure de la différenciation devient de plus en plus petite. Chacune des firmes tente de proposer le même produit que sa concurrente.

A l'équilibre, la part de marché est donc de $x_i = \frac{1}{2}$. On trouve que la part des investissements risqués tend aussi vers 0. Ainsi, les fonds d'investissement

[8] *Il est possible d'étudier le cas où $\lambda^* > 1$. Normalement, cela suppose que la fonction de λ^* n'a pas de solution, vu que* $\mathbf{0}<\lambda^*<1$

[9] *Ces goûts sont considérés exogènes à ce stade de l'analyse*

se contenteront, de plus en plus, de ne commercialiser que des produits exclusivement non risqués. On démontre que le profit des fonds, dans ce cas, est de la forme :

$$\Pi^*_{(\lambda=0)} = \frac{f^* N_p}{2} - C_f \tag{23}$$

3) Si $0 < \lambda^* < 1$, la condition d'équilibre de l'équation de λ^* est $\theta_2 = 1 - \lambda^* - \theta_1$. Il existe une infinité de (θ_1, θ_2) vérifiant la condition. Nous étudions les trois cas de figures suivants :

a) Supposons $\lambda^* = 1/2$*,* le couple $(\theta_1, \theta_2) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, vérifie la condition d'équilibre. On montre qu'il s'agit d'un équilibre de Nash.

b) *Supposons* $\lambda^* < 1/2$*,* la position $(0, \lambda^*)$ vérifie la condition d'équilibre. Mais la firme 2 peut avoir un meilleur profit en proposant des profils plus "grands" avec $0 < \theta_2 < 1/2$. Cet équilibre n'est donc pas un équilibre de Nash.

On établit donc que (θ_1^*, θ_2^*) est un équilibre de Nash ($\lambda^* < 1/2$) si $\theta_2^* = 1 - \lambda^* - \theta_1^*$ et $\frac{1}{2} - \lambda^* < \theta_i^* < \frac{1}{2} + \lambda^* \ \nabla \ i = 1, 2$

c) Supposons $\lambda^* > 1/2$ Les couples vérifiant $\theta_2^* = 1 - \lambda^* - \theta_1^*$ sont des équilibres de Nash du jeu. On a

$\frac{1}{2} - \lambda^* < \theta_2^* < \frac{1}{2} + \lambda^*$or $\theta_2^* = 1 - \lambda^* - \theta_1^*$

$\frac{1}{2} - \lambda^* < \theta_1^* + \lambda^* < \frac{1}{2} + \lambda^* \Rightarrow \theta_1^* < \frac{1}{2}$

donc $\frac{1}{2} - \lambda^* < \theta_i^* < \frac{1}{2}$

Ainsi, si (θ_1^*, θ_2^*) est un équilibre de Nash du jeu tel que $\theta_i^* < 1 - \theta_j^*$, alors $\theta_i^* \in [0.5 - \lambda^*, 0.5]$ pour $i = 1, 2$ et $0 < \lambda^* < 1$. La part de marché de chacune des firmes de fonds est de la forme $x_i = \theta_2^* + \frac{\lambda}{2}$. Le coût de gestion inhérent et le rendement de l'investissement risqué à l'équilibre dans ce cas est:

$$C^*_{0<\lambda^*<1} = \frac{f^*.Np}{2}.\lambda^* (1-\phi) \text{ et } R^*_{0<\lambda^*<1} = \left[\frac{f^*.Np}{2}.\lambda^* (1-\phi)\right]^{\phi} \tag{24}$$

Les firmes réalisent des investissements risqués identiques. Et, elles se répartissent un profit total de $f^{*}.Np - C^{*}_{0<\lambda^{*}<1} \; - \; C_{f}$ en fonction de leurs parts de marché respectives. Le profit de chacune des firmes est:

$$\Pi_{i} = f^{*}.Np. \left[\theta_{i}^{*} + \frac{(\phi - 1)\ \lambda^{*}}{2} \right] - C_{f} \tag{25}$$

Résultat : la détermination de l'équilibre de Nash du jeu dépend du degré de différenciation λ^{*}

(1) Lorsque $\lambda^{*} \to 0$, il existe un équilibre de Nash unique tel que la différenciation est minimale. Les firmes se positionnent au centre de l'axe de différenciation et n'investissent pas dans le capital des entreprises. Elles commercialisent des fonds exclusivement composés d'actifs sans risque.

(2) Lorsque $\lambda^{*} = 1$, il existe un équilibre de Nash unique tel que la différenciation entre les portefeuilles est maximale. Les firmes de fonds se positionnent aux deux extrémités de l'axe de différenciation; $\left(\theta_{i}^{*}, \theta_{j}^{*}\right) \in \{(0,1), (1,0)\}$

(3) Lorsque $0 < \lambda^{*} < 1$, la différenciation devient difficile à cerner. Il existe une infinité d'équilibre de Nash $(\theta_{1}^{*}, \theta_{2}^{*})$ tels que les firmes sont distantes de λ^{*}et $\theta_{i}^{*} \in [0.5 - \lambda^{*}, 0.5]$ pour $i = 1$, 2.

Nous avons un équilibre symétrique; cela s'explique par l'hypothèse de départ qui veut que les investisseurs aient la même préférence pour le rendement.

Ainsi, on montre que la différenciation des profils d'allocation à l'équilibre, λ^{*}, est d'autant plus grande que :

- le taux des commissions, f^{*}, est grand;
- la taille de la clientèle, N_{p} est grande;
- le coût de renonciation au profil idéal, d , est faible;

- l'aversion au risque , η, est faible.

Résultat : la différenciation des profils est d'autant plus grande que la concurrence est intense. On remarque, à l'instar des modèles de concurrence en prix [Tirole (1998)], que l'incitation à proposer des produits semblables est constante, alors que la tendance à la différenciation maximale dépend des paramètres du modèle.

En effet, lorsque les commissions, f^*, la clientèle potentielle, N_p et l'aversion au risque, η, augmentent ou lorsque le coût de renonciation, d, diminue, la concurrence s'intensifie. Cela renforce ainsi l'effet de différenciation et accentue la concurrence sur le marché.

De plus, la quête d'actifs risqués est d'autant plus grande que les profils d' allocation sont fortement différenciés. En effet, lorsque $0 < \lambda^* < 1$, le coût et le rendement de l'investissement risqué à l'équilibre sont :

$$C^*_{[0<\lambda^*<1]} = \frac{f^*.N_p}{2}\lambda^*\left(1-\phi\right) \quad \text{et} \quad R^*_{[0<\lambda^*<1]} = \left[\frac{f^*N_p}{2}\lambda^*\left(1-\phi\right)\right]^{\phi} \qquad (26)$$

Ainsi, une offre de fonds variée traduit un accroissement du recours aux actifs risqués. Paradoxalement, deux stratégies d'allocations homogènes présentent un faible recours au capital des entreprises.

A l'équilibre, le profit des firmes décroît avec la forte différenciation. Pour une firme $i = 1, 2$, le profit à l'équilibre est égal à

$$\Pi_i = \begin{cases} \frac{f^* x_p}{2} - C^*_{[\lambda=1]} - C_f & \text{Si } \lambda^* = 1 \\ f^*.Np.\left[\theta^*_i + \frac{(\phi-1)\lambda^*}{2}\right] - C_f & \text{Si } 0 < \lambda^* < 1 \end{cases} \qquad (27)$$
$$\text{avec } \theta^*_i \in [0.5 - \lambda^*, 0.5]$$

Avec cette équation, on remarque qu'une concurrence accrue pour conquérir des investisseurs potentiels (mais réticents) oblige les manageurs à dépenser une partie non négligeable des ressources que cette clientèle pourrait leur apporter. Nous constatons que le niveau d'utilisation de ces ressources s'accentue avec le niveau de différenciation.

Il est vrai que la différenciation permet d'atténuer la concurrence en rentabilité. Une situation de faible concurrence est décrite lorsque les offres sont peu différenciées. La concurrence s'accentue avec la différenciation des produits. Par conséquent, pour obtenir une bonne différenciation, le manager a de plus en plus souvent recours aux actifs risqués. L'étude présente est faite dans le cadre de firmes symétriques [10] . Comment le comportement en situation asymétrique se traduit-il? On citera par exemple le cas où le taux de commissions est plus élevé pour l'une des firmes.

5 L'équilibre en stratégie pure

Dans la section précédente, nous supposions que la préférence des investisseurs est indépendante du profil, θ, du portefeuille commercialisé. Dans certains contextes, il peut être plus réaliste de supposer qu'elle soit une fonction monotone en θ (ou que le coût de la rentabilité est une fonction monotone de θ).

Supposons, par exemple, que l'utilité d'un investisseur de profil θ^m qui investit dans le fonds i s'écrive sous la forme :

$$U(\theta^m, i) = \begin{cases} (1-f)(r-\delta) + (1-f)(1-\eta)\theta_1 R_1 - d(\theta^m - \theta_1)^2 \text{ si } i = 1 \\ (1-f)(r-\delta) + (1-f)(1-\eta)(1-\theta_2) R_2 - d(\theta^m - (1-\theta_2))^2 \text{ si } i = 2 \end{cases} \tag{28}$$

On montre que $U(\theta^m, 1) = U(\theta^m, 2) \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = \theta_1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{(1-\eta)(1-f)\ (\theta_1 R_1 - (1-\theta_2) R_2)}{2.d.\lambda} \\ x_2 = \theta_2 + \frac{\lambda}{2} + \frac{(1-\eta)(1-f)\ ((1-\theta_2)\ R_2 - \ \theta_1 R_1)}{2.d.\lambda} \end{cases} \tag{29}$$

$$\Pi^1 = f^*.N_p.\left(\theta_1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{(1-\eta)\left[\theta_1.C_1^\phi - (1-\theta_2).C_2^\phi\right]}{2.d.\lambda}\right) - C_1 - C_f$$

[10] *Voir* [Dixit and Stiglitz (1977)]

$$\Pi^2 = f^*.N_p.\left(\theta_1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{(1-\eta)(1-f).\left[(1-\theta_2)\,C_2^{\phi} - \theta_1 C_1^{\phi}\right]}{2.d.\lambda}\right) - C_1 - C_f$$

$$\frac{\partial \Pi^i}{\partial C_1} = f^*.N_p \frac{(1-\eta).\phi.\theta_1.C_1^{\phi-1}}{2.d.\lambda} - 1$$

$$\frac{\partial \Pi^i}{\partial C_2} = f^*.N_p.\frac{(1-\eta).\phi.(1-f).(1-\theta_2).C_2^{\phi-1}}{2.d.\lambda} - 1$$

De façon analogue, à la section 3, on démontre qu'à l'équilibre, les coûts d' investissement en capital à l'étape 2 du jeu sont :

$$\frac{\partial \Pi^i}{\partial C_1} = 0 \Rightarrow C_1^* = \left[\frac{2\,d\,\lambda}{(1-\eta)\,\phi\,.(1-\ f^*)\,.f^*.N_p\theta_1}\right]^{\frac{1}{\phi-1}} \qquad (30)$$

$$\frac{\partial \Pi^i}{\partial C_2} = 0 \Rightarrow C_2^* = \left[\frac{2\ .d\ .\lambda}{(1-\eta)\,\phi\,.(1-f^*)\ f^* N_p.(1-\theta_2)}\right]^{\frac{1}{\phi-1}} \qquad (31)$$

Résultat: dans ce résultat, l'investissement risqué dépend à la fois du profil et de la différence de profils entre les produits. Ainsi, l'augmentation de l'investissement dans le capital des entreprises est motivée par le niveau élevé du profil de portefeuille recherché.

On remarque que :

$$C_1^* = C_2^* \left[\frac{\theta_1}{(1-\theta_2)\,.}\right]^{\frac{1}{\phi-1}} \qquad (32)$$

On montre que $\frac{\partial\, C_1^*}{\partial \theta_1} > 0$ et $\frac{\partial^2 C_1^*}{\partial \theta_1 \partial \theta_1} > 0$. De plus, par hypothèse, $\theta_1 < 1 - \theta_2$, alors $C_2^* > C_1^*$.

Compte tenu de la relation existante entre les différents coûts d'investissement risqués, on en déduit qu'il n'existe pas d'équilibre en stratégies pures. L'intuition sous-jacente est que si la firme veut proposer des produits de meilleur rendement que sa concurrente, il lui est plus avantageux de proposer les mêmes produits que sa concurrente.

6 Conclusion

Nous trouvons, à l'instar des modèles à générations imbriquées, que la décision d'investir est une fonction croissante du revenu-salaire de l'individu et fonction décroissante de la préférence pour le présent. De plus, l'aversion pour le risque est une fonction croissante de la variabilité de la productivité des entreprises de l'économie et fonction décroissante de la perte de rendement sur l'actif sans risque due à la réglementation de l'activité.

Nous déterminons ainsi un profil idéal d'allocation de portefeuille chez l' investisseur. Sa limite fondamentale est que la décision d'investissement dans un fonds ne soit pas fonction du niveau des commissions payées par l'investisseur. Le manager fixe les niveaux de commissions que l' investisseur accepte comme données.

Il existe un équilibre de Nash dans le cas où les firmes proposent deux produits identiques. Dans ce cas, les firmes ne commercialisent que des fonds exclusivement constitués d'actifs sans risque.

De plus, dans le cas où les firmes proposent des produits totalement différents, il existe aussi un équilibre de Nash. En accord avec la littérature, on parlera de différenciation maximale. Les firmes se positionnent ainsi aux extrémités de l'axe de différenciation. Le cas le plus révélateur est celui où l'une des firmes offre un produit exclusivement composé d'actifs risqués et l'autre un produit exclusivement composé d'actifs sans risque.

7 Annexe

Annexe 1: Les entreprises de fonds d'investissement

Les entreprises sont neutres au risque et leur fonction de production est donnée par

$$Y_{t+1} = A_{t+1}\, k_{t+1}^{\phi} \quad \text{avec} \quad 0 < \phi < 1 \tag{1a}$$

- Y est la production par tête;
- A est la productivité globale des facteurs;
- k est le capital par tête;
- t est le facteur temporel.

L'investissement dans le capital des entreprises étant source de risque, nous supposons que cela est induit par l'aléa sous-tendant la productivité globale des facteurs. Pour cela, nous faisons l'hypothèse de normalité de la productivité globale des facteurs Ainsi $A_{t+1} \rightarrow N\left(\overline{A}; \sigma^2\right)$.

Acceptant l'hypothèse de neutralité au risque, il est possible d'égaliser la productivité marginale anticipée au taux d'intérêt international. On a donc :

$$\phi \overline{A}\, k_{t+1}^{\phi-1} = r \tag{2a}$$

De plus, à capital bien déterminé, en $t+1$, la valeur A_{t+1} du progrès technique est atteinte. Il est donc possible d'égaliser le salaire à la productivité marginale du travail. On obtient ainsi :

$$w_{t+1} = (1 - \phi) \;\; A_{t+1}\, k_{t+1}^{\phi-1} \tag{3a}$$

Le profit de l'entreprise est de la forme suivante :

$$\Pi_{t+1} = \phi\, A_{t+1}\, k_{t+1}^{\phi-1} \tag{4a}$$

L'agent ayant investi $(1-\alpha)\ e_t$ dans le capital des entreprises en t, obtient en $t+1$ une fraction $\frac{(1-\alpha)\ e_t}{k_t}$du profit, c'est-à-dire $(1-\alpha)\ e_t\left(1+\phi\ A_{t+1}\ k_{t+1}^{\phi-1}\right)$. On déduit ainsi le rendement R_{t+1} de l'épargne $(1-\alpha)\,e_t$ investi dans le capital des entreprises

$$R_{t+1} = \ \phi A_{t+1} k_{t+1}^{\phi-1} = r\frac{A_{t+1}}{\overline{A}} \tag{5a}$$

Acceptant l'équation (5a), la matrice de contrainte budgétaire (1) devient :

$$\left\{\begin{array}{l} C_t = w_t - e_t \\ e_t = \alpha e_t + (1-\alpha)\,e_t \\ C_{t+1} = (1-f)\,.e^{\tau}.\left[\alpha e_t\,(1+r-\delta) + (1-\alpha)\,e_t\left(1+r\frac{A_{t+1}}{\overline{A}}\right)\right] \\ \qquad = e_t.\,(1-f)\,.e^{\tau}.[\alpha\,(1+r-\delta) + (1-\alpha)\left(1+r\frac{A_{t+1}}{\overline{A}}\right)] \end{array}\right. \tag{6a}$$

Annexe 2 : une approximation de l'utilité des investisseurs

Prendre une forme logarithmique de la fonction d'utilité des investisseurs permet d'avoir une concavité de celle-ci. Comme il est de coutume dans les modèles à générations successives, nous incorporons un paramètre p pour caractériser la préférence pour le présent. La fonction d'utilité de l'investisseur est ainsi de la forme :

$$U_t = Ln\,(C_t) + \frac{1}{1+p}\,.Ln\,(C_{t+1}) \tag{7a}$$

$$U_t = Ln\,(w_t - e_t) + \frac{1}{1+p}\,.Ln\left[e_t.\,(1-f)\,.e^{\tau}.[\alpha\,(1+r-\delta) + (1-\alpha)\,.\left(1+r\frac{A_{t+1}}{\overline{A}}\right)]\right]$$

$$\begin{aligned} U_t \quad = \quad & \frac{1}{1+p}Ln\left[\alpha\,(1+r-\delta) + (1-\alpha)\left(1+r\frac{A_{t+1}}{\overline{A}}\right)\right] \\ & \frac{1}{1+p}.Ln[e_t.e^{\tau}\,(1-f)] + Ln\,(w_t - e_t) \end{aligned} \tag{8a}$$

La productivité globale des facteurs dans la consommation de seconde période suivant une loi normale, un moyen pour la faire ressortir est de procéder à un développement limité. Le développement limité d'ordre 2 au voisinage de $\overline{A}$ permet de trouver un multiplicateur $\left(A-\overline{A}\right)^2$dont l'espérance mathématique correspond à la variabilité σ^2 de la productivité du capital des entreprises.

Soit C'_{t+1}, le développement limité d'ordre 2 de la consommation de seconde période au voisinage de $\overline{A}$; et, soit $E_t\left(C'_{t+1}\right)$l'espérance mathématique de C'_{t+1}

$$\begin{aligned} C'_{t+1} &= Ln[e_t.e^{\tau}.\left(1-f\right)] + Ln\left[1+r-\delta.\alpha\right] \\ &+ \left(A-\overline{A}\right)\frac{\left(1-\alpha\right).r}{\left[1+r-\delta.\alpha\right]} - \frac{\left(A-\overline{A}\right)^2}{2.\overline{A}^2}.\frac{\left[r.\left(1-\alpha\right)\right]^2}{\left[1+r-\delta.\alpha\right]^2} \end{aligned} \tag{34}$$

$$E_t\left(C'_{t+1}\right) = Ln[e_t.e^{\tau}.\left(1-f\right)] + Ln\left[1+r-\delta.\alpha\right] - \frac{\sigma^2}{2.\overline{A}^2}\frac{\left[r\left(1-\alpha\right)\right]^2}{\left[1+r-\delta.\alpha\right]^2} \tag{10a}$$

Soit $E_t\left(U_t\right)$l'espérance de l'utilité en prenant en compte la linéarisation de C_{t+1}, la consommation en seconde période.

$$\begin{aligned} E_t\left(U_t\right) &= \frac{1}{1+p}Ln[e_t.e^{\tau}.\left(1-f\right)] + \frac{1}{1+p}.Ln\left[1+r-\delta.\alpha\right] \\ &- \frac{1}{1+p}.\frac{\sigma^2}{2.\overline{A}^2}.\frac{\left[r.\left(1-\alpha\right)\right]^2}{\left[1+r-\delta.\alpha\right]^2} + Ln\left(w_t-e_t\right) \end{aligned} \tag{11a}$$

Annexe 3 : la détermination des proportions d'actifs

Afin de déterminer e_t et α, nous cherchons les conditions de premier ordre de l'espérance de la fonction d'utilité $\left(U_t\right)$

$$\frac{\partial E_t\left(U_t\right)}{\partial e_t} = \frac{-1}{w_t-e_t} + \frac{1}{(1+p).e_t} \tag{12a}$$

$$\frac{\partial E_t\left(U_t\right)}{\partial \alpha} = \frac{1}{1+p}\left[\frac{-\delta}{\left[1+r-\alpha.\delta\right]}\right] + \frac{1}{1+p}\left[\left(\frac{r}{\overline{\overline{A}}}.\sigma\right)^2\frac{\left[\left(\alpha-1\right)\left(1+r-\delta\right)\right]}{\left[1+r-\alpha.\delta\right]^3}\right] \tag{13a}$$

En posant
$$\frac{\partial E_t\left(U_t\right)}{\partial e_t}=0 \Leftrightarrow \quad e_t=\frac{w_t}{(2+p)} \tag{14a}$$

En posant $\frac{\partial E_t(U_t)}{\partial \alpha} = 0$, on obtient deux expressions de α différentes en fonction du signe devant la racine

$$\alpha_i=\frac{2\overline{A}^2\sigma^2\left[(1+r)\right]+r.\sigma\left(1+r-\delta\right)\left[r.\sigma\pm\sqrt{\left(2.\overline{A}.\delta\right)^2+\left(r.\delta\right)^2}\right]}{2\overline{A}^2\delta^3} \tag{15a}$$

Par hypothèse $r > \delta > 0$, intuitivement, il est plus commode de prendre un signe positif avant la racine pour garantir la positivité de α. Utiliser une formule avec un signe négatif devant la racine compliquerait inutilement les calculs. En effet, il faudrait alors montrer que

$$2\overline{A}^2\sigma^2\left[(1+r)\right]+\left(r.\sigma\right)^2\left(1+r-\delta\right)>r.\sigma\left(1+r-\delta\right)\sqrt{\left(2.\overline{A}.\delta\right)^2+\left(r.\delta\right)^2}$$

De plus, une simulation de résultats d'évolution de α donne dans ce cas des conclusions contradictoires à la littérature. En effet, la simulation de cette configuration

$$\alpha_1=\frac{2\overline{A}^2\sigma^2\left[(1+r)\right]+r.\sigma\left(1+r-\delta\right)\left[r.\sigma-\sqrt{\left(2.\overline{A}.\delta\right)^2+\left(r.\delta\right)^2}\right]}{2\overline{A}^2\delta^3}$$

avec

$$\overline{A}\;=\;r\;=\;1\;,\;\sigma\in\left[0,1\right]\quad\text{et }\sigma\in\left]0,1\right[$$

donne le graphique ci dessous.

Suivant cette configuration, la part de l'actif sans risque décroît avec la variabilité du capital. Or, une plus grande variabilité du capital traduit une hausse du risque. Les investisseurs étant averse au risque par hypothèse, il y a donc contradiction. Il convient donc de ne pas prendre de signe négatif devant la racine contenue dans la formulation de α.

$$\alpha = \frac{2\overline{A}^2\sigma^2\left[(1+r)\right] + r.\sigma\left(1+r-\delta\right)\left[r.\sigma+\sqrt{\left(2.\overline{A}.\delta\right)^2+\left(r.\delta\right)^2}\right]}{2\overline{A}^2\delta^3} \tag{16a}$$

La matrice de contrainte budgétaire (1) devient par conséquent :

$$\begin{cases} C_t = \frac{p+1}{p+2}.w_t \\ e_t = \alpha\frac{w_t}{(2+p)} + (1-\alpha)\frac{w_t}{(2+p)} \\ C_{t+1} = (1-f).e^{\tau}.\left[\alpha\frac{w_t}{(2+p)}(1+r-\delta) + (1-\alpha)\frac{w_t}{(2+p)}\left(1+r\frac{A_{t+1}}{\overline{A}}\right)\right] \\ \qquad = \frac{w_t}{(2+p)}.e^{\tau}.(1-f).[\alpha(1+r-\delta) + (1-\alpha)\left(1+r\frac{A_{t+1}}{\overline{A}}\right)] \end{cases} \tag{17a}$$

Annexe 4: une étude de variation de α

L'étude de la variation de α se fait par la recherche de signe de dérivées.

$$\alpha = \frac{2\overline{A}^2\sigma^2\left[(1+r)\right] + r.\sigma\left(1+r-\delta\right)\left[r.\sigma+\sqrt{\left(2.\overline{A}.\delta\right)^2+\left(r.\delta\right)^2}\right]}{2\overline{A}^2\delta^3} \tag{16a}$$

1)

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\overline{A}} = -\frac{r.\sigma.\left(1+r-\delta\right)\left[2.\overline{A}^2.\sigma^2 + \left(r.\sigma+\sqrt{\left(2.\overline{A}.\delta\right)^2+\left(r.\delta\right)^2}\right)\right]}{2.\overline{A}^2.\delta^3.\sqrt{\left(2.\overline{A}.\delta\right)^2+\left(r.\delta\right)^2}} \tag{18a}$$

On démontre aisément que $\frac{\partial\alpha}{\partial\overline{A}} < 0$; Ainsi α décroît avec $\overline{A}$

2)

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\sigma} = \frac{r\sigma\left(1+r-\delta\right)\left[r+\frac{r^2.\sigma}{\sqrt{\left(2.\overline{A}.\delta\right)^2+\left(r.\delta\right)^2}}\right] + r\left(1+r-\delta\right)\left(r\sigma+\sqrt{\left(2\overline{A}\delta\right)^2+\left(r\delta\right)^2}\right)}{2\overline{A}^2\delta^3} \tag{19a}$$

De façon analogue, on montre que $\frac{\partial\alpha}{\partial\sigma} > 0$; Ainsi α croît avec σ.

3)

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\delta} = \frac{-1}{2.\overline{A}^2.\delta^4.\sqrt{\left(2.\overline{A}.\delta\right)^2 + (r.\delta)^2}} \left\{ \begin{array}{l} 4r\sigma\left(\overline{A}\delta\right)^2(2+2r-\delta) \\ +(r.\sigma)^3.(3+3.r-2.\delta) \\ +8.\left(\delta.\overline{A}\right)^2(1+r).\sqrt{\left(2.\overline{A}.\delta\right)^2 + (r.\delta)^2} \\ +4r\sigma^2(3+3r-2\delta)\sqrt{\left(2\overline{A}\delta\right)^2 + (r\delta)^2} \end{array} \right\} \tag{20a}$$

On montre aussi que $\frac{\partial\alpha}{\partial\delta} < 0$. α décroît donc avec δ.

4)

$$\frac{\partial\alpha}{\partial r} = \frac{1}{2\overline{A}^2\delta^3.\sqrt{\left(2\overline{A}\delta\right)^2 + (r\delta)^2}} \left\{ \begin{array}{l} r\sigma^2(2+3r-2\delta)\left[r\sigma + \sqrt{\left(2\overline{A}\delta\right)^2 + (r\delta)^2}\right] \\ +2\left(\overline{A}\delta\right)^2\left(\sigma(2+4r-2\delta) + \sqrt{\left(2\overline{A}\delta\right)^2 + (r\delta)^2}\right) \end{array} \right\} \tag{21a}$$

On montre que $\frac{\partial\alpha}{\partial r}$s'annule en deux points

$$r_i = \frac{4\sigma^2[\delta-1] + (-1)^i 2\sigma\sqrt{3\left(\overline{A}\delta\right)^2 + (\sigma-\delta)^2 + \delta^2(\sigma^2-1)}}{3.\sigma^2} \text{ avec } i = 1,2 \tag{22a}$$

$0 < \delta < 1$, on montre aisément que $r_1 < 0$, ce qui par hypothèse est impossible. Il convient donc d'analyser le signe de $\frac{\partial\alpha}{\partial r}$dans l'intervalle $[0, r_2]$, cela n'a pas d'importance fondamentale si $r_2 > 1$. De plus $r_2 > 0$, le signe de la dérivée avant r_2 et après r_1 peut être déterminé en calculant la dérivée en $\frac{\partial\alpha}{\partial r}(0) = \frac{1}{\delta} > 0$. On conclut donc que la dérivée est positive sur l'intervalle [0, 1]. Ainsi, on montre que sur cet intervalle $[0, 1]$ la fonction de α croît avec r.

Annexe 5 : la détermination de la différence de profil

Le théorème de l'enveloppe nous permet de calculer aisément les dérivées du profit des firmes.

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \theta_i} = \left[\frac{\partial \Pi_i}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \Pi_i}{\partial C_j}.\frac{\partial C_j^*}{\partial \theta_i} \ + \frac{\partial \Pi_i}{\partial C_i}\frac{\partial C_i^*}{\partial \theta_i}\right] + \frac{\partial \Pi_i}{\partial C_i}\frac{\partial C_i^*}{\partial \theta_i}$$

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \theta_i} = f^* \left[\frac{\partial a_i}{\partial \theta_i} \ + \frac{\partial a_i}{\partial C_j}\frac{\partial C_j^*}{\partial \theta_i}\right] \tag{23a}$$

Etant donné que $C_i^*(\theta_1, \theta_2)$ maximise le profit (concavité en C) de la firme i , on en déduit selon les conditions de premier ordre

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial C_i} = 0$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial \theta_i} = \frac{1}{2} + \frac{(1-\eta)\left[(C_i^*)^{\alpha-1} - \left(C_j^*\right)^{\alpha-1}\right]}{2.d.(1-\theta_i-\theta_j)} = \frac{1}{2} \quad (\text{ car } \ C_i^* = C_j^*) \tag{24a}$$

La firme i augmente sa part de marché en proposant des produits de plus en plus semblables à ceux de sa concurrente j. Elle prospecte ainsi la clientèle de la firme concurrente.

$$\frac{\partial a_i}{\partial C_j} = \left[\frac{(1-\eta)(1-f^*).\phi}{2.d.\lambda}\right]\hat{C}^{\phi-1}$$

$$\Rightarrow \hat{C} = \left[\frac{2.d.\lambda}{\phi.f^*.N_p(1-\eta)(1-f^*)}\right]^{\frac{1}{\phi-1}} \tag{16}$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial C_j} = \left[\frac{-1}{N_p.f^*}\right] \tag{25a}$$

$$\frac{\partial C_j^*}{\partial \theta_i} = \left[\frac{1}{\lambda.(1-\phi)}\right]\hat{C} \tag{26a}$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial C_j}\frac{\partial C_j^*}{\partial \theta_i} = \left[\frac{-1}{Np.f^*.}\right]\left[\frac{1}{\lambda.(1-\phi)}\right].\hat{C}$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial C_j}\frac{\partial C_j^*}{\partial \theta_i} = \left[\frac{-1}{Np.f^*.\lambda.(1-\phi)}\right]\left[\frac{2.d.\lambda.}{Np.f^*.\phi.(1-f^*)(1-\eta)}\right]^{\left[\frac{1}{\phi-1}\right]} \tag{27a}$$

Si la firme i désire se rapprocher de la firme j , cette dernière augmente son niveau d'actifs risqués. Cette volonté devrait se traduire par une perte de clientèle dans la firme i dans le cas où les investisseurs sont attirés par le rendement. Cette situation conduit les firmes à différencier totalement leurs offres. Les produits étant parfaitement différenciés, l'intensité de la concurrence diminue.

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \theta_i} = \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{N_p.f^*\lambda.(1-\phi)}\right]\left[\frac{2.d.\lambda}{\phi.N_p.f^*.(1-\eta).(1-f^*)}\right]^{\frac{1}{\phi-1}} \tag{28a}$$

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \theta_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{Np.f^*.\lambda.(1-\phi)}\right]\left[\frac{2.d.\lambda}{\phi.Np.f^*.(1-\eta)(1-f^*)}\right]^{\frac{1}{\phi-1}} = 0 \tag{29a}$$

La condition d'équilibre est donnée par

$$\lambda^* = \left[\frac{N_p.f^*.(1-\phi)}{2}\left[\frac{2.d}{\phi.(1-f^*).(1-\eta).N_p.f^*}\right]^{\phi-1}\right]^{\left(\frac{\phi-1}{2-\phi}\right)} \tag{30a}$$

References

[ALI76] Aliber, R. (1976): Towards a theory of international banking. Economic Review. Federal Reserve Bank of San Francisco, Spring 5-8

[ARM04] Armstrong, Mark. (2004) "Competition in Two-Sided Markets" University College London working paper.

[BAU67] Baumol, W.J. (1967): "The Macroeconomics of Unbalanced Growth: The Anatomy of Urban Crisis", American Economic Review, vol. 57, pp. 415-426.

[BRA77] Braudel, F. (1977): Afteroughts on material civilization and capitalism; Baltimore; Johns Hopkins University Presse, 1977, P. 82

[CHA33] Chamberlain E.H. (1933): "The Theory of Monopolistic Competition", Cambridge, Harvard University Press

[CHA85] Chang, S.Y. (1985): The economic impact of offshore banking centers on the host countries. DBA Dissertation, The George Washington University

[CHE76] Cheng, H-S. (1976): The U.S. West coast as an international financial center. Economic Review; Spring 9_19

[CHO84] Choi, S-R. (1984): Economic rationale and consequences of international banking and financial centers. PhD dissertation, The University of Michigan

[DGT79] D'Aspremont, C.;Gabszewicz, J. and Thisse, J-F (1979): "On Hotelling's "Stability in Competition", Econometrica 47-5 pp: 1145-50

[DEB02] Debonneuil, M. (2002): "Vieillissement et capitalisation", CAE n 01-2002, Juillet 2002

[D&G02] Devereux M. et Griffith R. (2002), Evaluating tax policy for location decisions, Centre for Economic Policy Research, Discussion Papers Series, 3247.

[D&G99] Devereux M. et Griffith R. (1999), The taxation of discrete investment choices, The Institute of Fiscal Studies, Working Papers Series 98/16 (revision 2).

[D&G98] Devereux M. et Griffith R. (1998), Taxes and the location of production : evidence from a panel of US multinationals, Journal of Public Economics, 68(3), 335-367.

[D&S77] Dixit A.K. and Stiglitz J.E. (1977): "Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity", American Economic Review, 67, 297-308.

[D&G78] Dufey, G and Giddy I. H. (1978): The international money market; Enlgewood Cliffs, N.J. Prentae-Hall Inc.

[DUF83] Duffey, G. (1983): Banking in the Asian Pacific area, Moxon, J.F. Truit and Roehl T. (eds); Asian Pacific dynamics; Greenwich, CT; JAL Press

[FER98] Ferrer, C. (1998), "Patterns and Determinants of Location Decisions by French Multinationals in European Regions", in J.-L. Mucchielli (ed), Multinational Location Strategy, Greenwich: JAI Press.

[GLS01] Gabszewicz, Laussel, Sonnac (2001)

[G&T79] Gabszewicz, J. J., and J.-F. Thisse (1979): "Price Competition, Quality and Income Disparities", Journal of Economic Theory, 20, 340359.

[GOR80] Gorman, W.M. (1980): "A Possible Procedure for Analyzing Quality Differentials inthe Egg Market", Review of Economic Studies, 47: pp843-856.

[GRA22] Gras, N.S.B (1922) : "An introduction to economic history", New York, Harper.

[GRU80] Grubel, H.G. (1980): A proposal to establish an Afro-currency market in Nairobi. In Chipman J.S. and Kindelberger CP (eds.) Flexible exchange rates and the balance of payments: Essays in memory of Egon Sohmen, Studies in International Economics, Vol. 7, Amsterdam; North Holland Publishing Co.

[HAE75] Haegele, M. J. (1975): Iran's potential as a financial center. International Finance. New York; Chase Manhettan Bank; Feb.1975, 7

[H&R96] Head, K. and Ries, J. (1996): "inter-city competition for foreign investment: static and dynamic effects of China's incentive areas" , Journal of Urban Economics , n 40 pp 38-60

[HRS99] Head K.; Ries, J. and Swenson D..(1999): "attracting foreign manufacturing: Investment promotion and agglomeration", Regional Science and Urban Economics, n 29

[HOD78] Hodjera, Z. (1978): The Asian Currency market: Singapour as a regional finance center. IMF Staff Papers; Vol. 25

[HOT29] Hotelling, H. (1929): "Stability and Competition", Economic Journal 39(1), 1929, 41- 57.. 197-218

[JAO79] Jao, Y.C. (1979): The rise of Hong Kong as a financial center. Assian Survey; July 1979

[JOH76] Johnson, H.G. (1976): Panama as a regional financial center. Economic Development and Cultural Change, January 1976.

[KER65] Kerr, D.P. (1965) : "Some aspects of the geography of finance in Canada", Canadian Geographer 9

[KIN74] Kindleberger C.P. (1974): The formation of financial centers: A study in comparative economic history

[LAB73] Labasse, J. (1973): "L'espace financier"; Collin, Paris

[LAB55] Labasse, J. (1955) : "Les capitaux de la région. Etude géographique. Essai sur le commerce et la circulation des capitaux dans la région lyonnaie. Colin, Paris

[LAN66] Lancaster, K.J. (1966): "New Approach to Consumer Theory", Journal of Political Economy, 74: 132-157

[L&W02] Liang N, Weisbenner S. (2002): "Investor behavior and the purchase of company stock in 401 (k) plan/ the importance of plan design", NBER Working paper no 9131

[McS04] McCabe, Mark, and Christopher M. Snyder. (2004) "The Best Business Model for Scholarly Journals: An Economist's Perspective" Nature Web Focus on Access to the Literature (online journal), July 15.

[McC83] MacCarthy, I. (1983): Offshore in the Asian Pacific area; in Moxon, J. Truit and Roehl, T. (eds), Asian Pacific dinamics, Greenwich, CT, JAI Press

[McC79] McCarthy, I. (1979). "Offshore Banking Centers: Benefits and Costs", Finance and Development, Vol. 16, No. 4, pp. 45-48.

[M&M04] Mucchielli, J-L. and Mayer, T. (2004), Multinational Firms' Location and the New Economic Geography, Edward Elgar.

[MUN77] Mundell, R. (1977): The new international monetary system. New York; Columbia University Presse

[NAD55] Nadler, M and al. (1955) The money market and its institutions. New York; Roland Presse

[PAR82] Park, Y.S. (1982): The economics of offshore financial center; Colombia Journal of World Business, Winter, 31

[RAG73] Ragazzi, G. : "Theories of determinants of foreingn direct investments", Staff papers; International Monetary Fund; July 1973, pp. 476-81

[REE81] Reed, H.C. (1981): The preeminence of international financial center. New York ; Praeger.

[REE80] Reed, H.C. (1980): The ascent of Tokyo as an international financial center. Journal of Business Suties, 11 (33) pp. 19-35New York ; Praeger.

[R&T60] Robbins, S.M. and Terleckyj, N.S. (1960): Money Metropolis: A location study of the financial activities in the New York region. Cambridge; Havard University Presse.

[SAL79] Salop S.C. (1979): " A model of the natural rate of unemployment ", American Economic Review, March.

[S&S82] Shaked & Sullon (1982)

[SPE80] Spence, A. M. (1980): "Multiproduct Quantity-Dependent Prices and Profitability Constraints", Review of Economic Studies, 47, 821841.

[SPE77] Spence, A. M. (1977): "Nonlinear Prices and Welfare", Journal of Public Economcis, 8, 118.

[SPE76] Spence, A. M. (1976): "Product Selection, Fixed Costs, and Monopolistic Competition", Review of Economic Studies, 43: 217-235.

[TIR98] Tirole, J. (1998): "Théorie de l'organisation industrielle", Tome 1 et 2 Economica, Collection Economie et Statistiques Avancée Juillet 1998

[TSC89] Tschoegl,A.E. (1989): The benefits and costs of hosting financial centers , In Park, Y.S. and Essayyad, M. (eds) International banking and financial centers, Kluwer Academic Publishers

[VER60] Vernon, R. (1960): Metropolis 1985. Cambridge; Harvard University Presse

[WAS63] Wasserman, M.J. and al. (1963): International finance. New York; Simmons - Boardman.

[W&M92] WHEELER, DAVID and MODY, ASHOKA (1992): "International investment location decisions. The case of U.S. firms", in Journal of International Economics, volume 33, pages 55-76.