



Munich Personal RePEc Archive

# **A Comparative Analysis of Models for Estimating the Volatility Distribution of Financial Returns Series**

Grajales Correa, Carlos Alexander and Pérez Ramírez, Fredy  
Ocaris and Venegas-Martínez, Francisco

Universidad de Antioquia, Universidad de Medellín, Escuela  
Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional

28 March 2014

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/54845/>  
MPRA Paper No. 54845, posted 08 Apr 2014 11:29 UTC

# A Comparative Analysis of Models for Estimating the Volatility Distribution of Financial Returns Series

Carlos Alexander Grajales Correa  
*Universidad de Medellín*

Fredy Ocaris Pérez Ramírez  
*Universidad de Medellín*

Francisco Venegas-Martínez  
*Escuela Superior de Economía, IPN*

## **Abstract**

This aim of this paper is to present a theoretical framework that systematically joint and ordered, according to realism and complexity, several available models in the specialized literature useful to estimate the volatility distribution of stock indices. To this end, discrete ARCH models, and some of its extensions, as well as continuous time diffusion models are considered. In the discrete case, the models estimate volatility from the conditional heteroscedasticity. Meanwhile, in the continuous case, the models estimate the volatility distribution through diffusion stochastic processes, which allows using Monte Carlo Simulation. Finally, the obtained results from the different methodologies are compared for the capital stock indices: *S&P* 500 of the U. S. A., Index of Prices of the Mexican Stock Market (IPC), and the General Index of Prices of the Colombian Stock Market (IGBC).

**JEL Classification:** G11, G13, D1

**Keywords:** Stochastic volatility, conditional heteroscedasticity, diffusion process, Monte Carlo simulation.

# Análisis comparativo de modelos para estimar la distribución de la volatilidad de series financieras de rendimientos

Carlos Alexander Grajales Correa

*Universidad de Medellín*

Fredy Ocaris Pérez Ramírez

*Universidad de Medellín*

Francisco Venegas-Martínez

*Escuela Superior de Economía, IPN*

## **Resumen**

En este trabajo se presenta un marco teórico que conjunta y ordena sistemáticamente, en cuanto a complejidad y realismo, varios modelos disponibles en la literatura especializada para estimar la distribución de la volatilidad de los rendimientos diarios de índices bursátiles. Para tal fin se consideran los modelos discretos ARCH y algunas de sus extensiones, así como los modelos de difusión en tiempo continuo. En el caso discreto, los modelos estiman la volatilidad por medio de la heteroscedasticidad condicional. Mientras que en el caso continuo, los modelos estiman la distribución de la volatilidad a través de procesos estocásticos de difusión, en cuyo caso se utiliza simulación Monte Carlo. Por último se comparan los resultados obtenidos con las diferentes metodologías para los índices bursátiles: *S&P* 500 de EEUU, Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores (IPC) e Índice General de la Bolsa de Valores de Colombia (IGBC)

**JEL Classification:** G11, G13, D1

**Palabras clave:** Volatilidad estocástica, heteroscedasticidad condicional, procesos de difusión, simulación Monte Carlo.

---

E-mails: cgrajales@udem.edu.co, foperez@udem.edu.co, fvenegas@ipn.mx

## 1. Introducción

Los modelos ARCH (modelos autorregresivos de heteroscedasticidad condicional) son ampliamente utilizados en el estudio de la volatilidad estocástica de series financieras. El desarrollo de los modelos ARCH se debe a Engle (1982) y su versión generalizada, conocida como GARCH, se debe a Bollerslev (1986). Estos modelos suponen rendimientos distribuidos normalmente con una varianza condicional dependiente del tiempo y, en muchas ocasiones, describen el comportamiento de las series financieras mucho mejor que los modelos autoregresivos tradicionales. El éxito de los modelos ARCH consiste en capturar no linealidades de las series de tiempo; situación que ha propiciado muchas extensiones del modelo original.

Por otro lado, los modelos de difusión en tiempo continuo que describen el comportamiento de la volatilidad estocástica de los rendimientos de diversos activos financieros e índices bursátiles han tenido mucho éxito en la valuación de opciones; entre los que destacan los modelos de Hull y White (1987) y Heston (1993). Sin embargo, salvo casos muy especiales, los procedimientos numéricos asociados con estos modelos, incluyendo los métodos de diferencias finitas y simulación Monte Carlo, suelen ser computacionalmente intensivos lo que representa un serio inconveniente para la mayoría de las aplicaciones.

Un gran número de series de tiempo financieras y económicas presentan media no constante, así como períodos de estabilidad seguidos de otros de alta volatilidad, destacando con esto el hecho de que la variabilidad de la serie en torno a un valor medio, medida por la varianza, es muy alta en determinados tramos de la muestra comparada con otros períodos en los que, al menos aparentemente, es menor. Entre estas series se encuentran, los agregados monetarios, la tasa de inflación, los tipos de cambio, las variaciones porcentuales de los precios de las acciones (rendimientos), etc. Existen también, en la literatura especializada, modelos en los que la varianza condicional no es constante, sino

que depende del conjunto de información disponible en cada instante; ignorar este hecho puede conducir a estimadores ineficientes, con graves consecuencias, tales como, intervalos de confianza con mayor amplitud para un nivel de confianza dado y mayor variabilidad de en predicciones puntuales.

El desarrollo de esta investigación es como sigue. En la próxima sección se presenta, brevemente, el modelo ARCH y algunas de sus extensiones. A través de la sección 3 se discute sobre el modelo GARCH. En la sección 4 se estudian los modelos de volatilidad asimétrica TGARCH y EGARCH. En la sección 5 se discute sobre los modelos de volatilidad en tiempo continuo. A través de la sección 6 se examinan las implicaciones de la volatilidad implícita en la valuación de productos derivados. En la sección 7 se estudian los procesos de difusión de volatilidad estocástica. En la sección 8 se establece el modelo empírico de volatilidad estocástica. A través de la sección 9 se presentan los resultados empíricos. Por último, en la sección 10 se presentan las conclusiones, así como las limitaciones y sugerencias para futuras investigaciones.

## **2. El modelo univariado ARCH**

En esta sección se estudian, brevemente, los modelos ARCH (modelos autorregresivos de heteroscedasticidad condicional) y algunas de sus extensiones. Estos modelos econométricos son ampliamente utilizados para describir el comportamiento de la volatilidad de diversas series financieras y económicas.

En muchas ocasiones es necesario desarrollar modelos econométricos en los cuales se permita que la varianza condicional del proceso cambie en el tiempo. Más precisamente, si la varianza de un proceso  $Y_t$ , dada la información disponible hasta el período  $t - 1$ , no es constante, esto es, si  $V(Y_t|\Omega_{t-1}) = f(t)$ , donde  $V(\cdot, \Omega_{t-1})$  denota la varianza condicional de un proceso, dada la información disponible del período anterior, entonces una alternativa consiste en emplear los modelos ARCH y sus extensiones, los cuales se describen, brevemente, a continuación. Dichos modelos permiten estimar la duración y la magnitud de la volatilidad, lo cual es crucial para determinar si las predicciones que se hacen acerca de los precios son confiables o no.

## 2.1 Modelo ARCH(1)

En esta subsección se presenta el modelo autorregresivo más simple, y también más popular, de heteroscedasticidad condicional. El proceso ARCH(1), introducido por Engle (1982), el cual se define a través de las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_t^2 = \delta_0 + \delta_1 \varepsilon_{t-1}^2,$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t a_t, \quad a_t \text{ son v.a.i.i.d. } \mathcal{N}(0, 1), \quad \sigma_t \text{ y } a_t \text{ son independientes,}$$

donde  $\delta_0$  y  $\delta_1$  son coeficientes tales que  $\delta_0 > 0$  y  $0 \leq \delta_1 < 1$  (como siempre, v.a.i.i.d. significa “variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas”). Observe que la condición  $\delta_0 > 0$  corresponde a la mínima varianza condicional observada, mientras que  $0 \leq \delta_1 < 1$  es una condición necesaria y suficiente para la existencia de las varianzas incondicional y condicional. El coeficiente  $\delta_1$  mide la persistencia de la volatilidad; si dicho coeficiente es cercano a uno, se dice que hay una alta persistencia de los “shocks” de volatilidad.

En este caso, la distribución de los errores dado el conjunto de información  $\Omega_{t-1}$  tiene distribución normal con media cero y varianza  $\sigma_t^2$ , lo cual se denota mediante  $\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$  y  $\text{Var}(\varepsilon_t | \Omega_{t-1}) = \sigma_t^2$ . De esta manera, la varianza condicional de las perturbaciones depende de la información disponible en cada instante  $t$ .

## 2.2 Modelo ARCH( $p$ )

A continuación se extiende el orden del modelo ARCH(1). Un proceso ARCH de orden  $p$ , denotado mediante ARCH ( $p$ ), presenta la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \delta_0 + \delta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \delta_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \delta_p \varepsilon_{t-p}^2, \\ &= \delta_0 + \sum_{i=1}^p \delta_i \varepsilon_{t-i}^2, \end{aligned} \tag{1}$$

donde  $\delta_0 > 0$ ,  $\delta_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ ,  $\varepsilon_t = \sigma_t a_t$ , con  $\sigma_t$  y  $a_t$  variables aleatorias independientes y  $a_t$  son v.a.i.i.d.  $\mathcal{N}(0, 1)$ . En este caso, la varianza incondicional de los errores bajo una estructura ARCH ( $p$ ) es

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\delta_0}{1 - (\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_p)}. \tag{2}$$

Se puede mostrar, en este caso, que la distribución de los errores dado el conjunto de información  $\Omega_{t-1}$  es una normal con media cero y varianza  $\sigma_t^2 = \delta_0 + \sum_{i=1}^p \delta_i \varepsilon_{t-i}^2$ .

### 3. El modelo GARCH univariado (modelo ARCH generalizado)

La motivación para emplear una estructura GARCH proviene de la evidencia empírica sobre el comportamiento de la volatilidad de los rendimientos de índices bursátiles en la década de los ochentas analizados por Bollerslev (1986). Este proceso se introduce para tratar el exceso de curtosis (la distribución empírica de los rendimientos comparada con la distribución normal tiene cresta más alta) y el fenómeno de agrupamiento de la volatilidad (eventos de alta volatilidad se agrupan en el tiempo); estas dos características son muy comunes en las series financieras.

Con base en lo anterior, los modelos de volatilidad condicional proporcionan una mejor alternativa para modelar y pronosticar las varianzas y covarianzas de los rendimientos de diversos activos. La ausencia de una correlación lineal significativa en el incremento de los precios y el rendimiento de los activos ha sido ampliamente documentada y citada como respaldo de la hipótesis de mercados eficientes. Por otro lado, las funciones simples no lineales de rendimientos, tales como la desviación absoluta y la cuadrada, exhiben autocorrelación positiva significativa o persistencia. Este fenómeno se conoce como agrupamiento de la volatilidad y quiere decir que cambios grandes en los precios van seguidos de más cambios grandes en precios. Este fenómeno cuantifica el hecho de que los eventos de alta volatilidad se agrupan en el tiempo. Una medida comúnmente usada para medir el agrupamiento de la volatilidad es la función de autocorrelación de los rendimientos al cuadrado:

$$C(\tau) = \text{correlación}(|r(t + \tau, \Delta t)|^2, |r(t, \Delta t)|^2).$$

Los estudios empíricos que utilizan los rendimientos de varios índices y acciones indican que esta función de autocorrelación decae lentamente, permaneciendo significativamente positiva por varios días e incluso semanas. En la literatura econométrica se le conoce como “efecto ARCH” dado que es un rasgo de los modelos (G)ARCH. Es importante tener en

mente que esta propiedad de los rendimientos es independiente del modelo y no recae en la hipótesis GARCH.

Los modelos GARCH se aplican extensivamente en la valuación de opciones, la administración de portafolios, la asignación de activos y la determinación de estructuras de tasas de interés. Asimismo, Se pueden encontrar un sinnúmero de aplicaciones del modelo GARCH para describir el comportamiento de los mercados accionarios, no sólo para títulos de capital individuales, sino también para portafolios accionarios e índices. De igual forma se pueden encontrar aplicaciones en la medición del riesgo del mercado mediante el uso del VaR (Value at Risk, Valor en Riesgo). Por último, es importante destacar que los modelos GARCH se utilizan también para examinar la relación entre las tasas de interés de corto y largo plazo.

### 3.1 Modelo GARCH(1,1)

El proceso GARCH(1,1), el cual es debido a Bollerslev (1986), está definido por la siguiente expresión:

$$\sigma_t^2 = \delta_0 + \delta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \theta_1 \sigma_{t-1}^2$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t a_t, \quad a_t \text{ son v.a.i.i.d. } \mathcal{N}(0,1), \quad \sigma_t \text{ y } a_t \text{ son independientes,}$$

donde  $\delta_0$ ,  $\delta_1$  y  $\theta_1$  son coeficientes tales que  $\delta_0 > 0$ ,  $\delta_1 \geq 0$ ,  $\theta_1 \geq 0$  y  $0 \leq \delta_1 + \theta_1 < 1$ . En este caso, la varianza condicional heteroscedástica del proceso GARCH(1,1), en el periodo  $t$ , depende del cuadrado del choque (perturbación) y de la varianza condicional, ambos observados en el periodo  $t - 1$  (efecto GARCH). El coeficiente  $\delta_1$  captura el efecto ARCH, es decir, mide la intensidad con la cual los efectos de volatilidades pasadas alimentan volatilidades presentes; el coeficiente  $\theta_1$  captura el efecto GARCH; y  $\delta_1 + \theta_1$  mide la tasa a la cual dichos efectos van disminuyendo en el tiempo, es decir, mide la persistencia en el tiempo de la volatilidad condicional. Si la suma de los coeficientes  $\delta_1 + \theta_1$  es muy cercana a uno, se dice que hay una elevada persistencia que ocasiona que los efectos del “shock” tarden en olvidarse; en tanto que la baja persistencia sólo tiene efectos de corta duración. Por último, la condición  $0 \leq \delta_1 + \theta_1 < 1$  garantiza la existencia de la varianza incondicional.



### 3.2 Modelo GARCH( $p, q$ )

En esta subsección se generaliza el proceso GARCH(1,1). Un proceso GARCH de órdenes (o parámetros)  $p$  y  $q$ , denotado mediante GARCH( $p, q$ ), se define como:

$$\sigma_t^2 = \delta_0 + \sum_{i=1}^p \delta_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \theta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (3)$$

donde  $\delta_0 > 0$ ,  $\delta_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , y  $\theta_j \geq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, q$ . También se requiere que  $\sum_{i=1}^p \delta_i + \sum_{j=1}^q \theta_j < 1$  y  $\varepsilon_t = \sigma_t a_t$  con  $\sigma_t$  y  $a_t$  variables aleatorias independientes y  $a_t$  son v.a.i.i.d.  $\mathcal{N}(0, 1)$ . La varianza incondicional de los errores bajo una estructura GARCH( $p, q$ ) es

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\delta_0}{1 - \left( \sum_{i=1}^p \delta_i + \sum_{j=1}^q \theta_j \right)} \quad (4)$$

con

$$0 \leq \sum_{i=1}^p \delta_i + \sum_{j=1}^q \theta_j < 1.$$

Los procesos ARCH y GARCH son modelos simétricos en el sentido de que los “shocks” de los rendimientos ya sean positivos o negativos tienen el mismo impacto de volatilidad. Ahora bien, cuando el rendimiento cae por debajo de lo esperado se genera un escenario donde las noticias son malas, esto viene asociado con una volatilidad que incrementa; mientras que cuando las noticias son buenas, se espera que la volatilidad disminuya. Para modelar una varianza condicional asimétrica, dos familias que son muy útiles son EGARCH y TGARCH. A continuación se estudiarán, brevemente, dichos modelos.

## 4. Modelos asimétricos

Una de las principales características de los mercados financieros es que ante malas noticias, se producen caídas en las cotizaciones que tienen una volatilidad mayor, es decir, se presentan volatilidades de mayor magnitud que cuando se producen alzas en los precios por buenas noticias, en cuyo caso la volatilidad es de menor magnitud. Para estos escenarios de volatilidad asimétrica se utilizan los modelos TGARCH y EGARCH.

## 4.1 El modelo univariado TGARCH

Un modelo que tiene la capacidad de producir efectos asimétricos, es el modelo TGARCH (“Threshold Heteroscedastic Autoregressive Model”), debido a Zakoïan (1994). Este tipo de modelos depende de un umbral (“threshold”) a partir del cual se genera una reacción. En los mercados bursátiles se observa que los movimientos a la baja son, generalmente, más volátiles que los movimientos al alza. En particular, el modelo TGARCH(1,1) (brevemente llamado “Threshold ARCH(1,1)”) para estimar la varianza condicional se define a partir de la siguiente ecuación

$$\sigma_t^2 = \delta_0 + \delta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma d_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2 + \theta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad (5)$$

donde

$$d_{t-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon_{t-1} > 0, \\ 1 & \text{si } \varepsilon_{t-1} \leq 0. \end{cases}$$

De esta manera, los valores negativos del residuo de la regresión son interpretadas como malas noticias para el mercado y los valores positivos representan buenas noticias. Las malas noticias tendrán un impacto  $\delta_1 + \gamma$  sobre la varianza condicional, mientras que las buenas noticias sólo impactarán en  $\delta_1$ . Si  $\gamma > 0$ , se dice que existe un efecto de apalancamiento (“leverage effect”). Dicho efecto se refiere al hecho de que a rendimientos negativos corresponde una mayor volatilidad condicional que a rendimientos positivos. El “efecto apalancamiento” es una medida de dependencia no lineal en los rendimientos y se define como la correlación de los rendimientos con rendimientos subsecuentes al cuadrado:

$$L(\tau) = \text{correlación}(r(t, \Delta t), |r(t + \tau, \Delta t)|^2).$$

Esta función comienza con un valor negativo y decae a cero, sugiriendo que los rendimientos negativos llevan a un alza en la volatilidad. Sin embargo, este efecto es asimétrico, es decir,  $L(T) \neq L(-T)$ , y en general  $L(T)$  es imperceptible para  $T < 0$ . La existencia de tal dependencia no lineal, opuesto a la ausencia de autocorrelación en los rendimientos mismos, indica que hay correlación en la volatilidad de los rendimientos pero no en los rendimientos mismos. Sin embargo, hay que tener mucho cuidado con estos estimadores ya que pueden ser poco confiables. Esto es debido a que la función de autocorrelación de colas

pesadas tiene propiedades estadísticas no estándares que invalidan muchos procedimientos de pruebas econométricas utilizados para detectar o medir dependencia. Así, si  $\gamma \neq 0$ , se tiene que el impacto de las noticias es asimétrico.

## 4.2 El modelo univariado EGARCH

El modelo EGARCH (GARCH Exponencial) es debido a Nelson (1991) quien define una curva de impactos asimétricos, en la cual las buenas y las malas noticias no repercuten de la misma forma; los movimientos a la baja en el mercado tienen mayor volatilidad que a la alza. El modelo EGARCH(1,1) para estimar la volatilidad condicional se define mediante:

$$\ln \sigma_t^2 = \delta_0 + \delta_1 \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \theta_1 \ln \sigma_{t-1}^2. \quad (6)$$

En consecuencia,

$$\sigma_t^2 = (\sigma_{t-1}^2)^{\theta_1} \exp \left( \delta_0 + \delta_1 \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \theta_1 \ln \sigma_{t-1}^2 \right). \quad (7)$$

Por último, observe que al comparar los modelos GARCH y EGARCH, el modelo GARCH tiene una limitación importante ya que trata los efectos de modo simétrico pues considera los cuadrados de las innovaciones. Otra limitación son las restricciones que deben cumplir los parámetros. Observe que en un modelo EGARCH no hay restricciones en los parámetros.

## 4.3 Modelos FIGARCH (GARCH fraccionalmente integrados)

En los últimos años, ha surgido un gran interés por la aplicación de procesos con memoria larga en la varianza condicional para el modelado del comportamiento de series financieras. Al respecto, Robinson (1991) sugirió la primera extensión del modelo GARCH para producir memoria larga en los cuadrados de la serie y Baillie, Bollerslev y Mikkelsen (1996) concretaron esta idea con el modelo GARCH fraccionalmente integrado (FIGARCH). En el modelo GARCH( $p, q$ ), la varianza condicional de la serie,  $\sigma_t^2$ , es una función lineal de su pasado y de las observaciones pasadas de una serie  $y_t$ , de la siguiente forma:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha(L)y_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2,$$

donde

$$\alpha(L) = \sum_{i=1}^q \alpha_i L^i, \quad \beta(L) = \sum_{j=1}^p \beta_j L^j,$$

$$q > 0, \quad p \geq 0, \quad \alpha_0 > 0, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, q, \quad \text{y} \quad \beta_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, p.$$

El modelo GARCH así definido puede verse como un proceso ARMA para la serie de los cuadrados, de la forma:

$$[1 - \alpha(L) - \beta(L)]y_t^2 = \alpha_0 + [1 - \beta(L)]u_t$$

donde  $u_t$  es un ruido blanco definido mediante  $u_t = y_t^2 - \sigma_t^2 = \sigma_t^2(\epsilon_t^2 - 1)$ . De esta manera, el modelo FIGARCH es que una extensión del modelo anterior que incluye el operador de diferencias fraccionales,  $(1 - L)^d$ , en la parte autoregresiva de la última ecuación, de tal forma que el modelo resultante puede reescribirse como un proceso ARFIMA de la serie de los cuadrados:

$$\phi(L)(1 - L)^d y_t^2 = \alpha_0 + [1 - \beta(L)]u_t,$$

donde  $d$  es un número real  $0 \leq d \leq 1$  y todas las raíces de los polinomios  $\phi(L)$  y  $1 - \beta(L)$  están fuera del círculo unitario. Alternativamente, la ecuación de la varianza condicionada en el modelo FIGARCH puede escribirse como:

$$\sigma_t^2 = [1 - \beta(1)]^{-1} \alpha_0 + \{1 - [1 - \beta(L)]^{-1} \phi(L)(1 - L)^d\} y_t^2.$$

Al permitir órdenes de integración fraccional, el proceo FIGARCH proporciona una gran flexibilidad en el modelado de la dependencia temporal de la varianza condicional, e incluye como casos particulares el modelo GARCH ( $d = 0$ ) y el modelo GARCH integrado, IGARCH ( $d = 1$ ). Para que el modelo FIGARCH esté bien definido y se garantice la no negatividad de la varianza, los parámetros del modelo deben cumplir una serie de restricciones que, salvo en casos muy concretos, no son fáciles de establecer, lo cual es una limitación seria en la estimación del modelo. Respecto a las condiciones de estacionariedad, el modelo FIGARCH sólo es débilmente estacionario cuando  $d = 0$ , en cuyo caso se reduce al GARCH estándar. No obstante, Baillie, Bollerslev y Mikkelsen (1996) argumentan que el modelo es estrictamente estacionario y ergódico, de la misma forma que lo es el IGARCH.

## 5. Modelos de volatilidad estocástica en tiempo continuo

Algunos modelos clásicos en el estudio de series de precios de activos suponen que la volatilidad en los rendimientos permanece constante en el tiempo. Bajo este supuesto pueden encontrarse los modelos de Black y Scholes (1973) y Merton (1973), en los cuales se concibe que la serie de precios del activo subyacente sigue un proceso estocástico lognormal. En estos modelos, el supuesto de volatilidad constante en los rendimientos de la serie de precios del subyacente, resulta ser inadecuado, puesto que un gran número de series financieras reflejan presencia de heteroscedasticidad y curtosis en los rendimientos (como lo muestra la evidencia empírica en los estudios de Mandelbrot (1963) y Fama (1965)), produciendo curvas de distribución leptocúrticas y de colas anchas. Algunos modelos más acordes con esta realidad, son los modelos de volatilidad estocástica en tiempo continuo. En este escenario se considera que tanto el precio como la volatilidad del activo subyacente siguen procesos estocásticos, cada uno de los cuales está representado por una ecuación diferencial estocástica con movimientos brownianos, posiblemente correlacionados. En esta dirección se orientan los trabajos seminales de Hull y White (1987), Scott (1987), Stein y Stein (1991) y Heston (1993), entre muchos otros.

Un modelo general de volatilidad estocástica en tiempo continuo puede ser establecido de la siguiente manera. Suponga que el precio de un activo subyacente sigue una distribución lognormal y su volatilidad instantánea,  $\sigma_t$ , es una función del tiempo, de tal manera que:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dU_t,$$

donde el parámetro de tendencia,  $\mu$ , representa el rendimiento medio esperado. El proceso  $(U_t)_{t \in [0, T]}$  es un movimiento browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada,  $(\Omega^U, \mathcal{F}^U, (\mathcal{F}_t^U)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P}^U)$ . Suponga, adicionalmente que

$$d\sigma_t^2 = A(\sigma_t^2, t)dt + B(\sigma_t^2, t) dW_t,$$

donde  $A(\cdot, \cdot)$  y  $B(\cdot, \cdot)$  son funciones “bien” comportadas y el proceso  $(W_t)_{t \in [0, T]}$  es un movimiento browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración

aumentada,  $(\Omega^W, \mathcal{F}^W, \mathbb{F}^W, \mathbb{P}^W)$ ,  $\mathbb{F}^W = (\mathcal{F}_t^W)_{t \in [0, T]}$  con

$$\text{Cov}(dU_t, dW_t) = \rho dt.$$

En el modelo de Hull y White (1987) se tiene que  $A(\sigma_t^2, t) = \alpha \sigma_t^2$  y  $B(\sigma_t^2, t) = \beta \sigma_t^2$  donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes conocidas. De esta forma, la ecuación diferencial estocástica que conduce a la varianza  $\sigma_t^2$  es un movimiento geométrico browniano. Por otro lado, en el modelo de Heston (1993) se tiene que  $A(\sigma_t^2, t) = a(b - \sigma_t^2)$  y  $B(\sigma_t^2, t) = \gamma \sigma_t$ , lo cual produce reversión a la media en el proceso de la varianza.

## 6. Volatilidad implícita en modelos de valuación de opciones

El modelo de Black y Scholes (1973) supone que el precio,  $S_t$ , del activo subyacente sigue un movimiento browniano geométrico, en cuyo caso la fórmula de valuación de una opción europea de compra está dada por

$$c(S_t, t; \sigma) = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2),$$

donde la función  $\Phi(d)$  es la función de distribución acumulada de una variable  $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , es decir,

$$\Phi(d) = \mathbb{P}_{\mathcal{E}}\{\mathcal{E} \leq d\} = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon = 1 - \Phi(-d),$$

$$d_1 = d_1(S_t, t; \sigma) = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$d_2 = d_2(S_t, t; \sigma) = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

En este caso,  $T$  es la fecha de vencimiento del contrato,  $K$  es el precio de ejercicio convenido,  $r$  es la tasa de interés libre de riesgo (de incumplimiento) y  $\sigma$  es la volatilidad instantánea, la cual se pone constante. El precio de una opción de venta del tipo europeo,  $p = p(S_t, t; \sigma)$ , está dado por

$$p = K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - S_t \Phi(-d_1).$$

Es importante recordar que el precio de una opción europea de venta también se puede obtener a través de la condición de paridad “put-call”, a saber,  $p + S_t = c + Ke^{-r(T-t)}$ . Ahora bien, si  $V(S_t, t; \sigma)$  denota la prima de una opción de compra o venta de tipo europeo, entonces la volatilidad implícita, denotada por  $\sigma_I$ , se define como el valor de la volatilidad para el cual el precio de la opción generado por el modelo de Black-Scholes es igual al precio de mercado, esto es,

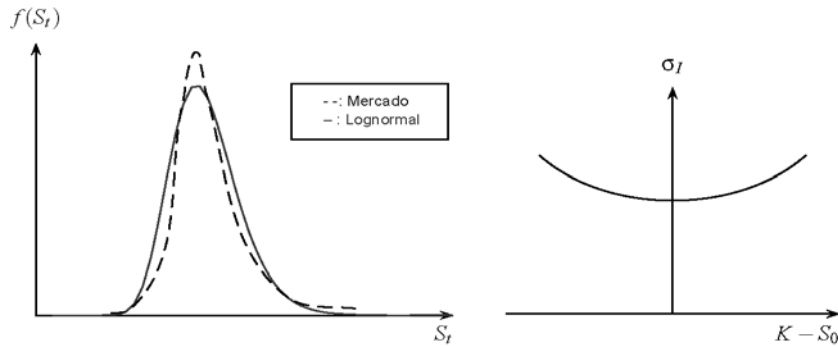
$$V(S_t, t; \sigma_I) = V_{\text{mercado}}.$$

Si se conoce en el mercado un conjunto de precios  $\mathbf{V}$  de una opción europea sobre un activo fijo, correspondientes a diferentes precios de ejercicio  $\mathbf{K}$ , y se obtienen a partir del modelo Black-Scholes los respectivos valores de  $\sigma_I$ , manteniendo los demás parámetros fijos (este proceso puede llevarse a cabo con el método de Newton-Raphson). En contradicción con el modelo de Black-Scholes, el valor de la volatilidad  $\sigma_I$  varía con el precio de ejercicio  $K$  (cuando la opción está en el dinero). En el caso de opciones de divisas, frecuentemente, se tiene que la volatilidad es menor para opciones en el dinero y mayor progresivamente para aquellas dentro o fuera del dinero, formándose lo que se conoce como sonrisa (“smile”) de la volatilidad; véanse, por ejemplo, Rubinstein (1994), Dupire (1994), Derman y Kani (1994), Wilmott (2000) y Hull (2005).

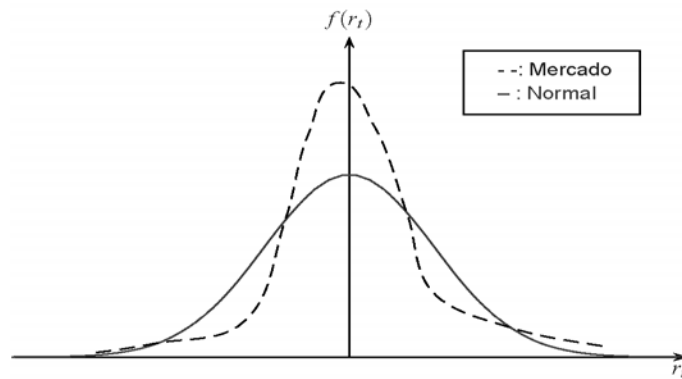
La variación de  $\sigma_I$  asociada a los cambios en el precio de ejercicio de la opción,  $\mathbf{K}$ , forma curvas conocidas como efecto sonrisa (“smile”) o muecas (“skew”). La presencia de una volatilidad implícita no constante sugiere una distribución asociada a los precios del activo subyacente, diferente a la distribución lognormal considerada en el conjunto de supuestos del modelo Black-Scholes. La curva de la distribución de rendimientos reales tiene frecuentemente forma leptocúrtica y de colas más anchas que la distribución normal.

Por otro parte, la variación de la volatilidad implícita  $\sigma_I$ , también se manifiesta con la variación de la fecha de expiración  $T$ . De esta forma se construye una superficie de volatilidad, la cual se obtiene cuando ambos, precio de ejercicio  $\mathbf{K}$  y fecha de expiración  $\mathbf{T}$ , varían. En la Gráfica 1(a) se representa una distribución normal y una distribución empírica de los rendimientos de un activo financiero. La Gráfica 1(b) muestra el efecto

sonrisa asociado a la distribución empírica mencionada. Esto indica que la distribución de los rendimientos para un activo en el mercado, tiene cresta más alta y colas más anchas en comparación con la distribución normal, tal como se muestra en la Gráfica 2.



Gráfica 1: (a) Distribución de rendimientos de un activo financiero y  
(b) sonrisa de la volatilidad.



Gráfica 2. Distribución de rendimientos para un activo financiero.

## 7. Procesos de difusión de volatilidad estocástica

Uno de los supuestos fuertes en el modelo de Black-Scholes es considerar la volatilidad  $\sigma$  como un parámetro constante. Los rendimientos de los precios de un activo en la realidad exhiben curvas leptocúrticas (“high peaks”) o con una gran desviación estándar (“fat



tails”) y por tanto, no siguen una distribución normal como lo establecen los supuestos en el modelo de Black-Scholes.

Un proceso estocástico de la volatilidad modela el cambio de la volatilidad implícita en el modelo Black-Scholes cuando cambia la fecha de expiración  $T$  o el precio de ejercicio  $K$ . Un proceso de este tipo supone que el precio  $S_t$  de un activo financiero satisface un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas dado por

$$dS_t(S_t, \sigma_t, t) = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^{(1)} \quad (8)$$

$$d\sigma_t(S_t, \sigma_t, t) = p(S_t, \sigma_t, t)dt + q(S_t, \sigma_t, t)dW_t^{(2)} \quad (9)$$

en donde la volatilidad  $\sigma_t$  del precio  $S_t$  en (8) es un proceso estocástico descrito por (9) que en general representa un proceso de reversión a la media, y el coeficiente  $\mu$ , el cual es constante, es la tendencia en la tasa de crecimiento del activo. La notación  $\sigma_t$  se hace para enfatizar que la volatilidad cambia con el tiempo. Las funciones  $p$  y  $q$  son la tendencia de la volatilidad y la volatilidad de la volatilidad del precio  $S_t$ , respectivamente, las cuales deben ser determinadas. Por el momento puede considerarse que ambas funciones,  $p$  y  $q$ , representan procesos de reversión a la media Wilmott (1998) y Wilmott (2000). El modelo incorpora dos fuentes de aleatoriedad,  $W_t^{(1)}$  y  $W_t^{(2)}$ , los cuales son procesos de Wiener con correlación  $\rho$ . De este modo, el proceso de precios  $S_t$  no está completamente descrito por la relación (8), sino que está condicionado a la trayectoria seguida por la volatilidad  $\sigma_t$ .

Las ecuaciones (8) y (9) pueden conducir a la implementación de un algoritmo que simule una solución numérica para el proceso de precios  $\{S_t, 0 \leq t \leq T\}$ ; véase Kloeden y Platen (1992). Por otro parte, si se desea valorar una opción europea bajo el modelo descrito (8)-(9), su precio será  $V(t, S_t, \sigma_t; K, T; r)$ , el cual denotaremos de manera simplificada por  $V(t, S_t, \sigma_t)$ . Si se construye un portafolio libre de riesgo, bajo condiciones de no arbitraje, es posible mostrar que  $V$  satisface la ecuación diferencial estocástica (cf. Wilmott (2000))

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + \rho\sigma q S_t \frac{\partial^2 V}{\partial S_t \partial \sigma} + \frac{1}{2}q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + rS_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + (p - \lambda q) \frac{\partial V}{\partial \sigma} - rV = 0 \quad (10)$$

para una función  $\lambda = \lambda(t, S_t, \sigma_t)$ , llamada precio en el mercado del riesgo de la volatilidad, que debe ser determinada. La calibración de  $\lambda$  depende de argumentos económicos y por

ejemplo en Wiggins (1987) se considera que  $\lambda$  es proporcional a la varianza  $v_t = \sigma_t^2$ . Otros avances más recientes en la determinación del precio en el mercado del riesgo de la volatilidad  $\lambda$  se encuentran en Doran y Ronn (2004).

## 8. Modelo empírico de volatilidad estocástica

Una alternativa para el estudio de la evolución de la volatilidad del precio de un activo financiero fue propuesta por Oztukel y Wilmott (1998) en un estudio que ajusta datos empíricos del índice Dow Jones a lo largo de 20 años. Este modelo supone que la ecuación (9), de la volatilidad  $\sigma_t$ , toma la forma

$$d\sigma_t(\sigma_t, t) = \alpha(\sigma_t) dt + \beta(\sigma_t) dW_t \quad (11)$$

donde la tendencia  $\alpha(\sigma_t)$  y la volatilidad de la volatilidad  $\beta(\sigma_t)$  son funciones sólo de  $\sigma_t$  y no del precio  $S_t$  del activo y del tiempo  $t$ ; y donde además los procesos brownianos asociados con los procesos de volatilidad  $\sigma_t$  y de precios  $S_t$  no tienen correlación. Este modelo presenta características compatibles con los datos históricos de la volatilidad del activo subyacente y ha mostrado ser adecuado en el estudio del comportamiento de la volatilidad en el precio de un activo; sólo se requiere la existencia de datos que registren el valor que toma el activo subyacente a través del tiempo.

Antes de proceder a la descripción del modelo, es conveniente definir la densidad de probabilidad en estado estable de un proceso estocástico y la ecuación de Fokker-Planck asociada a dicha densidad.

### 8.1 Densidad de probabilidad en estado estable

Suponga que se tiene un proceso estocástico  $X = \{x_t, t \in I = [0, \infty]\}$  descrito por la ecuación diferencial estocástica general para la variable  $x = x_t$

$$dx = A(x, t)dt + B(x, t)dW \quad (12)$$

donde  $W$  es un movimiento browniano. Si  $s, t \in I$  con  $s \leq t$  y  $B$  es un conjunto de Borel sobre  $\mathbb{R}$ , entonces la probabilidad de que el proceso estocástico  $X$  cambie del estado  $x$  a

un estado  $y \in B$  en el intervalo  $[s, t]$ , se conoce como probabilidad de transición. Esta probabilidad es denotada  $\mathbb{P}(s, x ; t, y)$  y se determina por la siguiente relación Kloeden y Platen (1992)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(s, x ; t, B) &= \mathbb{P}(X_t \in B | X_s = x) \\ &= \mathbb{P}(\{w \in \Omega : X_t(w) \in B\} | X_s = x) \\ &= \int_B p(s, x ; t, y) dy \end{aligned} \tag{13}$$

donde  $p(s, x ; t, y)$  se denomina densidad de transición y corresponde a la probabilidad de que la variable  $x$  se mueva del estado  $(s, x)$  en el tiempo  $s$  al estado  $(t, y)$  en el tiempo  $t$ . Así, en la medida de probabilidad  $\mathbb{P}(s, x ; t, B)$  se consideran todas las formas posibles como un fenómeno o sistema puede evolucionar hacia un estado  $y \in B$ , a partir de un estado anterior  $x$  a lo largo de un tiempo finito  $t - s$ .

La densidad de probabilidad en estado estable, o también llamada estacionaria o incondicional,  $\phi(r)$ , en caso de que exista, es una densidad a largo plazo cuando  $t \rightarrow \infty$ , y se calcula como

$$\phi(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) p(s, x ; t, r) dx \tag{14}$$

resultando independiente del estado inicial del proceso estocástico  $X$ .

## 8.2 Ecuación de Fokker-Planck

La ecuación de Fokker-Planck es una ecuación diferencial parcial parabólica con condición inicial en el tiempo  $s$  y que se resuelve para un tiempo  $t > s$ . Esta ecuación toma la forma

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (B(y, t)^2 p) - \frac{\partial}{\partial y} (A(y, t) p) \tag{15}$$

en la ecuación anterior se aprecia el comportamiento probabilístico de la densidad de transición  $p(s, x ; t, y)$  asociada al proceso estocástico  $X$ . Dicha ecuación puede ser utilizada para conocer la distribución de los valores que el proceso  $X$  puede tomar en el tiempo  $t$ , dado que su estado inicial se conoce en el tiempo  $s$ . La forma de esta ecuación puede deducirse de manera natural a partir de la función densidad de transición  $p(s, x ; t, y)$  y haciendo una aproximación trinomial de la caminata aleatoria definida por  $X$  (véase Wilmott (2000)).

### 8.3 Descripción del modelo empírico de volatilidad estocástica

Si se conocen las formas funcionales  $\alpha(\sigma_t)$  y  $\beta(\sigma_t)$ , la ecuación (11) queda completamente determinada, y con este objetivo, el modelo se desarrolla de la siguiente manera:

1. Supone que la forma funcional de  $\beta(\sigma_t)$  es

$$\beta(\sigma_t) = \phi \sigma_t^\gamma \quad (16)$$

con  $\phi$  y  $\gamma$  siendo constantes que se deben hallar a partir de la serie de tiempo de precios  $S_t$  del activo subyacente. La forma funcional para  $\beta(\sigma_t)$  debe ajustarse de la manera más precisa a los cambios reflejados a corto plazo por la volatilidad  $\sigma_t$ .

A partir de (11), al considerar que  $dW_t = \sqrt{dt}\zeta$  con  $\zeta \sim \mathcal{N}(0, 1)$  y que si  $\zeta \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , entonces  $\zeta^2 \sim \chi_1^2$ , se obtienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} (d\sigma)^2 &= \beta(\sigma_t)^2 \zeta^2 dt \\ \mathbb{E}(d\sigma)^2 &= \beta(\sigma_t)^2 dt \underbrace{\mathbb{E}[\zeta^2]}_{=1} \\ &= \beta(\sigma_t)^2 dt \end{aligned}$$

donde se aplicó que  $(dt)^2 = dt dW_t = 0$  por tratarse de diferenciales de orden mayor que 1. Ahora, tomando logaritmo natural en ambos lados de la última igualdad, se verifica que

$$\ln \mathbb{E}(d\sigma)^2 = 2 \ln \beta(\sigma_t) + \ln dt$$

Por otro lado, si a partir de la serie de tiempo de precios del activo subyacente, se hace una regresión lineal entre las variables  $\ln \mathbb{E}(d\sigma)^2$  y  $\ln(\sigma_t)$ , entonces la recta de regresión puede escribirse para  $a$  y  $b$  constantes del siguiente modo

$$\ln \mathbb{E}(d\sigma)^2 = a + b \ln(\sigma_t) + \varepsilon$$

donde  $\varepsilon$  es la perturbación entre la regresión lineal y los datos observados. La expresión anterior puede escribirse de manera equivalente como

$$2 \ln \beta(\sigma_t) + \ln dt = a + b \ln(\sigma_t).$$

En diversas series de tiempo financieras, es frecuente hacer la regresión lineal que se ha indicado: véase, por ejemplo, Oztukel y Wilmott (1998) y Wilmott (2000); en dichas series se confirma empíricamente un ajuste lineal.

Si de la última ecuación despejamos  $\beta(\sigma_t)$  se obtienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\ln \beta(\sigma_t) &= \frac{1}{2}(a - \ln dt) + \frac{b}{2} \ln \sigma_t \\ \beta(\sigma_t) &= \exp \left[ \frac{1}{2}(a - \ln dt) \right] \sigma_t^{b/2}.\end{aligned}$$

Por último, al comparar la última igualdad con la ecuación (16) resulta que

$$\phi = \exp \left[ \frac{1}{2}(a - \ln dt) \right] \quad (17)$$

y

$$\gamma = \frac{b}{2} \quad (18)$$

lo cual justifica el supuesto inicial de que  $\beta(\sigma_t) = \phi \sigma_t^\gamma$ .

2. Considere la función densidad de probabilidad para  $\sigma_t$ ,  $p(\sigma_t, t)$ . Si la anterior densidad existe en estado estable y la denotamos por  $p_\infty(\sigma_t)$ , y si además se supone que  $p_\infty(\sigma_t)$  es una densidad lognormal, entonces a partir de conocer  $p_\infty(\sigma_t)$  y  $\beta(\sigma_t)$  puede calcularse la forma funcional de  $\alpha(\sigma_t)$  a través de la denominada ecuación de Fokker-Planck.

La ecuación de Fokker-Planck, satisfecha por la densidad de probabilidad  $p(\sigma_t, t)$  asociada a la volatilidad  $\sigma_t$  y que a veces se denomina como ecuación de Kolmogorov hacia adelante, se presenta como:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} (\beta^2 p) - \frac{\partial}{\partial \sigma} (\alpha p)$$

donde al hacer que  $t \rightarrow \infty$ , con lo cual  $p = p_\infty(\sigma_t)$  y así  $\partial p / \partial t = 0$  se llega a:

$$\begin{aligned}\frac{d(\alpha(\sigma_t)p_\infty)}{d\sigma_t} &= \frac{1}{2} \frac{d^2(\beta(\sigma_t)^2 p_\infty)}{d\sigma_t^2} \\ \alpha(\sigma_t) &= \frac{1}{2p_\infty} \int \frac{d^2(\beta(\sigma_t)^2 p_\infty)}{d\sigma_t^2} d\sigma_t \\ \alpha(\sigma_t) &= \frac{1}{2p_\infty} \frac{d(\beta(\sigma_t)^2 p_\infty)}{d\sigma_t} + \frac{c}{p_\infty}\end{aligned}$$

La constante de integración  $c$  resulta ser cero de acuerdo a las condiciones de la distribución  $p(\sigma_t)$  en estado estable; véanse Oztukel y Wilmott (1998) y Wilmott (2000). De esta manera se obtiene

$$\alpha(\sigma_t) = \frac{1}{2p_\infty} \frac{d(\beta(\sigma_t)^2 p_\infty)}{d\sigma_t} \quad (19)$$

Ahora, dado que la distribución de  $p_\infty$  es lognormal, su forma es

$$p_\infty(\sigma_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varrho\sigma_t} \exp\left\{-\frac{1}{2\varrho^2} \left(\ln \frac{\sigma_t}{\bar{\sigma}}\right)^2\right\} \quad (20)$$

donde los coeficientes  $\varrho$  y  $\bar{\sigma}$  pueden estimarse por máxima verosimilitud para una distribución lognormal, a partir de la serie de volatilidades móviles anualizadas. Al sustituir (20) en (19), se obtiene que

$$\alpha(\sigma_t) = \phi^2 \sigma_t^{2\gamma-1} \left( \gamma - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\varrho^2} \ln\left(\frac{\sigma_t}{\bar{\sigma}}\right) \right) \quad (21)$$

En resumen, el modelo empírico de volatilidad estocástica establece que el comportamiento en la volatilidad  $\sigma_t$  de un activo financiero con precio  $S_t$  se describe por

$$\begin{aligned} d\sigma_t(\sigma_t, t) &= \alpha(\sigma_t) dt + \beta(\sigma_t) dW_t \\ \beta(\sigma_t) &= \phi \sigma_t^\gamma \\ \phi &= \exp\left[\frac{1}{2}(a - \ln dt)\right] \\ \gamma &= \frac{b}{2} \\ \alpha(\sigma_t) &= \phi^2 \sigma_t^{2\gamma-1} \left( \gamma - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\varrho^2} \ln\left(\frac{\sigma_t}{\bar{\sigma}}\right) \right) \end{aligned} \quad (22)$$

donde las constantes  $a$  y  $b$  se calculan por una regresión lineal entre las variables  $\ln \mathbb{IE}(d\sigma)^2$  y  $\ln(\sigma_t)$ ; y las constantes  $\varrho$  y  $\bar{\sigma}$  resultan de un ajuste lognormal para la función densidad de probabilidad en estado estable  $p_\infty$  de  $\sigma_t$ .

## 9. Resultados empíricos

Para el análisis del S&P 500 de EEUU, el IPC de México y el IGBC de Colombia, se tomó una muestra desde el 2 de enero de 2003 hasta el 19 de abril de 2007. Las bases de datos fueron tomadas de Reuters©.

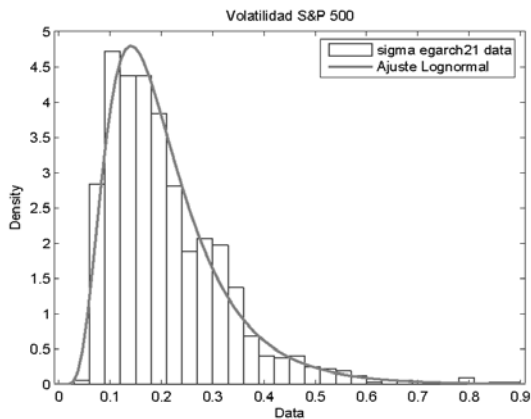
## 9.1 Resultados en tiempo discreto

En el Cuadro 1 se muestran las estimaciones realizadas, a partir de los modelos en tiempo discreto, para las volatilidades de los rendimientos de las series S&P 500, IPC y el IGBC. Puede observarse que para la primera serie, el modelo estimado resultó un EGARCH(2,1), para la segunda, un modelo EGARCH(1,1) y para la tercera, un modelo GARCH(1,1). Los anteriores modelos se estimaron bajo el supuesto de innovaciones gaussianas utilizando el software *EViews*

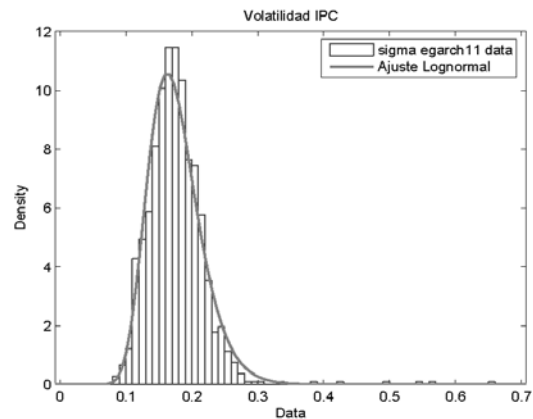
Parámetros estimados	S&P 500 EGARCH(2,1)	IPC EGARCH(1,1)	IGBC GARCH(1,1)
$\delta_0$	-0.152974	-0.773267	8.73E-06
$\delta_1$	-0.176684	0.156517	0.297574
$\delta_2$	0.235608	NA	NA
$\gamma$	-0.078257	-0.137086	NA
$\theta$	0.989314	0.929084	0.695175

Cuadro 1: Estimación de los Modelos Discretos.

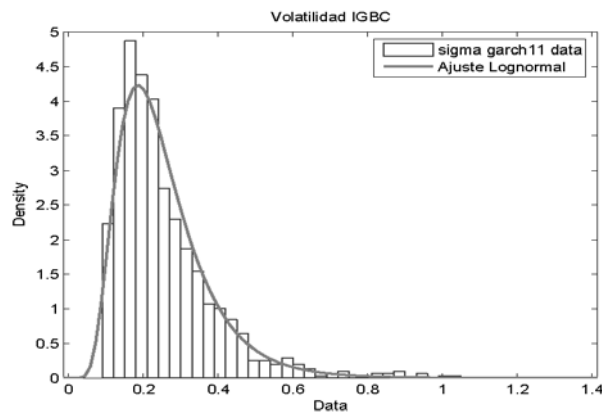
En la Gráfica 3, se muestra para cada una de las series mencionadas, la densidad de probabilidad simulada de la volatilidad de los rendimientos en un posible escenario. Las simulaciones fueron implementadas en MATLAB©. En esta gráfica se muestra un ajuste lognormal a las volatilidades de los rendimientos de las series S&P 500, IPC y el IGBC, como también el *valor p* asociado con la prueba de Kolmogorov–Smirnov para una muestra, donde la distribución hipotética es la distribución lognormal. En cada caso, la prueba de Kolmogorov–Smirnov sugiere que la volatilidad de los rendimientos de las series financieras descritas, siguen una distribución lognormal, a un nivel de significancia de 0.05, dado que el *valor p* fue mayor que 0.05 en cada uno de los escenarios simulados.



(a) Volatilidad del S&P 500. *valor p* = 0.2907



(b) Volatilidad del IPC. *valor p* = 0.1899



(c) Volatilidad del IGBC. *valor p* = 0.0557

Gráfica 3: Volatilidad de los rendimientos en el modelo discreto para las series financieras S&P 500, IPC, y el IGBC.

En cada gráfica se muestra el *valor p* asociado a la prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov para una muestra a un nivel de significancia de 0.05.

## 9.2 Resultados en tiempo continuo

La metodología de estimación de los parámetros  $\phi$ ,  $\gamma$ ,  $\varrho$ , y  $\bar{\sigma}$  en el modelo continuo de volatilidad estocástica fue implementada en Microsoft© Office Excel y se describe a continuación.



### 9.2.1 Implementación en Excel de la estimación del modelo continuo de volatilidad estocástica

1. Se obtiene la serie de rendimientos logarítmicos diarios a partir de la serie de precios.
2. Se calcula la serie de volatilidades para los rendimientos mediante media móvil simple en una ventana de tamaño 15, y se anualiza.
3. Se estiman los parámetros  $\varrho$  y  $\bar{\sigma}$  por máxima verosimilitud para una distribución lognormal. Lo anterior se realiza considerando la serie anualizada,  $\sigma_t$ , de volatilidades por medias móviles, en ventanas de 15 días, asociada a la serie de los rendimientos logarítmicos. Para anualizar dicha serie se toman 250 días de negociación por año.
4. Se calcula la serie anualizada  $(d\sigma_t)^2$ , donde  $(d\sigma_t)$  son diferencias simples calculadas a partir de la serie  $\sigma_t$  definida anteriormente.
5. Se agrupa en clases la variable  $\sigma_t$  y se calcula su frecuencia relativa en cada clase.
6. Para dichas clases se calculan las variables  $\ln(\sigma_t)$ , a partir de las marcas de clase definidas antes, y  $\ln[\mathbb{E}(d\sigma_t)^2]$ , de modo usual, y se hace la regresión entre ellas, sugerida en la sección (8.3).
7. Se estiman los parámetros  $\phi$  y  $\gamma$  a partir de la regresión realizada.

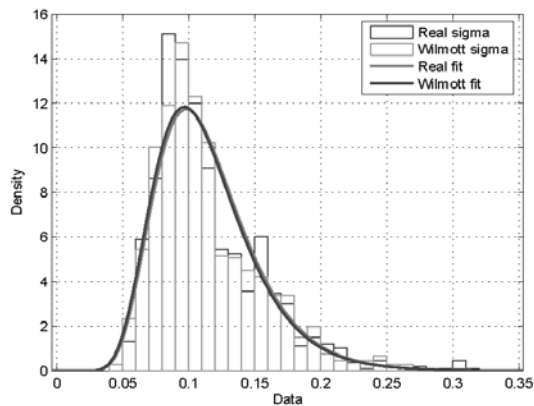
En el Cuadro 2 se muestran las estimaciones realizadas para la volatilidad de los rendimientos de las series S&P 500, IPC y el IGBC, a partir del modelo continuo de volatilidad estocástica desarrollado.

Parámetros estimados	S&P 500	IPC	IGBC
$\phi$	0.410750	0.681834	1.133636
$\gamma$	0.508400	0.664150	0.838150
$\varrho$	0.327664	0.346323	0.554850
$\bar{\sigma}$	0.109319	0.152458	0.171367

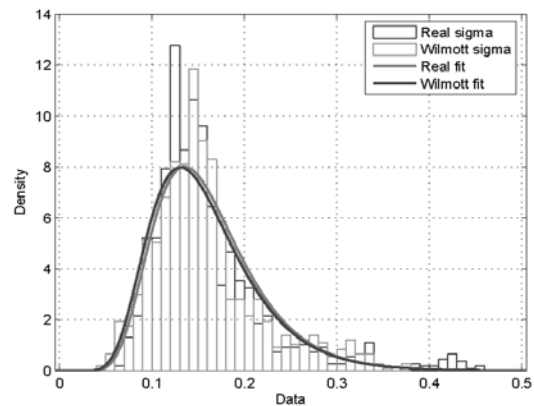
Cuadro 2: Estimación del modelo continuo.

Con las estimaciones mostradas en el Cuadro 2 es posible realizar algunas simulaciones de la volatilidad de los rendimientos para las series establecidas. De esta manera, en

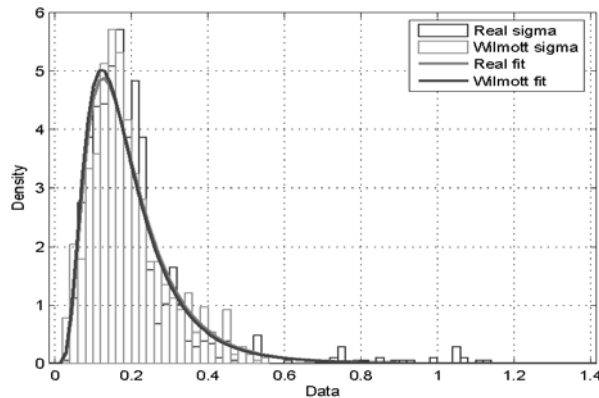
la Gráfica 4 se muestran las funciones densidad de probabilidad, *real* y *simulada*, para un posible escenario, de cada una de series financieras, S&P 500, IPC y el IGBC. Las simulaciones fueron implementadas en MATLAB<sup>®</sup>. Debe notarse que la densidad real corresponde a la densidad de probabilidad para la serie de la volatilidad anualizada de los rendimientos, mediante media móvil simple en una ventana de tamaño 15, y la simulada, corresponde a la densidad de probabilidad para la serie de datos simulados, obtenidos con las ecuaciones dadas en (22). La Gráfica 4 también muestra los ajustes lognormales para las densidades así definidas, dado que la construcción del modelo continuo, desarrollado en la sección 8, considera que la función densidad de probabilidad de  $\sigma_t$  existe en estado estable, y se supone que en tal estado es lognormal.



(a) Volatilidad del S&P 500. *valor*  $p = 0.6435$



(b) Volatilidad del IPC. *valor*  $p = 0.1565$



(c) Volatilidad del IGBC. *valor*  $p = 0.1421$

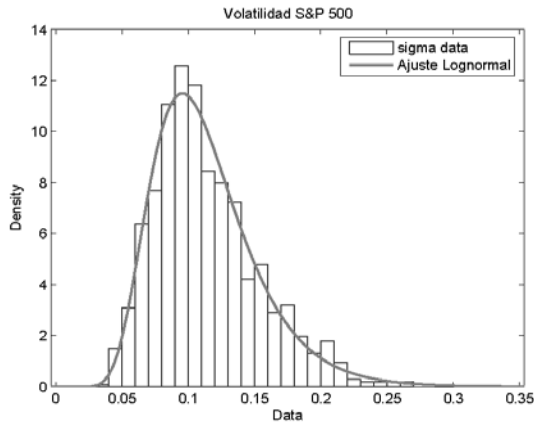
Gráfica 4: Volatilidad de los rendimientos en el modelo continuo para las series financieras S&P 500, IPC, y el IGBC.

En cada gráfica se muestra el *valor p* asociado a la prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov para una muestra a un nivel de significancia de 0.05.

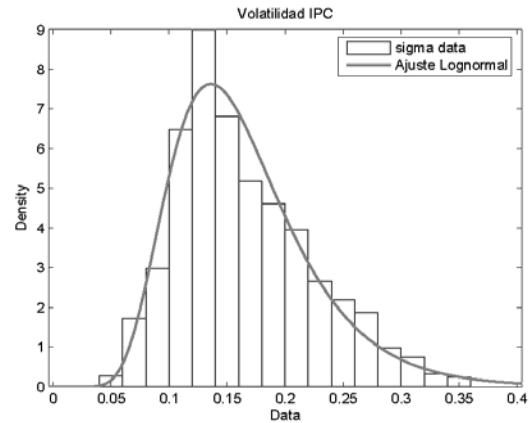
Por otra parte, la Gráfica 4 muestra el *valor p* correspondiente a la prueba de bondad de ajuste Kolmogorov-Smirnov para dos muestras a un nivel de significancia de 0.05, en cada escenario simulado. La hipótesis nula de la prueba,  $H_0$ , es que ambas muestras, real y simulada, provienen de una misma distribución continua y la hipótesis alternativa,  $H_1$ , es que las muestras provienen de diferente distribución continua.

También puede observarse, en la Gráfica 4, que para los escenarios simulados la prueba sugiere que las muestras, real y simulada, provienen de una misma distribución de probabilidad continua, dado que el *valor p* fue mayor que 0.05 en cada caso.

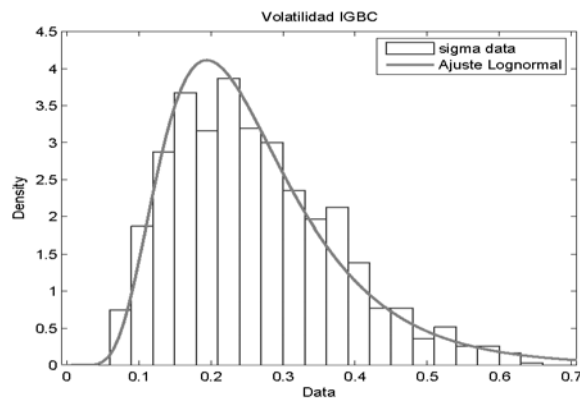
Por último, la Gráfica 5 muestra un ajuste lognormal a las series S&P 500, IPC y el IGBC, como también el *valor p* asociado con la prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra, donde la distribución hipotética es la distribución lognormal. En cada caso, la prueba de Kolmogorov-Smirnov sugiere que la volatilidad de los rendimientos de las series financieras descritas, siguen una distribución lognormal, a un nivel de significancia de 0.05, dado que el *valor p* fue mayor que 0.05 en cada uno de los escenarios simulados.



(a) Volatilidad del S&P 500. *valor p* = 0.8681



(b) Volatilidad del IPC. *valor p* = 0.2957



(c) Volatilidad del IGBC. *valor p* = 0.1779

Gráfica 5: Volatilidad de los rendimientos en el modelo continuo para las series financieras S&P 500, IPC, y el IGBC.

En cada gráfica se muestra el *valor p* asociado a la prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov para una muestra a un nivel de significancia de 0.05.

## 10. Conclusiones

Se estimaron los parámetros para los índices bursátiles S&P 500 de EEUU, IPC de México y el IGBC de Colombia, bajo la familia de modelos ARCH, que son en tiempo discreto, y bajo un modelo empírico de volatilidad estocástica en tiempo continuo.

Es razonable estimar la volatilidad de estos índices bajo los modelos ARCH o bajo el modelo empírico en tiempo continuo. Estos modelos pueden ser aplicados posteriormente en la evolución temporal de la distribución de la volatilidad y en la valuación de derivados sobre dichos índices, ya que en un gran número de escenarios simulados, en ambos casos, se reflejan características probabilísticas comunes de las series simuladas, concretamente, que la distribución de la volatilidad de los rendimientos es lognormal, bajo la prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov.

## Bibliografía

- Oztukel, A, and P. Wilmott (1998). "Uncertain Parameters, an Empirical Stochastic Volatility Model and Confidence Limits". *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. Vol. 1, No. 1, pp. 175-189.
- Baillie, R. T, T. Bollerslev, and H. O. Mikkelsen (1996). "Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*. Vol. 74, No. 1, pp. 3-30.
- Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy*. Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
- Bollerslev, T. (1986). "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, Vol. 31, pp. 307-327.
- Derman, E and I. Kani (1994). "Riding on a Smile", *Risk*, Vol 7, No. 2, pp. 32-39.
- Doran, J. S. and E. I. Ronn, (2004). "On the Market Price of Volatility Risk". Florida State University and University of Texas at Austin.
- Dupire, B. (1994). "Pricing on a Smile", *Risk*, Vol 7, No. 1, pp. 18-20.
- Engle, R. (1982). "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflations". *Econometrica*, Vol. 50, pp. 987-1008.
- Fama, E. (1965). "The Behaviour of Stock Prices", *Journal of Business*, Vol. 38, pp. 34-105.
- Heston, S. I. (1993). "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options". *Review of Financial Studies*, Vol. 6, No. 2, pp. 327-343.
- Hull, J. and A. White, 1987. "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatility". *Journal of Finance* Vol. 42, No. 2, pp. 281-300.
- Hull, C. John, Options Futures and Other Derivatives. 6th ed. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall. 2005.
- Kloeden, P. and E. Platen (1992). Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer-Verlag. Second corrected printing. Deakin University, Australian National University; Australia.
- Mandelbrot, B. (1963). The Variation of Certain Speculative Prices, *Journal of Business*, 36, 394-419.
- Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Bell Journal of Economics*, Vol.4, No. 1, pp. 141-183.

- Nelson, D. (1991). "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, Vol. 59, pp. 347-370.
- Robinson, P. M. (1991). "Testing for Strong Serial Correlation and Dynamic Conditional Heteroskedasticity in Multiple Regression," *Journal of Econometrics*, Vol. 47, pp. 67-84.
- Rubinstein, M. (1994). "Implied Binomial Trees". *Journal of Finance*. Vol. 49., No. 3, pp. 771-818.
- Scott, L. O. (1987). "Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation, and an Application". *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*. Vol. 22, No. 4, pp. 419-438.
- Stein, E. M. and Stein, J. C. (1991). "Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach". *The Review of Financial Studies*. Vol. 4, No. 4, pp. 727-752.
- Tsay, R. (2005). *Analysis of Financial Time Series*. John Wiley & Sons, INC. Second Edition.
- Wiggins, J. B. (1987). "Option Values under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. Vol. 19, pp. 351-372.
- Wilmott, P. (1998). *Derivatives (The Theory and Practice of Financial Engineering)*. John Wiley & Sons, England.
- Wilmott, P. (2000). *Paul Wilmott on Quantitative Finance*. Volume one. John Wiley & Sons, England.
- Zakoïan, J. (1994). "Threshold Heteroskedastic Models". *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 18, pp. 931-944.