Business cycle arithmetic: time variation measures and their relations

Rapacciuolo, Ciro

Centro Studi Confindustria

December 2002

L'ARITMETICA DEL CONGIUNTURALISTA: MISURE DI CONFRONTO TEMPORALE E LORO RELAZIONI

di

Ciro Rapacciuolo

Dicembre 2002 **CsC Working Paper n. 31**

L'ARITMETICA DEL CONGIUNTURALISTA: MISURE DI CONFRONTO TEMPORALE E LORO RELAZIONI

Ciro Rapacciuolo
Centro Studi Confindustria
Viale dell'Astronomia, 30
00144 Roma
Tel. 06 5903544
Fax 06 5918348
E-Mail: crapacciuolo@confindustria.it

Abstract

This paper tries to establish mathematical relationships between some of the most used concepts in the analysis of cyclical developments, such as the month-on-month and year-on-year percentage variations, or the annual rate of growth. Some of these relationships are already used in practice, but up to now never demonstrated in a formal way. The ultimate aim is to develop a set of precise analytical tools for the short term analysis of high frequency variables. Analytical derivations are followed by various empirical examples based on data on main Italian economic variables, both monthly (such as the consumer price index) and quarterly variables (like gross domestic product) for the most recent years, in order to illustrate the theoretical relationships and clarify their practical uselfuness.

Keywords: miscellaneous mathematical tools, business fluctuations

JEL Classification:C65, E32

Questo lavoro deve molto ai suggerimenti di Pasquale Capretta e Marco Malgarini ed alle lunghe e proficue discussioni con Giovanni Foresti. Le derivazioni analitiche nella prima parte del paragrafo 3.*d si devono a Giovanni Foresti*.

Indice

1. Introduzione

Con il termine congiuntura economica si definisce la combinazione, in ogni momento, di fenomeni economici che determinano una particolare evoluzione, o tendenza, del sistema economico; questa combinazione varia continuamente per il manifestarsi di nuovi eventi, anche ad intervalli di tempo molto ravvicinati, così che ogni congiuntura economica è diversa dalle precedenti e produce evoluzioni e tendenze differenti (Innocenzo Cipolletta, "*Congiuntura economica e previsione. Teoria e pratica dell'analisi congiunturale*", Il Mulino, 1992). L'analisi congiunturale è lo studio della congiuntura economica, ovvero delle fluttuazioni tra i vari possibili scenari, positivi e negativi, in cui l'economia potrebbe venirsi a trovare. L'analisi congiunturale è una pratica complessa che si basa su attenta selezione dell'informazione, conoscenza della teoria economica e degli strumenti statistici e matematici per trattare gli innumerevoli dati statistici esistenti, nonchè esperienza nel vagliare tutti i segnali disponibili. Si tratta della continua osservazione del sistema economico, con attenzione alle variazioni di breve termine, in cui si fondono la descrizione del passato con l'anticipazione del futuro. Nella pratica il congiunturalista tenta infatti di farsi un'idea più precisa possibile della situazione economica presente effettuando un raffronto con il recente passato e una proiezione delle tendenze per l'avvenire.

Su questa stretta connessione tra studio del passato e previsione si fondano le tecniche di analisi che sono state sviluppate, ovvero alcuni strumenti e metodi che aiutano nel trattare ed organizzare l'informazione congiunturale. Il lavoro del congiuturalista consiste in primo luogo nella raccolta ed organizzazione dell'informazione avente rilevanza congiunturale. Nel limite del possibile si prediligono le informazioni a più alta frequenza: soprattutto quelle mensili (o quelli trimestrali in loro assenza) e quelle annuali solo come punto di riferimento. E si cerca di essere il più aggiornati possibile: infatti un valore medio, relativo ad un intervallo di tempo lungo, finisce per nascondere movimenti di più breve termine la cui conoscenza può risultare particolarmente utile per il congiunturalista. Questo vale a maggior ragione quando si effettuino confronti delle variabili tra due intervalli di tempo che sono la base di ogni analisi congiunturale; infatti questa, essendo un'operazione ripetuta continuamente, si avvale essenzialmente di misure di confronto tra due intervalli di tempo successivi. Tali misure sono usate comunemente: ad esempio si dice che nel novembre 2002 i prezzi al consumo sono aumentati dello 0,3% rispetto al mese di ottobre; una tale variazione si definisce "variazione congiunturale". I confronti temporali possono però indurre a qualche errore: ad esempio, quando si fa ricorso a variazioni medie annue occorre sempre tener conto che esse nascondono l'evoluzione congiunturale in corso d'anno; la variazione media annua può fornire messaggi fuorvianti specie quando si tratta di formulare ipotesi sul futuro, proprio perchè la tendenza in corso viene nascosta dal dato di sintesi.

Il fatto che l'analisi attenta del recente passato sia essenziale per la previsione è ben illustrato dalla scomposizione della variazione media annua in due parti: la prima, il cosiddetto "acquisito" (o "trascinamento") che spiega quanta parte della variazione media annua dell'anno *a* si è determinata nell'anno precedente, ovvero l'eredità che l'anno $a-1$ lascia al successivo; la seconda, che sintetizza la variazione nell'anno di riferimento ed è quella che sintetizza il profilo ciclico di tale anno. Se questo è un anno di previsione allora il calcolo dell'acquisito rappresenta una prima stima parziale della variazione media annua di tale anno: questa scomposizione ci dice che se la variabile in esame rimanesse ferma all'ultimo livello conosciuto la variazione media annua sarebbe pari all'acquisito.

Se la variazione percentuale di una variabile non è riferita al mese precedente ma allo stesso mese dell'anno precedente allora tale variazione viene detta "variazione tendenziale"; queste variazioni sono spesso usate nell'analisi congiunturale perchè consentono una sia pur approssimativa eliminazione della stagionalità e della irregolarità ma, per quanto utili, presentano alcuni inconvenienti. In effetti esse dipendono non solo dall'evoluzione della variabile nell'anno in esame ma anche da quella nell'anno precedente sicchè variazioni congiunturali e tendenziali possono fornire indicazioni contrastanti: la serie di variazioni tendenziali può essere crescente, stazionaria o decrescente senza che la variabile cui si riferisce sia in aumento, stazionaria o in riduzione. Ciò significa che le variazioni tendenziali devono essere sempre usate con attenzione e conoscendo la dinamica di breve termine che esse necessariamente nascondono.

Lo scopo di questo paper è proprio quello di chiarire in che relazione stanno talune di queste misure, che rappresentano gli strumenti dell'analisi congiunturale. Ci si propone infatti di identificare alcune utili relazioni esistenti tra le diverse misure che l'analisi congiunturale utilizza in riferimento a variabili economiche ad elevata frequenza, come gli indici mensili. I risultati si possono quindi riferire a variabili economiche cruciali quali l'indice dei prezzi al consumo, o la produzione industriale. Ma l'analisi si estende facilmente a variabili trimestrali, come il prodotto interno lordo. Ci riferiamo a misure quali le variazioni tendenziali (ovvero a dodici mesi) e quelle congiunturali (ossia ad un mese) di un indice, tra le quali è possibile individuare delle precise relazioni funzionali. Anche la crescita media annua, il trascinamento (ovvero come l'andamento dell'indice nell'anno precedente influenza la crescita media annua dell'anno in corso) e l'acquisito (cioè quale sarebbe la crescita media annua se da un certo mese in poi l'indice restasse fermo fino alla fine dell'anno) possono essere messi in precise relazioni.

Il fine della nostra analisi è quello di fornire un supporto analitico certo a delle relazioni tra queste misure spesso ipotizzate ed anche utilizzate correntemente nell'analisi congiunturale (ma non dimostrate e quindi lasciate, per così dire, in sospeso) e per questa via dare ad esse maggior forza e attendibilità. Le derivazioni analitiche saranno poi corredate di numerosi esempi riferiti a variabili economiche italiane, scelte tra quelle mensili (come l'indice dei prezzi al consumo) e trimestrali (come il prodotto interno lordo) negli anni più recenti, che hanno lo scopo di illustrare le relazioni individuate e di chiarirne l'utilità pratica.

Il lavoro è organizzato come segue: il paragrafo 2 individua le relazioni esistenti tra le variazioni tendenziali e quelle congiunturali;

il paragrafo 3 costruisce una serie di risultati relativi alla crescita media annua, mettendola in relazione con trascinamento, aquisito e variazioni congiunturali ed estendendo poi tali risultati alle variabili trimestrali; infine, il paragrafo 4 esplicita la relazione tra crescita media annua e variazioni tendenziali. In appendice riportiamo i dati relativi agli esempi numerici citati nel testo.

2. Variazioni congiunturali e tendenziali

Si dimostra che per un indice mensile $I_t > 0$, dove t indica il mese, vale la seguente relazione tra le variazioni congiunturali e quelle tendenziali:

$$cong_t - cong_{t-12} \Leftrightarrow tend_t - tend_{t-1}, \forall t$$

laddove:

$$cong_t = \frac{I_t - I_{t-1}}{I_{t-1}}$$
$$tend_t = \frac{I_t - I_{t-12}}{I_{t-12}}$$

In altri termini, condizione necessaria e sufficiente affinchè la variazione tendenziale sia in aumento (diminuzione) su quella del mese precedente è che la variazione congiunturale sia maggiore (minore) di quella registrata nello stesso mese dell’anno precedente. Allo stesso modo, se la variazione congiunturale è esattamente uguale a quella dello stesso mese dell’anno precedente, allora la variazione tendenziale rimarrà invariata su quella del mese scorso.

Dimostrazione:

$$cong_t > cong_{t-12} \Leftrightarrow tend_t > tend_{t-1}$$

$$\frac{I_t - I_{t-1}}{I_{t-1}} > \frac{I_{t-12} - I_{t-13}}{I_{t-13}} \Leftrightarrow \frac{I_t - I_{t-12}}{I_{t-12}} > \frac{I_{t-1} - I_{t-13}}{I_{t-13}}$$

$$\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1 > \frac{I_{t-12}}{I_{t-13}} - 1 \Leftrightarrow \frac{I_t}{I_{t-12}} - 1 > \frac{I_{t-1}}{I_{t-13}} - 1$$

$$\frac{I_t}{I_{t-1}} > \frac{I_{t-12}}{I_{t-13}} \Leftrightarrow \frac{I_t}{I_{t-12}} > \frac{I_{t-1}}{I_{t-13}}$$

$$\frac{I_t}{I_{t-12}} > \frac{I_{t-1}}{I_{t-13}} \Leftrightarrow \frac{I_t}{I_{t-12}} > \frac{I_{t-1}}{I_{t-13}} \qquad C.V.D.$$

Ad esempio, l'indice italiano dei prezzi al consumo per l'intera collettività ha registrato nell'ottobre 2002 un congiunturale del +0,25%, in aumento rispetto al congiunturale del +0,17% dell'ottobre 2001 (tab.1A in appendice). Dalla relazione appena dimostrata si deduce quindi immediatamente che il tendenziale dell'ottobre 2002 dovrebbe risultare in aumento rispetto a quello del settembre 2002 e i dati confermano che esso si è portato a +2,66%, contro il +2,58% del settembre 2002.

In diretta derivazione dalla relazione precedente, troviamo inoltre che:

$$(tend_t - tend_{t-1}) = (cong_t - cong_{t-12}) \cdot \frac{I_{t-1}}{I_{t-12}}$$

$$\frac{I_{t-1}}{I_{t-12}} \neq 1$$

ovvero l'aumento (diminuzione) della variazione tendenziale rispetto al mese precedente è pari all'aumento (diminuzione) della variazione congiunturale rispetto all'anno precedente moltiplicato per il rapporto $\frac{I_{t-1}}{I_{t-12}}$ che esprime l'andamento dell'indice nei dodici mesi precedenti.

Dimostrazione:

Per la relazione precedente possiamo affermare che, se:

$$cong_t = X + cong_{t-12}$$
$$X > 0$$

allora si ha:

$$tend_t = Y + tend_{t-1}$$
$$Y > 0$$

in altri termini:

$$\frac{I_t \text{ 뱅} I_{t\text{뱅}}}{I_{t\text{뱅}}} \text{ ㅄㄱ} X \text{ ㅅㅅ} \frac{I_{t\text{뱅}2} \text{ 뱅} I_{t\text{뱅}3}}{I_{t\text{뱅}3}}$$

$$X \text{ ㅄㄷ} 0$$

$$\frac{I_t \text{ 뱅} I_{t\text{뱅}2}}{I_{t\text{뱅}2}} \text{ ㅄㄱ} Y \text{ ㅅㅅ} \frac{I_{t\text{뱅}} \text{ 뱅} I_{t\text{뱅}3}}{I_{t\text{뱅}3}}$$

$$Y \text{ ㅄㄷ} 0$$

per i nostri fini, si tratta di determinare Y in funzione di X. Possiamo riscrivere la prima equazione:

$$\frac{I_t}{I_{t\text{뱅}}} \text{ 뱅}1 \text{ ㅄㄱ} X \text{ ㅅㅅ} \frac{I_{t\text{뱅}2}}{I_{t\text{뱅}3}} \text{ 뱅}1$$

$$\frac{I_t}{I_{t\text{뱅}}} \text{ ㅄㄱ} X \text{ ㅅㅅ} \frac{I_{t\text{뱅}2}}{I_{t\text{뱅}3}}$$

moltiplicando entrambi i membri per $I_{t\text{뱅}}$ e poi dividendo per $I_{t\text{뱅}2}$ otteniamo:

$$\frac{I_t}{I_{t\text{뱅}2}} \text{ ㅄㄱ} X \text{ ㅅㅈ} \frac{I_{t\text{뱅}}}{I_{t\text{뱅}2}} \text{ ㅅㅅ} \frac{I_{t\text{뱅}}}{I_{t\text{뱅}3}}$$

$$X \text{ ㅅㅈ} \frac{I_{t\text{뱅}}}{I_{t\text{뱅}2}} \text{ ㅄㄱ} \frac{I_t}{I_{t\text{뱅}2}} \text{ 뱅} \frac{I_{t\text{뱅}}}{I_{t\text{뱅}3}}$$

la seconda equazione può essere, similmente, riscritta come:

$$Y = \frac{I_t}{I_{t-12}} - \frac{I_{t-1}}{I_{t-13}}$$

e quindi sostituendo la prima nella seconda, otteniamo:

$$Y = X \times \frac{I_{t-1}}{I_{t-12}} \qquad C.V.D.$$

Tornando all'esempio precedente relativo all'indice italiano dei prezzi al consumo per l'intera collettività, si tratta di un indice tipicamente crescente in un arco di dodici mesi, per cui in questo caso si ha di solito $\frac{I_{t-1}}{I_{t-12}} > 1$; in altri termini, si ha che l'aumento della variazione tendenziale risulta amplificato rispetto a quello della variazione congiunturale.

Difatti, il congiunturale dell'ottobre 2002 presenta un aumento pari a 0,0795% rispetto al congiunturale dell'ottobre 2001; di conseguenza il tendenziale dell'ottobre 2002 registra un aumento pari a 0,0814% rispetto al tendenziale del settembre 2002, ovvero l'aumento del congiunturale moltiplicato per 1,0240, che è il valore del rapporto $\frac{I_{SET02}}{I_{OTT02}}$.

E' anche possibile esprimere il tendenziale di un generico mese t in funzione degli ultimi 12 congiunturali; ricordando le definizioni di cui sopra, ovvero:

$$tend_t = \frac{I_t - I_{t-12}}{I_{t-12}} \times 100$$

$$cong_t = \frac{I_t - I_{t-1}}{I_{t-1}} \times 100$$

possiamo anche riscrivere l'espressione per il congiunturale come:

$$cong_t \times I_{t-1} = (I_t - I_{t-1}) \times 100$$

e quella del tendenziale nel seguente modo:

$$tend_t = \frac{I_t - I_{t-1} + I_{t-1} - I_{t-12}}{I_{t-12}} \times 100$$

$$tend_t = \frac{(I_t - I_{t-1}) + I_{t-1} - I_{t-2} + I_{t-2} - I_{t-12}}{I_{t-12}} \times 100$$

$$tend_t = \frac{(I_t - I_{t-1}) + (I_{t-1} - I_{t-2}) + \ldots + (I_{t-11} - I_{t-12})}{I_{t-12}} \times 100$$

$$tend_t = \frac{(I_t - I_{t-1})}{I_{t-12}} \times 100 + \frac{(I_{t-1} - I_{t-2})}{I_{t-12}} \times 100 + \\ + \ldots\ldots + \frac{(I_{t-11} - I_{t-12})}{I_{t-12}} \times 100$$

Sostituendo infine l'espressione di cui sopra per i dodici congiunturali dei mesi $t, \ldots\ldots, t-11$, la relazione risulta essere:

$$tend_t = cong_t \times \frac{I_{t-1}}{I_{t-12}} + cong_{t-1} \times \frac{I_{t-2}}{I_{t-12}} + \ldots\ldots + cong_{t-11} \times \frac{I_{t-12}}{I_{t-12}}$$

Dunque, il tendenziale nel mese t è pari alla somma ponderata degli ultimi dodici congiunturali. Per un indice crescente (come quello dei prezzi al consumo), i pesi sono decrescenti dal congiunturale del mese *t* che conta più di tutti (e più di uno), a quello nel mese $t - 11$ che conta “solo” in modo unitario. In altri termini, la somma semplice dei dodici congiunturali fino a quello nel mese *t* è una approssimazione per difetto del tendenziale nel mese *t*.

3. Crescita media annua

Per un indice mensile, indichiamo con $I_{t-12},......,I_{t-1}$ i valori dell'indice nei dodici mesi dell'anno $a-1$ e con $I_{t},..........,I_{t+11}$ i valori dell'indice nei dodici mesi dell'anno a. Definiamo il seguente rapporto, che misura la crescita in media d'anno dell'indice mensile tra l'anno $a-1$ e l'anno a:

$$CMA = \frac{MA - MA_{-1}}{MA_{-1}} \times 100$$

inoltre definiamo i seguenti rapporti:

$$MA = \frac{I_t + ... + I_{t+11}}{12}$$

$$cong_t = \frac{I_t - I_{t-1}}{I_{t-1}} \times 100$$

$$ACQ_{t-1} = \frac{I_{t-1} - MA_{-1}}{MA_{-1}} \times 100$$

$$ACQ_t = \frac{I_t - MA_{-1}}{MA_{-1}} \times 100$$

$$ACQ_{t+1} = \frac{\frac{I_t + 11 I_{t+1}}{12} - MA_{-1}}{MA_{-1}} \times 100$$

e così via fino ad ACQ_{t+11}

che misurano rispettivamente la media nell'anno a, la variazione congiunturale dell'indice nel mese t, e la cosidetta "crescita acquisita" (o per brevità "acquisito") in vari mesi, in riferimento all'anno a (per la precisione, prima che l'anno a inizi, una volta noto l'indice di gennaio, una volta noto l'indice di febbraio, e così via).

Procediamo dunque a rispondere ad una serie di domande:

a) *Come cresce l'acquisito con ogni nuovo congiunturale*?

La grandezza che intendiamo studiare è la variazione dell'acquisito mensile tra due mesi successivi, per esempio i mesi $t-1$ e t:

$$ACQ_t - ACQ_{t-1}$$

possiamo riscrivere questa espressione nel seguente modo:

$$ACQ_t - ACQ_{t-1} = \frac{I_t - MA_{-1}}{MA_{-1}} \times 100 - \frac{I_{t-1} - MA_{-1}}{MA_{-1}} \times 100$$

$$= \frac{I_t}{MA_{-1}} \times 100 - \frac{I_{t-1}}{MA_{-1}} \times 100$$

$$= \frac{(I_t - I_{t-1})}{MA_{-1}} \times 100$$

$$= cong_t \times \frac{I_{t-1}}{MA_{-1}}$$

quindi abbiamo:

$$ACQ_t - ACQ_{t-1} = \left(\frac{I_{t-1}}{MA_{-1}}\right) \times cong_t$$

Questa relazione ci dice, ad esempio, che l'aumento dell'acquisito tra dicembre 2001 e gennaio 2002 è pari al congiunturale di gennaio 2002 moltiplicato per il fattore $\frac{I_{t-1}}{MA_{-1}}$ che risulta essere $\gtrless 1$ a seconda che l'indice sia crescente o decrescente. Per l'indice dei prezzi al consumo questo rapporto è tipicamente > 1.

Procediamo con le variazioni dell'acquisito nei mesi successivi dell'anno, alla ricerca di una legge generale. Per la variazione tra i mesi t e $t+1$ abbiamo:

$$ACQ_{t+1} - ACQ_t$$

che possiamo riscrivere come:

$$ACQ_{t+1} - ACQ_t = \frac{\frac{I_t + 11 I_{t+1}}{12} - MA_{-1}}{MA_{-1}} \times 100 - \frac{I_t - MA_{-1}}{MA_{-1}} \times 100$$

$$= \frac{\frac{I_t + 11 I_{t+1}}{12}}{MA_{-1}} \times 100 - \frac{I_t}{MA_{-1}} \times 100$$

$$= \frac{\frac{I_t + 11 I_{t+1}}{12} - I_t}{MA_{-1}} \times 100$$

$$= \frac{\frac{11 I_{t+1} - 11 I_t}{12}}{MA_{-1}} \times 100$$

$$= \frac{\frac{11}{12} \times (I_{t+1} - I_t)}{MA_{-1}} \times 100$$

$$= \frac{\frac{11}{12} \times cong_{t+1} \times I_t}{MA_{-1}}$$

quindi otteniamo:

$$ACQ_{t+1} - ACQ_t = \left(\frac{11}{12} \times \frac{I_t}{MA_{-1}} \right) \times cong_{t+1}$$

il che mette in evidenza il fatto che valga una relazione dello stesso tipo di quella vista per la variazione dell'acquisito tra i mesi $t - 1$ e t, se pensiamo che in quel caso potesse apparire la "frazione"

$\frac{12}{12}$.

Per definire meglio la “legge” già evidente, procediamo con una ulteriore variazione dell’acquisito, ovvero:

$$ACQ_{t+2} - ACQ_{t+1}$$

che possiamo riscrivere come:

$$ACQ_{t\text{ㅅ2}}\ \text{뱅}ACQ_{t\text{ㅅ1}}$$

$$\text{ㅂㅅㄱ}\frac{\frac{I_t\text{ㅅ1ㅅ자}_{t\text{ㅅ1}}\ \text{ㅅ1}0\text{ㅅ자}_{t\text{ㅅ2}}}{12}\ \text{뱅}MA_{\text{뱅}}}{MA_{\text{뱅}}}\ \text{ㅅ지}100\ \text{뱅}\frac{\frac{I_t\text{ㅅ1}1\text{ㅅ자}_{t\text{ㅅ1}}}{12}\ \text{뱅}MA_{\text{뱅}}}{MA_{\text{뱅}}}\ \text{ㅅ지}100$$

$$\text{ㅂㅅㄱ}\frac{\frac{I_t\text{ㅅ1ㅅ자}_{t\text{ㅅ1}}\ \text{ㅅ1}0\text{ㅅ자}_{t\text{ㅅ2}}}{12}}{MA_{\text{뱅}}}\ \text{ㅅ지}100\ \text{뱅}\frac{\frac{I_t\text{ㅅ1}1\text{ㅅ자}_{t\text{ㅅ1}}}{12}}{MA_{\text{뱅}}}\ \text{ㅅ지}100$$

$$\text{ㅂㅅㄱ}\frac{\frac{I_{t\text{ㅅ1}}\ \text{ㅅ1}0\text{ㅅ자}_{t\text{ㅅ2}}}{12}}{MA_{\text{뱅}}}\ \text{ㅅ지}100\ \text{뱅}\frac{\frac{11\text{ㅅ자}_{t\text{ㅅ1}}}{12}}{MA_{\text{뱅}}}\ \text{ㅅ지}100$$

$$\text{ㅂㅅㄱ}\frac{\frac{10\text{ㅅ자}_{t\text{ㅅ2}}\ \text{뱅}0\text{ㅅ자}_{t\text{ㅅ1}}}{12}}{MA_{\text{뱅}}}\ \text{ㅅ지}100$$

$$\text{ㅂㅅㄱ}\frac{\frac{10}{12}\ \text{ㅅ자}\text{ぬ}_{t\text{ㅅ2}}\ \text{뱅}I_{t\text{ㅅ1}}\ \text{ね}}{MA_{\text{뱅}}}\text{ㅅ지}100$$

$$\text{ㅂㅅㄱ}\frac{\frac{10}{12}\ \text{ㅅ자}cong_{t\text{ㅅ2}}\ \text{ㅅ지}I_{t\text{ㅅ1}}}{MA_{\text{뱅}}}$$

quindi otteniamo:

22

$$ACQ_{t+2} = ACQ_{t+1} + \left(\frac{10}{12} \cdot \frac{I_{t+1}}{MA_{-1}} \right) \cdot cong_{t+2}$$

La “legge” che governa queste relazioni è quindi chiara. La variazione in ogni mese dell’acquisito è pari al congiunturale di quel mese pesato per il prodotto di due fattori: il primo è decrescente e, con il passare dal primo all’ultimo mese dell’anno, la frazione scende da $\frac{12}{12}$ a $\frac{1}{12}$; il secondo è crescente per un indice crescente (viceversa se l’indice è decrescente) e sale in questo caso da $\frac{I_{t-1}}{MA_{-1}}$ a $\frac{I_{t+10}}{MA_{-1}}$.

Per l’ultimo mese quindi avremmo:

$$ACQ_{t+11} = ACQ_{t+10} + \left(\frac{1}{12} \cdot \frac{I_{t+10}}{MA_{-1}} \right) \cdot cong_{t+11}$$

Dunque, nel caso di un indice crescente l’andamento del “peso” in parentesi sarebbe ambiguo. Tuttavia, per una serie come l’indice dei prezzi al consumo che è crescente ma a tassi che correntemente non superano il 3-4% all’anno, il secondo rapporto cresce molto più lentamente di quanto decresca il primo. Ad esempio, se l’inflazione è pari al 4% all’anno, il secondo rapporto sale da un valore intorno a 1,0192 a gennaio a circa 1,0384 a dicembre; il primo rapporto scende, in ogni caso, da 1 a gennaio a 0,0833 a dicembre. Il peso totale sarebbe quindi di $1,0192$ a gennaio (superiore all’unità) e solo $0,0864$ (meno di un decimo) a dicembre. Si noti che anche con un’inflazione del 20% o del 30% il peso totale del congiunturale decresce rapidamente.

b) *Come si può scomporre la crescita media annua*?

Vogliamo mettere in relazione la crescita media annua *CMA* con le dodici variazioni congiunturali dello stesso anno e la crescita acquisita prima che l'anno inizi, ovvero ACQ_{t-1} (anche definita "trascinamento"). Per una più diretta comprensione, e senza alcuna perdita di generalità, riferiamo la dimostrazione agli anni 2001 e 2002, e quindi identifichiamo gli indici generici su cui lavoriamo, ossia $I_{t},.........., I_{t+11}$, con i valori dell'indice da gennaio 2002 (I_t) a dicembre 2002 (I_{t+11}).

Per ottenere questo risultato, mostriamo innanzitutto che l'acquisito nell'ultimo mese dell'anno *a*, ovvero ACQ_{t+11} (che nel nostro caso sarebbe l'acquisito a dicembre del 2002), è pari alla crescita media annua tra l'anno $a-1$ e l'anno *a* (ovvero tra 2001 e 2002); tale dimostrazione è banale, ma risulta cruciale per la dimostrazione successiva.

Per definizione abbiamo:

$$CMA = \frac{MA - MA_{-1}}{MA_{-1}} \times 100$$

che si può riscrivere come:

$$= \frac{\frac{I_t + ... + I_{t+11}}{12} - MA_{-1}}{MA_{-1}} \times 100$$

che altro non è se non la definizione di ACQ_{t+11}.

Dunque:

$$CMA\ \text{ㅄㄱ}ACQ_{t\text{ㅆ}11}$$

Questa equazione può poi essere riscritta come:

$$CMA\ \text{ㅄㄱ}ACQ_{t\text{ㅆ}11}\ \text{뱅}ACQ_{t\text{ㅆ}10}\ \text{ㅆ}ACQ_{t\text{ㅆ}10}$$

$$\text{ㅄㄱぬ}CQ_{t\text{ㅆ}11}\ \text{뱅}ACQ_{t\text{ㅆ}10}\,\text{ねㅆ}ACQ_{t\text{ㅆ}10}\ \text{뱅}ACQ_{t\text{ㅅ}9}\ \text{ㅆ}ACQ_{t\text{ㅅ}9}$$

$$\text{ㅄㄱぬ}CQ_{t\text{ㅆ}11}\ \text{뱅}ACQ_{t\text{ㅆ}10}\,\text{ねㅆぬ}CQ_{t\text{ㅆ}10}\ \text{뱅}ACQ_{t\text{ㅅ}9}\,\text{ねㅆ}ACQ_{t\text{ㅅ}9}$$
$$\text{뱅}ACQ_{t\text{ㅅ}8}\ \text{ㅆ}ACQ_{t\text{ㅅ}8}$$

procedendo recursivamente otteniamo infine:

$$\text{ㅄㄱぬ}CQ_{t\text{ㅆ}11}\ \text{뱅}ACQ_{t\text{ㅆ}10}\,\text{ねㅆ}.........\ \text{ㅆぬ}CQ_{t}\ \text{뱅}ACQ_{t\text{병}}\,\text{ねㅆ}ACQ_{t\text{병}}$$

utilizzando il risultato di cui al punto a, possiamo scrivere:

$$\text{ㅄㄱ}\left(\frac{1}{12}\ \text{ㅅㅈ}\frac{I_{t\text{ㅆ}10}}{MA_{\text{병}}}\right)\text{ㅅㅈ}cong_{t\text{ㅆ}11}\ \text{ㅆ}....\ \text{ㅆ}\left(\frac{12}{12}\ \text{ㅅㅈ}\frac{I_{t\text{병}}}{MA_{\text{병}}}\right)\text{ㅅㅈ}cong_{t}$$
$$\text{ㅆ}ACQ_{t\text{병}}$$

e, riordinando gli addendi, la relazione diviene infine:

$$CMA\ \text{ㅄㄱ}ACQ_{t\text{병}}\ \text{ㅆ}$$
$$\text{ㅆ}\left(\tfrac{12}{12}\ \text{ㅅㅈ}\tfrac{I_{t\text{병}}}{MA_{\text{병}}}\right)\text{ㅅㅈ}cong_{t}\ \text{ㅆ}..\ \text{ㅆ}\left(\tfrac{1}{12}\ \text{ㅅㅈ}\tfrac{I_{t\text{ㅆ}10}}{MA_{\text{병}}}\right)\text{ㅅㅈ}cong_{t\text{ㅆ}11}$$

Questo risultato ci dice che la crescita media annua è composta di due elementi: il trascinamento dall'anno precedente e la somma ponderata dei dodici congiunturali dell'anno corrente. I pesi di quest'ultima sono rapidamente decrescenti nel passare dal primo al dodicesimo congiunturale (da un pò più dell'unità a meno di un decimo).

Ad esempio, per l'indice italiano dei prezzi al consumo per l'intera collettività avremmo che la crescita media annua, pari nel 2000 a 2,5377%, può essere scomposta nel trascinamento, pari a 0,9923%, più una somma ponderata dei dodici congiunturali dell'anno, pari a 1,5453% (la somma semplice dei congiunturali risulta pari a 2,6680, il che avverte che il peso attribuito alla somma dei dodici congiunturali è, in generale, inferiore all'unità, mentre il trascinamento ha sempre peso pari ad uno; in appendice, in tab.2A riportiamo i dati completi per questo esempio).

E' utile notare che la somma dei dodici congiunturali ponderata solamente con i pesi "costanti" (escludendo quindi il secondo fattore che è comunque sempre molto vicino all'unità) se addizionata al trascinamento risulta essere un'approssimazione molto soddisfacente della crescita media annua (di solito pari al valore esatto). Ciò può essere utile in sede previsiva, per semplificare il calcolo dei valori che si dovrebbero ottenere in ogni mese, in quelli restanti fino alla chiusura dell'anno, per ottenere una determinata crescita media annua. Ad esempio, per il 2001, per l'indice italiano dei prezzi al consumo la crescita media annua (senza utilizzare l'arrotondamento dell'indice al primo decimale) è stata del 2,8% e lo stesso valore si trova procedendo con i pesi per così dire "semplificati".

Aggiungendo più decimali, i due valori risultano essere 2,7853% il dato esatto e 2,7547% quello approssimato.

Una curiosità può essere mettere in relazione la crescita media annua dell’anno *a* con quella dell’anno *a* 뱅1 sfruttando il risultato appena ottenuto, che è valido per ogni coppia di anni. Scrivendo dunque quell’equazione per l’anno *a* e per l’anno *a* 뱅1 e sottraendo membro a membro otteniamo:

$$CMA\ \text{뱅}CMA_{\text{뱅}}\ \text{ㅂㅅㄱ}ACQ_{t\text{뱅}}\ \text{뱅}ACQ_{t\text{뱅}3}\ \text{ㅆ}MPcong_{t}\ \text{뱅}MPcong_{t\text{뱅}2}$$

laddove:

$$MPcong_{t} \doteq \left(\frac{12}{12}\ \text{ㅅㅈ}\frac{I_{t\text{뱅}}}{MA_{\text{뱅}}} \right) \text{ㅅㅈ}cong_{t}\ \text{ㅆ}$$

$$\text{ㅆ}.\ \text{ㅆ}\left(\frac{1}{12}\ \text{ㅅㅈ}\frac{I_{t\text{ㅆ}0}}{MA_{\text{뱅}}} \right) \text{ㅅㅈ}cong_{t\text{ㅆ}1}$$

$$MPcong_{t\text{뱅}2} \doteq \left(\frac{12}{12}\ \text{ㅅㅈ}\frac{I_{t\text{뱅}3}}{MA_{\text{뱅}}} \right) \text{ㅅㅈ}cong_{t\text{뱅}2}\ \text{ㅆ}$$

$$\text{ㅆ}.\ \text{ㅆ}\left(\frac{1}{12}\ \text{ㅅㅈ}\frac{I_{t\text{뱅}}}{MA_{\text{뱅}}} \right) \text{ㅅㅈ}cong_{t\text{뱅}}$$

$$ACQ_{t\text{뱅}} \doteq \frac{I_{t\text{뱅}}\ \text{뱅}MA_{\text{뱅}}}{MA_{\text{뱅}}}\ \text{ㅅㅈ}100$$

$$ACQ_{t\text{뱅}3} \doteq \frac{I_{t\text{뱅}3}\ \text{뱅}MA_{\text{뱅}}}{MA_{\text{뱅}}}\ \text{ㅅㅈ}100$$

$$MA_{\text{뱅}} \doteq \frac{I_{t\text{뱅}2}\ \text{ㅆ}.....\ \text{ㅆ}I_{t\text{뱅}}}{12}$$

$$MA_{\text{뱅}} \doteq \frac{I_{t\text{뱅}4}\ \text{ㅆ}.....\ \text{ㅆ}I_{t\text{뱅}3}}{12}$$

questa equazione si può riscrivere come:

$$CMA \cong CMA_{-1} + (ACQ_{t-1} - ACQ_{t-13}) + (MPcong_t - MPcong_{t-12})$$

Tale espressione sta semplicemente a significare che “a parità di congiunturali” tra l’anno a e l’anno $a-1$ (ovvero se $MPcong_t \cong MPcong_{t-12}$) la crescita media annua nell’anno a supererà quella dell’anno precedente se il trascinamento è maggiore (il che ha a che fare sia con il profilo congiunturale dell’anno $a-1$ che con quello dell’anno $a-2$). La condizione $MPcong_t \cong MPcong_{t-12}$ non è esattamente lo stesso che dire che i congiunturali devono essere uguali mese per mese, in quanto essi sono pesati in maniera differente per ogni coppia di mesi nei due anni, anche se le differenze di pesi potrebbero essere in effetti trascurabili.

c) *Come si estendono queste relazioni alle variabili trimestrali*?

Molto utile nella pratica dell’analisi congiunturale può essere l’estensione alle variabili trimestrali della relazione individuata al precedente punto b tra la crescita media annua, le variazioni congiunturali ed il trascinamento; specificamente ci riferiamo qui alle variabili trimestrali espresse in valore (come, tipicamente, il prodotto interno lordo).

Per una variabile trimestrale che assume valori $Q_{t-4}, Q_{t-3}, Q_{t-2}, Q_{t-1}$ nell’anno $a-1$ e valori $Q_t, Q_{t+1}, Q_{t+2}, Q_{t+3}$

nell'anno *a*, definiamo la crescita media annua come:

$$CMA \doteq \frac{SA\ \text{뱅}SA_{\text{뱅}}}{SA_{\text{뱅}}}\ \text{ㅅ지}00$$

e le seguenti altre variabili:

$$SA \doteq Q_t\ \text{ㅆ}Q_{t\text{ㅆ}1}\ \text{ㅆ}Q_{t\text{ㅅ}2}\ \text{ㅆ}Q_{t\text{ㅅ}3}$$

$$MA \doteq \frac{Q_t\ \text{ㅆ}Q_{t\text{ㅆ}1}\ \text{ㅆ}Q_{t\text{ㅅ}2}\ \text{ㅆ}Q_{t\text{ㅅ}3}}{4}$$

$$cong_t \doteq \frac{Q_t\ \text{뱅}Q_{t\text{뱅}}}{Q_{t\text{뱅}}}\ \text{ㅅ지}00$$

$$TRASC \doteq ACQ_{t\text{뱅}} \doteq \frac{Q_{t\text{뱅}}\ \text{뱅}MA_{\text{뱅}}}{MA_{\text{뱅}}}\ \text{ㅅ지}00$$

$$ACQ_t \doteq \frac{Q_t\ \text{뱅}MA_{\text{뱅}}}{MA_{\text{뱅}}}\ \text{ㅅ지}00$$

$$ACQ_{t\text{ㅆ}1} \doteq \frac{\frac{Q_t\,\text{ㅅ}3\,Q_{t\text{ㅆ}1}}{4}\ \text{뱅}MA_{\text{뱅}}}{MA_{\text{뱅}}}\ \text{ㅅ지}00, \text{ e così via fino ad } ACQ_{t\text{ㅆ}1\,1}$$

Procedendo in modo del tutto analogo a quanto visto per un indice mensile, otteniamo infine la seguente relazione (oltre a relazioni perfettamente analoghe alle altre valide per un indice mensile):

$$
\begin{aligned}
CMA\ \text{ㅂ시ㄱ}&ACQ_{t\text{뱅}}\ \text{ㅆ}\\
&\text{ㅆ}\left(\tfrac{4}{4}\ \text{ㅅㅈ}\tfrac{Q_{t\text{뱅}}}{MA_{\text{뱅}}}\right)\text{ㅅㅈ}cong_t\ \text{ㅆ}\left(\tfrac{3}{4}\ \text{ㅅㅈ}\tfrac{Q_t}{MA_{\text{뱅}}}\right)\text{ㅅㅈ}cong_{t\text{ㅆ}1}\ \text{ㅆ}\\
&\text{ㅆ}\left(\tfrac{2}{4}\ \text{ㅅㅈ}\tfrac{Q_{t\text{ㅆ}1}}{MA_{\text{뱅}}}\right)\text{ㅅㅈ}cong_{t\text{ㅅ}2}\ \text{ㅆ}\left(\tfrac{1}{4}\ \text{ㅅㅈ}\tfrac{Q_{t\text{ㅅ}2}}{MA_{\text{뱅}}}\right)\text{ㅅㅈ}cong_{t\text{ㅅ}3}
\end{aligned}
$$

I pesi delle variazioni congiunturali, anche in questo caso, sono il prodotto di due fattori: il primo rapidamente decrescente e costante per ogni coppia di anni presi in considerazione; il secondo crescente per una serie crescente (e viceversa) ma ad un tasso ben minore di quello del primo. Di conseguenza, come per un indice mensile, il peso totale dei congiunturali decresce rapidamente passando da quello del primo trimestre (che conta in genere un pò più dell'unità) a quello del quarto trimestre (che conta un pò più di un quarto). Il trasferimento conta in ogni caso in modo unitario. In appendice, in tab.3A, riportiamo un esempio numerico per il Pil italiano a prezzi costanti negli anni 2000 e 2001.

d) *In che relazione stanno il trascinamento ed i congiunturali*?

Interessante è anche notare che se da un lato il congiunturale dell'ultimo mese (o del quarto trimestre) dell'anno $a-1$ conta solo per un dodicesimo (o un quarto) nella crescita media annua dello stesso anno, d'altro canto conterà però anche nel trascinamento successivo, dall'anno $a-1$ all'anno a, che a sua volta conta in modo unitario per la crescita media annua dell'anno a. A questo proposito è possibile ottenere una relazione esatta tra il trascinamento all'anno successivo e le 12 (o 4) variazioni congiunturali registrate nell'anno considerato.

Per un indice mensile, partiamo dalla definizione di trascinamento dall'anno $a-1$ all'anno a, che coincide con la crescita acquisita nell'ultimo mese dell'anno $a-1$

$$TRASC \doteq ACQ_{t\text{병}} \doteq \frac{I_{t\text{병}}\ \text{뱅}MA_{\text{병}}}{MA_{\text{병}}}\ \text{ㅅ지}100$$

questa si può riscrivere come:

$$ACQ_{t\text{병}} \text{ ㅂ시} \frac{I_{t\text{병}} \text{ 병} \frac{I_{t\text{병}2}\text{ㅆ}.....\text{ㅆ}I_{t\text{병}}}{12}}{MA_{\text{병}}} \text{ ㅅ지}00$$

$$\text{ㅂ시} \frac{\frac{12I_{t\text{병}} \text{ 병}_{t\text{병}2}\text{병}..... \text{병}_{t\text{병}}}{12}}{MA_{\text{병}}} \text{ ㅅ지}00$$

$$\text{ㅂ시} \frac{\frac{11I_{t\text{병}} \text{ 병}_{t\text{병}2}\text{병}..... \text{병}_{t\text{병}}}{12}}{MA_{\text{병}}} \text{ ㅅ지}00$$

$$\text{ㅂ시} \frac{\frac{11I_{t\text{병}} \text{ 병} 1I_{t\text{병}} \text{ㅆ} 1I_{t\text{병}} \text{ 병}_{t\text{병}2}\text{병}..... \text{병}_{t\text{병}}}{12}}{MA_{\text{병}}} \text{ ㅅ지}00$$

$$\text{ㅂ시} \frac{\frac{11\text{ぬ}_{\text{병}} \text{ 병}_{t\text{병}} \text{ね}10I_{t\text{병}} \text{ 병}_{t\text{병}2}\text{병}..... \text{병}_{t\text{병}}}{12}}{MA_{\text{병}}} \text{ ㅅ지}00$$

$$\text{ㅂ시} \frac{\frac{11}{12}\text{ぬ}_{\text{병}} \text{ 병}I_{t\text{병}} \text{ね}\text{ㅆ}\frac{10I_{t\text{병}} \text{ 병} 0I_{t\text{병}} \text{ㅆ} 0I_{t\text{병}} \text{ 병}_{t\text{병}2}\text{병}..... \text{병}_{t\text{병}}}{12}}{MA_{\text{병}}} \text{ ㅅ지}00$$

$$\text{ㅂ시} \frac{\frac{11}{12}\text{ぬ}_{\text{병}} \text{ 병}I_{t\text{병}} \text{ね}\text{ㅆ}\frac{10\text{ぬ}_{\text{병}} \text{ 병}_{t\text{병}} \text{ね}9I_{t\text{병}} \text{ 병}_{t\text{병}2}\text{병}..... \text{병}_{t\text{병}}}{12}}{MA_{\text{병}}} \text{ ㅅ지}00$$

$$\text{ㅂ시} \frac{\frac{11}{12}\text{ぬ}_{\text{병}} \text{ 병}I_{t\text{병}} \text{ね}\text{ㅆ}\frac{10}{12}\text{ぬ}_{\text{병}} \text{ 병}I_{t\text{병}} \text{ね}\text{ㅆ}\frac{9I_{t\text{병}} \text{ 병}_{t\text{병}2}\text{병}..... \text{병}_{t\text{병}}}{12}}{MA_{\text{병}}} \text{ ㅅ지}00$$

e procedendo in tal modo:

$$=\frac{\frac{11}{12}\left(I_{t-1}-I_{t-2}\right)+\frac{10}{12}\left(I_{t-2}-I_{t-3}\right)+\ldots+\frac{1}{12}\left(I_{t-11}-I_{t-12}\right)}{MA_{t-1}}\times 100$$

sostituendo quindi la definizione di congiunturale (?):

$$ACQ_{t}=\left(\frac{11}{12}\times\frac{I_{t-2}}{MA_{t-1}}\right)cong_{t-1}+\left(\frac{10}{12}\times\frac{I_{t-3}}{MA_{t-1}}\right)cong_{t-2}+$$
$$+\ldots+\left(\frac{1}{12}\times\frac{I_{t-12}}{MA_{t-1}}\right)cong_{t-11}$$

Quindi il trascinamento dall'anno $a-1$ è pari alla somma ponderata delle 11 variazioni congiunturali dell'anno $a-1$, a partire da quella del secondo mese. Il congiunturale di gennaio non entra nel trascinamento, ovvero quello che conta è il livello a gennaio dell'anno $a-1$ ma non con che velocità ci si sia arrivati dal dicembre dell'anno $a-2$.

I pesi sono anche in questo caso il prodotto di due fattori: il primo rapidamente crescente, da quello di febbraio pari a solo $0,0833$ a quello del congiunturale di dicembre che conta per $0,9166$; il secondo anch'esso crescente per una serie crescente (come l'indice dei prezzi al consumo) ma ad un tasso molto minore. In questo caso, quindi, la successione degli 11 pesi è univocamente crescente per una serie crescente.

Un esempio con l'indice italiano dei prezzi al consumo per l'intera collettività, relativo all'anno 2001, può chiarire meglio questo risultato (tab.4A in appendice): il trascinamento dal 2001 al 2002, ottenuto utilizzando solo informazione disponibile al dicembre 2001 e solo con dati di quell'anno (non del 2000) è pari a $0,7403$; ponderando le 11 variazioni congiunturali a partire da quella di febbraio (quindi senza utilizzare dati di altri anni) con i pesi costruiti secondo la formula di cui sopra si ottiene esattamente questo risultato. Il congiunturale di dicembre 2001 pesa per $0,9227$ mentre quello di febbraio solo $0,0824$; esattamente come anticipato dunque (astraendo dal secondo fattore del peso totale, che è trascurabile per un indice come quello dei prezzi al consumo), il congiunturale del dicembre 2001 conta solo per $\frac{1}{12}$ nella crescita media annua del 2001 ma per $\frac{11}{12}$ nel trascinamento al 2002 che a sua volta conta 1 nella crescita media annua del 2002. Parimenti, ad esempio, il congiunturale di febbraio 2001 conta $\frac{1}{12}$ nel trascinamento al 2002 e $\frac{11}{12}$ nella crescita media annua del 2001; il congiunturale di gennaio 2001 conta 0 nel trascinamento al 2002 e $\frac{12}{12}$ nella crescita media annua del 2001.

In altri termini, la somma dei due pesi è sempre pari all'unità, e quindi ogni congiunturale di un qualsiasi anno viene "diviso" in una parte che entra nella crescita media annua dell'anno stesso e in una parte che entrerà nella crescita media annua dell'anno successivo; il congiunturale di gennaio è l'unico ad entrare per intero nella crescita media annua dell'anno in corso. Schematicamente, per ogni coppia di anni a e a 뻥1 (e in riferimento, si ricordi, solo al primo dei due fattori del peso complessivo, essendo in generale trascurabile il secondo fattore) questo risultato si può riassumere nel seguente modo (tab.1):

Tab.1 - Peso dei congiunturali dei dodici mesi dell'anno $a-1$

	ge	fe	ma	ap	ma	gi	lu	ag	se	ot	no	di
CMA $a-1$	$\frac{12}{12}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$
CMA a	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{11}{12}$

Per un indice mensile, che assume valori $I_{t-12},......,I_{t-1}$ nei dodici mesi dell'anno $a-1$ e valori $I_{t},.........,I_{t+11}$ nei dodici mesi dell'anno a, è possibile a questo punto unire le due espressioni trovate finora per la crescita media annua dell'anno a e per il trascinamento dall'anno $a-1$ all'anno a in una sola espressione che metta in relazione la crescita media annua dell'anno a con le 23 variazioni congiunturali realizzate a partire dal febbraio dell'anno precedente:

$$
\begin{aligned}
CMA = {} & \left(\frac{1}{12} \cdot \frac{I_{t-12}}{MA_{-1}}\right) cong_{t-11} + ... + \left(\frac{10}{12} \cdot \frac{I_{t-3}}{MA_{-1}}\right) cong_{t-2} + \\
& + \left(\frac{11}{12} \cdot \frac{I_{t-2}}{MA_{-1}}\right) cong_{t-1} + \left(\frac{12}{12} \cdot \frac{I_{t-1}}{MA_{-1}}\right) \cdot cong_{t} + \\
& + \left(\frac{11}{12} \cdot \frac{I_{t}}{MA_{-1}}\right) cong_{t+1} + ... + \left(\frac{1}{12} \cdot \frac{I_{t+10}}{MA_{-1}}\right) \cdot cong_{t+11}
\end{aligned}
$$

E' evidente come, guardando solo al primo fattore dei pesi, questo cresca rapidamente a partire dal congiunturale più vecchio (quello del febbraio del primo anno) che pesa solo $\frac{1}{12}$, raggiunga un picco ai $\frac{12}{12}$ per il congiunturale di gennaio del secondo anno, e poi decresca altrettanto rapidamente fino di nuovo a $\frac{1}{12}$ per l'ultimo congiunturale, quello del dicembre del secondo anno.

4. Crescita media annua e variazioni tendenziali

Per un indice mensile (come l'indice dei prezzi al consumo) per il quale si è soliti guardare, con il rilascio di ogni nuovo dato, soprattutto alla variazione tendenziale e, a fine anno, alla crescita media annua, può capitare di essere indotti in errore pensando che quest'ultima sia pari alla media delle 12 variazioni tendenziali osservate durante l'anno. Questo paragrafo si pone l'obiettivo di chiarire la relazione tra queste due diverse misure.

Innanzitutto un esempio, per chiarire la questione (tab.5A in appendice): per l'indice italiano dei prezzi al consumo per l'intera collettività la crescita media annua nel 2001 è risultata pari al $2,7852\%$, mentre la media dei dodici tendenziali del 2001 fornisce un valore pari a $2,7867\%$. Dunque nel 2001 la distanza è stata decisamente esigua, ma anche solo questo scarto ridotto dimostra che si tratta di due misure distinte.

Partendo dalle definizioni di crescita media annua e di media annua possiamo scrivere:

$$CMA \doteq \frac{MA\ \text{뱅}MA_{\text{뱅}}}{MA_{\text{뱅}}}\ \text{ㅅ지}100$$

$$\text{ㅂㅅㄱ}\frac{\frac{I_t\,\text{ㅆ}\ldots\text{ㅆ}I_{t\text{ㅆ}1}}{12}\ \text{뱅}\ \frac{I_{t\text{뱅}2}\,\text{ㅆ}\ldots\text{ㅆ}I_{t\text{뱅}}}{12}}{MA_{\text{뱅}}}\ \text{ㅅ지}100$$

$$\text{ㅂㅅㄱ}\frac{\frac{I_t\,\text{ㅆ}\ldots\text{ㅆ}I_{t\text{ㅆ}1}\,\text{뱅}I_{t\text{뱅}2}\,\text{뱅}\ldots\text{뱅}I_{t\text{뱅}}}{12}}{MA_{\text{뱅}}}\ \text{ㅅ지}100$$

$$\text{ㅂㅅㄱ}\frac{\frac{\text{ぬ}\,\text{뱅}_{t\text{뱅}2}\,\text{ね}\text{ㅆ}\ldots\text{ㅆ}\text{ぬ}_{\text{ㅆ}1}\,\text{뱅}_{t\text{뱅}}\,\text{ね}}{12}}{MA_{\text{뱅}}}\ \text{ㅅ지}100$$

$$\text{ㅂㅅㄱ}\frac{\text{ぬ}\ \text{뱅}I_{t\text{뱅}2}\,\text{ね}\text{ㅆ}\ldots\ \text{ㅆ}\text{ぬ}_{\text{ㅆ}1}\ \text{뱅}I_{t\text{뱅}}\,\text{ね}}{12\ \text{ㅅ지}MA_{\text{뱅}}}\text{ㅅ지}100$$

$$\text{ㅂㅅㄱ}\frac{\frac{\text{ぬ}\,\text{뱅}_{t\text{뱅}2}\,\text{ね}\text{ㅆ}\ldots\text{ㅆ}\text{ぬ}_{\text{ㅆ}1}\,\text{뱅}_{t\text{뱅}}\,\text{ね}}{MA_{\text{뱅}}}}{12}\ \text{ㅅ지}100$$

$$\text{ㅂㅅㄱ}\frac{\frac{\text{ぬ}\,\text{뱅}_{t\text{뱅}2}\,\text{ね}}{MA_{\text{뱅}}}\ \text{ㅅ지}100\ \text{ㅆ}\ldots\ \text{ㅆ}\frac{\text{ぬ}_{\text{ㅆ}1}\,\text{뱅}_{t\text{뱅}}\,\text{ね}}{MA_{\text{뱅}}}\ \text{ㅅ지}100}{12}$$

sostituendo la definizione di variazione tendenziale ㅈt:

$$\text{ㅂㅅㄱ}\frac{\frac{I_{t\text{뱅}2}}{MA_{\text{뱅}}}\ \text{ㅅ지}tend_t\ \text{ㅆ}\ldots\ \text{ㅆ}\frac{I_{t\text{뱅}}}{MA_{\text{뱅}}}\ \text{ㅅ지}tend_{t\text{ㅆ}1}}{12}$$

quindi otteniamo:

$$CMA = \frac{\left(\frac{I_{t-12}}{MA_{-1}}\right) \cdot tend_t + \ldots + \left(\frac{I_{t-1}}{MA_{-1}}\right) \cdot tend_{t+11}}{12}$$

che è immediato confrontare con la media delle dodici variazioni tendenziali dell’anno *a*, definita come:

$$Mtend = \frac{tend_t + \ldots + tend_{t+11}}{12}$$

che, per chiarezza del confronto, è come scrivere:

$$Mtend = \frac{1 \cdot tend_t + \ldots + 1 \cdot tend_{t+11}}{12}$$

Si tratta dunque della differenza tra una media ponderata (la crescita media annua) e una media semplice delle dodici variazioni tendenziali dell’anno, in cui tutti i pesi sono pari ad uno. Per un indice mensile crescente, nella crescita media annua il peso maggiore (superiore all’unità) viene dato all’ultima variazione tendenziale, quella di dicembre, mentre il peso minore (inferiore all’unità) viene attribuito alla prima variazione tendenziale, quella di gennaio. Tali pesi sono, comunque, per un indice come quello dei prezzi al consumo, tutti molto vicini all’unità; per cui, approssimare la crescita media annua con la media semplice delle dodici variazioni tendenziali si rivela in generale un’approssimazione molto buona (come visto appunto nell’esempio per il 2001 per l’inflazione italiana).

Appendice

Riportiamo in tab.1A le variazioni congiunturali e tendenziali per l'indice dei prezzi al consumo per l'intera collettività italiana.

Tab.1A – Indice, variazioni congiunturali e tendenziali

(Indice dei prezzi al consumo per l'intera collettività nazionale)

mese	indice	cong	tend	mese	indice	cong	tend
gen-98	107,3	0,28	1,90	giu-00	112,8	0,27	2,73
feb-98	107,6	0,28	2,09	lug-00	113,0	0,18	2,63
mar-98	107,9	0,28	2,08	ago-00	113,1	0,09	2,63
apr-98	108,0	0,09	2,08	set-00	113,3	0,18	2,63
mag-98	108,2	0,19	1,98	ott-00	113,7	0,35	2,62
giu-98	108,3	0,09	2,07	nov-00	114,0	0,26	2,70
lug-98	108,3	0,00	2,07	dic-00	114,1	0,09	2,70
ago-98	108,4	0,09	2,07				
set-98	108,4	0,00	1,98	gen-01	114,6	0,44	2,96
ott-98	108,6	0,18	1,88	feb-01	115,0	0,35	2,95
nov-98	108,8	0,18	1,68	mar-01	115,1	0,09	2,77
dic-98	108,8	0,00	1,68	apr-01	115,6	0,43	3,12
				mag-01	115,9	0,26	3,02
gen-99	108,9	0,09	1,49	giu-01	116,2	0,26	3,01
feb-99	109,1	0,18	1,39	lug-01	116,3	0,09	2,92
mar-99	109,3	0,18	1,30	ago-01	116,3	0,00	2,83
apr-99	109,6	0,27	1,48	set-01	116,3	0,00	2,65
mag-99	109,8	0,18	1,48	ott-01	116,5	0,17	2,46
giu-99	109,8	0,00	1,39	nov-01	116,7	0,17	2,37
lug-99	110,1	0,27	1,66	dic-01	116,8	0,09	2,37
ago-99	110,2	0,09	1,66				
set-99	110,4	0,18	1,85	gen-02	117,3	0,43	2,36
ott-99	110,8	0,36	2,03	feb-02	117,7	0,34	2,35
nov-99	111,0	0,18	2,02	mar-02	118,0	0,25	2,52
dic-99	111,1	0,09	2,11	apr-02	118,3	0,25	2,34
				mag-02	118,6	0,25	2,33
gen-00	111,3	0,18	2,20	giu-02	118,7	0,08	2,15
feb-00	111,7	0,36	2,38	lug-02	118,9	0,17	2,24
mar-00	112,0	0,27	2,47	ago-02	119,1	0,17	2,41
apr-00	112,1	0,09	2,28	set-02	119,3	0,17	2,58
mag-00	112,5	0,36	2,46	ott-02	119,6	0,25	2,66

Riportiamo in tab.2A i calcoli relativi alla formula della crescita media annua in funzione delle variazioni congiunturali del paragrafo 3.b, in riferimento all'indice italiano dei prezzi al consumo per l'intera collettività.

Tab.2A – Crescita media annua e variazioni congiunturali

(Indice nazionale dei prezzi al consumo per l'intera collettività)

gen-99	108,9						
feb-99	109,1						
mar-99	109,3						
apr-99	109,6						
mag-99	109,8						
giu-99	109,8						
lug-99	110,1						
ago-99	110,2						
set-99	110,4						
ott-99	110,8						
nov-99	111,0			**trascin.**			
dic-99	111,1			**0,9923**			
	media						
	110,0	cong.		pesi I	pesi II	pesi tot	contrib
gen-00	111,3	0,1800		1,00	1,0099	1,0099	0,1818
feb-00	111,7	0,3594		0,92	1,0117	0,9274	0,3333
mar-00	112,0	0,2686		0,83	1,0154	0,8461	0,2273
apr-00	112,1	0,0893		0,75	1,0181	0,7636	0,0682
mag-00	112,5	0,3568		0,67	1,0190	0,6793	0,2424
giu-00	112,8	0,2667		0,58	1,0226	0,5965	0,1591
lug-00	113,0	0,1773		0,50	1,0254	0,5127	0,0909
ago-00	113,1	0,0885		0,42	1,0272	0,4280	0,0379
set-00	113,3	0,1768		0,33	1,0281	0,3427	0,0606
ott-00	113,7	0,3530		0,25	1,0299	0,2575	0,0909
nov-00	114,0	0,2639		0,17	1,0336	0,1723	0,0455
dic-00	114,1	0,0877		0,08	1,0363	0,0864	0,0076
	media	*somma*	**Cma**				**somma pond.**
	112,8	*2,6680*	**2,5377**				**1,5453**

Riportiamo in tab.3A i calcoli relativi alla formula della crescita media annua in funzione delle variazioni congiunturali di variabili trimestrali, ottenuta nel paragrafo 3.c, in riferimento al prodotto interno lordo italiano.

Tab.3A – Crescita media annua e variazioni congiunturali, dati trimestrali (Prodotto interno lordo dell'Italia, valori a prezzi costanti, dati destagionalizzati)

	Pil				
I-2000	251229	t-4			
II-2000	252126	t-3			
III-2000	253594	t-2	**media annua**		
IV-2000	255854	t-1	**253200,8**		
I-2001	257631	t			
II-2001	257864	t+1			
III-2001	257951	t+2	**media annua**		**Cma**
IV-2001	257337	t+3	**257695,8**		**1,7753**
		pesi I	pesi II	pesi totale	contributi
cong t	0,6945	1,0000	1,0105	1,0105	0.7018
cong t+1	0,0904	0,7500	1,0175	0,7631	0.0690
cong t+2	0,0337	0,5000	1,0184	0,5092	0.0172
cong t+3	-0,2380	0,2500	1,0188	0,2547	-0.0606
			trascinamento		**somma pond.**
			1,0479		**0,7274**

Nella tab.4A riportiamo un esempio relativo alla formula del trascinamento in funzione delle variazioni congiunturali del paragrafo 3.d, sempre in riferimento all'indice italiano dei prezzi al consumo per l'intera collettività.

Tab.4A – Trascinamento e variazioni congiunturali

(Indice nazionale dei prezzi al consumo per l'intera collettività)

		cong.	pesi I	pesi II	pesi tot	contributi
gen-01	114,6					
feb-01	115,0	0,35	0,1	0,9884	0,0824	0,0288
mar-01	115,1	0,09	0,2	0,9919	0,1653	0,0144
apr-01	115,6	0,43	0,3	0,9927	0,2482	0,1078
mag-01	115,9	0,26	0,3	0,9971	0,3324	0,0863
giu-01	116,2	0,26	0,4	0,9996	0,4165	0,1078
lug-01	116,3	0,09	0,5	1,0022	0,5011	0,0431
ago-01	116,3	0,00	0,6	1,0031	0,5851	0,0000
set-01	116,3	0,00	0,7	1,0031	0,6687	0,0000
ott-01	116,5	0,17	0,8	1,0031	0,7523	0,1294
nov-01	116,7	0,17	0,8	1,0048	0,8373	0,1438
dic-01	116,8	0,09	0,9	1,0065	0,9227	0,0791
trascin.	*media*					**somma**
0,7403	*115,9*					**0,7403**

In tab.5A figura un esempio sulla formula della crescita media annua in funzione delle variazioni tendenziali del paragrafo 4, in riferimento all'indice nazionale dei prezzi al consumo per l'intera collettività.

Tab.5A – Crescita media annua e variazioni tendenziali
(Indice nazionale dei prezzi al consumo per l'intera collettività)

gen-00	111,3				
feb-00	111,7				
mar-00	112,0				
apr-00	112,1				
mag-00	112,5				
giu-00	112,8				
lug-00	113,0				
ago-00	113,1				
set-00	113,3				
ott-00	113,7				
nov-00	114,0				
dic-00	114,1				
	media				
	112,8		tend	pesi	contributi
gen-01	114,6		3,0	0,9867	2,9255
feb-01	115,0		3,0	0,9902	2,9255
mar-01	115,1		2,8	0,9929	2,7482
apr-01	115,6		3,1	0,9938	3,1028
mag-01	115,9		3,0	0,9973	3,0142
giu-01	116,2		3,0	1,0000	3,0142
lug-01	116,3		2,9	1,0018	2,9255
ago-01	116,3		2,8	1,0027	2,8369
set-01	116,3		2,6	1,0044	2,6596
ott-01	116,5		2,5	1,0080	2,4823
nov-01	116,7		2,4	1,0106	2,3936
dic-01	116,8		2,4	1,0115	2,3936
	media	**Cma**	*media*		**media**
	115,9	**2,7852**	*2,7867*		**2,7852**