

# MPRA

Munich Personal RePEc Archive

## **Portfolio dynamics and stochastic optimal control.**

Moreno Trujillo, John Freddy

Universidad Externado de Colombia

22 May 2020

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/101326/>  
MPRA Paper No. 101326, posted 25 Jun 2020 09:42 UTC

# Dinámica de portafolios y control óptimo estocástico

John F. Moreno T.\*

## Resumen

Se presenta una introducción a la teoría de control óptimo estocástico y sus aplicaciones en el marco del problema de selección óptima de portafolios.

**Palabras clave:** optimización de portafolios; control óptimo estocástico; ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman.

**Clasificación JEL:** C02, C22, C61.

---

\*Magíster en Matemática Aplicada. Universidad Externado de Colombia. Bogotá, Colombia. [jhon.moreno@uexternado.edu.co] [ORCID:0000-0002-2772-6931].

Artículo recibido el 15 de octubre de 2019.

Aceptado el 13 de noviembre de 2019.

Para citar este artículo:

Moreno Trujillo, J. F. (2019). Dinámica de portafolios y control óptimo estocástico. ODEON, 17, pp.

DOI:

# Portfolio dynamics and stochastic optimal control

## Abstract

An introduction to the stochastic optimal control theory and its applications is presented within the framework of the optimal portfolio selection problem.

**Key words:** portfolio optimization; stochastic optimal control; Hamilton-Jacobi-Bellman equation.

**JEL classification:** C02, C22, C61.

# Introducción

En este documento se presenta un modelo para describir la dinámica de un portafolio autofinanciado conformado por diversos activos en tiempo continuo, junto con una introducción a la aplicación de la teoría de control óptimo estocástico para tratar el problema de su conformación.

Partimos de considerar un mercado financiero conformado por múltiples activos (riesgosos y no riesgosos). El intervalo de tiempo en consideración es  $[0, T]$ , aunque la teoría se puede extender a  $[0, \infty)$ . Este intervalo será dividido en periodos de longitud  $\Delta t$  y se asumirá que las negociaciones solo pueden tener lugar en los puntos del tiempo de la forma  $n\Delta t$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Se denomina como *periodo  $t$*  al intervalo  $[t, t + \Delta t)$  donde  $t = n\Delta t$  para algún  $n$ , mientras que al momento de tiempo  $t$  lo denominamos *instante  $t$* .

Se denotará como:

- $N$  : número total de activos en el mercado.
- $h_t^i$  : número de unidades del activo  $i$  que se poseen en el periodo  $t$ .
- $h_t = (h_t^1, h_t^2, \dots, h_t^N)$  : es el portafolio que se posee en el periodo  $t$ .
- $c_t$  : es el monto de dinero destinado para consumir en el periodo  $t$ .
- $S_t^i$  : es el precio de una unidad del activo  $i$  durante el periodo  $t$ .
- $V_t$  : es el valor del portafolio  $h$  en el periodo  $t$ .

Con la notación anterior se tiene que:

- En el instante  $t$ , es decir, al inicio del periodo  $t$ , el agente trae consigo un portafolio *viejo*,  $h_{t-\Delta t}$ , del periodo anterior  $t - \Delta t$ . En  $t = 0$  se asume que todos los agentes están dotados de un portafolio inicial.
- En el instante  $t$  es posible observar el vector de precios  $S_t = (S_t^1, S_t^2, \dots, S_t^N)$  por parte de todos los agentes.
- En el instante  $t$ , después de haber observado  $S_t$ , se selecciona un portafolio nuevo  $h_t$  que se mantendrá durante el periodo  $t$ . En este mismo instante se define una tasa de consumo  $c_t$  para el periodo  $t$ , y se asume que estas dos cantidades se mantienen constantes durante el periodo  $t$ .

Solo serán considerados portafolios y consumos *autofinanciados*, es decir, portafolios que no tienen entradas o salidas exógenas de capital distintas a las destinadas para consumo (el término  $c$ ). Esto implica que los portafolios nuevos deben permitir el consumo, pero deben ser financiados solamente mediante cambios en las posiciones en los activos disponibles.

Para concretar la condición de autofinanciamiento consideramos  $V_t$ , que denota la riqueza del agente al inicio del periodo  $t$ , y que está determinada por el valor en este instante del portafolio viejo del periodo  $t - \Delta t$ , es decir:

$$V_t = \sum_{i=1}^N h_{t-\Delta t}^i S_t^i = h_{t-\Delta t} \cdot S_t \quad (1)$$

lo que implica que el valor de la riqueza del agente en el instante  $t$  es el resultado de vender su portafolio viejo a los precios observados en este instante.

En este mismo momento se procede a:

1. Reinvertir en un nuevo portafolio  $h_t$ .
2. Seleccionar y consumir a un tasa  $c_t$  durante el periodo  $t$ .

El costo de este nuevo portafolio  $h_t$  está determinado por

$$\sum_{i=1}^N h_t^i S_t^i = h_t \cdot S_t \quad (2)$$

mientras que el costo de consumir a un tasa  $c_t$  es  $c_t \Delta t$ . De esta forma, la *condición de autofinanciamiento* es:

$$h_{t-\Delta t} \cdot S_t = h_t \cdot S_t + c_t \Delta t \quad (3)$$

Denotando como  $\Delta X_t = X_t - X_{t-\Delta t}$ , para cualquier proceso  $X$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} h_{t-\Delta t} \cdot S_t &= h_t \cdot S_t + c_t \Delta t \\ h_t \cdot S_t - h_{t-\Delta t} \cdot S_t + c_t \Delta t &= 0 \\ (h_t - h_{t-\Delta t}) \cdot S_t + c_t \Delta t &= 0 \\ \Delta h_t \cdot S_t + c_t \Delta t &= 0 \end{aligned}$$

A fin de tener diferenciales en el sentido de Itô (adelantadas), sumamos y restamos el término  $S_{t-\Delta t} \cdot \Delta h_t$  en el lado izquierdo de la última ecuación considerada, con lo cual:

$$\begin{aligned}\Delta h_t \cdot S_t - S_{t-\Delta t} \cdot \Delta h_t + S_{t-\Delta t} \cdot \Delta h_t + c_t \Delta t &= 0 \\ \Delta h_t \cdot (S_t - S_{t-\Delta t}) + S_{t-\Delta t} \cdot \Delta h_t + c_t \Delta t &= 0 \\ \Delta h_t \cdot \Delta S_t + S_{t-\Delta t} \cdot \Delta h_t + c_t \Delta t &= 0\end{aligned}$$

y considerando que  $\Delta t \rightarrow 0$  se tiene que:

$$dh_t dS_t + S_t dh_t + c_t dt = 0 \quad (4)$$

Si se considera también que  $\Delta t \rightarrow 0$  en la ecuación (1) se tiene que:

$$V_t = h_t \cdot S_t \quad (5)$$

y tomando el diferencial de Itô,

$$dV_t = h_t dS_t + dh_t S_t + dh_t dS_t \quad (6)$$

expresión que describe la dinámica del portafolio. De la ecuación (4) se tiene que:

$$dh_t dS_t = -S_t dh_t - c_t dt$$

y al reemplazar en (6) se tiene que:

$$dV_t = h_t dS_t - c_t dt \quad (7)$$

ecuación que describe la *dinámica del portafolio autofinanciado*, y muestra que los cambios en su valor ( $dV_t$ ) están determinados por los cambios en los precios de los activos que lo conforman ( $dS_t$ ) y el gasto en consumo ( $c_t dt$ ).

## 1. Portafolios autofinanciados

A partir de las definiciones presentadas es posible concretar los siguientes conceptos:

- Una *estrategia de negociación* o *portafolio* es cualquier proceso  $\{h_t; t > 0\}$ ,  $N$ -dimensional y adaptado a la filtración  $\mathbb{F}$ .
- El portafolio  $h$  se dice *markoviano* si es de la forma:

$$h_t = h(t, S_t)$$

es decir, depende solo del último precio observado.

- El *proceso*  $(V_t^h)$  de *valor del portafolio*  $h$  está determinado por:

$$V_t^h = \sum_{i=1}^N h_t^i S_t^i = h_t \cdot S_t$$

- El *proceso de consumo*  $\{c_t; t > 0\}$  es un proceso estocástico unidimensional adaptado a la filtración  $\mathbb{F}$ .
- El par portafolio-consumo  $(h, c)$  se dice *autofinanciado* si se cumple

$$dV_t^h = \sum_{i=1}^N h_t^i dS_t^i - c_t dt = h_t dS_t - c_t dt \quad (8)$$

- Para un portafolio  $h$ , el correspondiente *portafolio relativo*  $u$  está conformado por:

$$u_t^i = \frac{h_t^i S_t^i}{V_t^h} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

que es la proporción del capital total invertido en el activo  $i$  en el instante  $t$ . Desde luego  $\sum_i u_t^i = 1$  y la condición de autofinanciamiento en términos relativos para el par  $(h, c)$  es:

$$dV_t^h = V_t^h \sum_{i=1}^N u_t^i \frac{dS_t^i}{S_t^i} - c_t dt \quad (10)$$

## 1.1. Dividendos

Se define un proceso  $\{D_t; t \geq 0\}$ ,  $N$ -dimensional, donde  $D_t^i$  corresponde al *valor del dividendo acumulado* pagado al poseedor de una unidad del activo  $i$  durante el intervalo  $(0, t]$ . Se asume que:

$$dD_t^i = \delta_t^i dt \quad (11)$$

para algún proceso  $\delta_t^i$ . En este caso, se asume que el activo  $i$  paga dividendos continuamente a una tasa  $\delta$ .

Al considerar dividendos en el análisis de la dinámica del portafolio se tiene que:

- El valor de la riqueza del agente en el instante  $t$  está determinado por:
  - El valor del portafolio viejo  $h_{t-\Delta t} \cdot S_t$
  - Los dividendos ganados en el intervalo  $(t - \Delta t, t]$ ,

$$\sum_{i=1}^N h_{t-\Delta t}^i [D_t^i - D_{t-\Delta t}^i] = h_{t-\Delta t} \cdot \Delta D_t$$

- La condición de autofinanciamiento es:

$$h_{t-\Delta t} S_t + h_{t-\Delta t} \Delta D_t = h_t S_t + c_t \Delta t$$

y al aplicar los mismos argumentos utilizados en el caso sin dividendos se tiene que, cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$dV_t = \sum_i h_t^i dS_t^i - \sum_{i=1}^N h_t^i dD_t^i - c_t dt$$

- Al definir el proceso  $G_t = S_t + D_t$ , la condición de autofinanciamiento en términos de portafolio relativo es:

$$dV_t^h = V_t^h \sum_{i=1}^N u_t^i \frac{dG_t^i}{S_t^i} - c_t dt$$

## 2. Selección de portafolios y control óptimo

Para lo que sigue se considera una economía en el intervalo  $[0, T]$ , de forma que en  $t = 0$  cada agente está dotado de una riqueza inicial  $x_0$  y su problema es: *seleccionar la mejor estrategia  $(h, c)$  de inversión y consumo sobre  $[0, T]$ .*

Como oportunidades de inversión se tiene:

- Un *activo libre de riesgo* con valor en  $t$  denotado por  $B_t$  y que satisface la ecuación diferencial ordinaria  $dB_t = r_f B_t dt$ , donde  $r_f$  es una tasa de interés sin riesgo constante y conocida.
- Un *activo riesgoso* con valor en  $t$  denotado por  $S_t$  y que satisface la ecuación diferencial estocástica  $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ , donde  $\mu$  y  $\sigma$  son constantes y  $W_t$  es un movimiento Browniano estándar.

Para realizar la inversión, el agente conforma un portafolio tomando posición en los dos activos anteriores, de forma que su portafolio relativo es:

- $u_t^0$ : en activo libre de riesgo.
- $u_t^1$ : en activo riesgoso.
- $c_t$ : tasa de consumo.

Dado que las estrategias consideradas por el agente deben ser autofinanciadas, su riqueza en el instante  $t$ , denotada por  $X_t$ , satisface:

$$dX_t = X_t \left[ u_t^0 \frac{dB_t}{B_t} + u_t^1 \frac{dS_t}{S_t} \right] - c_t dt \quad (12)$$

o de forma equivalente:

$$dX_t = X_t [u_t^0 r_f + u_t^1 \mu] dt - c_t dt + u_t^1 \sigma X_t dW_t \quad (13)$$

El objetivo del agente es maximizar:

$$E \left[ \int_0^T F(t, c_t) dt + \Phi(X_T) \right] \quad (14)$$

donde  $F(t, c_t)$  denota la utilidad por consumos entre 0 y  $T$  y  $\Phi(X_T)$  denota la utilidad de llegar al instante  $T$  con riqueza. De esta forma, *el problema del agente* es:

$$\max_{u^0, u^1, c} : E \left[ \int_0^T F(t, c_t) dt + \Phi(X_T) \right] \quad (15)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t[u_t^0 r_f + u_t^1 \mu] dt - c_t dt + u_t^1 \sigma X_t dW_t \\ X_0 &= x_0 \\ u_t^0 + u_t^1 &= 1 \quad \text{para todo } t \\ c_t &\geq 0 \quad \text{para todo } t \end{aligned} \quad (16)$$

En el planteamiento del problema se pueden identificar:

- El proceso  $X_t$ , denominado *proceso de estado*.
- Los procesos  $u_t^0, u_t^1, c_t$ , denominados *procesos de control*, que deben tomar valores dentro de un conjunto admisible  $\mathcal{U}$ . En general se denotará como  $u = (u_t^0, u_t^1, c_t) \in \mathcal{U}$ .
- La función:

$$\mathcal{J}(t, x, u) = E \left[ \int_t^T F(s, X_s, u) ds + \Phi(X_T^u) \right]$$

denominada *función de valor*, y que hace las veces de función objetivo en el problema de optimización del agente. Esta función depende del tiempo  $t$ , del valor tomado por el proceso de control  $x$ , y del valor tomado por los procesos de control  $u$  en el conjunto admisible  $\mathcal{U}$ .

- Se define la *función de valor óptimo*,

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(t, x, u)$$

Al aplicar el principio de programación dinámica, lo que se busca es derivar una ecuación diferencial parcial (EDP) para  $V(t, x)$  que permita determinar dicha función. Esta EDP se conoce como ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Se debe anotar que si  $\Phi(X_T) = 0$  y  $F$  es una función no acotada en  $c$ , el problema se degenera y no tiene solución. Para evitar esto consideramos para los procesos de control ( $u$ ) un dominio  $D$  definido como:

$$D = [0, T] \times \{x | x > 0\}$$

y se define  $\tau = \min\{\inf\{t > 0 | X_t = 0\}, T\}$ ; el problema se plantea como:

$$\max_{u \in D} E \left[ \int_0^\tau F(t, c_t) dt \right]$$

## 2.1. Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

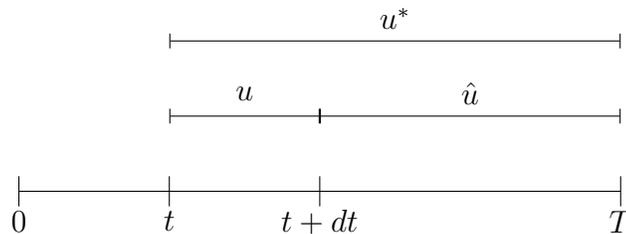
Para la deducción de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) se asume que:

- Existe un control óptimo  $\hat{u} \in \mathcal{U}$ .
- La función de valor óptimo  $V(t, x) \in C^{1,2}(\mathbb{R})$ .

Procedemos entonces a:

1. Fijar un par  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ , y un incremento de tiempo  $dt$  fijo, tal que  $t + dt < T$ .
2. Se define un control aleatorio  $u^*$  como:

$$u^* = \begin{cases} u(s, y) & \in [t, t + dt] \times \mathbb{R}^n \quad \text{arbitrario} \\ \hat{u}(s, y) & \in (t + dt, T] \times \mathbb{R}^n \quad \text{óptimo} \end{cases}$$



3. Se consideran dos estrategias posibles sobre el intervalo  $(t, T]$ :

- Estrategia 1: utilizar el control óptimo  $\hat{u}$ .
- Estrategia 2: utilizar el control  $u^*$ .

Las utilidades esperadas bajo cada estrategia son:

- Estrategia 1:

$$E_{t,x}[\mathcal{J}(t, x, \hat{u})] = V(t, x)$$

- Estrategia 2: para el intervalo  $[t, t + dt]$

$$E_{t,x} \left[ \int_t^{t+dt} F(x, X_s^u, u) ds \right]$$

y para el intervalo  $(t + dt, T]$

$$E_{t,x} [V(t + dt, X_{t+dt})]$$

dato que en este intervalo se está siguiendo el control óptimo. En total para esta estrategia:

$$E_{t,x} \left[ \int_t^{t+dt} F(x, X_s^u, u) ds + V(t + dt, X_{t+dt}) \right]$$

4. Comparamos las utilidades esperadas de las dos estrategias:

$$V(t, x) \geq E_{t,x} \left[ \int_t^{t+dt} F(x, X_s^u, u) ds + V(t + dt, X_{t+dt}) \right] \quad (17)$$

5. Aplicando la fórmula de Itô sobre  $V(t + dt, X_{t+dt})$  se tiene<sup>1</sup>:

---

<sup>1</sup>Dada una ecuación diferencial estocástica de la forma:

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

el operador infinitesimal, operador diferencial, operador de Dynkin, operador de Itô u operador atrasado de Kolmogorov de  $X_t$ , para una función  $h(t, x) \in C^{1,2}(\mathbb{R})$ , se define como:

$$\mathcal{A}h(t, x) = \mu(t, x) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

$$dV(t + dt, X_{t+dt}) = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{A}V(t + dt, X_{t+dt}) \right) dt + \sigma \frac{\partial V}{\partial X_t} dW_t \quad (18)$$

que en notación integral, considerando el diferencial entre  $t$  y  $t + dt$  es:

$$V(t + dt, X_{t+dt}) = V(t, x) + \int_t^{t+dt} \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{A}V(s, X_s) \right) ds + \int_t^{t+dt} \sigma \frac{\partial V}{\partial X_s} dW_s \quad (19)$$

y tomando el valor esperado en (19) con  $t$  y  $x$  fijos, se tiene:

$$E_{t,x}[V(t + dt, X_{t+dt})] = V(t, x) + E_{t,x} \left\{ \int_t^{t+dt} \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{A}V(s, X_s) \right) ds \right\} + E_{t,x} \left\{ \int_t^{t+dt} \sigma \frac{\partial V}{\partial X_s} dW_s \right\} \quad (20)$$

donde el valor esperado del último término es igual a 0 ya que este es una integral estocástica.

De la ecuación (20) se concluye que:

$$V(t, x) = E_{t,x} \left[ V(t + dt, X_{t+dt}) - \int_t^{t+dt} \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{A}V(s, X_s) \right) ds \right] \quad (21)$$

Al reemplazar (20) en (17) se tiene:

$$E_{t,x} \left[ V(t + dt, X_{t+dt}) - \int_t^{t+dt} \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{A}V(s, X_s) \right) ds \right] \geq E_{t,x} \left[ \int_t^{t+dt} F(x, X_s^u, u) ds + V(t + dt, X_{t+dt}) \right] \quad (22)$$

de donde,

$$E_{t,x} \left[ \int_t^{t+dt} F(x, X_s^u, u) + \frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{A}V(s, X_s) \right] ds \leq 0 \quad (23)$$

Considerando que  $dt \rightarrow 0$  tenemos que:

$$F(t, x, u) + \frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{A}V(t, x) \leq 0 \quad (24)$$

La igualdad en esta expresión solo se tiene si el control  $u$  es el óptimo  $\hat{u}$ , entonces:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sup_u \{F(t, x, u) + \mathcal{A}V(t, x)\} = 0 \quad (25)$$

con  $V(T, x) = \Phi(x)$ , esta es la ecuación diferencial parcial de HJB.

Considerando de nuevo el problema del agente se tiene que  $u_t^0 + u_t^1 = 1$ ; luego, si se establece que  $u^1 = w$ , entonces  $1 - w = u^0$ , con lo cual la evolución del proceso de riqueza del agente puede describirse como:

$$dX_t = w_t[\mu - r_f]X_t dt + [r_f X_t - c_t]dt + w_t \sigma X_t dW_t$$

y la correspondiente ecuación de HJB es:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \sup_{c \geq 0, w \in \mathbb{R}} \left\{ F(t, c) + wx(\mu - r_f) \frac{\partial V}{\partial x} + (r_f x - c) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} x^2 w^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right\} = 0 \\ V(T, x) = \Phi(T, x) \\ V(t, 0) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

En general, la mayor dificultad al enfrentar problemas de control óptimo está en la resolución de la ecuación de HJB; muestra de esto es el limitado número de problemas de este tipo que tiene una solución analítica. Una manera de tratar este problema es *proponiendo* una forma para la posible función solución de la ecuación, basada en la forma de las funciones de utilidad.

A pesar de lo anterior, es posible establecer una serie de pasos que facilitan la aproximación a la solución de la ecuación.

1. Se establece la ecuación de HJB para  $V$ .
2. Considerando un par  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$  fijos, se resuelve el problema de optimización estático:

$$\max_{u \in \mathcal{U}} [F(t, x, u) + \mathcal{A}V(t, x)]$$

3. La solución óptima  $\hat{u}$  encontrada depende de  $t, x$ , de la función  $V$  y sus derivadas parciales:

$$\hat{u} = \hat{u}(t, x; V)$$

4. Con la función  $\hat{u} = \hat{u}(t, x; V)$  como candidata para control óptimo, pero parcialmente definida porque no se conoce la función  $V$ , se sustituye  $\hat{u}$  en la EDP para obtener:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + F(t, x, \hat{u}) + \mathcal{A}V(t, x) = 0$$

Consideremos un agente con una función de utilidad por consumos dada por:

$$F(t, c) = \frac{1}{\gamma} e^{-\beta t} c^\gamma$$

y una función de utilidad asociada a la riqueza dada por:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma$$

para  $\beta > 0$  y  $\gamma \in (0, 1)$ . Entonces, el problema del agente puede plantearse como:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \sup_{c \geq 0, w \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{\gamma} e^{-\beta t} c^\gamma + wx(\mu - r_f) \frac{\partial V}{\partial x} + (r_f x - c) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} x^2 w^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right\} = 0 \\ V(T, x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma \\ V(t, 0) = 0 \end{cases} \quad (27)$$

y el problema de optimización estático es:

$$\sup_{c \geq 0, w \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{\gamma} e^{-\beta t} c^\gamma + wx(\mu - r_f) \frac{\partial V}{\partial x} + (r_f x - c) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} x^2 w^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right\} \quad (28)$$

Las condiciones de primer orden asociadas a este problema son:

1. Derivando respecto a  $c$ :

$$e^{-\beta t} c^{\gamma-1} - \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \left( e^{\beta t} \frac{\partial V}{\partial x} \right)^{1/\gamma-1} \quad (29)$$

2. Derivando respecto a  $w$ :

$$x(\mu - r_f) \frac{\partial V}{\partial x} + wx^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad w = \frac{(\mu - r_f) \frac{\partial V}{\partial x}}{x \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}} \quad (30)$$

Se propone, entonces, una forma plausible para la función  $V(t, x)$  a partir de las funciones de utilidad:

$$V(t, x) = f(t) \frac{1}{\gamma} x^\gamma \quad ; \quad f(T) = 1 \quad (31)$$

de donde:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = f'(t) \frac{1}{\gamma} x^\gamma \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial x} = f(t) x^{\gamma-1} \quad ; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = f(t) (\gamma - 1) x^{\gamma-2} \quad (32)$$

luego,

$$\hat{c} = (e^{\beta t} f(t) x^{\gamma-1})^{1/\gamma-1} = e^{\frac{\beta t}{\gamma-1}} f(t)^{\frac{1}{\gamma-1}} x \quad (33)$$

$$\hat{w} = \frac{(\mu - r_f) f(t) x^{\gamma-1}}{x \sigma^2 f(t) (\gamma - 1) x^{\gamma-2}} = \frac{(\mu - r_f)}{\sigma^2 (\gamma - 1)} \quad (34)$$

la ecuación de HJB queda expresada como:

$$\begin{aligned}
& f'(t) \frac{1}{\gamma} x^\gamma + \frac{1}{\gamma} e^{-\beta t} \left[ e^{\frac{\beta t}{\gamma-1}} f(t)^{\frac{1}{\gamma-1}} x \right]^\gamma + \\
& \frac{(\mu - r_f)}{\sigma^2(\gamma - 1)} x(\mu - r_f) f(t) x^{\gamma-1} + \left[ r_f x - \left( e^{\frac{\beta t}{\gamma-1}} f(t)^{\frac{1}{\gamma-1}} x \right) \right] f(t) x^{\gamma-1} + \\
& \frac{1}{2} x^2 \left( \frac{(\mu - r_f)}{\sigma^2(\gamma - 1)} \right)^2 \sigma^2 f(t) (\gamma - 1) x^{\gamma-2} = 0 \quad (35)
\end{aligned}$$

al distribuir exponentes, agrupar y factorizar

$$\begin{aligned}
& f'(t) \frac{1}{\gamma} x^\gamma + \frac{1}{\gamma} x^\gamma f(t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} e^{\frac{\beta t \gamma}{\gamma-1} - \beta t} + x^\gamma f(t) \frac{(\mu - r_f)^2}{\sigma^2(\gamma - 1)} + \\
& r_f x^\gamma f(t) - e^{\frac{\beta t}{\gamma-1}} f(t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} x^\gamma + \frac{1}{2} x^\gamma \frac{(\mu - r_f)^2}{\sigma^4(\gamma - 1)^2} \sigma^2 f(t) (\gamma - 1) = 0 \quad (36)
\end{aligned}$$

de donde,

$$f'(t) + f(t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} e^{\frac{\beta t}{\gamma-1}} (1 - \gamma) + f(t) \left[ \gamma r_f + \frac{(\mu - r_f)^2 \gamma}{\sigma^2(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} \frac{(\mu - r_f)^2 \gamma}{\sigma^2(\gamma - 1)} \right] = 0 \quad (37)$$

Denotado por:

$$C = \gamma r_f + \frac{(\mu - r_f)^2 \gamma}{\sigma^2(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} \frac{(\mu - r_f)^2 \gamma}{\sigma^2(\gamma - 1)} \quad ; \quad D = e^{\frac{\beta t}{\gamma-1}} (1 - \gamma)$$

se tiene,

$$f'(t) + f(t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} D + f(t) C = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(t) + C f(t) = -D f(t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (38)$$

La última de las ecuaciones anteriores corresponde a una ecuación diferencial ordinaria tipo Bernulli, la cual puede resolverse aplicando la transformación  $g(t) = f(t)^{1-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = f(t)^{\frac{1}{1-\gamma}}$ , de donde:

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{1}{1-\gamma} f(t)^{\frac{1}{1-\gamma}-1} f'(t) = \frac{1}{1-\gamma} f(t)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} f'(t) \quad \Rightarrow \quad (1-\gamma)g'(t) = f(t)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} f'(t)$$

Dado que la ecuación (38) puede escribirse como:

$$f(t)^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}} f'(t) + C f(t)^{\frac{1}{1-\gamma}} = -D \quad (39)$$

utilizando los resultados de la sustitución se tiene que,

$$(1 - \gamma)g'(t) + Cg(t) = -D \quad \Rightarrow \quad g'(t) + \frac{C}{1 - \gamma}g(t) = -\frac{D}{1 - \gamma} \quad (40)$$

El factor integrante en esta última ecuación diferencial lineal es:

$$FI = e^{\int \frac{C}{1-\gamma} dt} = (1 - \gamma)^C$$

luego,

$$\frac{d}{dt}[(1 - \gamma)^C g(t)] = -D(1 - \gamma)^{C-1}$$

Al integrar se tiene que:

$$g(t) = -\frac{D(1 - \gamma)^{C-1}}{(1 - \gamma)^C}t + K(1 - \gamma)^{-C}$$

donde  $K$  es una constante de integración.

Dado que  $g(t) = f(t)^{1/(1-\gamma)}$ , entonces:

$$f(t) = \left( -\frac{D(1 - \gamma)^{C-1}}{(1 - \gamma)^C}t + K(1 - \gamma)^{-C} \right)^{1-\gamma}$$

y como  $f(T) = 1$ , se tiene que  $K = \frac{1+D(1-\gamma)^{-1}}{(1-\gamma)^C}$ , lo que resuelve completamente el problema.

### 3. Conclusiones

Este documento es una introducción a la teoría de control óptimo estocástico y sus aplicaciones. Busca introducir al lector en los rudimentos básicos necesarios para entender esta teoría en el marco del problema de selección óptima de portafolios.

## Referencias

Björk, T. (2009). *Arbitrage theory in continuous time*. Oxford: Oxford University Press.

Martínez, F. V. (2008). *Riesgos financieros y económicos/financial and economical risks: Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. Bogotá: Cengage Learning Editores.

Mikosch, T. (1998). *Elementary stochastic calculus with finance in view*. Singapur: World Scientific.

Moreno T., J. F. (2015). *Modelos estocásticos en finanzas*. Bogotá: Universidad Externado de Colombia.

Oksendal, B. (2013). *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Berlin: Springer Science & Business Media.

Peng, S. (1993). Backward stochastic differential equations and applications to optimal control. *Applied Mathematics and Optimization*, 27(2), 125-144.

Shreve, S. (2012). *Stochastic calculus for finance 1: The binomial asset pricing model*. Berlin: Springer Science & Business Media.

Shreve, S. E. (2004). *Stochastic calculus for finance 2: Continuous-time models* (Vol. 11). Berlin: Springer Science & Business Media.