Evolution of the assumption of normality in finance: a epistemological analysis of the Popper-Kuhn type. Why does not normality fall into disuse?)

Jaramillo-López, Oscar Andrés and Forero-Laverde, Germán and Venegas-Martínez, Francisco

Universidad Externado de Colombia, Universidad Externado de Colombia, Instituto Politécnico Nacional

19 July 2020

Evolución del supuesto de normalidad en finanzas: un análisis epistemológico del tipo Popper-Kuhn ¿Por qué la normalidad no cae en desuso?

(Evolution of the assumption of normality in finance: a epistemological analysis of the Popper-Kuhn type. Why does not normality fall into disuse?)

Oscar Andrés Jaramillo-López
Universidad Externado de Colombia
anjaramlo@gmail.com

Germán Forero-Laverde
Universidad Externado de Colombia
german.forerol@uexternado.edu.co

Francisco Venegas-Martínez
Instituto Politécnico Nacional
fvenegas1111@yahoo.com.mx

Resumen

El debate del supuesto de normalidad, como principio necesario o no, en el modelado y análisis de algunos fenómenos financieros ha sido un hilo conductor en el desarrollo diversas áreas de las finanzas. El debate epistemológico subyace en un modelo matemático que, a pesar de sus limitaciones, ha tenido un profundo impacto en la evolución y el desarrollo de las finanzas. Dicho supuesto se ha forjado desde su origen como la búsqueda de un modelo mimético de la realidad. El análisis popperiano y kuhniano propuesto en esta investigación muestra que más que sombras, el supuesto ha traído luz y ha elevado el nivel técnico y teórico a través de múltiples generalizaciones y extensiones; además de que la popularidad del supuesto de normalidad sigue aún vigente.

Clasificación JEL: B16, B41, C18, C65, G10, B10.
Palabras Clave: Distribución normal, aspectos metodológicos, historia de conceptos financieros, historia del pensamiento económico.

Abstract

The debate on the assumption of normality, as a necessary principle or not, in the modeling and analysis of some financial phenomena has been a common thread in the development of various areas of finance. The epistemological debate underlies a mathematical model that, despite its limitations, has had a profound impact on the evolution and development of finance. This assumption has been forged since its origin as the search for a mimetic model of reality. The Popperian and Kuhnian analysis proposed in this investigation shows that more than shadows, the assumption has brought light and has raised the technical and theoretical level through multiple generalizations and extensions. In addition to that the popularity of the assumption of normality continues.

JEL Classification: B16, B41, C18, C65, G10, B10.
Keywords: Normal distribution, methodological aspects, history of financial concepts, history of economic thought.

1. Introducción

El supuesto de normalidad es considerado naturalista -de allí su nombre- debido a los trabajos de Abraham de Moivre, Carl Fiedrich Gauss y Pierre-Simón Laplace, entre otros. La descripción de diversos fenómenos naturales parecía seguir la forma de una curva de campana por primera vez descrita por Abraham de Moivre en 1738, y popularizada más tarde por Gauss y Laplace. El avance en los campos de la probabilidad, la física y la astronomía incentivaron a científicos de otros campos a incorporar los métodos de las ciencias naturales a los suyos como propios (Stigler, 1988, p. 163). Uno de los impulsores de la popularidad de la distribución normal entre 1935 y 1969, como concepción natural, fue Adolphe Quételet. Este personaje es uno de los exponentes más importantes en la divulgación científica en Europa continental en la primera mitad del siglo XIX, quien impulsó el uso de la distribución gaussiana como la mejor explicación al patrón de comportamiento de las observaciones de fenómenos sociales.

Louis Bachelier (1870-1946), en su Teoría de la Especulación (1900), toma la distribución gaussiana como base para explicar los precios de las opciones de la *Bourse* de Paris. Los aportes de Bachelier –proceso estocástico, martingala, esperanza condicional y movimiento browniano- son fundamentales en el desarrollo de diversos campos tanto en las ciencias naturales como sociales. Su trabajo pionero fue retomado, en el campo financiero, 50 años después por Paul Samuelson, quien rescató su trabajo y lo dio a conocer a la comunidad científica en economía y finanzas.

En la construcción del edificio teórico de las finanzas modernas destaca la participación de Bachelier. No obstante, Osborne (1959) también llega a sus resultados de manera independiente obteniendo conclusiones similares a las de Bachelier.[1] 60 años después, Samuelson (1965b) [2] propone una variación (una corrección) al modelo de Bachelier, sin dejar de darle el reconocimiento por su legado. Durante el último tercio del siglo XIX, la idea de la normalidad en los rendimientos de los activos ocupó el lugar de una verdad natural, pero para la segunda mitad del siglo XX se entiende que, más allá de su realización fenomenológica -como hecho empírico-, como supuesto es funcional y que economiza tiempos de cálculo, de aprendizaje y conceptualización tanto teórica como matemática.

Para 1963, Benoit Mandelbrot presentó una visión diferente sobre la aplicación[3] del principio de normalidad en la valuación de activos financieros. Esto impulsó la necesidad de matemáticas más sofisticadas y un mayor formalismo al campo de las finanzas

[1] En este caso, Osborne propone que los logaritmos de los precios de activos financieros siguen una distribución normal y que el movimiento browniano que caracteriza el movimiento molecular es homólogo al movimiento de los logaritmos de precios en un mercado de valores.
[2] Samuelson, advirtiendo el error de Bachelier, propuso un Movimiento Browniano Geométrico (MBG).
[3] De hecho, las propuestas de Mandelbrot ocupan varios campos de la ciencia tanto natural como social. Su objetivo fue demostrar que la visión fractal y multifractal de los fenómenos naturales, y sociales, permitían una comprensión más completa de los mismos.

matemáticas. Ese impulso ha motivado a diversos científicos de las ciencias naturales, en especial, a incursionar dentro de la ciencia financiera.

Las preguntas centrales a responder en este trabajo son: ¿Cómo ha evolucionado el supuesto de normalidad desde una perspectiva de la historia del pensamiento filosófico financiero? y ¿Por qué no cae en desuso el supuesto de normalidad? La primera pregunta fue motivada por la defensa que la comunidad científica presentó, en especial en la década de los 70 del siglo XX, ante las primeras críticas al principio de normalidad del corpus teórico financiero moderno[4] y ante la prevalencia de muchos de estos modelos, que incorporan la distribución normal como la herramienta idónea para comprender el comportamiento de los rendimientos de los activos. Para responder a estas preguntas, se plantean como objetivos: 1) conocer el origen y la evolución del principio de normalidad en la modelación financiera, 2) identificar el impacto que ha tenido la falsación del principio de normalidad dentro del corpus teórico financiero y 3) caracterizar la evolución del principio de normalidad al interior de la "filosofía" financiera como un proceso de largo alcance en el que se intenta modelar una realidad que es incognoscible de la forma más verosímil posible.

La metodología propuesta es hacer una extensa revisión de literatura que permita analizar, desde un aparato crítico a la Kuhn-Popper, cómo ha evolucionado la inclusión de la idea de normalidad en la teoría financiera. A su vez, identificar como ha evolucionado el paradigma financiero y que implicaciones ha generado dentro del corpus teórico de la ciencia financiera. La idea de apoyarse en los trabajos de Kuhn (1962) y Popper (1934) tiene sentido en tanto ambos plantean propuestas sobre el desarrollo de la ciencia. Por un lado, Karl Popper propone la falsación de las teorías como la tarea del científico. Para reconocer una teoría como valida, ésta debe ser atacada por los científicos de su campo, con el fin de verificar que está libre de problemas lógicos -deductible- o de problemas sensibles -inductibles-. Thomas Kuhn, por el contrario, propone que las comunidades científicas no se dedican exclusivamente la falsación de las teorías, por el contrario, las fortalecen con ejemplos y experiencias que terminan solidificándolas a través de la práctica académica y profesional.

Este trabajo está inspirado en diversos pensadores, científicos y filósofos,[5] y se basa en sus conclusiones y visiones con el objeto de hacer una propuesta revisionista. Es un modesto aporte a la epistemología financiera estudiar -desde el punto de vista histórico, filosófico y social- la evolución del principio de normalidad dentro del corpus teórico financiero desde los puntos de vista popperianos y kuhnianos. El estudio histórico de la lógica de la investigación científica en finanzas propuesto, apoyado en la metodología de Popper (1934) y Kuhn (1962), permite concluir que la evolución del principio de normalidad, dentro de la ciencia financiera, ha seguido a la par un proceso a la Kuhn[6] y un

[4] Ejemplos de esta discusión se pueden encontrar en Fama (1970), Mandelbrot (1967a), Brada *et al*. (1966) y Laurent (1959).
[5] Para el lector interesado, este trabajo continúa en la línea de Bernstein (1992, 1996, 2007), Dimson y Mussavian (1999), Markowitz (1999), Romero (2004, 2010), Jarrow y Protter (2004), Venegas-Martínez (2015, 2017), Venegas-Martínez y Rodríguez-Nava (2009), Vallejo-Jiménez y Venegas-Martínez (2017), Rubinstein (2006) y Avellaneda (2019), quienes han aportado sobre el desarrollo de la historia de las finanzas.
[6] De formulación y robustecimiento del paradigma existente.

proceso de falsación de Popper.[7] Es evidente que la ciencia combina ambas estructuras, que se mezclan e interrelacionan, que no hay un proceso lógico que permita dilucidar en qué momento la ciencia está en un proceso de falsación y cuándo está en un procesos de consolidación.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: la sección 2 presenta la estructura de la lógica de la investigación científica propuesta; la sección 3 es un estudio histórico-bibliográfico sobre el origen del concepto de normalidad; la sección 4 hace énfasis en las dos visiones matemáticas de la selección de carteras y la valuación de activos financieros y cómo es tomado el principio de normalidad en cada una de ellas; la sección 5 se centra en el debate del principio de normalidad; por último, en la sección 6 se presentan conclusiones del trabajo y futuras líneas de investigación.

2. La lógica de la investigación científica financiera

Las finanzas, como ciencia, tienen un inicio incierto. Sin embargo, esto no va en deterioro de sus métodos y preguntas de investigación para catalogarla como ciencia. Así, Venegas-Martínez (2015) define la ciencia financiera como empírica y positiva. Entre sus características destaca que es racional y analítica. A su vez, la ciencia financiera busca explicar fenómenos a través de leyes generales y principios verificables, por lo tanto, es falible.

La ciencia financiera, como toda ciencia occidental, tiene un origen común, y es el estudio por medio de deducciones e inducciones -ideas[8] y fenómenos- de los fenómenos del campo de su estudio. Este camino empezó en la Grecia Socrática, y es el mismo camino que recorremos en la actualidad. La filosofía socrática -a través de su seguidor Platón y el discípulo de Platón, Aristóteles- está inmersa en todo el corpus teórico de occidente, y sus bases están enunciadas por doquier. Como primer elemento debemos establecer el carácter platónico[9] de la ciencia financiera a través del mito de la caverna. En cuanto la verdad es inalcanzable, la luz que nos llega a la caverna -la verdad- solamente nos da información de la misma a través de las sombras en la caverna, el filósofo solamente podrá construir modelos miméticos que permitan desentrañar el mundo, pero nunca llegando a dilucidarlo plenamente.[10] La manera de alcanzar la luz, desde el punto de vista platónico, es construyendo conceptos venidos desde el mundo de las ideas, ya que la experiencia sensible no brindará conocimiento de la realidad. Las matemáticas, en ese sentido, son un vehículo que permiten construir modelos miméticos -a través de las sombras y los reflejos- de la realidad.[11]

---

[7] De evaluar las hipótesis con datos históricos y medir la veracidad o falsación de la teoría.

[8] Kant (1787) define las ideas como noúmeno: ideas más allá del fenómeno, que no pertenecen a la intuición sensible si no a la intuición no sensible, al mundo de las ideas.

[9] Se habla tanto de Platón y Aristóteles dado que es a través de su obra que podemos conocer la filosofía socrática.

[10] Tomado de (Platón, 1871, p. 3211)

[11] Ibíd., p. 3215

Los avances en la ciencia occidental estaban plasmados bajo el método griego de la dialéctica. Esta propuesta sugiere que a través de conversaciones basadas en la intuición y en la lógica se alcanza el conocimiento. Este método se usó en Europa hasta entrado el siglo XVI y ha sido denominado como el método deductivo. Algunos de los pensadores más destacados de este método son René Descartes (1596-1650), Baruch Spinoza (1632-1677), y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). El método deductivo, venía erosionándose a lo largo del tiempo y, tras el surgimiento del sistema copernicano[12] como respuesta a las deficiencias del sistema ptolemaico, surgieron otras voces que incorporaban nuevas formas de acceder al conocimiento.

Por otro lado, el método inductivo, en contraposición del deductivo, es un método…basado en enunciados singulares -particulares- como lo son las descripciones de observaciones o experimentos, que se convierten en enunciados universales como lo son las hipótesis o teorías.[13] En este sentido, el método científico fue desarrollado por Francis Bacon (1561-1626) y utilizado, entre otros, por Isaac Newton (1643-1727) y David Hume (1711-1776).

Newton propuso como una forma para hacer ciencia partir de mediciones cuidadosas de los fenómenos naturales, e ir ascendiendo hasta los principios generales, metodología contraria a la expuesta por Leibniz y Descartes. Newton alertaba que este método no aseguraba la explicación completa de todos los fenómenos, pero sí los más generales, y la ciencia, tenía como tarea ir construyendo principios más generales que pudiesen describir cada vez más fenómenos[14] (Kant, 1787, p. 39). Lo anterior genera en Europa un debate sobre la forma de aproximarse al conocimiento. El pensamiento deductivo -europeo continental- *vs* el pensamiento inductivo -europeo insular- terminó afectando la manera de desarrollar ciencia en occidente. Immanuel Kant (1724-1786) es quien propone una convergencia entre el pensamiento deductivo e inductivo en su obra Crítica de la Razón Pura (1787). La ruta mediadora propuesta por Kant, entre el racionalismo y el empirismo, es lo que impulsa el devenir de la ciencia occidental como ciencia universal. La convergencia de ideas de carácter lógico, con fuerte componente experimental, se constituye como un excelente método para construir leyes universales a través del compendio de leyes particulares.

Para los escépticos, el conocimiento es inalcanzable, y solamente estamos persiguiendo sombras; sin embargo, para los positivistas, escuela surgida del pensamiento kantiano, esta construcción nos permite acercarnos a la verdad, aunque esta sea imposible de alcanzar. En particular cuando se utilizan matemáticas, los juicios son sintéticos *a priori*.[15] La otra ciencia por excelencia -para Kant- es la física, que también posee juicios sintéticos *a priori,* así como principios sintéticos.[16]

---

[12] El sistema copernicano se desarrolla gracias a las observaciones astronómicas -realizadas por muchos, pero en especial por Tycho Brae (1546-1601)- el tratamiento de Nicolás Copérnico (1473-1543), y posteriormente por los trabajos de Galileo Galilei (1564-1642) y Johannes Kepler (1571-1630).
[13] Tomado de (Popper, 1934, p. 33)
[14] Tomado de (Kant, 1787, p. 39)
[15] Ibíd., p. 118 *"*...las proposiciones matemáticas son juicios a priori, sus conclusiones y axiomas no nacen de la experiencia, por el contrario, nacen a través del principio de contradicción, que exige una naturaleza de

Los precios que vemos reflejados, por el juego de oferta y demanda, son las sombras al interior de la caverna venidas de la luz del valor real. El riesgo de mercado y su administración[17] se convierten así en tarea del financiero, como estimación de las diferencias entre los precios de oferta y demanda -los reflejos del valor real en las paredes de la caverna- y el valor real del activo -el valor inalcanzable del activo-. Así, los juicios matemáticos y la lógica de la probabilidad[18] le permiten a la ciencia financiera construir leyes.

La adopción de las herramientas y métodos de las ciencias naturales, por parte de las finanzas y la economía[19] -ciencia de la cual las finanzas se ramifica- son apenas un paso natural en el desarrollo axiomático de la ciencia social. Muchos de los métodos de las ciencias naturales podemos reconocerlos y explicarlos desde la lógica de la investigación científica. Las finanzas han incorporado de la física sus métodos de investigación, contrastar las hipótesis con resultados experimentales u observaciones de campo, -en finanzas, como en la gran mayoría de las ciencias sociales, la generación de datos experimentales no reflejaría la realidad, por ello los mismos deben ser tomados a partir de las observaciones de campo-. Igualmente, las matemáticas les han brindado a las finanzas un lenguaje común y un espacio de divulgación de sus resultados que hoy conocemos como finanzas matemáticas. Mientras la probabilidad ha brindado, a la ciencia financiera, la lógica necesaria para extrapolar sus paradigmas más allá de las respuestas que buscaba responder inicialmente.

Para determinar el papel del principio de normalidad dentro de la lógica de la investigación científica en finanzas se utilizarán los métodos de Karl Popper y Thomas Kuhn, Popper, uno de los más destacados filósofos de la ciencia y, el otro, reconocido historiador de la ciencia y de los cambios en sus paradigmas. Karl Popper (1902-1994) en su obra “la lógica de la investigación científica” (1934)[20] empieza su disertación argumentando que … el hombre de ciencia propone enunciados -o sistemas de enunciados- y los contrasta mediante la experiencia… -observaciones en el caso de las finanzas-. Así mismo, propone …el estudio de la lógica del conocimiento como respuesta a los problemas del método inductivo. Las críticas al método inductivo vienen desde el siglo XVI. Sus detractores, con razones, afirman que no es posible inferir enunciados universales -leyes de la naturaleza- partiendo de enunciados singulares -conclusiones extraídas de eventos

---

toda certeza apodíctica”. Para Kant, los conocimientos *a priori* son todos aquellos adquiridos previa toda experiencia, son opuestos a los conocimientos nacidos de la experiencia o conocimiento *a posteriori*.

[16] Los principios sintéticos son elementos que entendemos previos a toda experiencia y que reconocemos como fundamentales para el desarrollo de toda ciencia. Ibíd., p. 120.

[17] Venegas-Martinez (2015) define de riesgo de mercado, en finanzas, como la medición probabilística de las diferencias entre el precio estimado y el precio spot, mientras para la incertidumbre, careceríamos de una medida probabilística -desde la experiencia- dado que no es un hecho observado, es lo que Nicholas Taleb (2007) denomina un Cisne Negro.

[18] Leibniz consideraba a la probabilidad una ciencia derivada más de la Lógica (J. M. Keynes, 1921, p. 1)

[19] Venegas-Martinez (2015) define la ciencia financiera como una ramificación de la economía, y esta es la encargada de estudiar los fenómenos ocurridos en un espacio de intercambio tanto de activos escasos como los riesgos asociados a las variaciones de los flujos de caja.

[20] La cita es tomada de (Popper, 1934, p. 33)

puntuales- pues un solo evento que contradiga lo predicho por la teoría, derrumbaría la misma.

Popper[21] propone un sistema de contrastación de teorías, que es lo que un científico haría en su quehacer diario y considera los siguientes pasos: 1) hacer una comparación lógica de las conclusiones, con el fin de contrastar la coherencia interna de la teoría; 2) realizar un estudio de la forma lógica de la teoría con el fin de determinar si esta es empírica o tautológica -es decir se refiere a sí misma en otras palabras, por lo que no genera conocimiento-; 3) comparar con otras teorías, con el fin de conocer si la teoría a examinar constituye un adelanto científico; y 4) contrastar por medio de la aplicación empírica las conclusiones que pueden deducirse de la teoría. Esto es lo que denomina Popper[22] como falsación y esto servirá como criterio de demarcación entre si un enunciado es verificable o falsable. En tanto la experiencia, como método para alcanzar un sistema teórico debe cumplir tres premisas: 1) ha de ser sintético, que no represente un mundo contradictorio; 2) debe satisfacer el criterio de demarcación, es decir, debe representar un mundo de experiencias; y 3) debe distinguirse de otros semejantes por ser el que representa nuestra experiencia.

Popper[23] argumenta que la ciencia se ve abocada a este juego de manera ininterrumpida y que, para participar en este juego, debe cumplir dos reglas: 1) la ciencia nunca se acaba, no podemos afirmar que un enunciado universal no requiere contrastación, por más contrastado que haya sido; y 2) no se eliminará una hipótesis propuesta y contrastada que haya demostrado su temple.[24] La hipótesis al ser retirará una vez, se sustituya con otra hipótesis más contrastable o se ha falsado una de las consecuencias de la hipótesis.

Thomas Kuhn (1922-1996), filósofo, físico e historiador propone varios elementos como método para estudiar el desarrollo de un paradigma científico en su obra La estructura de las revoluciones científicas (1962). Primero, Kuhn[25] llama ciencia normal a la investigación basada… en logros científicos… que una comunidad particular reconoce como el fundamento de su práctica. Estos logros se divulgan de manera ordenada -ya sea de manera bibliográfica con textos básicos, avanzados y comunicándola de manera amplia a través de diversos formatos y canales- con el fin de publicitar el cuerpo de la teoría aceptada se ilustran aplicaciones de dicha teoría y se confrontan las mismas con ejemplos idealizados o empíricos. Un paradigma, en ese sentido, son los elementos que le permiten a la ciencia normal establecerse, estos elementos son: 1) mostrar que sus argumentos no tenían precedentes, por lo que le permite atraer un grupo de partidarios -científicos- por sobre otros candidatos que buscan ocupar el mismo lugar en el corpus de la ciencia; 2) permitir que un grupo de profesionales de la ciencia fortalezca sus habilidades

---

[21] Ibíd., , pp. 39, 40
[22] Ibíd., p. 48
[23] Ibíd., p. 65
[24] La traducción propuesta por Victor Sánchez de Zavala de la expresión «sich bewähren» que también puede interpretarse como demostrar su valía.
[25] La cita es tomada de (Kuhn, 1962, p. 62)

respondiendo ejercicios que culminan, de manera premeditada, en los resultados "pronosticados"[26] por la ciencia.

El estudio de los paradigmas busca incrementar el número de partidarios, los cuales -algunos de ellos- se convertirán en científicos de ese campo en particular. Los científicos aprendieron los fundamentos de su campo con los mismos modelos que utilizarán para explorar las fronteras de su campo, por ende, no existirán diferencias sobre cuestiones fundamentales del corpus teórico, dado que no los pondrán en duda.

En este sentido, Kuhn[27] propone como mapa, el comportamiento normal de un paradigma: 1) la ciencia avanza, muchas veces, sin tener reglas ciertas, muchas veces no necesita de las reglas para avanzar, solamente cuando la ciencia ya está constituida esta se empieza a normar -métodos, campo de acción, elementos fundamentales, etc.; 2) el científico no aprende conceptos en abstracto, por el contrario, están en una unidad histórica y pedagógica que la demuestra en sus aplicaciones y a través de ellas, generalmente -y esto lo considera Kuhn una regla de cómo operan los paradigmas- una teoría novedosa siempre …se anuncia como una aplicación de las reglas descritas por un fenómeno natural, sin dichas pruebas, ni si quiera podría ser candidata a la aceptación; 3) la ciencia puede avanzar sin reglas en tanto la comunidad científica acepte las soluciones propuestas sin poner estas en tela de juicio; y 4) las revoluciones científicas pueden ser de diversos tamaños, algunas afectan a toda la comunidad de un saber específico, otras solamente afectan a un subgrupo del mismo, y será una revolución para ellos, sin embargo, para el resto de esa ciencia, en específico, no lo será. En otras palabras, hay revoluciones generales y otras locales.

Con base en los criterios anteriores, se evaluará el papel que ha jugado el concepto de distribución normal a lo largo de la historia del quehacer financiero. Que, como se ha mencionado, ha derivado en una ampliación de las fronteras de la ciencia financiera.

3. Del origen de la probabilidad a la revolución de Bachelier (1200-1900)

El estudio de la probabilidad nace como un juego mental por parte de Luca Pacioli (1454-1514) en su obra *Summa de aritmetica, geometria et proportionalita* (1494), un divertimento propio de pensadores de la época. En este caso, un juego de azar inconcluso,[28] en donde un jugador había ganado 5/6 rondas mientras su contrincante 3/6. La pregunta central era ¿cómo repartir el botín de un juego inconcluso y cuyo resultado final era aleatorio? Este sencillo juego tiene dos poderosas ideas insertas, 1) el futuro es cognoscible y 2) es medible.

Niccolo Tartaglia (1499-1557) y Girolamo Cardano (1501-1576) avanzaron sobre el juego de Pacioli, e incorporaron al análisis los conceptos de juego justo y equilibrio, lo

[26] Se podría decir, desde el punto de vista del autor, que estas guías construyen una teoría tautológica como argumento para solidificar el edificio teórico de la ciencia.
[27] Ibíd., pp. 122-126
[28] El ganador sería quien obtuviera primero 6 victorias.

hicieron sin más herramientas que su intuición, tal como lo plasma el método platónico. Pierre de Fermat (1608-1665) y Blaise Pascal (1623-1662) son quienes dan inicio formal a las bases de la probabilidad, incorporando a la solución del problema de Pacioli los conceptos de "valor esperado" y "incertidumbre".[29]

Para el siglo XVII, la probabilidad avanzó incorporando a su desarrollo axiomático el tratamiento de datos y buscando aplicaciones más allá de los juegos mentales y de azar. Para la época muchos pensadores se habían concentrado en la recolección de datos, la mayor parte de ellos astronómicos.[30] Abraham de Moivre (1667-1754), francés que impulsó el avance de la probabilidad como ciencia.[31] De Moivre, trabajó de cerca con Nicolas Bernoulli, sobrino de Jacob Bernoulli,[32] fue cercano a Isaac Newton, quien le tenía especial aprecio, y a Edmon Halley quien le permitió dar a conocer su obra en los círculos académicos[33] de Londres. Su obra, *La Doctrine of Chance* (1738) en la cual establece la distribución gaussiana.[34]

El trabajo de de Moivre resultó de gran utilidad para diversas áreas pues explicaba muchos fenómenos. La distribución que desarrolló parecía presentarse por doquier, desde la astronomía, la física de gases, el lanzamiento de dados, todo parecía estar vinculado con ella. Fiedrich Gauss (1777-1855), en su trabajo de 1809 la popularizó, mediante la ley de errores -aplicada al campo de la astronomía-,[35] de tal manera, que muchos la llamaron distribución gaussiana.[36]

Desde el punto de vista positivista, el concepto de la distribución gaussiana -de hecho, cualquier distribución- es retomar los principios platónicos e incluirlos en los modelos miméticos que buscan replicar la realidad. Desde el método deductivo se construyen los axiomas, a partir de verdades evidentes -juicios *a priori*-, y, a partir de ellas, contrastarla con realidad observada. Popper es un crítico de los enunciados de la probabilidad pues considera que no pueden ser falsados ya que no son construidos desde la experiencia, además, considera un problema sus interpretaciones, pues la probabilidad también puede ejercer juicios sobre el grado de veracidad o falsación de una idea, generando lo que, consideraba Keynes, un grado de creencia racional.

---

[29] Para profundizar en la historia del desarrollo de los juegos de azar y de la Probabilidad se recomienda seguir el texto de F.N David (1962), en especial la correspondencia entre Fermat y Pascal (1962, p. 226 y ss)

[30] El nacimiento de la astronomía como ciencia es natural dado que la bóveda celeste parece invariante en el tiempo, el cielo que vieron Ptolomeo y Eratóstenes es muy similar al que vemos en la actualidad, el cielo, a simple vista, parece no cambiar, por ello tomar datos y cotejarlos con otro observador (en otro espacio y tiempo) es y ha sido una tarea natural del quehacer científico astronómico.

[31] De Moivre se vio obligado a dejar Francia, pues dicho edicto le protegía, a los calvinistas, de los ataques que en aquel entonces existían por la guerra de religiones. Tomado de (David, 1962, p. 160)

[32] Jacob Bernoulli desarrolló la teoría de los grandes números en el año de 1703 y la distribución binomial

[33] De Moivre perteneció a la Royal Society en 1697 Ibíd. p. 163

[34] El desarrollo de esta distribución viene de estudios específicos sobre la distribución binomial en el lanzamiento de monedas, como bien menciona Bernstein (1996, p. 130), sin embargo, lleva el nombre de Gauss dado que fue él quien la hizo popular.

[35] La obra que hizo conocida la ley de errores *Theoria Motus Corporum Coelestium in sectionibus conicis solem ambientium* (también véase la teoría de la combinación menos afectada por los errores de observación e Gauss.) publicada en 1809, donde se utilizaba el método con los datos observacionales del planeta Ceres, y que no había podido volver a observar desde el año 1801.

[36] Tomado de (Blanco-Castañeda, 2010, p. 144)

La versatilidad de la distribución gaussiana va más allá de las muchas pruebas empíricas que se realizaron en diversos campos. Uno de los descubrimientos más importantes en la teoría de la probabilidad, y que está asociado directamente con esta distribución, es el Teorema del Límite Central -TLC-[37] de Pierre de Laplace.[38] De hecho, como cita Fischer (2010, p. 1), el término equivale a la convergencia de funciones de distribución, densidades y/o probabilidades discretas de sumas de variables aleatorias, del cual de Moivre había descubierto un caso específico -la binomial de Bernoulli-.

Laplace[39] descubre una especie de ley universal de frecuencias, catapultando a la distribución normal como una ley natural que describía -casi- cualquier proceso de distribución en la naturaleza. Desde el punto de vista popperiano, la propuesta de ley universal de Laplace no puede ser refutada, pues su descubrimiento está más allá de cualquier falsación. La probabilidad, al igual que las matemáticas, se transforma en una ciencia que emite juicios sintéticos *a priori.*[40] Esto le va a permitir a la probabilidad avanzar, hacer descubrimientos desde sus propios cimientos sin tener que recurrir a la experiencia para corroborarlos, en otras palabras, la carga de la prueba está en manos del experimentador, no del teórico.

Desde el punto de vista kuhniano, una ley universal de probabilidad es la mejor manera de empezar cualquier edificio teórico en una ciencia empírica. La teoría ya vendrá respaldada por un modelo robusto desde el punto de vista matemático-lógico, por lo que las reglas pueden ser construidas desde allí. La ley es enseñada en cualquier ciencia, desde sus bases, por ende no habrá desacuerdo en los resultados arrojados por la teoría Las soluciones serán aceptadas tanto por la comunidad científica de esa ciencia como por los foráneos. Y los experimentos, o los resultados, de las observaciones corroborarán lo predicho por la teoría, incluso, si estos falsean la teoría, se estimará que el problema estuvo en el diseño del experimento -o la recolección de datos- y no la teoría.

Uno de los mayores divulgadores de la ciencia en Europa continental fue Adolphe Quételet (1796-1874) que vio, en la distribución normal, una oportunidad de explicar diversos fenómenos que a primera luz parecían inexplicables. Muchos de estos datos correspondían a series recogidas por el Instituto Nacional de Estadísticas de Bélgica durante lo corrido del siglo XIX, y los estudió con la distribución gaussiana. Las series recogían estudios poblacionales, fechas de nacimiento y muerte, estatura por edades, peso corporal, personas en la cárcel, etc., y empezó a construir tablas relacionales.[41] Quételet fue

[37] Nombre dado por Geor Pólya en 1920. Liliana Blanco la define como la media aritmética de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas que tiene, aproximadamente, una distribución normal cuando el número de variables aleatorias involucradas es "grande" y su varianza es finita y diferente de cero.

[38](Canavos, 1988, p. 182) "Debe notarse que si el modelo de probabilidad de la población es semejante a una distribución gaussiana -simétrico y con alta concentración de datos alrededor del punto de simetría- la aproximación será buena incluso para un n pequeño, sino, -existencia de alta asimetría- la aproximación normal sólo será adecuada para valores grandes de *n*."

[39] La historia de cómo se desarrolló el TLC desde Laplace hasta Lévy y Feller (1935) se encuentra en Fischer (2010), para profundizar sobre el desarrollo matemático del TLC está el trabajo de Brooks, Gnedenko, Kolmogorov (1955). En el Anexo 1 se presenta la demostración del TLC.

[40] Es decir, construcciones del mundo sin tener que recurrir a él para verificarlo.

[41] Para mayor profundidad sobre los trabajos más sobresalientes de Quételet (1835; 1861; 1832; 1869; 1843)

un prolífico productor de publicaciones, desde 1820 hasta 1870, publicó los resultados de sus investigaciones en campos tan diversos como la astronomía, fisiología, el clima, psicología.

En estos informes encontró una serie de regularidades gaussianas que le permitieron construir el concepto del *l'homme moyen*. El hombre medio, pensaba Quételet, constituía la medida ideal en una sociedad. Características como la estatura, el color de piel, historial delictivo, podían parametrizarse e identificar patrones, los datos alejados a la media empezaron a verse como no idóneos y podían emplearse métodos para corregirse. La idea de Quételet fue tomada con entusiasmo a lo largo de Europa, que por aquel entonces, desarrollaba las primeras políticas públicas, entre ellas los programas de salud. Esta distancia media se convirtió en un ideal[42] -cada sociedad podría construir uno- y se convirtió en una obsesión de muchos pensadores en la segunda mitad del siglo XIX.

Seguramente embebido en el pensamiento del siglo XIX Louis Bachelier, desarrollando parte del trabajo de su tesis doctoral, escribe la *Théorie de la Spéculation* (1900). El objetivo de Bachelier era "…establecer una distribución de probabilidad de las variaciones[43] de los precios que el mercado admite en un instante". Esta búsqueda obedece al proceso de construcción del paradigma científico propuesto por Kuhn. Bachelier, expresa en su tesis, que es posible estudiar matemáticamente el estado estático del mercado en un instante dado mas no era posible aplicar dicho estudio a los grandes movimientos del mercado -generados por fuerzas externas al mismo-. En esta expresión, Bachelier parece involucrar un movimiento de los precios como fenómeno natural, mientras que los fenómenos exógenos al mismo serían distorsiones que no son posibles de medir y que el modelo parecería no incorporar.

Bachelier toma el principio de normalidad como mejor manera para explicar la distribución de variaciones de los precios, aunque tuvo que lidiar con la posibilidad que estas fluctuaciones llevaran a los precios al terreno negativo. Citando a Bachelier (2006, p. 29) "…Es claro que el precio considerado por el mercado de ser el más probable es el precio actual… Suponemos que este puede variar entre $-\infty$ y $+\infty$, la probabilidad de una dispersión mayor al precio actual se considera tanto a priori como despreciable.[44] Bajo estas condiciones, se puede asumir que la probabilidad de una diferencia del precio real es independiente del valor actual del precio y que la curva de probabilidades de estas diferencias es simétrica con respecto al precio real." Para ello procede a hacer la demostración matemática, adelantándose a los desarrollos de Kolmogorov (1931)

[42] Esta idea viene sobretodo por la percepción que tenía la distribución gaussiana en el siglo XIX que se le denominaba la ley de errores, siendo la media el valor buscado y todo valor diferente a la media se le intuía como un intento erróneo del ideal, siendo la distancia entre el punto en cuestión y la media una medida de error (Taleb, 2007, p. 333).
[43] Bachelier conocía que la diferencia de dos variables que siguen una distribuyen normal, también es normal.
[44] Este supuesto Bachelier (2006, pp. 26, 27) lo utiliza como ruta de escape ante la posibilidad de que en su modelo se generen precios negativos. Sin embargo, se apoya en el principio de martingala (que usa de manera pionera en este artículo) al afirmar que la expectativa matemática para el especulador es cero, es decir, que las expectativas de oferentes y demandantes mantendrán el precio en equilibrio en torno al precio real. De hecho, el concepto de Martingala fue asociado a Paul Lévy, quien construye formalmente el proceso, en 1934, pero le llama así Jean Ville (1939). Ibíd., p. 91

asumiendo que el proceso de precios no tiene memoria y que el tiempo es homogéneo. Este procedimiento le permite concluir que las variaciones de los precios siguen la función de densidad de probabilidad gaussiana, que es la misma conclusión a la que llega Einstein (1905), independientemente, cuando describe el Movimiento Browniano de unas partículas moviéndose en un líquido estacionario. Bachelier igualmente demostró que el flujo de probabilidad, es decir, las funciones de probabilidad asociadas al proceso están conectadas con la teoría de la difusión del calor de Fourier -ecuación de calor-.

Los resultados anteriores son importantes, pues se muestra que la probabilidad con la cual se distribuyen las variaciones de precios es gaussiana y que la probabilidad del evento futuro también converge, por el TLC, a la distribución normal. Al observar el análisis que hace Bachelier de las series de precios de *La Bourse* de París, al margen de sus contribuciones a las finanzas, lo que se observa es el esfuerzo por demostrar que, aún en la azarosa actividad bursátil, existe una ley de probabilidad que la describe. Ahora bien, se podría implicar que Bachelier, más que explicar la ley de probabilidad que rigen los mercados financieros, buscaba demostrar que los mercados financieros siguen una ley de probabilidad gaussiana, al igual que -todos- los demás fenómenos naturales.[45]

A la luz del paradigma kuhniano, el proceso seguido por Bachelier es apenas natural. La primera característica que cumple un paradigma kuhniano parece seguirla Bachelier. El se apoyó en la construcción axiomática de la probabilidad para realizar sus desarrollos, por ende, no necesita de reglas para construir su edificio teórico. Atendiendo el segundo punto que toca Kuhn, Bachelier hace ver el proceso generador de precios como un mecanismo natural. Este mecanismo no solamente sigue una distribución lognormal -con respecto a la distribución de los precios- sino que el mismo proceso que le da volatilidad al mercado sigue el proceso de difusión de calor descrito por Fourier. Bachelier, al proponer este símil, le permite demostrar que la ley natural del TLC, es aplicable tanto a procesos físicos como procesos económicos, y que estos, aunque de origen diferente, siguen la misma norma. Explicar una teoría con elementos ya probados en otro campo, en especial de las ciencias naturales, robustece su punto de vista.

Kuhn apunta que la ciencia puede avanzar sin reglas en tanto la comunidad científica acepte las soluciones propuestas sin poner estas en tela de juicio. En el caso de Bachelier, el juicio fue emitido por sus jueces, entre ellos el Profesor Poincare, quien le llama la atención el campo de acción escogido por Bachelier[46], considera que hizo un ejercicio juicioso de validación, de extender los dominios de la ley de probabilidades que “una vez más cae en la celebrada ley de errores de Gauss.”

La cuarta característica que plantea Kuhn: las revoluciones científicas pueden ser de diversos tamaños, algunas afectan a toda la comunidad de un saber específico, otras

[45] Eso parece entenderse cuando los jurados mencionan “…si se asumen que las desviaciones no son muy grandes, se puede suponer que la probabilidad de una desviación dada del precio cotizado no depende del valor absoluto de este precio. Bajo estas condiciones el principio de expectativa matemática es suficiente para invocar la ley de probabilidades; una vez más cae en la celebrada ley de errores de Gauss”(Bachelier et al., 2006, p. 78)

[46] Campo bastante inusual apunta Poincare en la primera frase de su reporte (29 de marzo de 1900). Ibíd., p. 77

solamente afectan a un subgrupo, y será una revolución para ellos, pero para esa ciencia en específico, no. En otras palabras, hay revoluciones generales y otras locales. En este contexto, ¿qué tipo de revolución generó la investigación de Bachelier? Si la planteamos por el impacto que tuvo en el campo de las finanzas se podría decir que ninguno -al menos en el corto plazo- tuvieron que pasar 50 años para que su trabajo fuese rescatado. Desde el punto de vista matemático el trabajo de Bachelier se convirtió en un hito: fundó las finanzas matemáticas, impulsó el desarrollo del cálculo estocástico, y la probabilidad.

En este punto cabe la discusión de si el propósito de Bachelier era falsar la ley de errores de Gauss como una ley universal de probabilidad, tal como propone Popper; sin embargo, no parece ese ser su objetivo. Como el mismo Poincare menciona en sus observaciones del trabajo de Bachelier "La ley de Gauss una vez establecida… se pueden verificar ciertas consecuencias experimentalmente". Uno de esos ejemplos es la relación entre el valor de la una opción y el spread con el forward. No se debe esperar una verificación exacta de dicho punto. Desde el punto de vista popperiano, no existe manera de demostrar que una distribución es gaussiana en tanto ninguna alcanza a serlo, es decir, el trabajo empírico jamás podrá demostrar una ley natural.

4. Revisando el la visión de Meucci $\mathbb{P}$ *vs* $\mathbb{Q}$

Attilio Meucci (2011a) propone una división del mundo matemático en la ciencia financiera. Por un lado, está el mundo de Finanzas, Meucci denomina la probabilidad de este mundo con la letra $\mathbb{P}$. La probabilidad "real" que estiman los administradores de portafolio para comprar/vender activos con el fin de tener un rendimiento por unidad de riesgo específico. Las matemáticas que desarrollan este mundo tienen un inicio formal con Harry Markowitz (1927-) que le mereció el premio Nobel por su obra *Portfolio Selection* (1952).

Markowitz desarrolló los trabajos que había iniciado 14 años John Burr Williams (1900-1989) con su obra *The Theory of Investment Value* (1938) quien propone como método de valuación el flujo de caja libre descontado. A través de este modelo, Williams propone que el valor intrínseco de un activo financiero sería hallado. El valor intrínseco es definitivamente un concepto de la filosofía platónica inserto en la ciencia financiera, este valor es similar, conceptualmente, al valor real que hacía alusión Bachelier. Este valor ideal de un papel o portafolio que se trata de estimar y que la ley de oferta y demanda trata de alcanzar.

El otro texto que inspira a Markowitz es de John Hicks (1904-1989) quien escribió *Value and Capital* (1939) el cual identifica como parte importante del proceso de inversión la valuación del riesgo[47], definido como la diferencia entre el valor de mercado entre el valor medio y el valor spot. Markowitz desarrolla la teoría de selección de portafolios

[47] El primero en estudiar el riesgo con cierta formalidad en finanzas es Frank Hyneman Knight (1885-1972) en su obra *Risk, Uncertainty and Profit* (1921), John Maynar Keynes (1883-1946) también trata el tema del riesgo en su obra *A Treatise on Money* (1930) y Nicholas Kaldor (1908-1986) en su obra *Speculation and Economy Stability* (1939)

escogiendo con un enfoque de media y varianza[48], replicando una medida de alta confiabilidad tanto a nivel de ciencias sociales como naturales, para ello se apoyó en el texto de J. V. Uspensky *Introduction to Mathematical Probability* (1937). Markowitz igualmente quiso demostrar que la estrategia de selección de portafolio, al igual que la ley de probabilidad que seguían los rendimientos de los activos financieros, según Bachelier, también sigue una distribución normal.

Markowitz[49] propone una teoría normativa, basándose, sin nombrarlo, en el ideal queteriano del inversionista ideal: un agente racional que maximiza la rentabilidad del portafolio o minimizando el riesgo (varianza) del mismo. El edificio teórico en el que se basa Markowitz está plagado de platonismo, por un lado la definición de agente racional propuesta por John Von Neumann y Oskar Morgenstern, quienes para 1944 habían publicado *Game Theory and Economic Behavior* (1944); la inspiración del legado de Daniel Bernoulli, 200 años atrás, con su documento donde sienta las bases matemáticas de la racionalidad económica y todo el edificio teórico de la escuela marginalista encabezada por León Walras (1834-1910) y Vilfredo Pareto (1848-1923).

En la exposición de agentes racionales que calculan probabilidades para reajustar su portafolio con respecto a los riesgos asociados a las elecciones realizadas. Evidentemente éste era un trabajo exigente para la época (sin las ventajas de la computación era difícil llevar a cabo las matrices de covarianza de todos los títulos) y le propone a William Sharpe (1934-) el trabajo de simplificar dicho cálculo. Curiosamente, tanto Markowitz (1959), como Sharpe (1964), identifican que, en algunas ocasiones, la distribución gaussiana en sus primeros dos momentos (media-varianza), no explica satisfactoriamente el comportamiento exhibido por los portafolios[50], aún así deciden trabajar con la curva gaussiana para describir el rendimiento del portafolio por unidad de riesgo; sendos trabajos los llevaron a ser galardonados con el premio Nobel en 1990.

El paradigma kuhniano es evidente en el desarrollo de la teoría moderna de portafolio. Sus expositores construyeron un acervo probatorio que les permita explicar sus ideales (platónicos) de una explicación racional, optimizadora. La falsación popperiana desaparece en la medida que se erige el edificio financiero moderno. Markowitz, aunque intenta someramente realizar un proceso de falsación de la teoría, sucumbe ante la belleza de su explicación, poder construir una teoría de selección de carteras, explicada con dos términos, era imposible de perder, seguramente no explica el comportamiento real, pero si sería una guía para el inversionista que persigue un objetivo específico. Markowitz se

[48] Según Hirshleifer (1965) la aproximación de media varianza para valorar inversiones bajo incertidumbre tuvo como primer exponente a Irving Fisher en *The Nature of Capital and Income* (1907), posteriormente John Hicks la ilustra en *A Suggestion for Simplifying the Theory of Money* (1935), J. Marschak en *Money and the Theory of Assets* (1938)

[49] Markowitz (1959, p. 48) propone usar el valor esperado como medida por que esta es “conveniente y tradicional” ya que esa medida ha sido utilizada desde el siglo XVIII.

[50]De hecho, Markowitz (1959, p. 77) dice “Una de las medidas consideradas, la semidesviación, produce portafolios eficientes preferibles sobre aquellos generados por la desviación estándar… sin embargo, la desviación estándar es sencilla de usar, mucho más familiar para muchos, y posiblemente más facil de intermpretar que la semidesviación”

convierte así en el Quételet financiero, fijando la norma ideal y donde las carteras serán juzgadas de eficientes o no de acuerdo con el Benchmark.

Regresemos a $\mathbb{P}$, en esta línea de la ciencia financiera, la distribución de probabilidad $\mathbb{P}$ se asume conocida[51]. Este supuesto fue desarrollado, además de los citados Markowitz y Sharpe, por Treynor (1962), Lintner (1965), Mossin (1966) y Ross (1976). El objetivo de los profesionales es determinar el comportamiento futuro de los portafolios, se asume que los activos siguen una caminata aleatoria y que la mejor manera de describir su comportamiento es la distribución normal[52].

En el mundo $\mathbb{Q}$, lo que se busca es el precio justo de un activo en específico en $t_0 + \Delta t$ cuando $\Delta t \to 0$. En ese sentido, las finanzas matemáticas, en el mundo $\mathbb{Q}$, lo que buscan es extrapolar el presente con base en los movimientos instantáneos generados por el mercado. En este mundo el pasado juega un papel anecdótico, y tanto oferentes como demandantes -individuos racionales, optimizadores que vacían el mercado, que debería ser congruente con el valor real. Este es el mundo que inicia Bachelier en 1900, tuvieron que pasar 60 años para que las finanzas retomaran el camino iniciado por Bachelier. El olvido de Bachelier en la ciencia económica y financiera, al parecer, se debe a dos factores: 1) el desprecio de los matemáticos por los temas económicos-financieros a inicios del siglo XX, los matemáticos no consideraban serio un tema de ciencias sociales, de hecho, Bachelier al presentar su trabajo recibió cierta crítica por parte de sus jurados y contemporáneos[53] y 2) las herramientas matemáticas aún era rudimentarias, debieron pasar 50 años para que se desarrollaran las mismas. Bachelier es uno de los miembros que dio impulso a la probabilidad como ciencia. Años previos al siglo XX, la probabilidad era un campo de especulación para entusiastas del juego de azar y algunos polímatas entusiastas con los juegos mentales, más allá de eso no hubo un tratamiento riguroso de la probabilidad.

Para el siglo XX, los avances en el campo matemático y probabilístico dieron nuevas herramientas a las ciencias sociales para profundizar sus teorías. Por otro lado, se asentaron dos grandes escuelas de pensamiento financiero[54] que permitieron el desarrollo de la Teoría Moderna de Portafolio (TMP). Estos avances se vieron impulsados, sin lugar a dudas, por la creciente actividad bursátil, el desarrollo de las ciencias básicas (sobretodo por el desarrollo de la física de partículas), la coyuntura generada por las dos guerras mundiales, el período entre guerras, la crisis financiera de 1929 y Bretton Woods, por citar algunos fenómenos de la época.

La primera mitad del siglo XX, se podría decir, fue la época de la construcción axiomática de las ciencias. Como se mencionaba anteriormente, Bachelier da un impulso sin precedentes en el desarrollo de la matemática en general y más específicamente a las

[51] El ejercicio que debe hacerse es estimarla con la información histórica del activo o del portafolio. Para realizar dichos cálculos se utiliza la econometría de series de tiempo, un excelente libro para profundizar en el tema es el de Rue TSay *Analysis of Financial Time Series* (2002)
[52] Para mayor profundidad se sugiere revisar a Meucci (2011b)
[53] Muy seguramente esto le restó protagonismo y su vida no tuvo el éxito académico que seguramente hubiese tenido unas décadas más adelante.
[54] El análisis técnico popularizado por Charles Dow (1889) y el análisis fundamental desarrollado por John Burr Williams (1938)

finanzas matemáticas, sin embargo, a quien se reconoce como desarrollador del Movimiento Browniano -MB- es Albert Einstein (1879-1955) quien propuso que el MB "… es un proceso estocástico con trayectorias continuas, incrementos independientes y estacionariamente gaussianos."[55] Las ideas de Einstein junto con las de Percy Daniell (1889-1946), quien hace una aproximación a la teoría de la medida a partir de integrales combinadas con las series de Fourier, permiten a Norbert Wiener (1894-1964) desarrollar formalmente el MB (Wiener, 1923).[56]

Andréi Kolmogorov (1903-1987) desarrolló la teoría axiomática de la probabilidad. Kolmgorov se fundamentó en la teoría de la medida. De hecho, en su obra *Foundations of the theory of probability* (1933) indica que un proceso de Markov continuo depende de dos variables como lo son la velocidad de cambio y el comportamiento aleatorio. Kolmogorov, así relaciona las ecuaciones diferenciales con la teoría de la medida trabajo que hoy se conoce como las ecuaciones de Kolmogorov, que son la punta de lanza para el trabajo de Kiyosi Itô.[57]

Kiyosi Itô (1915-2008) logró fusionar los procesos desarrollados por Wiener con el trabajo de Kolmogorov. De hecho, establece el concepto de integral estocástica donde tiene como parámetros, la media, la varianza y el ruido que lo identifica como un proceso de Wiener estándar.[58] Todos estos desarrollos es lo que hoy se conoce como la fórmula de Itô.[59] Este salto cualitativo en el conocimiento de los procesos estocásticos lo hizo en tres papers: *Stochastic integral* (1944) , *Multiple Wiener integral* (1951a)*, y On a formula concerning stochastic differentials* (1951b).

Parte de la definición de MB que usa Itô en su paper de 1944 la toma del trabajo de Paul Lévy (1886-1971), quien en 1937 publica su trabajo *Théorie de l'addition des variables aléatoires* (1937) describiendo los procesos de Wiener como uno de muchos procesos aleatorios estables. Lévy demuestra que los procesos aleatorios pueden seguir muchas distribuciones, que el MB sigue un proceso Gaussiano, sin embargo, existen otra serie de procesos que pueden explicar diversos movimientos con otras distribuciones.[60] Posteriormente, es Joseph Doob (1910-2004) popularizó los resultados de Itô en su obra *Brownian Motion* (1953).

El desarrollo de las finanzas matemáticas y de la probabilidad le da herramientas a la ciencia financiera para abordar el problema del mundo $\mathbb{Q}$, extrapolar el presente. La manera para llegar a ese resultado es a través del cálculo de la probabilidad riesgo-neutral. Una diferencia importante frente al mundo $\mathbb{P}$, es que las mediciones son continuas, hecho que se emplea en la herramienta de integración estocástica, el lema de Itô.

---

[55] Jarrow, Protter (2004, p. 75)

[56] Wiener propone que los caminos del MB tienen una variación cuadrática diferente de cero, además, que estos caminos tienen una variación infinita en tiempos compactos a.s. -muy seguramente- Ibid., p .76

[57] Ibíd.

[58] Es decir: un proceso continuo por derecha con límite por izquierda (cadlag), con incrementos independientes y estacionarios (es decir, que la media y varianza no cambian en todo el trayecto)

[59] Ibid., p. 78

[60] Benoit Mandelbrot es quien toma los procesos de Lévy para proponer un modelo alternativo al de Bachelier, en 1960.

Para la década de los 50 del siglo XX, Richard Kruizenga, doctorando dirigido por Paul Samuelson, escribe su tesis doctoral *Put and call options: a theoretical and market analysis*. (1956) En ella hace un análisis sobre las opciones put y call europeas, citando el análisis hecho por Bachelier, para describir el comportamiento de las series financieras, siendo este el primer documento, en finanzas, que cita a Bachelier.

En este punto podemos evaluar desde un punto de vista kuhniano el desarrollo del mundo $\mathbb{Q}$, las reglas parecen ya haberse forjado, entre ellas: 1) principio de no arbitraje; 2) la racionalidad del agente; 3) mercados completos; 4) ley de un único precio, muchos de ellos venidos de la economía financiera. Las herramientas para evaluar este mundo ya estaban construidas, y los científicos habían recibido dicha educación, por ende, los resultados no se discutirían. El tercer punto que Kuhn propone es el más interesante en este momento histórico. Aunque había consenso sobre las herramientas y los principios, no existía el mismo sobre la distribución de los precios. Maurice Kendall (1907-1983), estadístico británico quien en *The Analysis of Economic Time-Series-Part I: Prices* (1953) estudiaba el comportamiento y la distribución de series financieras de acciones de diversas industrias británicas concluye:

"Un análisis de los movimientos bursátiles reveló poca correlación en serie dentro de las series y poca correlación de retraso entre las series. A menos que las acciones individuales se comporten de manera diferente al promedio de acciones similares, no hay esperanza de poder predecir los movimientos en el intercambio para una semana por delante sin información extraña."[61] Para ese mismo año David Champernowne (1912-2000) matemático y economista propuso, en 1953, que las series aleatorias corresponden a movimientos estocásticos y que los procesos de difusión pueden asimilarse a caminatas aleatorias.[62] Esta discusión, al interior de la escuela de pensamiento, llevó a que se propusiera, como Markowitz había propuesto en 1959, que fuera la primera diferencia logarítmica de los precios la que se distribuye normal y no los precios.

Mathew Osborne (1916-2003), publicó *Brownian Motion in the Stock Market* (1959) proponiendo un modelo de comportamiento de las series financieras basadas en el MB. Osborne, determinó que los precios no siguen una distribución normal pero sus diferencias logarítmicas sí, por lo que propone usar la distribución lognormal para precios.[63] Samuelson, en 1965, publicó *Proof That Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly* (1965a) y *Rational Theory of Warrant Pricing* (1965b)[64] y allí establecen que tanto las diferencias de los logaritmos de los precios de acciones como de garantías, siguiendo a Bachelier y Osborne, siguen una distribución normal.

Fischer Black (1938-1995) y Myron Scholes (1941-) en su paper *The pricing of options and corporate liabilities* (1973) desarrollaron una solución cerrada para la valuación de opciones europeas. Los autores basaron sus desarrollos en los trabajos de

---

[61] Kendall (1953, p. 11)
[62] Champernowne (1953)
[63] Osborne (1959, p. 57)
[64] El modelo matemático es explicado por Venegas-Martinez (2015, p. 126)

Samuelson (1965b), y Case Sprenkle (1934-) *Warrants Prices as Indications of Expectations* (1961).[65] Black-Scholes proponen los siguientes supuestos para su modelo:[66]

a) el activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato;
b) el precio del activo subyacente es conducido por el movimiento geométrico Browniano, es decir, el precio es lognormal;
c) la volatilidad del precio el activo subyacente se mantiene constante a través del tiempo;
d) las ventas en corto del subyacente en cuestión son permitidas;
e) el mercado del subyacente es líquido y divisible, es decir, el subyacente siempre se puede comprar y vender en cualquier fracción del título;
f) no hay costos de transacción (comisiones e impuestos);
g) el mercado opera en forma continua, es decir, no hay sábados, domingos ni días festivos;
h) existe un mercado de crédito, un sistema bancario, en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés constante para todos los plazos, y libre de riesgo (tasa de interés pasiva igual a la activa);
i) todos los agentes comparten exactamente la misma información, es decir, la información es simétrica;
j) los mercados están en equilibrio, es decir, no existen oportunidades de arbitraje.

Robert Merton (1944-) con *Theory of rational option pricing* (1973) propuso una teoría normativa: "…se asume que el inversionista prefiere más que menos… estas restricciones (las del modelo) son necesarias para que la fórmula sea consistente con una teoría racional de precios." (Merton, 1973), complementando el trabajo de Black-Scholes. El trabajo de R.C. Merton es la extensión de sus documentos *Restrictions on Rational Option Pricing: A Set of Arbitrage Condition* (1968) y *Dynamic General Equilibrium Model of the Asset Market and its Application to the Pricing of the Capital Structure of the Firm* (1970), ambos inspirados en *Dividend Policy, Growth, and the Valuation of Share* (1961) de Franco Modigliani (1918-2003) y Merton Miller (1923-2000).

Desde el punto de vista popperiano, la falsación de una parte importante de la teoría, que los rendimientos de los activos seguían una distribución normal, cumplió su objetivo. El proceso de falsar la teoría con evidencia empírica permitió contrastar la hipótesis existente -que los rendimientos seguían la distribución normal- y se reemplazó por una más acorde a la realidad -las diferencias logarítmicas de los precios siguen una distribución normal-. De hecho, la crisis generada por diversos trabajos, especialmente los de Benoît Mandelbrot (1924-2010) y Eugene Fama (1939-), que cuestionaban este supuesto, llevaron al desarrollo de los modelos, primero de Samuelson, y posteriormente de Black-Scholes y Merton.

---

[65] Black, Scholes (1973, p. 639) afirman que Sprenkle ya planteaba el uso de la distribución normal para modelar las series financieras, sin embargo, algunos detalles técnicos no le permitieron hallar una solución a su propuesta de valuación.
[66] Venegas-Martinez, op. cit., p. 128

5. El proceso de falsación de Mandelbrot

Benoît Mandelbrot para 1960 publicó *L-stable model for the distribution of income* (1960), una propuesta totalmente diferente a lo que de momento se había abordado, por un lado argumentaba que las series de rendimientos parecían no seguir una distribución normal, y que los modelos actuales -enfocados en el movimiento browniano. no responderían adecuadamente. Como solución, propuso un modelo llamado Pareto-Lévy, el cual puede responder de mejor manera a las fluctuaciones no gaussianas de las series financieras.

La propuesta de introducir una distribución diferente a la gaussiana a series de datos económicos también es realizada por H. F. Lydall en su paper *The Distribution of Employment Incomes* (1959) tal y como lo reconoce Mandelbrot, en la cual critica la postura tomada por los economistas al introducir el modelo de difusión de las partículas de gas (termodinámica) y asumir que estas son comparables a las series de precios. Para 1963, Mandelbrot en su trabajo *The Variation of Certain Speculative Price* (1963) retomó los elementos abordados en (1960b) y critica el modelo de Bachelier-Osborne destacando:

1. Los cambios en los precios son más frecuentes que lo destacado en los procesos Gaussianos, generando una serie leptokúrtica de los precios relativos.
2. Los precios no parecen seguir una caminata aleatoria suave, por el contrario, es común encontrar grandes cambios instantáneamente.
3. Los cambios de los precios no parecen ser independientes, por el contrario, exhiben patrones reconocibles en el corto plazo.
4. Las series parecen no ser estacionarias, y la varianza, entre otros valores, pueden tomar muchos valores a lo largo del tiempo.[67]

Mandelbrot propone un modelo diferente al Bachelier-Osborne denominado Pareto-Lévy que describe mejor el comportamiento de los precios.[68] Eugene Fama (1939-), estudiante de doctorado en Economía de la Universidad de Chicago, conoce del trabajo de Mandelbrot y, en 1963, propone una revisión del trabajo del mismo, y concluye:

“La hipótesis Pareto-estable de Mandelbrot ha centrado la atención en una clase de distribuciones estadísticas descuidadas pero importantes desde hace mucho tiempo. Se ha demostrado que, entre las series especulativas, las primeras diferencias de los precios del algodón y el inventario parecen ajustarse a estas distribuciones gama, más amplia de series especulativas, y para desarrollar herramientas estadísticas adecuadas para tratar con distribuciones Pareto estables.”[69]

---

[67] Mandelbrot (1963, p. 395)
[68] Mandelbrot (1960, p. 86)
[69] Fama (1963, p. 429)

Fama reafirma lo desarrollado en 1963 en los papers: *The Behavior of Stock-Market Prices* (1965) y *Some Properties of Symmetric Stable Distributions* (1969).[70] En 1965, Fama explica ambos modelos, el Bachelier-Osborne (basado en el supuesto de normalidad) y el de Mandelbrot (Pareto-Lévy), la descripción del modelo de Mandelbrot reza:

"Las distribuciones Pareto-Estables tienen cuatro parámetros: 1) un parámetro de ubicación que llamaremos δ, 2) un parámetro de escala denominado en adelante γ, 3) un índice de asimetría, β y 4) una medida de la altura de las áreas extremas de la cola de la distribución que llamaremos exponente característico α." [71] Estos parámetros tienen un dominio determinado y los mismos cambian de acuerdo a la distribución que toman los datos. En un punto, los valores que toman las variables hacen que la distribución sea gaussiana.[72] El modelo de Mandelbrot, más amplio, explica los retornos de las series financieras desde distintas distribuciones incluyendo la gaussiana.

Fama llegó a la conclusión que la discusión, entre quienes asumían la distribución normal y Maldelbrot, se centraba sobre el valor que toma α, pues para los que asumen la distribución normal, este valor siempre es 2, mientras que para Mandelbrot α está en el intervalo 1, 2. Las ventajas que tiene las distribuciones Pareto Estables[73] es la estabilidad ante adiciones, es decir que las variables de dicho proceso son independientes e idénticamente distribuidas. Esta característica hace atractivo el modelo propuesto por Mandelbrot.[74] Fama publicó: "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work"(1970), y al igual que Markowitz, 11 años atrás, explica por qué el modelo de Mandelbrot no genera entusiasmo dentro de la comunidad científica:

"Sin embargo, los economistas se han mostrado reacios a aceptar estos resultados, principalmente debido a la gran cantidad de técnicas estadísticas disponibles para tratar con variables normales y la escasez relativa de tales técnicas para variables estables no normales."[75]

Los economistas, a los que se refiere Fama, demuestran que existen técnicas que pueden atacar las debilidades del modelo Bachelier-Osborne, como mezclar la distribución normal con procesos de saltos de Poisson; S. J. Press hace esta propuesta en su trabajo *A Compound Events Model for Security Prices* (1967).[76] Mandelbrot y Taylor responden a

---

[70] La escuela de Chicago, como lo remarcan constantemente, se centran en los datos, y los paper de (Fama, 1965; Fama and Roll, 1968)se centran en ello, haciendo un riguroso estudio del comportamiento de los precios.
[71] Fama (1965, p. 43 y ss)
[72] Ibíd.
[73] La estabilidad significa que los valores de los parámetros α y β permanecen constantes bajo adición.
[74] Ibíd.
[75] Fama (1970, p. 400)
[76] Press (1967, p. 317) en su *abstract* propone: "Se propone un modelo para la distribución de cambios en los precios de seguridad. El modelo es similar a los análisis previos del comportamiento de los precios del mercado de valores en que se supone que los cambios registrados en los precios son independientes (modelos de caminata aleatoria). Sin embargo, este modelo difiere del trabajo anterior en que no se supone que los cambios en los precios registrados sigan una distribución estable (que posiblemente sea normal). En cambio, se supone que los cambios en los precios registrados siguen una distribución que es una mezcla de Poisson de distribuciones normales. Se muestra que las características analíticas de dicha distribución concuerdan con lo

dichas críticas en *On the Distribution of Stock Price Differences* (1967b) [77], afirmando que los cambios de los precios, en un número fijo de operaciones, puede ser gaussiana, sin embargo, cuando las operaciones suceden en un intervalo fijo de tiempo, los cambios parecen seguir una distribución Pareto.

Desde el punto de vista popperiano, Mandelbrot hace un proceso de falsación, demuestra que la teoría actual no funciona -no tiene en tenor para defenderse de los ataques- y propone una teoría nueva que responde, tanto los problemas que resolvía el modelo gaussiano, como aquellas anomalías que se habían decidido dejar pasar por alto. Desde un punto de vista kuhniano se puede entender lo que hacía la ciencia normal financiera -entendida como aquellos que defendían el principio de normalidad-. Por un lado, ya existían una serie de reglas establecidas.[78] La mayoría de los científicos y profesionales aceptaban dichas reglas.[79] Las principales divergencias se habían resuelto y había un cuerpo teórico cerrado[80] en torno a la ley de probabilidad a usar en la valuación y medición de riesgos en el campo financiero. Y, por último, no se creaba una división, al interior de la ciencia, sobre que distribución usar en el modelado tanto de precios, retornos y riesgos.

Para 1973, la discusión continuaba y los argumentos, tanto teóricos como empíricos empezaban a resaltar. R. C. Merton publicó *Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous* (1976) respondiendo a las críticas al modelo Black-Scholes-Merton BSM respondiendo a las anomalías que el modelo BSM no hacía. R.C. Merton propuso incorporar a los modelos de difusión un proceso Poisson y así modelar las series financieras, retomando lo trabajado por James Press.[81]

La popularidad de las herramientas desarrolladas por Black, Scholes y Merton fueron acogidas por la comunidad profesional de la ciencia financiera. Los modelos de administración del riesgo, como el documento técnico de Risk Metrics de JPMorgan[82] y Basilea ii,[83] junto con la divulgación en libros de texto, permitieron al paradigma de la ciencia financiera solidificarse, cerrando la vía a las críticas que venían de aquellos que,

---

que se ha encontrado empíricamente. Es decir, esta distribución es en general sesgada, leptokúrtica, más alta en su media que la distribución de una variable normal comparable, y tiene una mayor masa de probabilidad en sus colas que la distribución de una variable normal comparable."

[77] Mandelbrot y Taylor (1967b) abordan la discusión tras la creciente discusión sobre el comportamiento del retorno de los precios como lo citan en Brada *et al*. (1966).

[78] El decálogo de Black-Scholes ofrecía muchas reglas para emprender extensiones investigativas y centraba los principios de la ciencia.

[79] Esto lo ilustra bien Fama (1970)

[80] Esto se ve reflejado en la aceptación por parte de los científicos y de los profesionales de la ciencia financiera tanto de los modelos CAPM como los modelos de valuación de opciones de Black-Scholes y R.C. Merton.

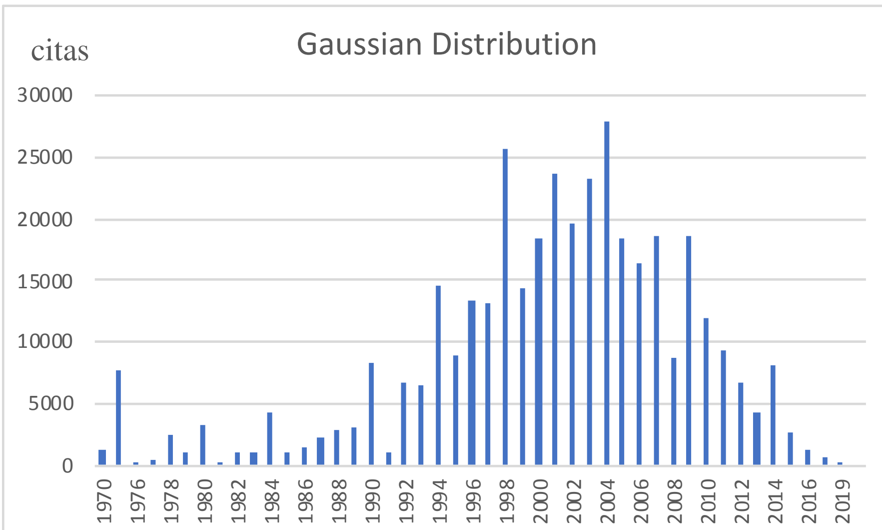
[81] Press propone un modelos de eventos compuestos, en otras palabras existen un proceso de difusión y saltos que puede ser modelado, para mayor profundidad seguir a Press(1967).

[82] Describe la metodología de medición del riesgo y estima que los retornos de las series financieras siguen una distribución normal, para mayor información (JPMorgan, 1996).

[83] También utilizan el criterio de la distribución gaussiana para medir el riesgo crédito y medir los requerimientos de capital mínimo (Settlements, 2004, p. 55 y ss).

como Mandelbrot, discutían la manera de entender la ley de probabilidad y su papel en la valuación de activos financieros y del riesgo.

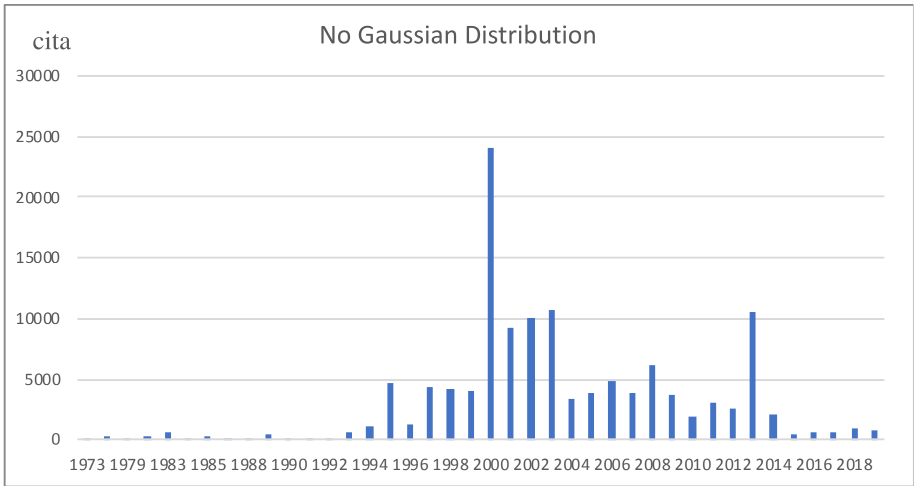
La Gráfica 1 muestra el número de artículos de la ciencia financiera que involucran la distribución gaussiana, lo cual demuestra el punto de Kuhn. Las finanzas, al comportarse como una ciencia normal, no cumple, en todo momento, el proceso de falsación que propone Popper. En el proceso de fortalecimiento del paradigma, adhiere nuevos partidarios formándolos con las ideas ya establecidas, a través de ejercicios y ejemplos prácticos, con el fin de incorporarlos al ejercicio profesional o científico del área.



Gráfica 1. Número de artículos que involucran a la distribución gaussiana[84]

Proceso contrario al que se observa en la Gráfica 2 en donde se muestra número de artículos de la ciencia financiera que involucran distribuciones distintas a la gaussiana. Varias razones pueden asistir a este hecho: 1) como mencionaban Markowitz y Fama, la familiaridad de los partidarios de la ciencia financiera, con el manejo matemático y conceptual de la distribución gaussiana, hacen que esta sea elegida, como principio de probabilidad para modelar los precios, retornos y riesgos financieros; 2) la visibilidad de los exponentes -Arrow, Debreu, Markowitz, Merton, Miller, Samuelson, Sharpe- quienes ganaron el premio Nobel por sus aportes a la ciencia económica; 3) la masiva utilización, a nivel profesional, de los supuestos y teorías propuestos por los exponentes anteriormente citados; 4) el importante número de publicaciones en revistas indexadas en torno al principio de normalidad. Es importante destacar que las Gráfica 1 y 2 da respuesta a la pregunta esencial de porqué no cae en desuso la distribución normal.

[84] La información aparece hasta 2019, es el número de publicaciones en las cuales aparecen como palabras clave Gaussian distribution, Finance, para la recolección de datos se usó la herramienta Publish or Perish, Harzing, A.W. (2007) Publish or Perish, disponible en https://harzing.com/resources/publish-or-perish



Gráfica 2. Número de artículos que involucran a distribuciones distintas a la normal

Los elementos anteriores, desde un punto de visto kuhniano, permite entender que la ciencia financiera se comporta como una ciencia normal que no caerá en desuso y que el ideal popperiano, aunque existe, toma más tiempo para hacerse visible. Podríamos decir que las revoluciones científicas suceden, cuando el ideal popperiano -de falsación de teorías- es tan abrumador que lleva a una ruptura de modelo, unas veces local y otras global.

Las dificultades para la ciencia normal financiera se hacían más notorias en la medida que los mercados financieros están más interconectados y la velocidad de transmisión de las operaciones se ha incrementado. Rama Cont señaló en su paper *Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues* (2001) los hechos empíricamente estilizados de las series financieras:[85]

a) Ausencia de autocorrelación: a escalas de tiempo pequeñas (trading intraday) se observa autocorrelación en los retornos.
b) Colas pesadas lo que la hace leptokúrtica: Los retornos parece mostrar una cola parecida a una distribución e Pareto, con un índice de cola finito, excluyendo distribuciones de variación infinita y la distribución normal, sin embargo, aún es difícil determinar su forma.
c) Ganancias y pérdidas asimétricas: Los comportamientos de los retornos difieren notablemente, parecen ser más afectados en las pérdidas que en las ganancias, en movimientos de precios e índices del mismo tamaño.
d) Agregación gaussiana: La forma de la distribución en distintas escalas de tiempo son diferentes y solamente parece seguir una distribución gaussiana en el largo plazo.
e) Intermitencia: existe un alto grado de variabilidad e irregularidad en las series de tiempo.
f) Cúmulos de volatilidad: Durante varios días se puede observar autocorrelación positiva, lo que se refleja en puntos de alta volatilidad agrupados en el tiempo.
g) Colas pesadas condicionales: Aún después de corregir los retornos -con métodos GARCH, por ejemplo- las series aún exhiben colas pesadas.

[85] Cont (2001, p. 224)

h) Disminución lenta de la autocorrelación en rendimientos absolutos: La función de autocorrelación de los rendimientos absolutos decae lentamente, aproximadamente, como una ley de potencia con un exponente $\beta \epsilon [0.2,0.4]$ interpretándose -en algunas ocasiones- como dependencia a largo plazo.
i) Efecto de apalancamiento: la mayoría de las medidas de volatilidad de un activo se correlacionan negativamente con los rendimientos de ese activo.
j) Correlación de volumen / volatilidad: el volumen de negociación se correlaciona con todas las medidas de volatilidad.
k) Asimetría en escalas de tiempo: las medidas de volatilidad de grano grueso predicen la volatilidad a escala fina mejor que al revés.

Esta serie de fenómenos no plenamente explicados por el paradigma generan ruido al interior del mundo $\mathbb{Q}$, que son quienes se ven más afectados por las discrepancias entre la teoría y las observaciones. Estas discrepancias, por lo general, empiezan en círculos académicos, el mundo profesional parece ajeno al debate, sin embargo, en la ciencia financiera, los efectos han sido evidentes. Las crisis financieras -2001 y 2008- así como los choques -1987, 1989, 2008, 2010- hacen evidente las divergencias expuestas por los contradictores al paradigma y debilitan el corpus teórico paradigmático.

Tras la crisis financiera de 2008, el paradigma fue puesto entre dicho; sin embargo, las dudas sobre la distribución normal, primero como ley de distribución de variaciones de precios, posteriormente como ley de distribución para las diferencias logarítmicas y posteriormente como ley en los procesos de difusión, no se hicieron esperar. La debilidad del paradigma, con respecto a este principio, trajo un incremento en la producción científica, la literatura financiera se enriqueció, como se muestra en el Cuadro 1, con nuevas propuestas para subsanar los problemas que venía presentando la teoría desde el mismo día de su nacimiento.

En la segunda década del siglo XXI, el paradigma financiero vive una heterogeneidad de modelos que buscan resolver los hechos estilizados. La teoría tiene muchas hipótesis que permiten falsarla y existen igualmente muchas hipótesis que buscan dar respuesta a los viejos y nuevos problemas. Aún así, parece no existir una sola respuesta a los distintos inconvenientes, por lo que no se ve una candidata que genere una revolución científica global.

Autor	Metodología	Año publicación
Louis Bachelier MFM. Osborne Paul Samuelson Fisher Black, Myron Scholes Robert C. Merton	Movimiento Browniano	1900 1959 1965 1973 1973
Robert C. Merton Jeanblanc-Picqué and Pontier Venegas-Martínez Aït-Sahalia et al. Jin and Zhang Laub et. al. Czichowsky and Schachermayer	Procesos de difusión y saltos	1976 1990 2000-2001 2009 2012 2015 2015
Harry Markowitz	Media-Varianza	1952
Benoît Mandelbrot	Pareto-Lévy	1963
Elliot Kou Stockbridge Sass and Haussmann Sass Bäuerle and Rieder Rieder and Bäuerle Çakmak and Ozekici Sotomayor and Cadenillas Elliott et al. Wu and Li Zhou and Yin Fei Soriano-Morales et al.	Time-homogeneous Markov chain (regime-switching)	2002 2002 2002 2004 2004 2004 2005 2006 2009 2010 2011 2014 2014 2015
Rudiger and Backhau Vallejo-Jiménez et al.	Time-inhomogeneous Markov chain (regime-switching)	2008 2015
Fei and Shu-Juan	Fractional Brownian motion modulated by a Time- homogeneous finite Markov chain	2012
Elghanjaoui and Karlsen Yu	Markov regime switching combined with jump-diffusion processes	2012 2014
Vallejo-Jiménez, B. and F. Venegas-Martínez	Fractional Brownian modulated by a time-inhomogeneous Markov chain combined with multiple jump-diffusion processes	2017
Madan, Seneta Barndorff-Nielsen Eberlein, Keller	Modelos Hiperbólicos Generalizados	1990 1995 1995
Schoutens	Distribuciones Meixner	2001
Carr et. al.	CGMY	2002

Cuadro 1. Modelos de valuación, elaborado por el autor.

6. Conclusiones

El principio de normalidad, en la ciencia financiera, nace como una ley universal, en gran medida por su versatilidad explicativa en muchos campos, tanto de las ciencias naturales como de las ciencias sociales. Postular a la distribución normal como ley universal, gracias a las demostraciones y distintas construcciones del Teorema del Límite Central, sin duda, influyó en el corpus teórico financiero de mediados del siglo XX.

El análisis popperiano y kuhniano del supuesto de normalidad en la ciencia financiera permitió identificar los diferentes estadios de la misma. Aunque se entremezclan, es evidente que existen puntos álgidos tanto para el fortalecimiento del paradigma como para llevar el proceso de falsación. En este proceso resurgen las dudas de los modelos, así como las posibles respuestas.

Las finanzas parecen estar inmersas en ese proceso, no a nivel general, pero si en específico en lo que hemos denominado el mundo $\mathbb{Q}$, y en esto tiene muchas similitudes con la física a inicios del siglo XX. En Finanzas, podríamos decir que el mundo $\mathbb{P}$ responde a la lógica del mundo macro y las inversiones de portafolio en donde se aglomeran miles de activos buscando modelar su futuro.

La similitud de los métodos y herramientas en distintos campos han hecho al campo financiero un campo prolífico. De los académicos atraídos por los fenómenos financieros algunos se dejan absorber por el paradigma normal, por ejemplo muchos econometristas, y otros después de algunas experiencias lo abandonan. Los debates que buscan soluciones a los viejos y nuevos problemas, en el camino eterno de la ciencia, intentan encontrar la luz al final de la caverna.

El análisis popperiano y kuhniano que se ha propuesto en este trabajo muestra que, más que sombras, el debate ha traído luz y ha elevado el nivel técnico y teórico de las finanzas a través de múltiples generalizaciones y extensiones del supuesto de normalidad; aunque la popularidad de este último permanece vigente, sobre todo en el campo de la econometría financiera y la valuación de activos.

Bibliografía

Avellaneda, M. (2019). The origin of present value as a capital budgeting decision criteria: A journey to Pisa in the middle ages. *Odeon*, *16*, 9–35. https://doi.org/17941113.n16.02 pi Rev ODEON 16_oct 6.indb 910/11/19 4:46 PM

Bachelier, L. (1900). Théorie de la spéculation. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, *17*, 21–86. https://doi.org/10.24033/asens.476

BIS, Bank for International Settlements (2004). *Convergencia internacional de medidas y normas de capital* (p. 228). p. 228. Basilea.

Bernstein, P. L. (1992). Capital Ideas: The Improbable Origins of Modern Wall Street. In Profit Editorial. https://doi.org/10.2307/2328959

Bernstein, P. L. (1996). *Against the gods: The remarkable story of risk* (1st ed.). Profit

Editorial. https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Bernstein, P. L. (2007). Capital Ideas Evolving. In *Wiley and Sons Inc*. https://doi.org/10.2469/faj.v64.n4.8

Black, F., and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, *81*(3), 637–657. https://doi.org/10.1086/260062

Blanco-Castañeda, L. (2010). *Probabilidad* (2d ed.; L. B. Castañeda, Ed.). Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Brada, J., Ernst, H., and Tassel, J. Van. (1966). Letter to the Editor—The Distribution of Stock Price Differences: Gaussian After All? *Operations Research*, *14*(2), 334–340. https://doi.org/10.1287/opre.14.2.334

Champernowne, D. G. (1953). A Model of Income Distribution. *The Economic Journal*, *63*(250), 318–351. https://doi.org/10.2307/2227127

Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: Stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, *1*(2), 223–236. https://doi.org/10.1080/713665670

David, F. N. (1962). *Games, Gods and Gambling: The Origins and History of Probability and Statistical Ideas from the Earliest Times to the Newtonian Era.* https://doi.org/10.2307/2982378

de Moivre, A. (1738). The doctrine of chances: or, a method of calculating the probabilities of events in play. In *London: printed for the author, by H. Woodfall, without Temple-Bar, M.DCC.XXXVIII.*

Dimson, E., and Mussavian, M. (1999). Three centuries of asset pricing. *Journal of Banking and Finance*, *23*(12), 1745–1769. https://doi.org/10.1016/S0378-4266(99)00037-0

Doob, J. L. (1953). *Brownian Motion*. New York, Wiley https://doi.org/10.1007/978-3-642-56573-1_26

Einstein, A. (1905). Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen Der Physik*, 322 (8): 549–560. https://doi.org/10.1002/andp.19053220806

Fama, E. F. (1963). Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis. *The Journal of Business*, *36*(4), 420-429. https://doi.org/10.1086/294633

Fama, E. F. (1965). The Behavior of Stock-Market Prices. *The Journal of Business*, *38*(1), 34-105. https://doi.org/10.1086/294743

Fama, E. F. (1970). Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *The Journal of Finance*, *25*(2), 383–417. https://doi.org/10.2307/2325486

Fama, E. F., and Roll, R. (1968). Some Properties of Symmetric Stable Distributions. *Journal of the American Statistical Association*, *63*(323), 817–836. https://doi.org/10.1080/01621459.1968.11009311

Fischer, H. (2010). *A history of Central Limit Theorem, Sources and Studies* (1st ed.). (Eichstätt), Alemania: Springer.

Fisher, I. (1907). The Nature of Capital and Income. *Journal of the Royal Statistical Society*. https://doi.org/10.2307/2339679

Gnedenko, B. V., and Kolmogorov, A. N. (1955). *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables* (K. L. Chung, Ed.). https://doi.org/10.2307/3608621

Hicks, J. R. (1939). Value and Capital: An Inquiry into Some Fundamental Principles of Economic Theory. In *Journal of the Royal Statistical Society*. https://doi.org/10.2307/2980018

Hicks, J. R. (1935). A Suggestion for Simplifying The Theory of Money. In *General Equilibrium Models of Monetary Economies*. https://doi.org/10.1016/b978-0-12-663970-4.50005-0

Hirshleifer, J. (1965). Investment Decision Under Uncertainty: Choice-Theoretic Approaches.

The Quarterly Journal of Economics, *79*(4), 510–536. https://doi.org/10.2307/1880650
Itô, K. (1944). Stochastic integral. *Proceedings of the Imperial Academy*. https://doi.org/10.3792/pia/1195572786
Itô, K. (1951a). Multiple wiener integral. *Journal of the Mathematical Society of Japan*. https://doi.org/10.2969/jmsj/00310157
Itô, K. (1951b). On a formula concerning stochastic differentials. *Nagoya Mathematical Journal*. https://doi.org/10.1017/s0027763000012216
Jarrow, R., and Protter, P. (2004). *A short history of stochastic integration and mathematical finance: the early years, 1880–1970*. *45*(2004), 75–91. https://doi.org/10.1214/lnms/1196285381
Jiménez, B. V., and Martínez, F. V. (2017). Optimal consumption and portfolio rules when the asset price is driven by a time-inhomogeneous Markov modulated fractional Brownian motion with multiple Poisson jumps. *Economics Bulletin*, *37*(1), 314-326.
JPMorgan. (1996). *RiskMetrics —Technical Document* (p. 296). p. 296. New York: JP Morgan and Co.
Kaldor, N. (1939). Speculation and Economic Stability. *The Review of Economic Studies*. https://doi.org/10.2307/2967593
Kant, I. (1787). *Critica A La Razon Pura* (M. Garcia Morente, J. J. Garcia Norro, and R. Rovira, Eds.). Madrid: TECNOS.
Kendall, M. G. (1953). The Analysis of Economic Time-Series-Part I: Prices. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, *116*(1), 11–25. https://doi.org/10.2307/2980947
Keynes, J. M. (1930). A Treatise on Money, Vol. 2, The Applied Theory of Money. In *Collected Writings of John Maynard Keynes*.
Knight, F. H. (1921). Risk, uncertainty and profit. In *New York: Hart, Schaffner and Marx*.
Kolmogoroff, A. N. (1931). Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Mathematische Annalen,* 104, 415-458. https://doi.org/10.1007/BF01457949
Kolmogorov, A. N. (1933). *Foundations of the theory of probability* (2nd ed.; N. Morrison, Ed.). Moscow.
Kruizenga, R. (1956). *Put and call options: a theoretical and market analysis*. Retrieved from https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/59486
Kuhn, T. S. (1962). La estructura de las revoluciones científicas. In *University of Chicago Press* (3ra ed.). https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004
Laurent, A. G. (1959). Comments on ``Brownian motion in the stock market''. *Operations Research,* 7, 145–173.
Lévy, P. (1937). *Théorie de l'addition des variable aléatoire* (1st ed.). Paris: Gauthier-Villars.
Lintner, J. (1965). The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. *The Review of Economics and Statistics*. https://doi.org/10.2307/1924119
Lydall, H. F. (1959). The Distribution of Employment Incomes. *Econometrica*, *27*(1), 110–115 https://doi.org/10.2307/1907780
Mandelbrot, B. (1960). The Pareto-Lévy Law and the Distribution of Income. *International Economic Review*, *1*(2), 79. https://doi.org/10.2307/2525289
Mandelbrot, B. (1963). The Variation of Certain Speculative Prices. *The Journal of Business*, *36*(4), 394. https://doi.org/10.1086/294632
Mandelbrot, B., and Taylor, H. M. (1967a). On the Distribution of Stock Price Differences. *Operations Research*, *15*(6), 1057–1062. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/168611

Mandelbrot, B., and Taylor, H. M. (1967b). On the Distribution of Stock Price Differences. *Operations Research*, *15*(6), 1057–1062. https://doi.org/10.1287/opre.15.6.1057

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection Harry Markowitz. *The Journal of Finance*, *7*(1), 77–91.

Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. Cowles Foundation, Yale University. https://doi.org/10.2307/3006625

Markowitz, H. (1999). The Early History of Portfolio Theory: 1600-1960. *Financial Analysts Journal*, *55*(4), 5–16. https://doi.org/10.2469/faj.v55.n4.2281

Marschak, J. (1938). Money and the Theory of Assets. *Econometrica*, *6*(4), 311-325. https://doi.org/10.2307/1905409

Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Sciencies, 4*(1):141-183. https://doi.org/10.2307/3003143

Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics, 3*(2), 125-144. https://doi.org/10.1016/0304-405X(76)90022-2

Meucci, A. (2011a). " P " versus " Q ": Differences and Commonalities between Derivatives pricing: the " Q " world. *Ssrn*.

Meucci, A. (2011b). Review of Discrete and Continuous Processes in Finance: Theory and Applications. *SSRN Electronic Journal*. https://doi.org/10.2139/ssrn.1373102

Mossin, J. (1966). Equilibrium in a Capital Asset Market. *Econometrica*, *34*(4), 768-783. https://doi.org/10.2307/1910098

Osborne, M. F. M. (1959). Brownian Motion in the Stock Market. *Operations Research*, *7*(2), 145- 173. https://doi.org/10.1287/opre.7.2.145

Pacioli, L. (1494). *Summa de aritmetic, geometria et proportionalita*. Venecia: Paganino Paganini.

Piaggio, H., and Ville, J. (1939). Etude critique de la Notion de Collectif. *The Mathematical Gazette*. https://doi.org/10.2307/3607027

Platón. (1871). *Obras completas de Platón* (M. y Navarro, Ed.). Retrieved from http://bibliotecadigital.jcyl.es/i18n/consulta/registro.cmd?id=22661

Popper, K. (1934). La lógica de la investigación científica. In J. Freed and L. Freed (Eds.), *TECNOS* (2nd ed.). Viena: TECNOS.

Press, S. J. (1967). A Compound Events Model for Security Prices. *The Journal of Business*, *40*(3), 317–335. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/2351754

Quételet, A. (1835). A treatise on man and the development of his faculties. In *A Treatise on Man and the Development of his Faculties*. https://doi.org/10.1017/CBO9781139864909

Quételet, A. (1861). Physique sociale ou Essai sur le développement des facultés de l'homme. *Bruxelles*.

Quételet, J. (1832). Recherches sur le poids de l'homme aux different âges. *Nouveaux Memoire de l'Academie Royale Des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles. Physique Sociale*.

Quételet, L. A. J. (1869). Sur L'homme Et Le Développement De Ses Facultés, Ou Essai De Physique Sociale. In *Chemistry and …*.

Quételet, M. (1843). Sur la repartition du contingent des communes dans les levees de la milice. In *Bulletin de la Commission Centrale de Statistique*.

Romero, C. (2004). El Pensamiento Financiero: Una Visión de su Desarrollo y de sus Fronteras. *Odeon*, (2), 22–48.

Romero, C. (2010). La teoría moderna de portafolio. Un ensayo sobre sus formulaciones originales y sus repercusiones contemporáneas. *ODEON*, *0*(5 SE-Artículos). Retrieved from https://revistas.uexternado.edu.co/index.php/odeon/article/view/2867

Ross, S. A. (1976). The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory*,

13(3), 341-336. https://doi.org/10.1016/0022-0531(76)90046-6
Rubinstein, M. (2006). A History of Investments. In *Wiley and Sons Inc*. New Jersey.
Samuelson, P. (1965a). Proof That Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly. *Management*, *6*, 41–50. https://doi.org/10.1142/9789814566926_0002
Samuelson, P. (1965b). Rational Theory of Warrant Pricing. *Industrial Management Review, 6,* 13-31. https://doi.org/10.1007/978-3-319-22237-0_11
Sharpe, W. . F. (1964). Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, *19*(3), 425–442. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x
Sprenkle, C. M. (1961). Warrant prices as indicators of expectations and preferences. *Yale Economic Essays*.
Stigler, S. M. (1988). The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty before 1900. The Belknap Press. https://doi.org/10.2307/3105539
Taleb, N. N. (2007). The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable (Random House, 2007). https://doi.org/10.1007/s11138-008-0051-7
Treynor, J. L. (1962). *Toward a theory of market value of risky assets*. Risk Books, London.
Tsay, R. S. (2002). Analysis of Financial Time Series. In *Analysis of Financial Time Series*. Wiley. https://doi.org/10.1002/0471264105
Uspensky, J. (1937). *Introduction to Mathematical Probability* (1st ed.). New York: McGraw-Hill.
Venegas-Martínez, F. (2001). Opciones, cobertura y procesos de difusión con saltos: una aplicación a los títulos de GCARSO, *16*(32), 203–226.
Venegas Martínez, F. (2008). Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre, 2da. Edición. Cengage Learning. México.
Venegas Martínez, F. (2005). De Bachelier a Merton: 100 años del movimiento browniano en economia y finanzas. *Panorama Económico*. *1*(1), 9-64. https://doi.org/10.29201/pe-ipn.v1i1.6
Venegas Martínez, F., and Rodríguez Nava, A. (2009). Consistencia entre minimización de varianza y maximización de utilidad en la evaluación de derivados. *Contaduría y Administración*, *229*, 9-30. https://doi.org/10.22201/fca.24488410e.2009.657

von Neumann, J., and Morgenstern, O. (1944). Theory of games and economic behavior. In *Theory of Games and Economic Behavior* (3rd ed.). Princeton: Princeton University Press.
Wiener, N. (1923). Differential-Space. *Journal of Mathematics and Physics*, 2, 131-174. https://doi.org/10.1002/sapm192321131
Williams, J. B. (1938). *The Theory of Investment Value.* Cambridge, Mass., Harvard University Press. https://doi.org/10.2307/2279181