Statistical two-level model of the production process

,

National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv, Ukraine

21 April 2011

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ДВУХУРОВНЕВАЯ МОДЕЛЬ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

[*] *Пигнастый О.М.*

НТУ «ХПИ», Харьков, Украина

Моделирование производственно-технических систем (ПТС) является эффективным методом их исследования [2,3]. Распространенный класс образуют ПТС, где детерминированный характер технологических процессов сочетается с их стохастической природой. Закономерности функционирования ПТС во многом подобны тем, которые имеются в термодинамических системах. Они столь глубоки и полезны, что провозглашены в качестве общих принципов: Ле Шателье-Самуэльсона, Карно-Хикса и др.[2]. На основании этих принципов технологический процесс ПТС с серийным или массовым выпуском продукции может быть представлен в виде стохастического процесса [1,3].

Предметно-технологическая модель ПТС. Состояние ПТС определим как состояние числа N базовых продуктов. Под базовы продуктом (БП) или предметом труда понимается элемент ПТС, на который при выполнении технологической операции переходит стоимость труда, материалов и орудий труда в ходе воздействия оборудования. Поведение БП определяется закономерностями технологического процесса. Состояние БП будем описывать наблюдаемыми на микроуровне микропараметрами: суммой затрат $\mathrm{S_j}$(грн) и затрат в единицу времени μ_j(грн/час), перенесенными оборудованием на j-й БП. Состояние ПТС определено, если известны $\mathrm{S_j}, \mu_j$, а в любой момент времени найдено из уравнений состояния БП:

$$dS_j \big/ dt = \mu_j, \quad d\mu_j \big/ dt = f_j(t,S), \quad 0<\mathrm{j}<\mathrm{N}, \qquad (1)$$

где $f_j(t,S)$ - производственная функция ПТС [2]. Если количество БП много больше единицы, то решить систему из 2N-уравнений практически невозможно, что требует перехода от микроописания ПТС к макроописанию с элементами вероятностной природы. Вместо рассмотрения состояния ПТС с микропараметрами $\mathrm{S_j}$ и μ_j, введем функцию распределения БП $\chi(t,S,\mu)$ в фазовом технологическом пространстве (ФТП)

$$\int_0^\infty d\mathrm{S} \cdot \int_0^\infty d\mu \cdot \chi(t,S,\mu) = N . \qquad (2)$$

Условие нормировки (2) представляет закон сохранения числа БП в производственном процессе.

Кинетическое уравнение ПТС. Разобьем ФТП (S,μ) на такое число ячеек, чтобы размеры ячейки $\Delta\mathrm{S}\cdot\Delta\mu$ были достаточно малы и содержали внутри себя большое число БП. Состояние БП задается точкой в ФТП. Вместо того, чтобы фиксировать точные значения микропараметров БП, будем приближенно характеризовать состояние ПТС числом БП в каждой ячейке $\Delta\mathrm{S}\cdot\Delta\mu$. Так как, величина $\chi\cdot d\mathrm{S}\cdot d\mu$ представляет число БП в бесконечно малой ячейке $\Delta\mathrm{S}\cdot\Delta\mu$, мы можем по изменению фазовой координаты S и фазовой скорости μ со временем судить об изменении самой функции χ [4]:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f=J(t,S,\mu),\quad \frac{dS}{dt}=\mu,\quad \frac{d\mu}{dt}=f(t,S). \qquad (3)$$

Генераторная функция $J(t,S,\mu)$ определяется характеристиками технологического процесса[4], стремится при $t\to\infty$ свести распределение БП в ФТП к равновесному. Производственная функция $f(t,S)$ есть аналог силы, перемещающий БП по технологической цепочки. При таком перемещении оборудование воздействует на БП, изменяя его качественно и количественно. Мы можем говорить о вероятности того, что после воздействия со стороны оборудования БП будет находиться в том или ином состоянии. Процесс воздействия оборудования на БП обозначим $\psi(\mu)$, где μ - скорость изменения затрат, которую принимает БП после воздействия. Функция $\psi(\mu)$ определяется паспортными данными оборудования. Свойства $\psi(\mu)$ могут быть получены из общих соображений, представляя вероятность перехода в любое состояние равную единице:

$$\int_0^\infty\psi(\mu)\cdot d\mu=1. \qquad (4)$$

Число БП, испытавших в единицу времени воздействие со стороны оборудования, есть произведение потока $\chi(t,S,\mu)\cdot\mu$ на вероятность для БП испытать воздействие в элементе $d\mathrm{S}\cdot d\mu$. Вероятность испытания воздействия пропорциональна плотности расположения оборудования $\lambda(S)$ вдоль технологической цепочки. Число БП, испытавших в единицу времени воздействие со стороны оборудования и принявшие значения в пределах $(\tilde{\mu};\tilde{\mu}+d\tilde{\mu})$ есть $\psi(\tilde{\mu})\cdot\lambda(S)\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)\cdot d\tilde{\mu}\cdot d\mathrm{S}\cdot d\mu$. В элемент $d\mathrm{S}\cdot d\mu$ поступают БП с $d\mathrm{S}\cdot d\tilde{\mu}$ путем обратного перехода:

$\psi(\mu)\cdot\lambda(S)\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})\cdot d\tilde{\mu}\cdot dS\cdot d\mu$, а общее число БП в элементе $dS\cdot d\mu$ изменяется в единицу времени на величину $dS\cdot d\mu\cdot J$:

$$J=\lambda(S)\cdot\int_0^\infty\{\psi(\mu)\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})-\psi(\tilde{\mu})\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)\}d\tilde{\mu} \qquad (5)$$

В большинстве практических случаях функция $\psi(\mu)$ не зависит от состояния БП до испытания воздействия со стороны технологического оборудования, откуда с учетом свойства (4):

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f=\lambda(S)\cdot\{\psi(\mu)\cdot[\chi]_1-\mu\cdot\chi\}. \qquad (6)$$

Потоковая модель ПТС. Нулевой $[\chi]_0$ и первый $[\chi]_1$ моменты функции распределения имеют производственную интерпретацию: заделы БП и их темп движения вдоль технологической цепочки. Умножив уравнение (6) на μ^k, $k=0,1,2....$ и проинтегрировав по всему диапазону μ, получим незамкнутые уравнения балансов ПТС [2]:

$$\frac{\partial[\chi]_k}{\partial t}+\frac{\partial[\chi]_{k+1}}{\partial S}=k\cdot f\cdot[\chi]_{k-1}+\int_0^\infty d\mu\cdot\mu^k\cdot J\ ,\quad \int_0^\infty\mu^k\cdot\chi\ d\mu=[\chi]_k\ . \qquad (7)$$

Возможность получить замкнутую систему уравнений основана на свойствах функции $\psi(\mu)$ и наличии малого параметра $Kv<<1$ [1,2], характеризующих ПТС. В нулевом приближении по параметру $Kv<<1$ из уравнения балансов (7) может быть получена замкнутая многомоментная система уравнений ПТС

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+\frac{\partial[\chi]_1}{\partial S}=0;\ \frac{\partial[\chi]_k}{\partial t}+\frac{\partial[\chi]_{k+1}}{\partial S}=k\cdot f\cdot[\chi]_{k-1},\ k=1,2.. \qquad (8)$$

Уравнения балансов ПТС (8) в одномоментном описании представляют собой уравнения системной динамики [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Пигнастый О.М. Статистическая теория производственных систем. Х.: ХНУ, 2007г. – 388 с.
2. Рушицкий Я.Я., Милованов Т. С. Модифікована модель Філіпса-Лоренца для єкономічної системи. / Доповіді НАНУ. 1997. №12, С.36-40
3. Форрестер Д. *Основы кибернетики предприятия.* М.: Прогресс, 1961. – 341 с.