A Dynamic Principal-Agent Model of Electric Power Loss Reduction in Continuous Time

Zambrano, Juan Carlos and Astaiza-Gómez, José Gabriel and García, Juan David

2021

Un Modelo Principal-Agente Dinámico de Reducción de Perdidas de Energía Electrica en Tiempo Continuo

A Dynamic Principal-Agent Model of Electric Power Loss Reduction in Continuous Time

Juan Carlos Zambrano[*†]

José Gabriel Astaiza-Gómez[*†]

Juan David García[*]

October 14, 2021

Resumen: *En este artículo analizamos el diseño del mecanismo de remuneración a la disminución de pérdidas energéticas, mediante un modelo principal-agente dinámico en tiempo continuo. El agente representa la empresa distribuidora de energía, que realiza inversiones, o en otras palabras, realiza un esfuerzo, para reducir pérdidas energéticas. El principal representa el regulador, que ofrece un contrato (regulación) al agente, diseñado con el propósito de que realice el esfuerzo óptimo, en el sentido de que tal esfuerzo, maximiza la esperanza de la producción de energía, menos el costo de compensar al agente por el esfuerzo y el riesgo requeridos por los incentivos. En nuestro modelo, la distribución de energía sigue un proceso de difusión con deriva (drift), determinado por el esfuerzo del agente, no observable o verificable por el principal. El contrato óptimo, realizado sobre la base del valor de continuación del agente como variable de estado, es calculado a partir de una ecuacuación diferencial.*

Palabras clave: *monopolio natural, pérdida de energía, remuneración, información asimétrica, riesgo moral.*

Abstract: *In this article we analyze the remuneration mechanism for the reduction of energy losses, through a dynamic principal-agent model in continuous time. The agent represents the power distribution company, which makes investments, or in other words, makes an effort to reduce energy losses. The principal represents the regulator, who offers a contract (regulation) to the agent, designed with the purpose of inducing the agent to exert the optimal effort, in the sense that such effort maximizes the expectation of power distribution minus the cost of compensating the agent. In our model, the energy distribution follows a process of diffusion with drift (drift), determined by the effort of the agent, not observable or verifiable by the principal. The optimal contract, carried out on the basis of the continuation value of the agent as a state variable, is calculated from a differential equation.*

Key words: *Natural Monopoly, Electric Power Losses, Remuneration, Asymmetric Information, Moral Hazard.*

---

[*] Universidad del Vallle

[†] Grupo de investigación "Finanzas Cuantitativas".

1 Introducción

La dinámica de las empresas distribuidoras de energía eléctrica, es central para entender cómo los reguladores motivan a las distribuidoras a operar eficientemente, a través de compensaciones. En este artículo, apuntamos a caracterizar la regulación óptima que induce reducciones de perdidas de energía eléctrica de un monopolio natural.

El problema es esencialmente, un problema de control en condiciones de información incompleta, en la tradición de la literatura de diseño de mecanismos, en donde el objetivo del regulador es minimizar las pérdidas energéticas de la firma al mismo tiempo que incentiva la prestación permanente del servicio. La concepción usual de la regulación, sobre mercados que requieren la operación de sólo una firma por eficiencia tecnológica, tiene un énfasis en los precios de venta del servicio. Este enfoque, ignora los incentivos de las empresas y la incapacidad del regulador de obtener información completa sobre la firma (Laffont, 1994). Afortunadamente, los trabajos teóricos que incorporan asimetrías de información e incentivos al analizar la regulación, ya suman una buena cantidad (e.g. Alasseur et al. (2019); Martimort et al. (2020); Hiriart and Martimort (2012)), trabajos sobre los cuales podemos avanzar en el entendimiento del mercado energético y sus implicaciones de política.

A differencia de Alasseur et al. (2019), nuestro *principal* no equivale a la agregación de los consumidores de energía, o si se prefiere, al consumidor representativo, que remunera de manera directa al agente. En Colombia, por ejemplo, debido la ley 143 de 1994 los precios cobrados a los usuarios finales regulados, están definidos sobre la base de los costos de distribución de energía, que incluyen los niveles de pérdidas de energía y potencia. En la medida en que el valor de las transferencias recibidas por las empresas más sus ventas, deben ser suficientes para recuperar el valor de sus inversiones y de sus costos (ver artículo 44), a la vez que el dinero faltante para pagar la totalidad del consumo de los usuarios residenciales, que pagan un precio menor al costo de prestación del servicio [1], es cubierto con recursos del presupuesto nacional (ver artículo 47), no son los consumidores quienes compensan directamente a la empresa sus pérdidas energéticas de forma completa, sino que lo hace el regulador. Por esa razón, nuestro *principal* está definido en términos de la esperanza del bienestar social, que incorpora, tanto la utilidad esperada del *agente*, como la utilidad del consumidor representativo como en (Laffont, 1994). A diferencia de (Laffont, 1994), nuestro modelo no es estático sino dinámico hacia el infinito, donde la distribución de energía (el servicio de la empresa) está descrita por un movimiento browniano standard y por el esfuerzo de la empresa. Metodológicamente, seguimos a Sannikov (2008). Aunque el modelo de Sannikov (2008) no incorpora la utilidad de los usuarios agregados, impuestos distorsionadores ni las ventas de la firma

[1] Los usuarios residenciales de estratos altos y los usuarios no residenciales, pagan un precio más alto para subsidiar el consumo de los usuarios que pagan un precio inferior al costo, pero los precios más altos no exceden el 20% del costo de prestación del servicio. Ver artículo 47.

como sí lo hacemos en ésta investigación, nos es útil para presentar la solución a nuestro modelo dinámico, en el que el producto (energía distribuída en nuestro contexto) sigue un proceso de difusión con deriva, determinado por el esfuerzo no observable o verificable de la firma.

Este artículo contribuye a la literatura en varios aspectos. Primero, nuestro esfuerzo está enfocado en derivar una regulación, o contrato, con una perspectiva teórica que tenga sentido en la práctica, al incluir explícitamente los límites informacionales de los reguladores con respecto a la firma regulada, así como la reacción de la firma a la nueva regulación. Segundo, nuestro análisis hace explícito que el ambiente contractual, o regulación tarifaria, es dinámico, lo cual tiene implicaciones sobre los incentivos de la firma, que sopesa sus escenarios de corto y largo plazo. En un escenario dinámico, las decisiones de la firma, sobre el trabajo (esfuerzo) que hace para reducir pérdidas energéticas, depende de su valor de continuación, lo que resulta también muy intuitivo.

2 El Modelo

La distribución de energía X_t es observable tanto por el principal (el regulador) como por el agente (la empresa distribuidora). El principal no observa el esfuerzo A_t del agente, sino que usa las realizaciones de X_t para ofrecerle al agente compensaciones por incurrir en los costos de ejecutar un esfuerzo. El principal, le ofrece al agente un contrato que especifica un flujo de transferencias no negativas $\hat{T}_t(X_s; 0 \leq s \leq t) \in [0, \infty)$, sobre la base de las entregas de energía observadas. El agente, percibe una utilidad $u(\cdot)$ derivada de las tranferencias que recibe y de sus ingresos por distribución de energía. Asumimos que la utilidad $u : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es una función $\mathcal{C}^2$ creciente y cóncava tal que $u(0) = 0$ y $u'(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. Para un nivel de esfuerzo A_t, la utilidad esperada del agente es

$$\mathbb{E}\left[r \int_0^\infty e^{-rt}[u(\hat{T}_t + R(X_t), A_t)]dt\right] \tag{1}$$

Donde la tasa de descuento r es, por simplicidad, constante a través del tiempo, $R(\cdot)$ son los ingresos obtenidos por la distribución de energía, A_t el esfuerzo y $\hat{T}_t$ es una trasferencia monetaria hacia la firma desde el regulador que se financia con impuestos. El proceso de la cantidad de energía eléctrica entregada, X_t, está descrito por una constante σ y un movimiento browniano $Z = \{Z_t, \mathcal{F}_t, 0 \leq t < \infty\}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{Q})$, tal que hasta el tiempo t, la distribución energética sigue la siguiente dinámica:

$$dX_t = A_t dt + \sigma dZ_t \tag{2}$$

El esfuerzo del agente es un proceso estocástico $A = \{A_t \in \mathcal{A}, 0 \leq t < \infty\}$ medible progresivamente con respecto a $\mathcal{F}_t$, donde el conjunto de esfuerzos factibles, $\mathcal{A}$, es compacto con elemento mínimo 0. También asumimos que existe un $\gamma_0 > 0$ tal que $h(a) \leq \gamma_0 a$ para todo $a \in \mathcal{A}$

La utilidad que obtienen los usuarios agregados por el consumo de energía en un tiemop t, es $S(X_t)$ y asumimos que la renuncia a los ingresos, por valor de $\hat{T}_t$, para entregárselos al regulador (impuestos), y su transferencia hacia la firma, tiene un costo social λ, i.e. estamos en el escenario más plausible donde los impuestos son distorsionadores. De tal manera, el diferencial de la utilidad total del consumidor representativo en el tiempo t es

$$[S(X_t) - R(X_t) - (1+\lambda)\hat{T}_t]dt \tag{3}$$

La esperanza del bienestar social para el principal es entonces:

$$\mathbb{E}\left[r\int_0^\infty e^{-rt}[S(X_t) - R(X_t) - (1+\lambda)\hat{T} + u(\hat{T}_t + R(X_t), A_t)]dt\right] \tag{4}$$

Como es standard en la literatura, decimos que un proceso de esfuerzos $\{A_t, 0 \leq t < \infty\}$ es compatible con los incentivos, o incentivo-compatible, con respecto a $\{\hat{T}_t, 0 \leq t < \infty\}$ si maximiza la utilidad esperada del agente.

2.1 Problema Principal-Agente

El problema del regulador (el principal), es ofrecerle a la firma (el agente) un contrato, que consta de dos partes: un flujo de transferencias $\{\hat{T}_t, 0 \leq t < \infty\}$ contingente a la distribución energética realizada, y la solicitud de un nivel de esfuerzo incentivo-compatible $\{A_t, 0 \leq t < \infty\}$, que maximiza la esperanza del bienestar social (expresión 4), sujeto a que tal contrato le represente a la firma, un valor requerido (costo de oportunidad) de al menos $\hat{W}$:

$$\mathbb{E}\left[r\int_0^\infty e^{-rt}[u(\hat{T}_t + R(X_t), A_t)]dt\right] \geq \hat{W} \tag{5}$$

Con el propósito de caracterizar la regulación óptima en las siguientes secciones, seguimos a Sannikov (2008), y denotamos como W_t, una variable de estado definida como la utilidad total que obtiene la firma después de un tiempo t, de tal manera, que en el contrato óptimo la variable W_t que es observable por el regulador, cambia con la cantidad de energía distribuida, y determina tanto las transferencias que recibe el agente en cada t como el esfuerzo que se le solicita. La evolución de W_t, que llamaremos *valor de continuación* de la firma, está relacionada con la recompensa o compensación total de la firma, V_t, como lo describe el siguiente proceso de Îto:

$$dV_t = re^{-rt}\left(u(\hat{T}(W_t) + R(W_t), A(W_t))\right)dt + d\left(e^{-rt}(W_t)\right) \tag{6}$$

Donde $\hat{T}_t = \hat{T}(W_t)$ y $A_t = A(W_t)$. Por el Teorema de Representación de Martingalas de Karatzas and Shreve (1991), la ecuación anterior se puede expresar como

$$V_t = V_0 + r\int_0^t re^{-rt}e^{-rs}Y_s\sigma dZ_s \tag{7}$$

donde

$$\begin{aligned} dZ_t = & \quad \frac{1}{\sigma}dX_t - \frac{1}{\sigma}A_t dt \\ rY_t\sigma dZ_t = & \quad rY_t\sigma\left(\frac{1}{\sigma}dX_t - \frac{1}{\sigma}A_t dt\right) \\ & = rY_t\left(\frac{1}{\sigma}dX_t - \frac{1}{\sigma}A_t dt\right) \end{aligned}$$

Ahora, reescribimos la ecuación 6 como

$$V_t = r\int_0^t e^{-rs}\left(u(\hat{T}(W_t) + R(W_t), A(W_t))\right)ds + e^{-rt}(W_t) \tag{8}$$

y derivando las expresiones 6 y 8 e igualándolas, obtenemos

$$dW_t = r\left(W_t - u(T(W_t) + R(W_t), A(W_t))\right)dt + rY(W_t)\left(dX_t - A(W_t)dt\right) \tag{9}$$

Donde $rY(W_t)$ es la sensibilidad del valor de continuación de la firma con respecto a la energía distribuida. En el contrato óptimo, $Y(W_t)$ toma el valor mínimo que permite o induce un nivel de esfuerzo $a(W_t)$. En este trabajo utilizamos una función de utilidad $u(\hat{T}_t + R_t, A_t) = -\exp\left(-\lambda((\hat{T}_t + R_t) - \frac{A_t^2}{2})\right)$. Esta función de utilidad exponencial es estándar en la literatura de teoría de contratos (ver e.g. Williams (2015) y Li and Williams (2015)) Con propósitos de exposición expresamos la función de utilidad de la siguiente manera

$$u(\hat{T}_t + R_t, A_t) = -e^{\left(-\lambda((\hat{T}_t + R_t) - h(A_t))\right)} \tag{10}$$

Donde

$$h(A_t) = \frac{A_t^2}{2}$$

Note que el costo del esfuerzo, $h : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, está medido en las mismas unidades que la utilidad de las transferencias y es continuo, creciente, convexo y normalizado, tal que $h(0) = 0$.

Para encontrar el valor de $Y(W_t)$ mínimo que permite o induce un nivel de esfuerzo $a(W_t)$, que maximiza la diferencia entre el cambio esperado de W_t y el costo del esfuerzo $h(A)$ de la firma, presentamos la siguiente proposición:

Proposición: Para una estragia A, sea Y_t el proceso que representaa $W(\hat{T}, R, A)$ mencionado arriba, . Entonces, A es óptimo si y sólo si:

$$\forall a \in \mathcal{A} \quad Y_t A_t - e^{-\lambda(\hat{T}_t + R_t)}[h(A_t)^\lambda] \geq Y_t a - e^{-\lambda(\hat{T}_t + R_t)}[h(a)^\lambda], \quad 0 \leq t < \infty$$

Prueba: Considere una estrategia A^* arbitraria alternativa. Defina

$$\hat{V}_t = r\int_0^t e^{-rs}\left(u(\hat{T}+R,A^*)\right)ds + e^{-rt}(W_t) \tag{11}$$

como la esperanza en el tiempo t del pago total que recibe el agente, si percibe un costo del esfuerzo de la estrategia A^* antes del tiempo t, y planea seguir la estrategia A después de t. Derivando

$$d\hat{V}_t = re^{-rs}\left(u(\hat{T}(W_t)+R(W_t),A^*(W_t))\right)dt - re^{-rt}W_t(\hat{T}+R,A)dt + e^{-rt}dW_t(\hat{T}+R,A) \tag{12}$$

Como $dW_t = r\left(W_t - u(T(W_t)+R(W_t),A(W_t))\right)dt + rY(W_t)\sigma dZ_t$ con $\sigma dZ_t = (dX_t - A(W_t)dt)$ (por 2 y 9)

$$d\hat{V}_t = re^{-rs}\left(u(\hat{T}(W_t)+R(W_t),A^*(W_t))\right)dt - re^{-rt}u_t(\hat{T}+R,A)dt + rY(W_t)\sigma dZ_t \tag{13}$$

donde $e^{-rt}dW_t(\hat{T}+R,A) = e^{-rt}[r(W_t - u(\hat{T}+R,A))dt + rY_t\sigma dZ_t]$.

Nota que

$$\sigma Z_t = \sigma Z_t^* + \int_0^t (A_s^* - A_s)ds$$

y su derivada es

$$\sigma dZ_t = \sigma dZ_t^* + (A_s^* - A_s)dt$$

por lo que, multiplicando por rY_t

$$rY_t\sigma dZ_t = rY_t\sigma dZ_t^* + rY_t(A_s^* - A_s)dt$$

De ahí, que escribimos $d\hat{V}_t$ como

$$\begin{aligned} d\hat{V}_t =& re^{-rt}\left(u(\hat{T}+R,A^*)\right)dt - re^{-rt}u(\hat{T}+R,A)dt + rY(A^*-A_t)dt + rY_t\sigma dZ_t^* \\ d\hat{V}_t =& re^{-rt}\left[u(\hat{T}+R,A^*) - u(\hat{T}+R,A) + Y(A^*-A_t)\right]dt + rY_t\sigma dZ_t^* \end{aligned} \tag{14}$$

Incorporando la función de utilidad 10

$$d\hat{V}_t = re^{-rt}\left[-e^{\left(-\lambda((\hat{T}_t+R_t)-h(A_t))\right)} - (-e^{\left(-\lambda((\hat{T}_t+R_t)-h(A_t))\right)}) + Y(A^*-A_t)\right]dt + rY_t\sigma dZ_t^*$$

$$d\hat{V}_t = re^{-rt}\left[e^{-\lambda(\hat{T}_t+R_t)}[(h(A))^\lambda - (h(A^*))^\lambda] + Y(A^* - A_t)\right]dt + rY_t\sigma dZ_t^*$$

Queremos un valor A^* que maximice

$$Y_tA_t^* - e^{-\lambda(\hat{T}_t+R_t)}(h(A_t^*)^\lambda) \quad \forall t \geq 0$$

Denotamos el valor mínimo que permite o induce un nivel de esfuerzo $a(W_t)$ como

$$\gamma(A) = \min\{Y \in [0,\infty) : A \in arg\ max_{A' \in \mathcal{A}} YA' - h(A')\} \tag{15}$$

Es decir, $\gamma(A)$ es el valor de $Y(W_t)$, cuando la firma maximiza la diferencia entre el cambio esperado de W_t y el costo del esfuerzo $h(A)$:

$$YA^* - e^{-\lambda(\hat{T}_t+R_t)}[h(A^*)^\lambda]$$

Al mismo tiempo, máximo bienestar social, denotado como $F(W_t)$, que se obtiene cuando el regulador entrega a la firma un valor W_t, está relacionado con las elecciones óptimas de $A(W)$ y $\hat{T}(W)$ mediante una ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Dado que el proceso W es de Markov, es posible usar programación dinámica y el teorema de verificación aplicado para el caso de dinámicas que combinan procesos de difusión y de saltos de poisson (Oksendal and Sulem (2009), Fleming and Soner (2006) y Hanson (2007)). Así, la función de valor óptimo de este problema es (omitimos los sub-índices de tiempo por simplicidad):

$$F(W) = \sup_{\hat{T},A} \mathbb{E}\left[r\int_0^\infty e^{-rt}[f(\hat{T},A)]dt\right] \tag{16}$$

donde $f(\hat{T},A) = [S(X) - R(X) - (1+\lambda)\hat{T} + u(\hat{T}_t + R(X)) - h(A)]$ y el óptimo de $R(X)$ lo resuelve la firma conociendo los óptimos de las transferencias y el esfuerzo. El teorema de verifiicación permite escribir esta función como la siguiente ecuación integro-diferencial no lineal de segundo orden de tipo Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB):

$$-rF(W) + \sup_{\hat{T},A}\left\{\mathcal{B}^{\hat{T}}F(W) + f(\hat{T},A)\right\} = 0 \tag{17}$$

Para cada $\hat{T} \geq 0, A \geq 0$ el operador $\mathcal{B}^{\hat{T},A}$ es

$$\mathcal{B}^{\hat{T},A}F(W) = [r\left(W_t - u(\hat{T}(W_t) + R(W_t)) + h(A(W_t))\right)]\frac{\partial F}{\partial W} + \frac{1}{2}r^2\sigma^2\gamma(A)^2\frac{\partial^2 F}{\partial W^2} \tag{18}$$

Por otro lado para cada $W \in \mathbb{R}$, el máximo en la ecuación HJB satisface

$$(\hat{T}(W), A(W)) = arg\max_{\hat{T},A}\left\{\mathcal{B}^{\hat{T},A}\hat{F}(W) + f(\hat{T},A)\right\} \tag{19}$$

$$-r\hat{F}(W) + \sup_{\hat{T},A}\left\{\mathcal{B}^{\hat{T},A}\hat{F}(W) + f(\hat{T}(W,F'(W),A(W,F'(W)))\right\} = 0 \tag{20}$$

El teorema de verificación establece que, $F = \hat{F}$ garantiza la existencia de una regla de política óptima T^* y A^* tal que $T^* = \hat{t}(W)$ y $A^* = a(W)$, que resuelven la ecuación HJB. La caracterización de la ecuación de HJB Maximizada está dada por:

$$\begin{aligned} rF(W) = \max_{a>0,\hat{t}>0} & [S - R - (1+\lambda)\hat{t} + u(\hat{t}+R) - h(a)] \\ & + F'(W)r(W + u(\hat{t},R) + h(a)) + \frac{F''(W)}{2}r^2\gamma(a)^2\sigma^2 \end{aligned} \tag{21}$$

Es decir, el máximo bienestar social para un Y dado, denotado como $F(W_t)$, que se obtiene cuando el principal entrega al agente un valor W_t, está relacionado con las elecciones óptimas de $a(W)$ y $\hat{t}(W_t)$ mediante la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB).

3 Regulación Óptima

En este escenario, un contrato óptimo especifica unas transferencias recibidas por la firma $\{\hat{T}_t, t \leq \tau\}$, un esfuerzo $\{A_t, t \leq \tau\}$ solicitado en el contrato, que sea incentivo-compatible, y un tiempo de parada τ cuando la firma recibe el valor W_τ generando el máximo bienestar social. Como es usual en la literatura económica de contratos, el contrato óptimo corresponde a los argumentos que maximizan la función objetivo del principal:

$$\mathbb{E}\left[r\int_0^\tau e^{-rt}[S_t - R_t - (1+\lambda)\hat{T}_t + u(\hat{T}_t + R_t) - h(A_t)]dt + e^{-rt}F_0(W_\tau)\right] \tag{22}$$

donde $F_0(W_\tau)$ es el bienestar social máximo[2], asociado al valor de continuación W_τ de la firma en el tiempo τ. El contrato óptimo también debe satisfacer la condición de que, las transferencias que se le entregan a la firma, representen un beneficio inicial $W_0 \geq \tilde{W}$ mayor a la ganancia que recibiría en otra parte $\tilde{W}$ (*outside option*), i.e. la restricción de participación es

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[r\textstyle\int_0^\tau e^{-rt}[u(\hat{T}_t + R_t) - h(A_t)]dt + e^{-rt}W_\tau\right] = W_0 && \text{hasta el tiempo de parada } \tau \\ & \mathbb{E}\left[r\textstyle\int_t^\tau e^{-r(s-t)}[u(\hat{T}_s + R_s) - h(A_s)]ds + e^{-r(\tau-t)}W_\tau|\mathcal{F}_t\right] \geq \hat{W} && \text{para todo } t \leq \tau \end{aligned} \tag{23}$$

[2]Éste resultado es una aplicación directa del teorema 3 de Sannikov (2008) página 969

Denotando como $\tilde{t}(W_t)$ y $\tilde{a}(W_t)$ a los optimizadores de la HJB asociada a la función $F \geq F_0$ (ver expresión 21), en el contrato óptimo el valor de la firma inicia en W_0 y va cambiando de acuerdo a

$$dW_t = r\left(W_t - u(\hat{T}_t + R_t) + h(A_t))\right) dt + r\gamma(A_t)\left(dX_t - A_t dt\right) \tag{24}$$

donde $\hat{T} = \tilde{t}(W_t)$ y $A_t = \tilde{a}(W_t)$, y γ viene descrito por la expresión 15.

References

Alasseur, C., Farhat, H., and Saguan, M. (2019). A principal-agent approach to capacity remuneration mechanisms. *arXiv preprint arXiv:1911.12623*.

Hiriart, Y. and Martimort, D. (2012). How much discretion for risk regulators? *The RAND Journal of Economics*, 43(2):283–314.

Karatzas, I. and Shreve, S. E. (1991). Brownian motion and stochastic calculus springer-verlag. *New York*.

Laffont, J.-J. (1994). Regulation of pollution with asymmetric information. In *Nonpoint source pollution regulation: Issues and analysis*, pages 39–66. Springer.

Li, R. and Williams, N. (2015). Optimal unemployment insurance and cyclical fluctuations.

Martimort, D., Pouyet, J., and Staropoli, C. (2020). Use and abuse of regulated prices in electricity markets:"how to regulate regulated prices?". *Journal of Economics & Management Strategy*, 29(3):605–634.

Sannikov, Y. (2008). A continuous-time version of the principal-agent problem. *The Review of Economic Studies*, 75(3):957–984.

Williams, N. (2015). A solvable continuous time dynamic principal–agent model. *Journal of Economic Theory*, 159:989–1015.