To the theory of housing markets: a model of differentiation of prices for apartments depending on their readiness

Polterovich, Victor and Ilinskiy, Dmitry

CEMI RAS, MSE MSU, MIPT

5 December 2021

К теории рынка жилья: модель дифференциации цен на квартиры в зависимости от их готовности

Д.Г. Ильинский,

ЦЭМИ РАН, МФТИ, Москва

В.М. Полтерович,

ЦЭМИ РАН, МШЭ МГУ, Москва

Аннотация

Предложена модель фирмы, дифференцирующей цены на готовое и недостроенное жилье. При этом спрос на жилье формируется потребителями, решающими динамическую задачу оптимизации полезности. Предлагаемая формулировка этой задачи учитывает, что купленная квартира может оказаться доступной для потребления лишь по истечении определенного времени. При этом в момент получения готовой квартиры потребитель избавляется от необходимости платить за аренду квартиры, в которой он до этого проживал. Численные расчеты по данным, характерным для московского рынка жилья, показали, что оплачивать квартиру при низкой степени ее готовности предпочитают относительно бедные слои населения. При этом, чем ниже арендная ставка, тем выше оказывается цена недостроенных квартир и тем относительно меньшая доля потребителей предпочитает их покупку.

Ключевые слова: цена недостроенной квартиры, аренда жилья, ставка по кредиту, выигрыш застройщика

Классификация JEL: D02, D14, G21

1.Введение

Строительные фирмы нередко дифференцируют цены на квартиры в зависимости от степени их готовности. Снижая цены на квартиры в недостроенных домах по сравнению с готовыми квартирами, застройщик получает возможность уменьшить объем заимствований, а значит, и выплаты по кредитам. Для выявления факторов, влияющих на выбор цен застройщиком необходимо понимать, как устроен спрос на квартиры. Иными словами необходима соответствующая динамическая модель потребителя – потенциального покупателя жилья. Несмотря на то, что динамические модели потребительского выбора являются стандартным инструментом современной экономической теории (см., в частности, [2] –[6]), ни одна из них, насколько нам известно, не учитывают специфику принятия решений о покупке жилья.

Обычно предполагается, что потребитель покупает бесконечно делимые блага. В нашем случае необходимо учесть, что затраты на приобретаемое жилье не могут быть меньше определенных количеств, определяемых застройщиками, и что приобретаемое благо (купленная квартира) может оказаться доступным для потребления лишь по истечении определенного времени, а после приобретения дальнейшие покупки этого блага оказываются нецелесообразными. При этом ставки по кредитам больше ставок по депозитам. В момент получения готовой квартиры потребитель избавляется от необходимости платить за аренду квартиры, в которой он до этого проживал. В результате стратегия оптимального заимствования, выбираемая потребителем, оказывается нестандартной. Ниже предлагается и исследуется крайне упрощенная модель потребителя, которая, однако, учитывает отмеченные особенности. Опираясь на эту модель и на имеющиеся статистические данные по Москве, мы определяем ценовую стратегию фирмы при разных процентных ставках и разной стоимости аренды. Расчеты показывают, что оплачивать квартиру при низкой степени ее готовности (и, соответственно, при относительно низкой цене) предпочитают относительно бедные слои населения. При этом, чем ниже арендная ставка, тем выше оказывается цена недостроенных квартир и тем относительно меньшая доля потребителей предпочитает их покупку.

Следует отметить, что строительные фирмы, участвующие в системе эскроу счетов, внедрение которой началось в России в июле 2019 г., получают деньги, выплаченные покупателями, лишь по завершении строительства и таким образом вынуждены оплачивать всю его стоимость за счет кредита. Хотя кредитные ставки на разных этапах строительства могут несколько разниться, на практике это снижает заинтересованность фирм в дифференциации цен в зависимости от завершенности строительства[1].

Тем не менее, до сих пор лишь 58% договоров долевого строительства заключаются с использованием эскроу-счетов, в определенных случаях фирмы не обязаны ими пользоваться[2]. Следует учесть также, что внедряемая система проектного финансирования приводит к повышению цен[3]. Взамен снижаются риски потребителя. Естественно предполагать, что по мере улучшения качества институтов и, соответственно, снижения случаев недобросовестного поведения застройщиков, ставки по кредитам на продолжение строительства квартир, в

---

[1] См. https://iz.ru/1245059/2021-11-03/rieltory-sviazali-rost-tcen-na-novostroiki-s-perekhodom-na-eskrou-scheta

[2] См. https://asninfo.ru/analytics/1121-itogi-i-polugodiya-na-pervichnom-rynke-rossii-spros-sokratilsya-no-tseny-rastut, а также https://www.cbr.ru/banking_sector/equity_const_financing/

[3] См. https://iz.ru/1245059/2021-11-03/rieltory-sviazali-rost-tcen-na-novostroiki-s-perekhodom-na-eskrou-scheta, а также https://realty.rbc.ru/news/60f150f39a79470344220fa2

значительной мере уже оплаченных покупателями, будут существенно снижаться, так что стимулы к дифференциации цен будут восстановлены.

Данная работа структурирована следующим образом. Сначала будут введены основные предположения, лежащие в основе модели потребителя (раздел 2) и сформулирована соответствующая задача оптимизации (раздел 3). В разделе 4 описываются и исследуются оптимальные стратегии потребителей. Задача застройщика сформулирована в разделе 5 в предположении, что цена готовой квартиры фиксирована. Здесь же приведены ее численные решения при исходных данных, характерных для Москвы. В разделе 6 рассмотрен случай, когда застройщик-монополист назначает цены и на готовые, и на недостроенные квартиры.

2. Основные предположения модели потребителя

Предположим, что потребитель каждый период времени (положим за единицу измерения месяц) получает постоянный доход I. В начальный момент времени он имеет начальный запас средств S. Пока у него нет собственного жилья, он тратит каждый период A средств на аренду. В каждый момент времени он имеет возможность купить жильё стоимостью K, которое будет строиться Δ периодов. Будем считать, что время момента покупки квартиры T заранее задано, при этом сама квартира будет достроена в момент времени $T + \Delta$. .

В каждый момент времени агент принимает решение, как использовать имеющиеся у него средства w_t: часть c_t он использует для потребления, а оставшиеся средства s_t откладываются для накопления. Отложенные средства инвестируются под процент p на следующий период. Таким образом, бюджетное ограничение выглядит следующим образом:

$$c_t + s_{t+1} \leq w_t + s_t \,(1 + p),$$

где $s_0 = S$ --- начальные сбережения.

В нашей спецификации потребитель имеет возможность один раз взять кредит. В модели это задано следующим образом: отложенные средства s_t всегда неотрицательны. Но в один из моментов времени $T_{кр}$ потребитель может взять кредит в размере В на срок τ под ставку процента q. Кредит будет погашаться (вычитаться из дохода) аннуитетными платежами b. Переменные b и B выражаются друг через друга посредством формулы

$$\frac{(1+q)^{\tau}-1}{(1+q)^{\tau}\cdot q} b = B \,.$$

Для упрощения формул введём обозначение $Q = \frac{(1+q)^{\tau}-1}{(1+q)^{\tau}\cdot q}$.

Объём кредита должен быть неотрицательным. С другой стороны, банк может ограничивать объём кредита для потребителя. Будем считать, что ограничение сверху зависит от стоимости квартиры K и определяется параметром Λ:

$$0 \le Q \cdot b \le K \cdot \Lambda$$

Таким образом, приток средств w_t в момент времени t можно вычислить по формулам:

$$w_t = i_t - h_t$$

$$i_t = \begin{cases} I - A,\ 0 \le t \le T + \varDelta, t \ne T \\ I - A - K,\ t = T \\ I, t > T + \varDelta \end{cases}$$

$$h_t = \begin{cases} -\dfrac{(1+q)^{\tau}-1}{(1+q)^{\tau}\cdot q} b\ ,\ \ t = T_{\text{кр}} \\ b,\ T_{\text{кр}} < t \le T_{\text{кр}} + \tau \\ 0, t < T_{\text{кр}}, t > T_{\text{кр}} + \tau \end{cases}$$

Функция полезности потребителя описывается формулой

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t \cdot u(c_t)\ ,$$

где $\lambda = \frac{1}{1+\delta}$ – коэффициент дисконтирования, δ – норма дисконтирования, u - функция полезности. В наших расчётах будем использовать логарифмическую функцию полезности: $u(x) = \ln x$.

Введём следующие ограничения на норму доходности p и норму дисконтирования δ. Если $p > \delta$, то потребителю выгоднее вкладывать средства, чем потреблять, что приводит к росту откладываемых средств. Так как наша основная цель – поставить потребителя в условие, когда ему необходимо покупать квартиру, мы будем предполагать, что $p < \delta$ (или, что равносильно, $\lambda(1+p) < 1$). Также естественно предположить, что кредит брать невыгодно, то есть на ставку по кредиту q введены ограничения $q > p, \lambda\,(1+q) > 1$.

В первую очередь опишем задачу максимизации функции полезности.

3. Задача максимизации функции полезности потребителя

Потребитель стремится максимизировать функцию полезности при заданных параметрах S (изначальный запас), I(доход), A(стоимость аренды жилья), p(ставка по взносу), δ (норма дисконтирования), q (ставка по кредиту), T (время покупки квартиры), τ (срок кредитования), Λ (отношение стоимости квартиры к максимально возможному объёму кредита).

При этом застройщик предлагает несколько вариантов покупки квартиры. Каждый вариант задаётся парой (K, Δ), где K - стоимость квартиры, Δ - время от момента покупки до окончания строительства. То есть, застройщик предлагает покупать квартиру на разных этапах ее готовности: чем меньше Δ, тем больше K. Тогда потребитель имеет выбор, какую квартиру покупать. Фирме важно понять, как этот выбор зависит от дохода I, чтобы выбрать оптимальное множество покупателей. При этом у потребителя есть возможность не покупать квартиру вообще.

Будем рассматривать следующую задачу потребителя , зависящую от заданных значений (K, Δ).

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t \ln(c_t) \to max,$$

$$c_t + s_{t+1} \leq w_t + s_t\,(1+p), c_t \geq 0, s_t \geq 0,$$

$$w_t = i_t - h_t$$

$$i_t = \begin{cases} I - A,\ 0 \leq t \leq T + \Delta, t \neq T \\ I - A - K,\ t = T \\ I, t > T + \Delta \end{cases}$$

$$h_t = \begin{cases} -Q \cdot b\ ,\ t = T_{\text{кр}} \\ b,\ T_{\text{кр}} < t \leq T_{\text{кр}} + \tau \\ 0, t < T_{\text{кр}}, t > T_{\text{кр}} + \tau \end{cases}$$

$$0 \leq Q \cdot b \leq K \cdot \Lambda$$

Потребитель оптимизирует параметры c_t, s_t, b и выбирает время кредитования $T_{\text{кр}}$.

Решаем задачу стандартным образом. Условие $c_t \geq 0$ будет автоматически выполнено, так как логарифм не определен на отрицательных значениях переменной. Лагранжиан выглядит так:

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t \ln c_t + \alpha_t(w_t + s_t \cdot (1+p) - c_t - s_{t+1}) +$$
$$+\beta_t s_t + \gamma b + \hat{\gamma}(\Lambda \cdot K - Q \cdot b)$$

Условия Куна-Таккера:

$$\alpha_t \geq 0, \beta_t \geq 0, \gamma \geq 0, \hat{\gamma} \geq 0$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial c_t} = \frac{\lambda^t}{c_t} - \alpha_t \qquad (3.1)$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial s_{t+1}} = -\alpha_t + (1+p)\alpha_{t+1} + \beta_{t+1} \qquad (3.2)$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial b} = Q \cdot \alpha_{T_{\text{кр}}} - \alpha_{T_{\text{кр}}+1} - \dots - \alpha_{T_{\text{кр}}+\tau} + \gamma - \hat{\gamma} \cdot Q \quad (3.3)$$

Условия дополняющей нежёсткости:

$$\alpha_t(w_t + s_t \cdot (1+p) - c_t - s_{t+1}) = 0 \ (3.4)$$

$$\beta_t s_t = 0 \ \ (3.5)$$

$$\gamma b = 0$$

$$\hat{\gamma}(\Lambda \cdot K - Q \cdot b) = 0$$

Так как $c_t \geq 0$, из уравнения (3.1) следует, что $\alpha_t \neq 0$, и условие (3.4) превращается в равенство (3.6):

$$w_t + s_t \cdot (1+p) = c_t + s_{t+1} \qquad (3.6)$$

Лемма 1. Если $s_{t+1} > 0$, то $c_{t+1} = \lambda(1+p)c_t$.

Доказательство

Если $s_{t+1} > 0$, то из условия дополняющей нежёсткости (3.5) следует, что $\beta_{t+1} = 0$. В этом случае из уравнения (3.2) получаем, что $\alpha_t = (1+p)\alpha_{t+1}$, если $\beta_{t+1} = 0$.

Подставляя это выражение в равенство (3.1), получаем:

$$\frac{\lambda^t}{c_t} = \alpha_t = (1+p)\alpha_{t+1} = (1+p)\frac{1}{c_{t+1}}\lambda^{t+1},$$

откуда $c_{t+1} = \lambda(1+p)c_t$.

4. Оптимальные стратегии потребителя

Из общих соображений ясно, что кредит имеет смысл брать только в момент покупки квартиры, поскольку ставка по кредиту больше ставки дисконта и ставки по отложенным средствам. Кроме того, надо следить за теми моментами времени, в которых $\beta_t > 0$. В этих случаях из условия дополняющей нежёсткости следует, что $s_t = 0$, а потребитель «переключается» на следующий промежуток времени, где его оптимальное потребление не связано с предыдущим отрезком. Ясно, что в первые моменты времени надо накапливать средства на квартиру (если мы её покупаем), а после покупки квартиры накапливать не нужно.

Теорема 1. У потребителя есть следующие возможные стратегии:

(1) Он не покупает квартиру. В этом случае он не использует кредит и не откладывает средства, $s_t = 0$ для всех t . Потребление равно доходу: $w_t = c_t$.

(2) Потребитель покупает квартиру и не использует кредит для покупки квартиры. Тогда он накапливает средства до момента покупки квартиры (начиная с некоторого момента времени): $0 = s_{t-1} < s_t < \cdots < s_T$. После момента T перестаёт накапливать средства, то есть $s_t = 0$ для всех $t > T$. Может использовать кредит для получения прибыли в момент времени $T + \Delta$

(3) Потребитель покупает квартиру и использует кредит для покупки квартиры. Тогда он накапливает средства до момента покупки квартиры (начиная с начального момента времени): $s_0 < s_1 < \cdots < s_T$. После момента T перестаёт накапливать средства, то есть $s_t = 0$ для всех $t > T$. Кредит берётся либо в момент покупки квартиры ($T_{кр} = T$), либо перед ним ($T_{кр} < T$), для последнего необходимо выполнение неравенства

$$\left(1 + \frac{b - b \cdot Q \cdot p}{I - A}\right) > \left(\frac{I}{I - b}\right)^{\lambda^\tau}$$

Сначала покажем, что после оплаты квартиры и при трате всех своих средств, потребитель перестаёт откладывать средства.

Утверждение 1. Предположим, что на интервале $[t, t')$ доход агента w_t монотонно неубывает: $w_{t+1} \geq w_t$ при $t \in [t, t')$. Тогда

(1) если $s_r \geq s_{r-1} > 0$ для $\mathrm{r} - 1 \geq t$, то s_t возрастает при $t \in [r, t' + 1]$.

(2) Если $t' = +\infty$, то найдётся такое $r > t$, для которого $s_r = 0$, и тогда $s_j = 0$ при $j \geq r$.

Доказательство

Докажем первое утверждение. Покажем, что $s_{r+1} > s_r$. Действительно,

$$s_{r+1} = w_r + s_r(1+p) - c_r = w_r + s_r(1+p) - c_{r-1}\lambda(1+p) >$$
$$> w_{r-1} + s_{r-1}(1+p) - c_{r-1} = s_r,$$

где неравенство следует из монотонности дохода, отложенных средств и неравенства $\lambda(1+p) < 1$.

По индукции получаем, что для любого $t \geq r$ выполнено неравенство $s_{t+1} \geq s_t$, откуда следует (1).

Покажем теперь, что для некоторого $r > t$ будет выполнено $s_r = 0$. Действительно, предположим противное, а именно, что s_r всегда положительно. По Лемме 1 и неравенству $\lambda(1+p) < 1$ последовательность c_j стремится к 0 при $j \to \infty$, а значит, начиная с некоторого момента времени r будет выполнено неравенство $w_j - c_j > 0$. Если мы увеличим потребление, сделав его равным w_j при $j \geq r$, от этого полезность потребителя увеличится. А, значит, исходный набор c_j был не оптимален.

Осталось показать, что для всех $t \geq r$ выполнено равенство $s_t = 0$. Предположим, что это не так, и $s_{r+1} > s_r = 0$. Тогда из бюджетного равенства $0 < s_{r+1} = w_r - c_r$, откуда $w_{r+1} - c_{r+1} > 0$ и по аналогичным рассуждениям, мы можем увеличить полезность потребителя, что означает, что данное поведение потребителя - не оптимально.

Теперь перейдём к обсуждению кредитования. В первую очередь проясним, когда выгодно и невыгодно брать кредит. А именно, докажем, что когда полезность монотонно невозрастает, то кредит брать не выгодно, и наоборот, если полезность увеличивается, то кредит надо брать. Начнём с вспомогательной Леммы 1.

Лемма 1. (1) Если $c_t \geq c_{t+1} \geq \cdots \geq c_{t+k}$, то потребителю невыгодно брать кредит на k периодов в момент времени t.
(2) Если $(\lambda(1+c))^j c_t < c_{t+j}$ для всех $j = 1, \dots, \tau$, то потребителю выгодно брать кредит на k периодов в момент времени t.

Доказательство. Рассмотрим, как меняется полезность в зависимости от того, берём ли мы кредит или не берём. Так как кредит рассчитывается по аннуитету, удобно разбить его на отдельные выплаты. А именно, будем считать, что мы занимаем D средств в момент времени t, и возвращаем через j периодов с процентами. Просуммировав такие займы при $j = 1, \dots, k$, мы получим исходный кредит.

Посмотрим, как изменится функция полезности при взятии кредита в зависимости от размера займа D. Обозначим это изменение через ΔU:

$$\Delta U = \ln(c_t + D) + \lambda^j \ln\left(c_{t+j} - D \cdot (1+q)^j\right) - \ln(c_t) - \lambda^j \ln(c_{t+j})$$

Производная по D данной функции равна:

$$\Delta U'_D = \frac{1}{c_t + D} - \frac{(\lambda(1+q))^j}{c_{t+j} - D(1+q)^j} > 0$$

$$c_{t+j} - D(1+q)^j - (c_t + D)(\lambda(1+q))^j > 0$$

$$c_{t+j} - c_t(\lambda(1+q))^j - D(1+\lambda)(1+q)^j > 0$$

При $c_t \geq c_{t+j}$ получаем, что выражение отрицательно, и функция монотонно убывает.

При $c_t < c_{t+j}$ получаем, что при $D = 0$ производная положительна, если $c_{t+j}/c_t > (\lambda(1+q))^j$. Отсюда достаточным условием для взятия кредита будет выполнение неравенств $(\lambda(1+c))^j c_t < c_{t+j}$ для всех $j = 1, \dots, k$.

Лемма 2. Если $s_{T_{\text{кр}}+1} > 0$ и $T \neq T_{\text{кр}}$, то потребителю выгоднее взять кредит в момент времени $T_{\text{кр}} + 1$, сократив при этом время кредита на 1 период.

Доказательство. Предположим, что $s_{T_{\text{кр}}+1} > 0$, и $T \neq T_{\text{кр}}$. Тогда $c_{T_{кр}+1} = \lambda(1+p)c_{T_{кр}}$, поэтому взятый кредит влияет только на накопленные средства. В этом случае можно отложить взятие кредита до следующего момента времени

$T_{кр} + 1$ (сократив при этом время кредита на 1 период), и получить выгоду. Действительно, в изначальном варианте бюджетное ограничение имело вид равенства (4.8), а после переноса кредита – (4.9).

$$c_{t+1} + s_{t+2} = w_{t+1} + s_{t+1}(1+p) \quad (4.8)$$

$$c_{t+1} + s_{t+2} = (w_{t+1} + b) + \left(s_{t+1} - \frac{(1+q)^{\tau}-1}{(1+q)^{\tau}\cdot q} b\right)(1+p) + b\left(\frac{(1+q)^{\tau-1}-1}{(1+q)^{\tau-1}\cdot q}\right) \quad (4.9)$$

Разность этих двух уравнений после преобразований сводится к неравенству $(1+q) > (1+p)$.

Утверждение 2. В случае, если потребитель не покупает квартиру, кредит брать невыгодно.

Доказательство Предположим, что это утверждение неверно, и потребитель не покупает квартиру и берёт кредит в момент $T_{кр}$. Если выполнено неравенство $s_{T_{кр}+1} > 0$, то по Лемме 2 кредит выгодно взять в момент времени $T_{кр} + 1$ с меньшим сроком кредита. Рассматривая моменты времени $T_{кр} + 1, T_{кр} + 2, \dots, T_{кр} + \tau$, и применяя Лемму 2, мы либо придём к выводу, что не брать кредит выгоднее, чем брать. Либо дойдём до момента, когда мы берём кредит в момент времени t_0 и $s_{t_0+1} = 0$.

В этом случае по Утверждению 1 во все следующие моменты времени потребление совпадает с доходом: $c_t = w_t = I - A$. При этом $c_{t_0} > I - A$ (иначе было бы выгоднее увеличить потребление в момент времени t_0. Следовательно, потребление монотонно невозрастает, и , согласно Лемме 1, невыгодно брать кредит.

Утверждение 3. В случае, если потребитель покупает квартиру, возможны следующие варианты:

(0) Кредит не берётся. В этом случае $s_{T+1} = 0$.

(1) $T < T_{\text{кр}} < T + \Delta$

В этом случае кредит берётся независимо от покупки квартиры.

(2) $T_{\text{кр}} < T$

Этот случай возможен, если либо $s_{T_{\text{кр}}} = 0$, либо выполнено неравенство

$$\left(1 + \frac{b - b\cdot Q\cdot p}{I-A}\right) > \left(\frac{I}{I-b}\right)^{\lambda^{\tau}}$$

(3) $T_{\text{кр}} = T$

Доказательство

Допустим, что квартира покупается, а кредит не берётся. Так как $s_0 = 0$, то $c_0 \le w_0$. Тогда в процессе накопления средств на квартиру потребление будет невозрастать, и поэтому $c_T < I - A$. Если $s_{T+1} > 0$, то $c_{T+1} = c_T \cdot \lambda(1+p) < c_T < I - A$. Но тогда можно увеличить полезность и взять $c_t = w_t$ при $t > T$. Следовательно, $s_{T+1} = 0$. По утверждению 1 потребитель не будет откладывать средства после момента времени $T + 1$.

Теперь предположим, что потребитель берёт кредит. Если $T_{кр} > T$, то все предыдущие рассуждения до момента $T + 1$ работают аналогично, а значит $s_{T+1} = 0$. В этом случае кредит берётся независимо от покупки квартиры. По Лемме 1 в этом случае $T_{кр} < T + \Delta$.

Рассмотрим случай $T_{кр} < T$. Так как $c_0 \ge c_1 \ge \dots \ge c_T$, и первое увеличение потребления происходит не раньше момента времени $T + 1$, скорее всего потребителю будет выгодно брать кредит позже. Приведём здесь пример расчётов, показывающих условия, при которых потребителю будет выгодно брать кредит позже.

Предположим, что потребитель берёт кредит в момент времени $T_{кр} < T$. Будем считать, что он находится на стадии накопления, то есть $s_{T_{кр}}, s_{T_{кр}+1} > 0$. Перенесём кредит в том же объёме на 1 период позже. Опишем старую и новую систему уравнений, для удобства будем отдельно записывать изменения, связанные с кредитом. Старая система:

$$
\begin{gathered}
c_{T_{\text{кр}}} + s_{T_{\text{кр}}+1} = w_{T_{\text{кр}}} + s_{T_{\text{кр}}}(1+p) + b \cdot Q \\
c_{T_{\text{кр}}+1} + s_{T_{\text{кр}}+2} = w_{T_{\text{кр}}+1} + s_{T_{\text{кр}}+1}(1+p) - b \\
c_{T_{\text{кр}}+2} + s_{T_{\text{кр}}+3} = w_{T_{\text{кр}}+2} + s_{T_{\text{кр}}+2}(1+p) - b \\
\dots \\
c_{T_{\text{кр}}+\tau} = w_{T_{\text{кр}}+\tau} - b
\end{gathered}
$$

Будем считать, что $T_{\text{кр}} + \tau > T + \Delta$ (так как обычно ипотечный кредит выдаётся на срок, гораздо больший, чем срок строительства квартиры). Новая система выглядит так:

$$
\begin{gathered}
c_{T_{\text{кр}}} + s_{T_{\text{кр}}+1} = w_{T_{\text{кр}}} + s_{T_{\text{кр}}}(1+p) \\
c_{T_{\text{кр}}+1} + s_{T_{\text{кр}}+2} = w_{T_{\text{кр}}+1} + s_{T_{\text{кр}}+1}(1+p) + b \cdot Q \\
c_{T_{\text{кр}}+2} + s_{T_{\text{кр}}+3} = w_{T_{\text{кр}}+2} + s_{T_{\text{кр}}+2}(1+p) - b \\
\dots
\end{gathered}
$$

$$c_{T_{\text{кр}}+\tau} = w_{T_{\text{кр}}+\tau} - b$$
$$c_{T_{\text{кр}}+\tau+1} = w_{T_{\text{кр}}+\tau+1} - b$$

Как мы видим, изменения происходят только в три момента времени: $T_{кр}, T_{кр+1}, T_{кр+\tau+1}$. Формально говоря, так как $s_{T_{кр}}, s_{T_{кр+1}} > 0$, то (по аналогии с Утверждением 2) кредит влияет только на откладываемые средства. Однако для упрощения сравнения новой и старой систем будем считать, что весь излишек от более позднего взятия кредита уходит в потребление в момент времени $T_{кр+1}$.

То есть в новой системе $c_{T_{кр}}, c_{T_{кр}+2}, \dots, c_{T_{кр}+\tau}$ такие же, как в старой, а к $c_{T_{кр}+1}$ добавляется $b \cdot Q - (b \cdot Q)(1+p) + b = b - b \cdot Q \cdot p$.

С другой стороны, в момент времени $T_{кр} + \tau + 1$ в новой системе потребление уменьшается на b. В итоге разница полезностей потребителей сводится к следующему неравенству

$$U_{(T_{кр+1})} - U_{(T_{кр})} > 0$$

$$\ln(c_{T_{\text{кр}+1}} + b - b \cdot Q \cdot p) + \lambda^\tau \ln(I - b) - \ln(c_{T_{\text{кр}+1}}) + \lambda^\tau \ln(I) > 0$$

$$\ln(1 + \frac{b - b \cdot Q \cdot p}{c_{T_{\text{кр}+1}}}) + \lambda^\tau \ln\left(\frac{I-b}{I}\right) > 0$$

$$\left(1 + \frac{b - b \cdot Q \cdot p}{c_{T_{\text{кр}+1}}}\right) > \left(\frac{I}{I-b}\right)^{\lambda^\tau}$$

Последнее неравенство следует из неравенства

$$\left(1 + \frac{b - b \cdot Q \cdot p}{I - A}\right) > \left(\frac{I}{I-b}\right)^{\lambda^\tau}$$

Если это неравенство выполнено, то взятие кредита не оптимально: можно сдвинуть взятие кредита на один период позже.

Найдём условия, которые определяют, какую из стратегий выберет потребитель.

Если потребитель не покупает квартиру, то его полезность равна

$$U_{(1)} = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t \ln c_t = \frac{1}{1-\lambda} \ln(I - A)$$

Теперь перейдём к ситуации, когда потребитель покупает квартиру. Согласно Теореме 1, существует минимальный момент времени T_{end} , в который мы перестаём откладывать средства, и в последующие моменты времени просто потребляем доход. Тогда оптимальное потребление c_0 определяется соотношением

$$0 = S_t = \frac{w_t - c_t}{(1+p)^t} + \frac{w_{t-1} - c_{t-1}}{(1+p)^{t-1}} + \dots + \frac{w_0 - c_0}{1}$$

и зависимостями

$$c_j = \lambda^j (1+p)^j c_0$$

Подставляя значения c_j в равенство выше, получаем:

$$c_0(1 + \dots + \lambda^t) = \frac{w_t}{(1+p)^t} + \frac{w_{t-1}}{(1+p)^{t-1}} + \dots + \frac{w_0}{1} \, (5.1)$$

Какие значения может принимать T_{end} ? Согласно Теореме 1, $T_{end} \geq T$. Рассмотрим следующие случаи:

<u>1-й случай.</u> $T_{end} = T$, кредит равен 0, то есть $b = 0$. Это самый простой случай: здесь c_0 определяется формулой:

$$c_0(1 + \dots + \lambda^T) = (I - A)\left(\frac{1}{(1+p)^T} + \frac{1}{(1+p)^{T-1}} + \dots + 1\right) - \frac{K}{(1+p)^T}$$

Полезность потребителя в этом случае задаётся формулой

$$U_{(2),t=T,b=0} = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t \ln c_t =$$

$$= \sum_{t=0}^{T} \lambda^t \ln(\lambda^t (1+p)^t c_0) + \sum_{t=T+1}^{T+\Delta} \lambda^t \ln(I - A) + \sum_{t=T+\Delta+1}^{\infty} \lambda^t \ln I$$

<u>2-й случай .</u> $T_{end} \geq T, b > 0$, то есть кредит не равен 0.

В данном случае формула (5.1) позволяет выразить c_0 через b:

$$c_0(1 + \dots + \lambda^T) =$$

$$= (I - A)\left(\frac{1}{(1+p)^T} + \frac{1}{(1+p)^{T-1}} + \dots + 1\right) - \frac{K}{(1+p)^T} + \frac{b}{(1+p)^T}\frac{(1+q)^\tau - 1}{(1+q)^\tau \cdot q},$$

Для b есть следующие возможности: либо $b = \frac{K}{2}$, либо b можно выразить через c_0 при помощи условия (4.3) оптимальности по переменной b.

Используя соотношение (4.1), условия $\gamma = \hat{\gamma} = 0$, получаем:

:

$$0 = \frac{(1+q)^\tau - 1}{(1+q)^\tau \cdot q}\alpha_{T_{\text{кр}}} - \alpha_{T_{\text{кр}}+1} - \dots - \alpha_{T_{\text{кр}}+\tau} =$$
$$= \frac{(1+q)^\tau - 1}{(1+q)^\tau \cdot q}\frac{\lambda^T}{c_T} - \frac{\lambda^{T+1}}{c_{T+1}} - \dots - \frac{\lambda^{T+\tau}}{c_{T+\tau}} =$$
$$= \frac{(1+q)^\tau - 1}{(1+q)^\tau \cdot q}\frac{1}{c_0(1+p)^T} - \frac{\lambda^{T+1}}{w_{T+1}} - \dots - \frac{\lambda^{T+\tau}}{w_{T+\tau}}$$

В зависимости от значения t мы сколько-то моментов времени будем потреблять $c_0(1+p)^j\lambda^j$, а потом будем потреблять целиком доход. А именно:

если $T \le T_{end} \le T + \Delta$, то соотношение (4.3) переписывается так:

$$\frac{1}{c_0}\left(\frac{(1+q)^\tau - 1}{(1+q)^\tau \cdot q}\frac{1}{(1+p)^T} + \frac{1}{(1+p)^{T+1}} + \dots + \frac{1}{(1+p)^{T_{end}}}\right) =$$
$$= \frac{\lambda^{T_{end}+1} + \dots + \lambda^{T+\Delta}}{I - A - b} + \frac{\lambda^{T+\Delta+1} + \dots + \lambda^{T+\tau}}{I - b},$$

если $T + \Delta \le t \le T + \tau$, то так:

$$\frac{1}{c_0}\left(\frac{(1+q)^\tau - 1}{(1+q)^\tau \cdot q}\frac{1}{(1+p)^T} + \frac{1}{(1+p)^{T+1}} + \dots + \frac{1}{(1+p)^{T_{end}}}\right)$$
$$= \frac{\lambda^{T_{end}+1} + \dots + \lambda^{T+\tau}}{I - b}$$

Имея две зависимости между c_0 и b, находим c_0. Полезность потребителя находится по формуле:

$$U_{(2),t=T,\frac{K}{2}>b>0} = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t \ln c_t =$$

$$= \sum_{t=0}^{T_{end}} \lambda^t \ln(\lambda^t (1+p)^t c_0) + \sum_{t=T_{end}+1}^{T+\Delta} \lambda^t \ln(I - A - b) +$$

$$+ \sum_{t=\max(T+\Delta+1, T_{end}+1)}^{T+\tau} \lambda^t \ln(I - b) + \sum_{t=T+\tau+1}^{\infty} \lambda^t \ln I$$

5. Задача застройщика

В конце раздела 4 приведено решение оптимизационной задачи потребителя. Посмотрим на задачу с точки зрения застройщика. Имеется поток потребителей, которые распределены по уровню дохода. Застройщик устанавливает цены на разных сроках строительства (скажем, в конце или в середине и в конце). Каждый потребитель выбирает, выгодно ли ему покупать квартиру и на каком сроке это наиболее выгодно сделать. Таким образом, в зависимости от стоимости квартиры мы получаем распределение потребителей по тому, какие квартиры они будут покупать. Соответственно, цель застройщика – подобрать цены таким образом, чтобы максимизировать свою прибыль.

Если доход застройщика можно вычислить как выручку от продажи квартир, то расходы, вообще говоря, состоят из нескольких разных затрат. Сюда включаются затраты на строительство, выплаты по кредиту на строительство, налоговые вычеты, операционные и коммерческие расходы. Мы будем рассматривать упрощённую модель, в которой учитываются только затраты на строительство и выплаты по кредиту.

Будем считать, что изначально задана стоимость готовой квартиры K_0 (0 здесь означает, что квартира уже готова, то есть будет построена через 0 лет). Предположим, что затраты на строительство квартиры M_{str} без учёта кредита составляют фиксированную долю v от стоимости K_0:

$$M_{str} = K_0 \cdot v$$

Тогда совокупные затраты на строительство составят $M_{str} \cdot \alpha_0 = K_0 \cdot \alpha_0 \cdot v$. Предполагая, что квартира строится N лет[4], а строительный кредит выдаётся под c_{str} процентов, получаем, что суммарные затраты на кредит и строительство можно найти по формуле:

$$K_0 \cdot \alpha_0 \cdot v \cdot (1 + c_{str})^N$$

[4] В расчётах полагалось $v = 0{,}8;\ N = 2$

Соответственно, прибыль $U_{str,0}$ застройщика вычисляется по формуле

$$U_{str,0} = K_0 \cdot \alpha_0 \cdot (1 - v \cdot (1 + c_{str})^N)$$

Рассмотрим другую схему реализации квартир застройщиком. Он может продавать часть квартир в недостроенном доме по другой цене. А именно, обозначим через K_1 стоимость квартиры, которая будет построена через год. Будем считать, что все ставки (p, λ, q), стоимость аренды квартиры A, время покупки квартиры T, срок кредитования τ фиксированы[5]. Меняется только уровень дохода I. Для каждого значения I можно решить задачу оптимизации из предыдущего раздела и понять, как будет действовать потребитель.

Предположим, что застройщик выбрал стоимость K_1 ниже, чем K_0. После этого некоторые из тех, кто покупал уже готовую квартиру по цене K_0 , могут захотеть покупать ещё не готовую квартиру. В то же время, могут найтись новые покупатели, а именно покупатели с более низким доходом I, для которых квартиру по цене K_0 было невыгодно покупать, но которые смогут купить недостроенную квартиру по цене K_1.

Почему застройщику может быть это выгодно? Поскольку K_1 ниже, чем K_0, он получит меньше чистой прибыли. Но и затрат на кредит будет меньше, поскольку часть кредита можно будет брать на год меньше. Предположим, что β_0, β_1 – это количество квартир, проданных по цене K_0 и K_1 соответственно (учитывая, что есть квартиру можно купить на год раньше). Тогда чистая прибыль застройщика $U_{str,01}$ составит

$$U_{str,01} = \beta_0 \cdot K_0 + \beta_1 \cdot K_1 - K_0 \cdot v \cdot (\beta_0 + \beta_1) -$$
$$-\beta_0 \cdot K_0 \cdot v \cdot ((1 + c_{str})^N - 1) - \beta_1 \cdot K_0 \cdot v \cdot ((1 + c_{str})^{N-1} - 1),$$

где $\beta_0 \cdot K_0 + \beta_1 \cdot K_1$ - выручка от продажи квартир, $K_0 \cdot v \cdot (\beta_0 + \beta_1)$- затраты на строительство, $\beta_0 \cdot K_0 \cdot v \cdot ((1 + c_{str})^N - 1)$ и
$\beta_1 \cdot K_0 \cdot v \cdot ((1 + c_{str})^{N-1} - 1)$ – выплаты по кредиту.

Осталось понять, как определить количество проданных квартир $\alpha_0, \beta_0, \beta_1$. Здесь мы предполагаем, что это количество пропорционально доле населения, для которой покупка квартиры на данном этапе строительства является оптимальной относительно уровня дохода потребителя. Тогда расчёт можно провести следующим образом. Исходя из оптимизационной задачи потребителя и данных K_0 *или* K_0, K_1 определим множества значений дохода $\Theta_{-1}, \Theta_0, \Theta_1$ при которых, соответственно, потребитель не покупает квартиру,

[5] Будем считать, что p, λ, q рассчитываются, исходя из годовых ставок в 4%,5% и 12% соответственно. Время покупки квартиры – через 5 лет, то есть $T = 60$, кредит выдаётся на 10 лет, то есть $\tau = 120$..

покупает готовую квартиру или квартиру за год до конца строительства. Если f - функция распределения потребителей по величине допустимого семейного платежа, то $\alpha_0, \beta_0, \beta_1$ можно оценить как значения $f(\Theta_0), f(\Theta_1)$.

Приведём пример расчётов на основе данных по г. Москве. Расчёт функции распределения приведён в таблице 1. Используя данные по среднему, медианному X_{med} и модальному X_{mod} уровню денежных доходов населения по Москве (см. [10]), вычисляем среднее μ и среднеквадратическое отклонение σ по следующим формулам:

$$\mu = \ln(X_{med}),\ \sigma^2 = \ln X_{med} - \ln X_{mod}$$

.

Таблица 1. Эмпирическое и расчётное распределение населения по величине среднедушевых денежных доходов

	Доля населения, согласно статистике[6], %	*Эмпирическое значение функции распределения населения по величине среднедушевых денежных доходов*	*Расчётная функция распределения населения по величине среднедушевых денежных доходов*
до 7 000,0	0,4	0,004	0,004
от 7 000,1 до 10 000,0	1,0	0,014	0,014
от 10 000,1 до 14 000,0	2,4	0,038	0,038
от 14 000,1 до 19 000,0	4,6	0,084	0,084
от 19 000,1 до 27 000,0	9,4	0,178	0,178
от 27 000,1 до 45 000,0	21,9	0,397	0,397
от 45 000,1 до 60 000,0	14,8	0,545	0,545
свыше 60 000,0	45,5	1	1

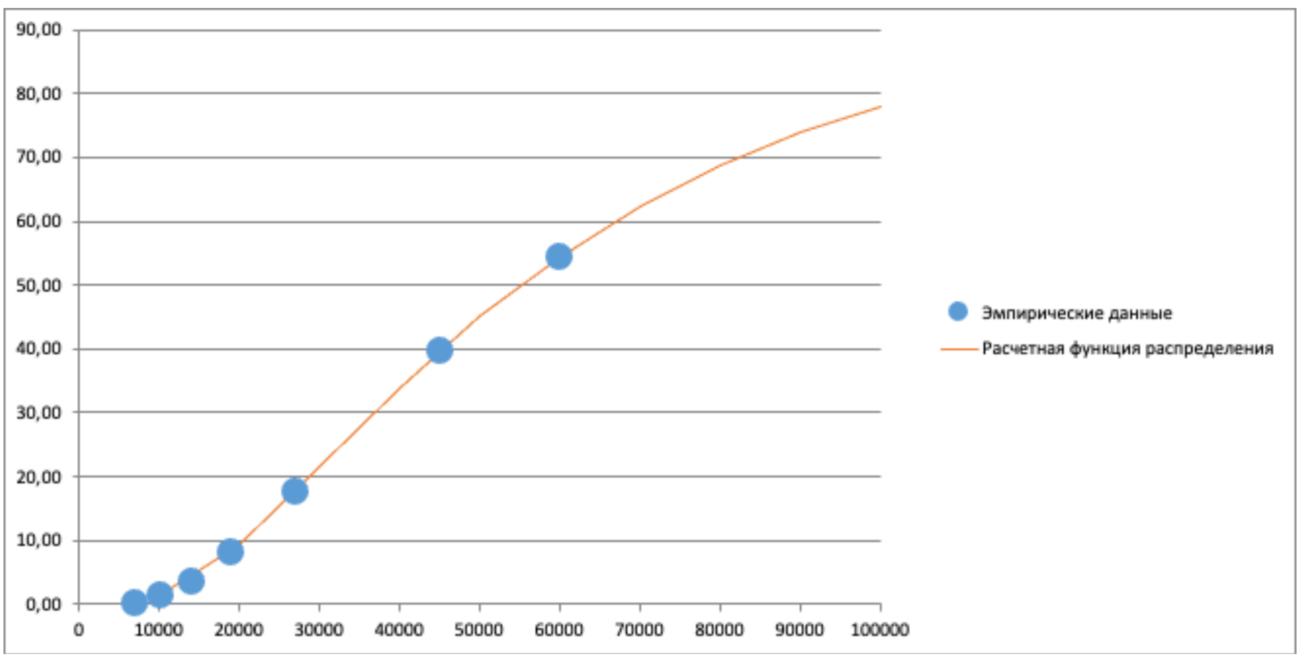
[6] Расчёты сделаны на основе материалов [8]

Далее проверяем, что параметры подобранного распределения согласованы с данными по доходам в г. Москве за 2019-20 годы (первый столбец таблицы 1). Значения построенной функции распределения приведены в столбце 3, для сравнения приведены значения эмпирической функции распределения. На рисунке 1 приведена кривая распределения.

Доход потребителя соответствует уровню его семейных доходов. Среднее число членов семьи полагаем не зависящим от дохода и равным 2,7. Таким образом, итоговая функция распределения f определяется равенством $f(x) = F\left(\frac{x}{2,7}\right)$.

Стоимость однокомнатной квартиры и аренда однокомнатной квартиры возьмём из реальных данных (см. [7]): квартира стоит 6 500 000 р., аренда – 36000 р. На основе данного распределения и параметров решим задачу оптимизации для застройщика.

Рисунок 1. График расчётной функции распределения и эмпирические данные.



Для решения задачи используется следующий алгоритм. Имея стоимость однокомнатной квартиры K_0, выбираем минимальное, максимальное и оптимальное начальные значения K_1:

$$(K_1)_{min} = 0, (K_1)_{max} = 10\,000\,000, (K_1)_{opt} = \frac{1}{2}((K_1)_{min} + (K_1)_{max})$$

Итерация алгоритма устроена следующим образом. Сначала для значения K_0 проверяется, какое значение цены K_1 приносит максимальный выигрыш застройщика: $(K_1)_{min}, (K_1)_{opt}$ *или* $(K_1)_{max}$ (для данной тройки $(K_1)_{opt}$ является серединой отрезка $[(K_1)_{min}, (K_1)_{max}])$. Если это крайние точки $(K_1)_{min}$ *или* $(K_1)_{max}$, то отрезок $[(K_1)_{min}, (K_1)_{max}]$ заменяется на левую или правую половину отрезка, соответственно, а новое значение $(K_1)_{opt}$ становится равным середине нового отрезка. Если максимальный доход приносит $(K_1)_{opt}$, то новый отрезок берётся с той же серединой, но его длина уменьшается в два раза: $[\frac{1}{2}((K_1)_{min} + (K_1)_{opt}, \frac{1}{2}((K_1)_{opt} + (K_1)_{max})]$.

Далее, для каждого набора значений K_1, K_0 рассчитывается выигрыш застройщика. Для этого надо понять оптимальное поведение потребителя при данных значениях K_1, K_0. Обозначим через $g(I, K_0, K_1)$ функцию, которая, применяя формулы оптимального потребления из разделов 2-4, вычисляет, какое поведение для потребителя оптимально:

$$g(I, K_0, K_1) = \begin{cases} 0, \textit{если потребитель покупает готовую квартиру по цене } K_0 \\ 1, \textit{если потребитеь покупает недостроенную квартир по цене } K_1 \\ -1, \textit{ если потребитель не покупает квартиру} \end{cases}$$

Множества значений дохода $\Theta_{-1}, \Theta_0, \Theta_1$ по которым вычисляются параметры $\alpha_0, \beta_0, \beta_1$, определяющие выигрыш застройщика, можно найти как меру значений дохода, при которых g принимает соответствующие значения:

$$\Theta_j = \{x \in [0, \infty] \mid g(x, K_0, K_1) = j\}$$

Вообще говоря, естественно предположить, что функция $g(I, K_0, K_1)$ монотонна по I: при маленьких значениях I нам невыгодно покупать квартиру, при средних значениях – выгоднее всего покупает ещё не построенную квартиру, а при больших – покупать готовую квартиру. В этом случае достаточно найти переходные значения $x_{-1,1}$ и $x_{1,0}$, и тогда $\Theta_{-1} = [0, x_{-1,1}], \Theta_1 = [x_{-1,1}, x_{1,0}], \Theta_0 = [x_{1,0}, +\infty]$. В расчётах так и получается, но алгоритм проверяет (с достаточно большой точностью), что это действительно так.

Алгоритм устроен следующим образом. В начале задан некоторый набор значений доходов (в базовом расчёте 0 и 400000). На каждом шаге алгоритм, имея массив значений доходов $x_1 < x_2 < x_3 <..< x_k$ и значения функции $g(x_i, K_0, K_1)$ для каждой пары соседних значений x_i, x_{i+1} проделывает следующую операцию. Берётся середина y отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, и для неё вычисляется функция $g(y, K_0, K_1)$. Если $g(y, K_0, K_1) = g(x_i, K_0, K_1)$, то x_i заменяется на y. Если $g(y, K_0, K_1) = g(x_{i+1}, K_0, K_1)$, то x_{i+1} заменяется на y. Если значение $g(y, K_0, K_1)$ отличается от значениях на краях отрезка, то в массив значений добавляется новая точка y.

Проведя достаточное количество итераций, В результате действия этого алгоритма появляется список значений доходов, которые близки к “переходным”, то есть к таким, при которых потребитель переключается с одного оптимального состояния на другое. Отсюда мы находим $\Theta_{-1}, \Theta_0, \Theta_1$.

Таблица 2. Чистая прибыль застройщика в зависимости от ставки по кредиту.

Ставка по кредиту на строительство (в процентах)	5,5	6	6,3	7	7,5
Чистая прибыль застройщика	43 790 545	40 409 745	38 373 593	33 600 192	30 171 437
Стоимость квартиры K_0 (р.)	6 500 000	6 500 000	6 500 000	6 500 000	6 500 000
Диапазон доходов семьи, которым оптимально покупать квартиру K_0 (р./месяц)	Более 118 432	Более 132 250	Более 146 899	Более 297 924	Более 297 924
Доля населения, которым оптимально покупать квартиру K_0 (%)	56,4	56,0	50,5	18,3	18,3
Стоимость квартиры K_1 (р.)	6 195 312	6 163 309	6 156 638	6 152 875	6 152 875
Диапазон доходов семьи, которым оптимально покупать квартиру K_1 (р./месяц)	От 118 383 До 131 030	От 117 407 До 132 250	От 117 211 До 146 899	От 117 114 До 297 924	От 117 114 До 297 924
Доля населения, которым оптимально покупать квартиру K_1 (%)	5,1	5,9	11,5	43,7	43,7
Чистая прибыль застройщика при продаже только готовых квартир	43 930 955	40 696 945	38 787 659	35 789 707	33 629 446
Преимущество по сравнению с продажей только готовых квартир (%)	0,03	0,7	1,0	6,5	11,4

Положим теперь базовую стоимость аренды в месяц равной 36000 р.

и базовую ставку по кредиту для застройщика равной 7%. Проведём расчёты, отдельно меняя ставку по кредиту, и отдельно меняя аренду в месяц. Результаты приведены в таблицах 2,3 и 4.

Если застройщик продаёт только построенные квартиры, то 61,2% населения покупают данные квартиры. В таблице 2 показано, как меняется распределение потребителей, если застройщик начинает продавать частично построенные квартиры при разных ставках по кредиту. При ставке по кредиту, равной 4%, выигрыш застройщика незначителен, и равен 0,03%. С увеличением ставки доля потребителей, покупающих недостроенную квартиру увеличивается, при этом увеличивается и выигрыш застройщика (на 7% он достигает значения 6,5%). При этом резкий отток потребителей с уже построенных квартир на недостроенные происходит между ставками в 6 и 7 процентов. При дальнейшем увеличении ставки количество потребителей не меняется, меняется только относительный выигрыш.

В следующих двух таблицах ставка по кредиту для застройщика фиксирована на уровне 7% и показано поведение застройщика при разных значениях арендной ставки.

Таблица 3. Чистая прибыль застройщика при продаже только построенных квартир в зависимости от аренды.

Стоимость аренды (р./месяц)	32000	34000	36000	38000
Чистая прибыль застройщика	31 448 633	32 564 291	33 600 192	34 399 395
Стоимость квартиры K_0 (р.)	6 500 000	6 500 000	6 500 000	6 500 000
Диапазон доходов семьи, которым оптимально покупать квартиру K_0 (р./месяц)	Более 128 247	Более 123 168	Более 118 579	Более 115 112
Доля населения, которым оптимально покупать квартиру K_0 (%)	57,5	59,6	61,4	62,9

Таблица 4. Чистая прибыль застройщика при продаже двух типов квартир в зависимости от аренды.

Стоимость аренды (р./месяц)	32000	34000	36000	38000

Чистая прибыль застройщика	34 609 091	35 789 707	35 789 707	35 772 838
Стоимость квартиры K_0 (р.)	6 500 000	6 500 000	6 500 000	6 500 000
Диапазон доходов семьи, которым оптимально покупать квартиру K_0 (р./месяц)	Более 282 983	Более 289 428	Более 297 924	Более 306 323
Доля населения, которым оптимально покупать квартиру K_0 (%)	20,1	19,3	18,3	17,3
Стоимость квартиры K_1 (р.)	6 192 127	6 173 854	6 152 875	6 131 829
Диапазон доходов семьи, которым оптимально покупать квартиру K_1 (р./месяц)	От 127 807 До 282 983	От 121 948 До 289 428	От 117 114 До 297 924	От 113 452 До 306 323
Доля населения, которым оптимально покупать квартиру K_1 (%)	37,5	40,7	43,7	46,2
Преимущество по сравнению с продажей только готовых квартир (%)	10,0	8,7	6,5	3,9

Во всех случаях застройщику выгодно продавать недостроенные квартиры. Оплачивать квартиру при низкой степени ее готовности предпочитают относительно бедные слои населения. При этом, чем ниже арендная ставка, тем выше оказывается цена недостроенных квартир и тем относительно меньшая доля потребителей предпочитает их покупку. Вместе с тем прибыль застройщика уменьшается с увеличением стоимости аренды.

Если посмотреть на те же данные при кредитной ставке 4%, то выигрыш застройщика совсем незначительный, и уменьшается от 0,03% до 0,02%.

6. Случай монопольной фирмы

Используя данную модель, также можно анализировать поведение застройщика-монополиста в отдельном районе. Рассмотрим следующий способ расчёта. Будем считать, что фирма-застройщик сама устанавливает цены на квартиры K_0 и K_1, а затраты на строительство M_{str} фиксированы, и считаются из общих данных (см. предыдущий раздел).

Если фирма задала значения цен K_0 и K_1, то при помощи следующего алгоритма можно рассчитать, сколько и каких квартир будет продано. Каждый потребитель, в зависимости от уровня дохода, оптимизирует своё потребление (используя модель, описанную в разделах 2-4), и выбирает, покупать ли ему готовую квартиру, квартиру, которая будет построена через год, или вообще отказаться от покупки. Отсюда получается распределение потребителей по уровню дохода: потребители с доходом, меньше чем I_0, не покупают квартиру, с доходом, от I_0 до I_1 покупают квартиру, которая будет построена через год, а потребители с доходом больше I_1 покупают готовую квартиру[7].

Для расчёта количества продаваемых квартир используется следующий подход. Будем считать, что при стандартной цене 6 500 000 р. продаётся фиксированное количество квартир h[8]. Вычислим долю α^* населения, которой было бы выгодно покупать квартиру за 6 500 000. Так как такая квартира выгодна лишь части населения, то потенциальный объём спроса будет больше. Считая, что спрос пропорционален α^*, получаем, что потенциальный объём спроса на квартиры можно оценить как $\frac{h}{\alpha^*}$.

При новых ценах K_0 и K_1 найдём долю населения α_0, которые будут покупать готовую квартиру и долю населения α_1, которые будут покупать недостроенную квартиру, используя функцию распределения. Тогда количества β_0, β_1 квартир оценивается как соответствующая доля от потенциального объёма спроса:

$$\beta_0 = \alpha_0 \cdot \left(\frac{h}{\alpha^*}\right) = \frac{\alpha_0}{\alpha^*} \cdot h, \beta_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha^*} \cdot h$$

Зная количество проданных квартир, оценим выигрыш застройщика по формуле из предыдущего раздела.

$$U_{str,01}(K_0, K_1) = \beta_0 \cdot K_0 + \beta_1 \cdot K_1 - M_{str} \cdot (\beta_0 + \beta_1) -$$
$$-\beta_0 \cdot M_{str} \cdot ((1 + c_{str})^N - 1) - \beta_1 \cdot M_{str} \cdot ((1 + c_{str})^{N-1} - 1),$$

Решая задачу максимизации $U_{str,01}(K_0, K_1)$ по K_0, K_1, мы находим количество проданных квартир β_0 и β_1, откуда можем оценить спрос на данные квартиры.

Оценим количество проданных квартир. Результаты приведены в Таблице 5.

[7] В расчётах получается, что с ростом дохода тем потребитель предпочитает покупать квартиру большей степени готовности. Эта зависимость выглядит естественной , но теоретического доказательства этого факта пока нет.

[8] В расчётах мы оцениваем количество продаваемых квартир в 4000 (см [9])

Таблица 5. Расчёт спроса на квартиры

	Готовые квартиры	Недостроенные квартиры
Стоимость квартиры (р.)	11 985 123	8 993 880
Доля населения, которым оптимально покупать квартиру(%)	2,36	27,2
Количество проданных квартир	153,38	1768,48

При этом прибыль монополиста существенно увеличивается: с 2 186 089 272 р. при продаже квартир по 6 500 000 до 6 990 800 017 р. при новой системе продаж квартир. Как и следовало ожидать, монополизация приводит к существенному сокращению числа продаваемых квартир и увеличению цен. При этом монополист выбирает цены так, чтобы перераспределить спрос в пользу недостроенных квартир, сокращая при этом расходы на кредит.

7. Заключение

В данной работе проведен анализ взаимодействия между покупателем квартиры и застройщиком. Решена оптимизационная задача для потребителя, и используя эту информацию, застройщик может выбрать наилучшую стоимость продаж квартиры. Результаты показывают, что застройщик получает преимущество, используя данную систему.

Предложенная модель может быть использована как застройщиком для оптимизации прибыли, так и банком, осуществляющим выдачу ипотечных кредитов и кредитов на строительство.

Имеется ряд важных как в теоретическом, так и в прикладном плане, направлений для улучшения данной модели.

1) Учёт затрат застройщика на строительство. В частности важно понимать, как структурно выглядят его затраты (на какой этап строительства сколько средств уходит).
2) Включение в модель банка, который выдаёт ипотечные кредиты потребителям, и выдаёт кредит застройщику, если последнему не хватает средств на очередном этапе строительства.
3) Рассмотрение варианта модели, при котором у потребителя разные ставки по вкладам и кредитам, и он может брать кредит больше одного раза.
4) Интегрирование данной модели с моделями ссудо-сберегательных тарифных планов для потребителей, которые используют данные планы для покупки квартиры.

Литература

1. *Финансирование долевого строительства* [Электронный ресурс] Режим доступа: https://www.cbr.ru/banking_sector/equity_const_financing/ свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: февраль 2021 года)

2. Bagliano, F.C. Bertola, G.M. (2007) *Models for Dynamic Macroeconomics.* Oxford University Press, USA

3. Deaton, A. (1991) *Saving and Liquidity Constraints* Econometrica, 59, 1221–1248.

4. Dixit, A. K. (1990) *Optimization in Economic Theory*, 2nd edn, Oxford: Oxford University Press.

5. Jappelli, T. and M. Pagano (1994) *Saving, Growth and Liquidity Constraints*, Quarterly Journal of Economics, 108, 83–109.

6. Chah, Eun Young, Valerie A. Ramey, and Ross M. Starr. (1995) *Liquidity Constraints and Intertemporal Consumer Optimization: Theory and Evidence from Durable Goods* Journal of Money, Credit and Banking, 27(1): 272–287.

7. *Цены на продажу и аренду квартир Москва* [Электронный ресурс] Режим доступа: https://www.domofond.ru/tseny-na-nedvizhimost/moskovskaya_oblast/moskva-c3584 ,свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: июнь 2021 года)

8. Распределение населения г. Москвы по уровню среднедушевых денежных доходов за 2019 год [Электронный ресурс] Режим доступа: https://mosstat.gks.ru/folder/64641 свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: июнь 2021 года)

9. За год в Москве продано меньше четверти новостроек от всего предложения [Электронный ресурс] Режим доступа: https://www.vedomosti.ru/realty/articles/2017/03/13/680890-moskve-prodano-novostroek ,свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: июнь 2021 года)
10. Средний, медианный и модальный уровень денежных доходов населения в целом по России и по субъектам Российской Федерации [Электронный ресурс]

Режим доступа: https://www.gks.ru/free_doc/new_site/population/bednost/tabl/tab-bed1-2-6.htm свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: июнь 2021 года).

To the theory of housing markets: a model of differentiation of prices for apartments depending on their readiness

D.G. Ilyinsky,

CEMI RAS, MIPT, Moscow

V.M. Polterovich,

CEMI RAS, MSE MSU, Moscow

Abstract

We propose a model of a firm that differentiates prices for finished and unfinished housing. The demand for housing is formed by consumers solving a dynamic utility maximization problem. The proposed formulation of this problem takes into account the fact that the purchased apartment may be available for consumption only after a certain time. In this case, at the moment of receiving the ready-made apartment the consumer gets rid of the need to pay the rent for the apartment in which he previously lived. Numerical calculations based on the data typical for the Moscow housing market have shown that relatively poor segments of the population prefer to pay for the apartment when it is not ready. At the same time the lower the rent rate, the higher the price of unfinished apartments and the relatively lower the share of consumers who prefer to buy them.

Keywords: price of unfinished apartment, housing rent, loan rate, developer's profit
JEL Classification: D02, D14, G21