Designing technological trajectories of production in the phase space of states

,

National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"

10 February 2016

УДК 658.51.012

О.М.Пигнастый, докт. техн. наук, проф.

Национальный технический университет
"Харьковский политехнический институт",
г.Харьков, Украина

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ ПРОИЗВОДСТВА ИЗДЕЛИЙ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Цель. Разработка аналитических методов проектирования технологических траекторий движения предметов труда в пространстве состояний с целью построения замкнутых PDE-моделей, применяемых для описания производственных систем.

Методика. Для вывода уравнения движения предмета труда в фазовом пространстве состояний использован математический аппарат и методы аналитической механики, вариационного исчисления.

Результаты. Получено уравнение движения предмета труда в пространстве состояний и рассмотрены интегралы движения, связанные с однородностью времени и пространства состояний.

Научная новизна. Научная новизна полученных результатов заключается в совершенствовании PDE-моделей производственных систем, используемых для проектирования высокоэффективных систем управления производством. Предложена модель переноса технологических ресурсов на предмет труда, основанная не на традиционном феноменологическом описании стационарных производственных явлений, а на законах сохранения, характеризующих процесс переноса технологических ресурсов на предмет труда и пространственно-временной структуре производственного процесса. Это позволило получить уравнения движения предметов труда по технологическому маршруту с последующим построением на их основе нестационарных уравнений PDE моделей для описания состояния параметров производственного процесса. При выводе уравнения технологической траектории движения предмета труда учтены дифференциальные связи, накладываемые производственной системой на процесс переноса технологических ресурсов на предметы труда в результате взаимодействия их с технологическим оборудованием и между собой при переходе от одной технологической операции к другой.

Практическая значимость. Заключается в том, что методы построения уравнения технологической траектории предмета труда позволяют разработать высокоточные модели переходных процессов производственной системы, которые являются основой для проектирования высокоэффективных систем управления предприятием с поточным методом организации производства

Ключевые слова: предмет труда, технологический процесс, технологическая траектория, PDE-модель

Постановка проблемы. Процесс проектирования технологии производства изделия представляет собой поиск технологических траекторий для параметров предметов труда, определяющих процесс его изготовления в соответствии с конструкторской и технологической документацией [1]. Траектория, содержащая точки со значениями непрерывно меняющихся нормированных параметров [1] предметов труда в соответствии с заданной технологией производства, является нормативной технологической траекторией изготовления продукции (рис.1), [2]. Технологические траектории, определяющее изменение параметров предметов труда являются допустимыми (вне зоны брака), если отклонения параметров находятся в пределах технологических допусков. Выбор нормативной технологической траектории, соответствующей заданному способу производства, определяется как технико-экономическими факторами производства, характеризующими себестоимость, производственный цикл и объемы выпуска, так и социальными факторами производства. Каждая операция характеризуется оборудованием, требуемой квалификацией персонала, нормами потребления и законом переноса ресурсов на предмет труда. Требования к параметрам предмета труда определяют область фазового пространства, в которой происходит технологическое преобразование исходного материала в готовое изделие (рис.1), [2–4]. Изменение технико-экономических параметров производства требует перехода от одного способа производства к другому со своей нормативной технологической траекторией $\mathrm{S}_0(t)$. В окрестности нормативной траектории расположены траектории $\mathrm{S}_\mathrm{j}(t)$ изготовления j-го предмета труда ($0 \le j \le N$), обрабатываемого в момент времени $t = t^*$ с интенсивностью $\mu_\mathrm{j}(t)$ (рис.1). При проектировании высокоэффективных систем управления важное внимание уделяется модели производственного процесса. Повышение требований к качеству моделей производственных систем послужило поводом развития в последнее десятилетие нового типа моделей, получивших за рубежом название PDE–моделей. Одной из трудностей использования данного типа моделей является построение замкнутой системы уравнений производственного процесса. В качестве одного из способа решения задачи замыкания системы уравнений используют уравнение состояния производственного процесса. Однако данный подход, зарекомендовавший себя при построении квазистатических моделях производственных систем, не позволяет с удовлетворительной точностью описать переходные производственные процессы. Это обстоятельство и определило актуальность настоящей работы, в которой предлагается методы проектирования технологических траекторий, уравнения которых может быть использовано для обеспечения замкнутости PDE–моделей [1-3].

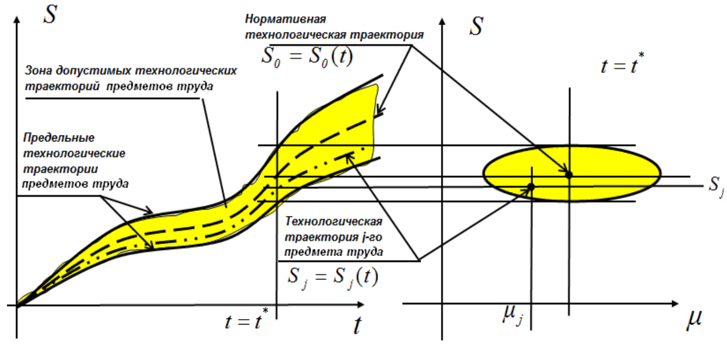


Рис.1. Семейство технологических траекторий. Стоимость S *(грн) перенесенных ресурсов на предмет труда при интенсивности обработки* μ *(грн/час) в зависимости от суммарного времени обработки* t *(час)*

Анализ последних исследований и выделение нерешенной ранее части общей проблемы построения технологических траекторий. Рассмотрим геометрическое место точек в технологическом фазовом пространстве, положение которых определяется значениями координат q_j последовательных состояний предмета труда в результате технологического преобразования [1,4,5]. Будем полагать, что в рассматриваемом n-мерном технологическом фазовом пространстве определена метрика, квадрат элемента длины dG^2 которой представляет выражение

$$dG^2 = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha,\beta}(q_\alpha, q_\beta) \cdot dq_\alpha \cdot dq_\beta ,$$

где $a_{\alpha,\beta}(q_\alpha, q_\beta)$ - координатные функции технологического пространства.

Для анализа состояния производственной системы используем стоимостные характеристики, позволяющие учесть технические и экономические показатели. При этом необходимо располагать морфологической структурой технологического процесса производства [6,стр.27]. Для построения системы стоимостных характеристик в общем виде морфологическую структуру представляется в виде сетевого графика. При этом стоимость готового изделия состоит из стоимостей используемых ресурсов: комплектующих, сырья и материалов, труда [6,стр.75], что дает возможность использовать в качестве квадрата элемента длины dG^2 фазового пространства квадрат стоимости перенесенных ресурсов на предмет труда dS^2 [2,6], наглядно характеризующей изменение стоимостных характеристик предмета труда в ходе обработки, (рис.1), [6,стр.75], [7]. Существуют модели, в которых используется понятие степени незавершенности изготовления изделия x в качестве переменной, определяющей состояние предмета труда (Armbruster D., Ringhofer C., Berg V.,Lefeber E.), [8,9,10], $x \in [0,1]$. Такой подход применим к случаю описания движения предмета труда в одномерном пространстве состояний, трудно реализуем при описании процесса изготовления продукта, в ходе которого используются несколько ресурсов, перенос каждого из которых на предмет труда характеризуется своими параметрами. Наряду с использованием стоимостных характеристик для определения состояния предмета труда Федюкин В.К. [3,стр.27] предложил использовать понятие ценности продукта, которая как и стоимость возрастает в процессе перехода от одной операции к другой в результате обработки предмета труда (рис.1). Переносимые ресурсы на предмет труда суммируются с перенесенными ранее ресурсами в ходе выполнения предыдущих операций. Такая операция наглядно выражается через сложение стоимости перенесенных ресурсов [6,стр.81], находит отражение в учетных балансах предприятий.

Выражение $dS^2 = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha,\beta}(q_\alpha, q_\beta)\, dq_\alpha\, dq_\beta$ является следствием естественного увеличения стоимости предмета труда в ходе обработки за счет переноса на него ресурсов α-го вида в количестве dq_α ($\alpha = 1..n$). Представление процесса переноса нескольких ресурсов переменной x, определяющей степень незавершенности изготовления предмета труда в зависимости от количества перенесенных на него ресурсов q_α, затруднительно и ненаглядно. В связи с тем, что в процессе производства используются, как правило, несколько видов технологических ресурсов, в настоящей статье рассмотрим проектирование технологической траектории предмета труда в фазовом пространстве с метрикой, квадрат элемента длины dS^2 которой определяется выражением [5]:

$$dS^2 = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha,\beta}(q_\alpha, q_\beta) \cdot dq_\alpha \cdot dq_\beta ,[\text{грн}^2] \qquad (1)$$

Если за координаты технологического пространства при построении траектории взять количество перенесенных на предмет труда сырья и материалов Θ_{CuM} [кг], электроэнергии $\Theta_{Э}$ [кВт] и суммарное эффективное время обработки τ_m [час], то состояние предмета труда в момент времени t определяется значением параметров

$$q_1 = \Theta_{CuM}(t), \quad q_2 = \Theta_{Э}(t), \quad q_3 = \tau_m(t),$$

с координатными функциями, которые в простом случае имеют вид

$$a_{\alpha,\beta}(q_\alpha, q_\beta) = Z_\alpha(q_\alpha) \cdot Z_\beta(q_\beta),$$

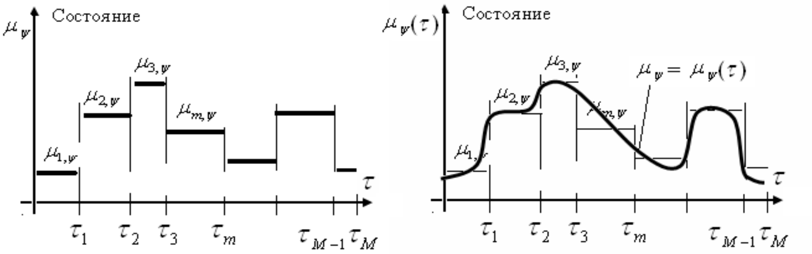
где $Z_1(q_1)$ [грн/кг] - цена за единицу сырья и материалов, $Z_2(q_2)$ [грн/кВт] - цена за единицу электроэнергии, $Z_3(q_3)$ [грн/час] - цена единицы рабочего времени. Дабагян А.В.(Харьков, Украина) предложил для проектирования изделия в качестве координат пространства использовать стоимость комплектующих элементов, стоимость затрат на собственные работы, расходы на сборку и обработку [6,стр.81].

Координатные функции фазового технологического пространства в большинстве случаев могут быть представлены в виде произведения цен за единицу технологического ресурса или за единицу изменения технологического параметра предмета труда. Квадратичная форма (1) предполагается всюду существенно положительной. Величина дуги, соединяющая две точки технологической траектории $A(q_{1A}, q_{2A}, .. q_{\alpha A}, .., q_{A0})$ и $B(q_{1B}, q_{2B}, .. q_{\alpha B}, .., q_{nB})$

$$\Delta S = \int_A^B \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha,\beta}(q_\alpha, q_\beta)\, dq_\alpha dq_\beta},$$

представляет собой изменение стоимости предмета труда при переходе из одного состояния в другое. Расстояние между двумя точками технологической траектории координатного пространства есть изменение стоимости предмета труда в результате технологической обработки. В последующих рассуждениях при проектировании траекторий будем использовать понятие события. Событие определяется местом в координатном технологическом пространстве, где оно произошло, и временем, когда оно произошло. Типичные траектории состояний для DES-моделей производственных систем рассмотрены Ramadge P. J. и Wonham W.M.. На рис.2 в однокоординатном пространстве представлены траектории движение предмета труда по технологическому маршруту с дискретным и непрерывным изменением состояния параметров. В качестве параметра состояния предмета труда на *m*-ой операции в течение эффективного времени обработки $\Delta\tau_m = \tau_m - \tau_{m-1}$ использовано значение интенсивности переноса ресурсов $\mu_{m,\psi}$ для DES-модели и $\mu_\psi(\tau)$ для модели с непрерывным изменением состояния. Другой подход при описании поточных линий представлен в работах Eekelen J.A., Lefeber E., Rooda J.E.. Отличием является то, что фазовые траектории строятся не для параметров состояния предмета труда, а для параметров, характеризующих состояние рабочей станции (рис.3), что является типичным для жидкостных моделей производственных систем. В качестве параметров состояния используют переменные: $x_1(t)$ - количество предметов труда в межоперационном заделе; количество предметов труда в процессе обработки $x_2(t)$ с длительностью времени $x_3(t)$, необходимого для завершения обработки; число предметов $x_4(t)$, обработанных рабочей станцией за период времени $[t_0, t]$.

Изложение основного материала. Для вывода уравнения технологической траектории в настоящей работе будем рассматривать два события в фазовом технологическом пространстве (рис.4), связанных с изменением состояния предмета труда в результате обработки. Пусть первое событие состоит в том, что в момент времени t_0 предмет труда находится в состоянии с координатами $(q_{\alpha 0})$. Пусть второе событие состоит в том, что в момент времени $(t_0 + dt)$ предмет труда перешел в точку с координатами $(q_{\alpha 0} + dq_{\alpha 0})$. С одной стороны, за время dt предмет труда прошел путь в *n*-мерном координатном пространстве, равный



а) б)

Рис.2. Типовая траектории $\mu_\psi(\tau)$ для параметров состояния предметов труда: а-DES модель (Ramadge P. J, Wonham W.M); б-модель с непрерывным изменением состояния.

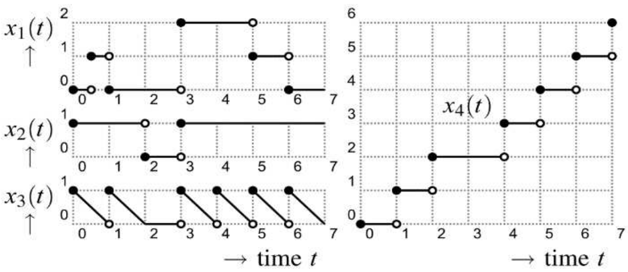


Рис.3. Фазовые траектории для параметров состояния рабочей станции (Eekelen J.A., Lefeber E., Rooda J.E)
$x_1(t)$ - количество предметов труда в операционном заделе; количество предметов труда в процессе обработки $x_2(t)$ с длительностью времени $x_3(t)$, необходимого для завершения обработки; число предметов $x_4(t)$, обработанных рабочей станцией за период времени $[t_0, t]$.

$\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha,\beta}(q_\alpha, q_\beta) dq_\alpha dq_\beta}$, с другой стороны за время dt на предмет труда в элементе объема, ограниченном координатами $(q_1, q_2, \ldots\ldots q_n)$ и $(q_1 + dq_1, q_2 + dq_2, \ldots\ldots q_n + dq_n)$, перенесены технологические ресурсы в количестве $\mu_\psi(t, q_1, q_2, \ldots\ldots q_\alpha, \ldots\ldots q_n)dt$. Можем записать связь между координатами двух рассмотренных событий в *n*-мерном технологическом пространстве

$$(\mu_\psi \cdot dt)^2 - (dS)^2 \geq 0 \qquad (2)$$

Дифференциальная связь (2) может быть использована для вывода уравнения технологической траектории.

1.Уравнение технологических связей

Разделим (2) на *dt*, получим неудерживающую дифференциальную связь $F_\nu\left(t, q_\alpha, \frac{dq_\alpha}{dt}\right) \geq 0$:

$$F_\nu\left(t, q_\alpha, \frac{dq_\alpha}{dt}\right) = \left(\mu_\psi(t, q_1, q_2, \ldots\ldots q_\alpha, \ldots\ldots q_n)\right)^2 - \\ - \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha,\beta}(q_\alpha, q_\beta) \cdot dq_\alpha \cdot dq_\beta \geq 0, \ \nu = 1..V \quad (3)$$

Движение предмета труда в фазовом пространстве, на которое наложены неудерживающие связи, можно разбить на участки таким образом, чтобы на одних участках движение предмета происходило при удерживающей связи, а на других участках так, как если бы этой связи не было. Таким образом, на отдельных участках неудерживающая связь либо заменяется удерживающей, либо отбрасывается. Наличие удерживающей связи означает, что все ресурсы переносятся на предметы труда без потерь. Технологические параметры, характеризующие процесс переноса ресурсов на предмет труда, определены технологией производства и, как правило, в течение времени производства изделия остаются неизменными. Следует, что связь (3) явно не будет зависеть от времени, т.е. $\frac{\partial F_\nu}{\partial t} = 0$. В дальнейшем будем рассматривать не зависимые явно от времени удерживающие дифференциальные связи

$$F_\nu\left(q_\alpha, \frac{dq_\alpha}{dt}\right) = \left(\mu_\psi(q_1, q_2, \ldots\ldots q_\alpha, \ldots\ldots q_n)\right)^2 - \\ - \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha,\beta}(q_\alpha, q_\beta) \cdot dq_\alpha \cdot dq_\beta = 0, \ \nu = 1..V \quad (4)$$

с числом степеней свободы производственной системы, описывающей движение одного предмета

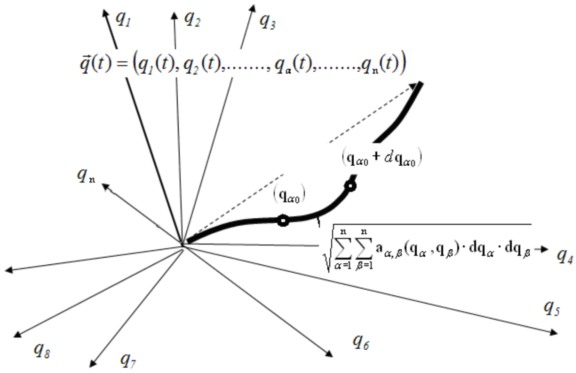


Рис.4. Координатное технологическое пространство

труда, $(n-V)$. Удобно перейти от координат q_α, описывающих движение предмета труда в фазовом пространстве в натуральном представлении, к координатам стоимостного представления S_j [5]. Если координатные функции $a_{\alpha,\beta}(q_\alpha, q_\beta)$ представим в виде $a_{\alpha,\beta}(q_\alpha, q_\beta) = Z_\alpha(q_\alpha) \cdot Z_\alpha(q_\alpha)$, то положив $dS_j = Z_j(q_j) \cdot dq_j$, получим удерживающие дифференциальные связи (4) через стоимостные координаты S_j

$$F_\nu\left(S_\alpha, \frac{dS_\alpha}{dt}\right) = \left(\mu_\psi(S_1, S_2, \ldots, S_\alpha, \ldots, S_n)\right)^2 - \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} dS_\alpha \cdot dS_\beta = 0, \quad \nu = 1..V$$

Продифференцировав последнее равенство по времени, получим выражение для ограничений, накладываемых технологическими связями на движение предмета труда

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \mu_\psi}{\partial S_\alpha} \cdot \mu_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{d\mu_\alpha}{dt} = 0, \qquad \mu_\alpha = \frac{dS_\alpha}{dt} \tag{5}$$

Для дифференциальных удерживающих связей, явно зависимых от времени, уравнение (5) примет вид:

$$\frac{\partial \mu_\psi}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \mu_\psi}{\partial S_\alpha} \cdot \mu_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{d\mu_\alpha}{dt} = 0, \quad \mu_\alpha = \frac{dS_\alpha}{dt}.$$

Если интенсивность передачи ресурсов $\mu_\psi(S_1, S_2, .., S_\alpha, .., S_n)$ на предмет труда представлена в виде суммы независимых интенсивностей разных видов ресурсов $\mu_\psi(S_1, S_2, \ldots, S_\alpha, \ldots, S_n) = \sum_{\alpha=1}^{n} \mu_{\psi\alpha}(S_\alpha)$, то:

$$F_\alpha\left(S_\alpha, \frac{dS_\alpha}{dt}\right) = \left(\mu_{\psi\alpha}(S_\alpha)\right)^2 - \mu_\alpha^2 = 0,$$

что позволяет записать уравнение связи для проекции на ось координат стоимостного параметра α-го технологического ресурса.

$$\frac{\partial \mu_{\psi\alpha}(S_\alpha)}{\partial S_\alpha} \mu_{\psi\alpha}(S_\alpha) - \frac{d\mu_\alpha}{dt} = 0,$$

Если ресурс α-го вида переносится на N_m предметов труда, находящиеся в заделе m-ой технологической операции, уравнение связи примет вид

$$\left(\mu_{\psi\alpha}(S_{\alpha,1}, S_{\alpha,2} \ldots\ldots S_{\alpha,N_m})\right)^2 - \sum_{k_1=1}^{N_m}\sum_{k_2=1}^{N_m} \frac{dS_{\alpha,k_1}}{dt} \frac{dS_{\alpha,k_2}}{dt} =,$$

$$\mu_{\psi\alpha}(S_{\alpha,1}, S_{\alpha,2} \ldots\ldots S_{\alpha,N_m}) = \sum_{k=1}^{N_m} \mu_{\alpha,k}$$

Для партии из N_m предметов труда, находящихся в межоперационном заделе m-ой операции $S_{\alpha,j} \in [S_{\psi m}, S_{\psi m+1}[$, соответствующими началу и окончанию операции, введем переменные $\nu_\alpha = \frac{1}{N_m}\sum_{k=1}^{N_m} \mu_{\alpha,k}$ и $\Theta_\alpha = \frac{1}{N_m}\sum_{k=1}^{N_m} S_{\alpha,k}$, получим уравнение движения предмета труда партии N_m продуктов с усредненными параметрами ν_α и Θ_α

$$\frac{\partial}{\partial \Theta_\alpha}\left(\frac{\mu_{\psi\alpha}(\Theta_\alpha)}{N_m}\right) \frac{\mu_{\psi\alpha}(\Theta_\alpha)}{N_m} - \frac{d\nu_\alpha}{dt} = 0.$$

Соотношение $\frac{\mu_{\psi\alpha}(\Theta_\alpha)}{N_m} = \frac{\Delta S_{\psi m}}{\Delta \tau_m} \frac{1}{N_m}$ выразим через плотность предметов труда $[\chi]_0(t, \Theta_\alpha) = \frac{N_m}{\Delta S_{\psi m}}$, находящихся в пределах отрезка $\Delta S_{\psi m}$ и через темп работы оборудования $[\chi]_{1_\psi}(t, \Theta_\alpha) = \frac{1}{\Delta \tau_m}$

$$\frac{\partial}{\partial \Theta_\alpha}\left(\frac{[\chi]_{1_\psi}(t, \Theta_\alpha)}{[\chi]_0(t, \Theta_\alpha)}\right) \cdot \frac{[\chi]_{1_\psi}(t, \Theta_\alpha)}{[\chi]_0(t, \Theta_\alpha)} - \frac{d\nu_\alpha}{dt} = 0.$$

2. Вариационный метод проектирования технологических траекторий

Удерживающие дифференциальные связи (4) соответствуют предельному случаю обработки предмета труда вдоль технологического маршрута, когда ресурсы переносятся на предмет труда полностью, без потерь. Однако в производственной деятельности предприятия всегда неизбежны операции, при выполнении которых существуют потери технологических ресурсов, что выражается неравенством

$$F_\nu\left(q_\alpha, \frac{dq_\alpha}{dt}\right) = \left(\mu_\psi(q_1, q_2, \ldots\ldots q_\alpha, \ldots\ldots q_n)\right)^2 - \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha,\beta}(q_\alpha, q_\beta) \cdot \frac{dq_\alpha}{dt} \cdot \frac{dq_\beta}{dt} > 0, \quad \nu = 1..V.$$

Потребует, чтобы технологический процесс обработки предмета труда выполнялся согласно нормативным конструкторским и технологическим параметрам с минимальной потерей ресурсов. Полагаем, что для рассматриваемой производственной системы существует интеграл, который для движения предмета труда по технологическому маршруту в соответствии с нормативной траекторией имеет минимум

$$\Re_{ab} = \int_a^b \sqrt{\left(\mu_\psi(q_\alpha) dt\right)^2 - \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha,\beta}(q_\alpha, q_\alpha)\, dq_\alpha\, dq_\beta},$$

и который берется вдоль траектории между двумя событиями «a» и «b» технологической обработки предмета труда. Целевой функционал представим в виде

$$\Re_{ab} = \int_a^b \left(\sqrt{\left(\mu_\psi(q_\alpha)\right)^2 - \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha,\beta}(q_\alpha, q_\beta) \frac{dq_\alpha}{dt} \frac{dq_\beta}{dt}}\right) dt$$

с целевой функцией технологического процесса $J = \sqrt{\mu_\psi^2 - \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha,\beta} \frac{dq_\alpha}{dt} \frac{dq_\beta}{dt}}$, описывающей поведение предмета труда в технологическом пространстве производственной системы. Тот факт, что каждая операция рассматриваемого производственного процесса характеризуется только величинами $\Delta S_{\psi}(грн)$ и μ_{ψ} $\left(\frac{грн}{час}\right)$, а не более высокими производными, является выражением утверждения, что состояние технологического процесса полностью определяется знанием координат q_j (грн) и интенсивности их изменения во времени $\frac{dq_{\alpha}}{dt}$ $\left(\frac{грн}{час}\right)$. Из равенства нулю вариации $\delta\,\Re_{ab}$=0 следуют уравнения Эйлера для вариационной задачи, описывающие изменение параметров предмета труда в n-мерном технологическом пространстве в ходе воздействия оборудования

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial J}{\partial \frac{dq_{\alpha}}{dt}} = \frac{\partial J}{\partial q_{\alpha}}, \qquad i=1..n.$$

При рассмотрении движения предмета труда в одномерном технологическом пространстве (n=1) целевой функционал может быть записан:

$$\Re_{ab} = \int_a^b \left(\sqrt{\mu_{\psi}{}^2 - \left(\frac{dS}{dt}\right)^2}\right) dt,\ J = \sqrt{\mu_{\psi}{}^2 - \mu^2},$$

$$\mu_{\psi} = \mu_{\psi}(S), \qquad \frac{dS}{dt} = \mu .$$

Из равенства нулю вариации $\delta\ \Re_{ab}$=0 следует уравнение Эйлера:

$$\frac{d\mu}{dt} = -\left(\frac{\mu_{\psi}{}^2 - 2\mu^2}{\mu_{\psi}}\right)\frac{\partial \mu_{\psi}}{\partial S}.$$

В предельном случае, когда потери технологических ресурсов стремятся к нулю $\mu \to \mu_{\psi}$ последнее уравнение принимает вид, аналогичный (5)

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu_{\psi}\frac{\partial \mu_{\psi}}{\partial S}. \qquad (6)$$

При движении по технологическому маршруту предмет труда должен обрабатываться строго в соответствии с заданной технологией производства (рис.1), определенной нормативной технологической траекторией $S_0 = S_0(t)$ и предельными технологическими траекториями, заданными исходя из технологических допусков на выполнение операции. Отклонение от технологии считается недопустимым, приводит к нежелательным результатам, влечет за собой брак.

Рассмотрим интегралы движения, связанные с однородностью времени и пространства. Если целевая функция производственной системы не зависит явно от времени, то ее полная производная по времени может быть записана:

$$\frac{dJ}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial J}{\partial q_{\alpha}}\cdot\frac{dq_{\alpha}}{dt} + \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial J}{\partial \frac{dq_{\alpha}}{dt}}\cdot\frac{d^2 q_{\alpha}}{dt^2},\ \frac{\partial J}{\partial t} = 0 .$$

Заменим производные $\frac{\partial J}{\partial q_{\alpha}}$ на $\frac{d}{dt}\frac{\partial J}{\partial \frac{dq_{\alpha}}{dt}}$ согласно уравнениям Эйлера, получим:

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{d}{dt}\frac{\partial J}{\partial \frac{dq_{\alpha}}{dt}} - J = \text{const} .$$

Эта величина остается неизменной во времени при движении предметов труда в n-мерном технологическом пространстве, определяет связь между интенсивностью μ потребления ресурсов предметом труда и интенсивностью μ_{ψ} передачи технологических ресурсов оборудованием. Изменение интенсивности μ однозначно определяется изменением интенсивности μ_{ψ}. При однородности технологического пространства по координате целевая функция производственной системы J не зависит явно от координаты q_{α}, $\frac{\partial J}{\partial q_{\alpha}} = 0$. В силу уравнений Эйлера следует

$$\frac{\partial J}{\partial \frac{dq_{\alpha}}{dt}} = const .$$

Полученный интеграл движения для системы “поточная линия-предмет труда” может трактоваться как постоянство интенсивности потребления технологических ресурсов предметом труда при его движении вдоль технологического маршрута.

3. Проектирование технологических траекторий с использованием общего уравнения динамики.

Уравнение движения предмета труда могут быть получены из общего уравнения динамики предметов труда в фазовом технологическом пространстве

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(Q_{\alpha}(q_{\alpha}) - \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha,\beta}\cdot\frac{d^2 q_{\beta}}{dt^2}\right)\cdot\delta q_{\alpha} = 0,$$

где $Q_{\alpha}(q_{\alpha})$-обобщенные технологические силы, воздействующие на предмет труда вдоль координаты q_{α} с целью переноса технологических ресурсов, при котором совершается над предметом труда работа $\delta A_{\alpha} = Q_{\alpha}\cdot\delta q_{\alpha}$:

$$\delta A = \sum_{\alpha=1}^{n}\delta A_{\alpha},\ \sum_{\alpha=1}^{n}\delta A_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{n} Q_{\alpha}\cdot\delta q_{\alpha} = 0,$$

$$\delta A - \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha,\beta}\cdot\frac{d^2 q_{\beta}}{dt^2}\cdot\delta q_{\alpha} = 0 . \qquad (7)$$

Слагаемое с двойной суммой представим в виде

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha,\beta}\cdot\frac{d^2 q_{\beta}}{dt^2}\cdot\delta q_{\alpha} =$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha,\beta}\frac{dq_{\beta}}{dt}\delta q_{\alpha} - \delta\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\frac{a_{\alpha,\beta}}{2}\frac{dq_{\beta}}{dt}\frac{dq_{\alpha}}{dt}$$

Подставим полученное выражение в (7) и проинтегрируем по t

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\frac{a_{\alpha,\beta}}{2}\cdot\frac{dq_\beta}{dt}\cdot\frac{dq_\alpha}{dt}+\delta A\right)dt$$

$$-\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}a_{\alpha,\beta}\cdot\frac{dq_\beta}{dt}\cdot\delta q_\alpha\right)_{t=t_0}^{t=t_1}=0\,.$$

Так как начальное и конечное состояние зафиксировано, то $\delta q_i=0$ и, следовательно

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\frac{a_{\alpha,\beta}}{2}\frac{dq_\beta}{dt}\frac{dq_\alpha}{dt}+\delta A\right)dt=0.$$

Введем понятие потенциальной энергии системы $\Pi(t,q_\alpha)$, $\delta A=-\delta\Pi(t,q_\alpha)$, представив целевую функцию в виде

$$J\left(t,q_\alpha,\frac{dq_\alpha}{dt}\right)=\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\frac{a_{\alpha,\beta}}{2}\frac{dq_\beta}{dt}\frac{dq_\alpha}{dt}-\Pi(t,q_\alpha),$$

Если технология производства задана и не меняется со временем или время, которое необходимо затратить на изменение технологии производства много больше времени производственного цикла, то с достаточной степенью точностью можно предположить, что целевая функция не зависит явно от времени, что позволяет записать первый интеграл

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{dq_\alpha}{dt}\cdot\frac{\partial J\left(q_\alpha,\frac{dq_\alpha}{dt}\right)}{\partial\frac{dq_\alpha}{dt}}-J\left(q_\alpha,\frac{dq_\alpha}{dt}\right)=$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\frac{a_{\alpha,\beta}}{2}\cdot\frac{dq_\beta}{dt}\cdot\frac{dq_\alpha}{dt}-\Pi(t,q_\alpha)=h_0=\mathrm{const}$$

с потенциалом системы $\Pi(q_\alpha)$. При одномерном описании производственного процесса с целевой функцией $J(S,\mu)=\frac{\mu^2}{2}-\Pi(S)$, интеграл движения примет вид

$$\frac{\mu^2}{2}+\Pi(S)=h_0=\mathrm{const}\,,\quad \frac{dS}{dt}=\mu\,.$$

Если движение предмета труда удовлетворяет удерживающей связи (5) вида $\mu^2-\mu_\psi{}^2(S)=0$, то выражение для потенциальной энергии можно получить из равенства $\mu_\psi{}^2(S)=2(h_0-\Pi(S))$. Целевая функция определяется с точностью до слагаемого, которое является полной производной от функции координат и времени. Отсюда следует

$$J(S,\mu)=\mu^2+\mu_\psi{}^2(S)$$

что позволяет записать уравнение Эйлера, совпадающее с уравнением (6)

$$\frac{d\mu}{dt}=\mu_\psi(S)\frac{\partial\mu_\psi(S)}{\partial S}\,.$$

Выводы и дальнейшие перспективы развития и совершенствования PDE-моделей производственных систем.

Полученные результаты исследования являются базовыми для разработки высокоэффективных систем управления производством, основанных на PDE-моделей производственных систем [11]. В отличие от моделей, в которых для получения замкнутой системы уравнений применяется уравнение состояния, модели, использующие уравнение технологической траектории, позволяют описать производственные процессы, функционирующие в переходном нестационарном режиме. Это позволяет значительно расширить область применения класса PDE-моделей производственных систем.

Список литературы

1. Власов В.А. Моделирование технологических процессов изготовления промышленной продукции/ В.А.Власов, И.А.Тихомиров, И.И.Локтев. – Томск, Изд. ГТПУ, 2006. – 300 с.

2. Пигнастый О.М. Расчет производственного цикла с применением статистической теории производственно-технических систем / О.М.Пигнастый, В.Д.Ходусов // Доповіді Національної академії наук України. – Киев: Видавничий дім Академперіодика". – 2009. – №12. – С. 38 – 44.

3.Федюкин В.К. Управление качеством процессов / В.К.Федюкин.– СПб.:Питер, 2004. – 204 с.

4.Пигнастый О. М. К вопросу подобия технологических процессов производственно-технических систем / Н.А.Азаренков, О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов // Доповіді Національної академії наук України. - Київ: Видавничий дім "Академперіодика". 2011. –№2– С. 29-35. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.13585.53600

5. Pihnastyi O.M. Statistical theory of control systems of the flow production. / O.M. Pihnastyi LAP LAMBERT Academic Publishing. –2018. – 436 c. –ISBN: 978-613-9-95512-1

6.Дабагян А.В. Проектирование технических систем / А. В. Дабагян. – Харьков: ТД «Золотая миля», 2008. – Том 2. – 280 с.

7.Shanthikumar J. Modeling and Optimization of Manufacturing Systems and Supply Chains. / J.Shanthikumar, Y.George, D.David, W.H.Zijm, Stochastic M..–Massachusetts, 2003. – P. 425. – (A State of the Art Handbook. International Series in Operations Research and Management Science, Kluwer Academic Publishers).

8.Armbruster D. Kinetic and fluid model hierarchies for supply chains supporting policy attributes / D. Armbruster., D. Marthaler, C. Ringhofer // Bulletin of the Institute of Mathematics. – Academica Sinica, – 2006. – P. 496 – 521.

9. Lefeber E. Modeling and Control of Manufacturing Systems //Decision Policies for Production Networks. – Springer London,2012.–P.9-30

10. Lefeber E. Aggregate modeling of manufacturing systems. Planning Production and Inventories in the Extended Enterprise: A State of the Art Handbook. International Series in Operations Research and Management

Science. / [E.Lefeber, D.Armbruster, eds. K.Kempf P. Keskinocak, R.Uzsoy]. – Springer-Verlag, New York, 2010. – Vol. 151. – P. 509 – 536.

11. Пигнастый О.М. О взаимосвязи микро- и макроописания производственно-технических систем / О. М. Пигнастый, В.Я.Заруба // Управление большими системами: труды Международной научно-практической конференции (Москва 17-19 ноября 2009). – Москва: ИПУ РАН, 2009. - С. 255-258