Equation of balance for the two-level description of the manufacturing production line

, and Pihnastyi, Oleh

National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Ukraine

10 April 2016

Балансовые уравнения двухуровневой модели описания производственной поточной линии

Пигнастый О. М.

В статье предложена методика построения системы много-моментных балансовых уравнений для двухуровневого описания производственной поточной линии. Показано, что полученные балансовые уравнения являются незамкнуты. Рассмотрены известные модели, в которых использованы разные способы замыкания системы уравнений. Изучена модель поточной линии для конвейерного метода организации производства. Показаны ограничения и уравнения связей, позволяющие осуществить переход к одномоментной PDE-модели описания конвейерной линии и двух-моментной PDE-модели поточной линии с использованием уравнения Бюргерса. Получены одно-, двух-, трех-моментные системы уравнений для двухуровневой модели поточной линии. Построена общая система балансовых уравнений для потоковых параметров производственной линии.

Ключевые слова: *поточная линия, PDE-модель, кинетическое уравнение, производственный процесс, много-моментные уравнения, двухуровневое описание, предмет труда, технологические ресурсы, фазовое пространство, модель конвейера*

Постановка проблемы: В последние десятилетие для проектирования производственных поточных линий разработаны модели, содержащие уравнения в частных производных (PDE-модели) [3,5,8]. PDE-модели дают возможность учесть влияние внутренних факторов производства и имеющиеся технологические ограничения. Существенным преимуществом данного класса моделей является то, что они позволяют описать движение предметов труда от операции к операции, допускают решение в аналитическом виде и не нуждаются в значительных вычислительных ресурсах. Появление нового типа моделей обусловлено тенденциями развития современными промышленного производства в рамках постоянного сокращения продолжительности жизненного цикла производимых изделий. Эта тенденция приводит к тому, что с одной стороны производственные линии значительную долю времени функционирует в переходном неустановившемся режиме [3-7], с другой стороны, время, отводимое на поиск режима управления технологическими участками поточной линии [9]. Такое сокращение привело к необходимости разработать совершенно новые типы моделей производственных поточных линий [3], а также программ и алгоритмов управления ими. Публикации, посвященные использованию PDE-моделей производственных линий, появились в 2003 г. [3,5], однако вопрос построения замкнутых уравнений, определяющих модель, требует дальнейшего развития и в настоящее время, определяет актуальность выбранного направления исследования и его практическую значимость для современного поточного производства.

Анализ последних достижений и публикаций. В работе [1] обсуждается новый класс моделей производственных систем с поточным способом организации производства, широко используемый в настоящее время для построения эффективных систем управления производством. Проведен обзор отечественных и зарубежных публикаций, посвященный наиболее употребительным PDE-моделям производственных поточных линий. Показаны предпосылки, которые привели к возникновению класса PDE-моделей, представлена история их развития. Дано описание PDE-модели, содержащей Graves-уравнение; нелинейной PDE-модели Lighthill–Whitham; квазистатической PDE-модели, использующая нелинейное Karmarkar-уравнение состояния; двухмоментной PDE-модели с уравнением Бюргерса; диффузионной PDE-модели. Особое внимание уделено замкнутой многомоментной PDE-модели для переходных неустановившихся режимов, полученной отечественными исследователями. Исторически сложилось, что при построении нового типа моделей производственных линий использованы два подхода – феноменологический подход [6, 7] и статистический [1, 3, 4]. Феноменологический подход дал возможность построить ряд моделей производственных линий, дополнив уравнения переноса, уравнением состояния в форме clearing-функции, что позволило записать уравнения PDE-модели производственных линий для наиболее простых случаев функционирования. Обоснованность применения определялась сравнительным анализом результатов, полученных с помощью дискретно-событийной модели (DESмодели) и исследуемой PDE-моделью. Наглядно показано, что построенные PDE-модели с использованием феноменологического подхода являются ограниченными. Ограничение обусловлено тем, что уравнения переноса и дополняющие их уравнения состояния для сложных случаем функционирования производства не могут быть выведены из феноменологического представления. Для построения таких моделей необходимо использовать статистический подход. В работах [1,3] обсуждается оценка точности расчета параметров поточной. Уделяется внимание моделям статистической динамики систем управления поточным производством и демонстрируется их связь с классом PDE-моделей. Заостряется внимание на то, что существующие методы статистической динамики систем управления предоставляют мощный аппарат, который может быть использован для построения PDE-моделей систем управления и стабилизации параметров производственной линии.

Нерешенные ранее части проблемы. Обзор публикаций, представленный в работах [1,3,4,6,9,10], наглядно показывает, что дальнейшее развитие и использование PDE-моделей поточных линий требует решения следующих вопросов: 1. Вывод нестационарных уравнений состояния, основанных на детальной технологии обработки предмета труда с учетом схемы оборудования. 2. Построение многомоментных замкнутых балансовых уравнений для установившихся и переходных нестационарных режимов функционирования производственной линии. 3. Построение двухуровневых моделей управления параметрами производственной линии для установившихся и переходных режимов с учетом параметров оборудования, схемы его расстановки и приоритетов движения предметов труда.

Целью исследования является развитие методики построения многомоментных замкнутых балансовых уравнений для установившихся и переходных нестационарных режимов функционирования поточной линии.

Основные результаты исследования.

Кинетическое уравнение производственного процесса. Состояние производственного процесса определяется через состояния общего числа N предметов труда [1,4,5]. При переходе предмета труда из одного состояния в другое происходит превращение ресурсов (сырья, материалов, живого труда) в готовый продукт в результате целенаправленного воздействия оборудования. Состояние j-го предмета труда в фазовом пространстве может быть описано параметрами состояния $\vec{S}_j = (S_{j,1}, S_{j2}, \ldots, S_{j,\alpha}, \ldots, S_{jA})$, $\vec{\mu}_j = (\mu_{j,1}, \mu_{j2}, \ldots, \mu_{j,\alpha}, \ldots, \mu_{jA})$, где $S_{j,\alpha}$ (грн) стоимость перенесенного $\alpha-$го технологического ресурса или его части на j-й предмет труда, $\mu_{j,\alpha}$ (грн/час) – интенсивность переноса стоимости $\alpha-$го ресурса на j-й предмет труда, $0 < j \le N$, $0 < \alpha \le A$ [4]. Состояние параметров производственного процесса в некоторый момент времени будет определено, если определены параметры состояния предметов труда $\left(\vec{S}_1, \vec{\mu}_1 \ldots \vec{S}_N, \vec{\mu}_N\right)$ и целевая функция $J\left(t, \vec{S}_j, \vec{\mu}_j\right)$, а в любой другой момент времени найдено из уравнений состояний предметов труда [3,4]. Так как количество предметов труда N много больше единицы, то вместо решения системы из N-уравнений второго порядка используем соответствующим образом нормированную функцию распределения $\chi(t,S,\mu)$ числа N предметов труда в фазовом пространстве (t,S,μ), удовлетворяющую кинетическому уравнению производственного процесса [4]:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} + \frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu + \frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f = \lambda_{Plant}\cdot\left\{\int_0^\infty \left[\varphi(t,S,\tilde{\mu},\mu)\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})\right]\cdot d\tilde{\mu} - \mu\cdot\chi\right\}, \quad \frac{d\mu}{dt} = f(t,S)\;, \quad (1)$$

где произведение $\chi(t,S,\mu)\cdot d\Omega$ представляет собой число предметов труда в ячейке $d\Omega$ фазового пространства с координатами $S_j \in [S, S+dS[$, $\mu_j \in [\mu, \mu + d\mu[$ (S_d - себестоимость продукции). Интегрирование по объему Ω фазового пространства (S,μ) дает общее количество N предметов труда, находящееся в незавершенном производстве [1,8-10]:

$$\int_0^{S_d}\int_0^{\infty}\chi(t,S,\mu)d\mu dS = N, \quad \Omega=\int_0^{S_d}\int_0^{\infty}d\mu dS\,. \tag{2}$$

Функция $f(t,S)$ определяет закон изменения состояния предмета труда для нормативного технологического процесса, строится на основании данных об использовании технологических ресурсов при выполнения производственной операции. Стохастический процесс воздействия со стороны оборудования на предмет труда описывается плотностью распределения $\varphi(t,S,\tilde{\mu},\mu)$ случайной величины μ, где $\tilde{\mu}$ и μ - интенсивность переноса ресурсов на предмет труда до и после воздействия [1,3]:

$$\int_0^{\infty}\varphi(t,S,\tilde{\mu},\mu)d\mu=1\,. \tag{3}$$

Детальный вывод кинетического уравнения производственного процесса (1) дан в [1,4].

Макропараметры производственного процесса. Введем числовые характеристики, отражающие существенные черты распределения по состояниям находящихся в незавершенном производстве предметов труда

$$\int_0^{\infty}\mu^k\cdot\chi(t,S,\mu)d\mu=[\chi]_k\,, \tag{4}$$

которые для функции распределения $\chi(t,S,\mu)$ определим как моменты k-го порядка. Изменение функции распределения $\chi(t,S,\mu)$ предметов труда по состояниям обусловлено стохастическим характером взаимодействием предметов труда с оборудованием и между собой [7]. В большинстве интересных с практической точки зрения случаях плотность распределения $\varphi(t,S,\tilde{\mu},\mu)$ не зависит от состояния предметов труда до испытания воздействия со стороны технологического оборудования. Тогда интегрирование в правой части (1) приводит к упрощению интегро-дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f=\lambda_{Plant}\cdot\{\varphi(t,S,\mu)\cdot[\chi]_1-\mu\cdot\chi\},\quad \frac{d\mu}{dt}=f(t,S)\,. \tag{5}$$

Кинетического уравнения (5) использовано для вывода балансовых уравнений PDE-модели производственного процесса, а его решение дает возможность получить закон распределения интенсивности переноса ресурсов μ. Закон распределения, исчерпывающим образом описывающий распределение предметов труда по состояниям вдоль технологического маршрута, позволяет определить числовые характеристики (4), среди которых особое значение имеют плотность распределения предметов труда в незавершенном производстве по технологическим позициям $[\chi]_0(t,S)$ и темп обработки предметов труда $[\chi]_1(t,S)$ на операциях вдоль технологического маршрута [3-5,7]. Часто требуется решить задачу, оставляя в стороне законы распределения, оперируя при этом одними числовыми характеристиками $[\chi]_0(t,S)$, $[\chi]_1(t,S)$. Потоковые параметры $[\chi]_0(t,S)$, $[\chi]_1(t,S)$, $[\chi]_2(t,S)$ и связанный с ними метод моментов играют важную роль при построении общей теории систем управления производственными поточными линиями. Если удалось выделить характеристики параметров состояний предметов труда, то потоковые параметры, описывающие состояние производственного процесса, определяются через моменты функции распределения предметов труда по состояниям $\chi = \chi(t,S,\mu)$. При этом введенные параметры должны совпадать с используемыми в производственной деятельности параметрами производственного процесса [2]. Под уравнением баланса k-го порядка относительно моментов функции распределения $\chi = \chi(t,S,\mu)$ предметов труда по состояниям понимается агрегированное по всему диапазону изменения величины μ балансовое равенство

$$+\int_0^\infty \mu^k \frac{\partial \chi}{\partial t} d\mu + \int_0^\infty \mu^{k+1} \frac{\partial \chi}{\partial S} d\mu + \int_0^\infty \mu^k \frac{\partial \chi}{\partial \mu} f d\mu = \lambda_{Plant} \int_0^\infty \mu^k \{\varphi(t,S,\tilde{\mu},\mu)[\chi]_1 - \mu\chi\} d\mu, \qquad (6)$$

$$\chi(t,S,\infty) = \chi(t,S,\infty) = 0. \qquad (7)$$

Условия (7) указывают на то, что количество предметов труда в состоянии с бесконечно малым и бесконечно большим временем обработки равно нулю. Начальные моменты $[\chi]_k$ связаны балансными соотношениями (6). Связь микро и макроуровня описания производственного процесса в рамках заданного закона распределения предметов труда по состояниям осуществляется через кинетическое уравнение в виде самосогласованной задачи [1]. Для определения функции распределения предметов труда по состояниям необходимо знать поведение ее первых моментов, задающих вид функции $f(t,S)$. С другой стороны, чтобы определить значения первых моментов необходимо получить вид функции распределения $\chi(t,S,\mu)$ в результате решения кинетического уравнения (5). Закон распределения предметов труда по состояниям определяется особенностями технологического процесса в результате решения кинетического уравнения (5), а именно технологией изготовления предмета труда. Каждому технологическому процессу соответствуют свой вид инженерно-производственной функции $f(t,S)$ и функции переноса технологических ресурсов на предмет труда $\varphi(t,S,\tilde{\mu},\mu)$.

Балансовое уравнение для нулевого момента. Закон сохранения количества предметов труда в производственном процессе. Проинтегрируем слагаемые уравнения баланса (6) при k=0:

$$\int_0^\infty \frac{\partial\chi}{\partial t}d\mu+\int_0^\infty \mu\frac{\partial\chi}{\partial S}d\mu+\int_0^\infty \frac{\partial\chi}{\partial\mu}f(t,S)d\mu=\lambda_{Plant}\int_0^\infty\left\{\int_0^\infty \varphi(t,S,\tilde{\mu},\mu)\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})d\tilde{\mu}-\mu\chi(t,S,\mu)\right\}d\mu. \quad (8)$$

Воспользуемся обозначениями для начальных моментов (4), получим

$$\int_0^\infty \frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial t}d\mu=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \chi(t,S,\mu)d\mu=\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}, \quad (9)$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial S}\cdot\mu d\mu=\frac{\partial}{\partial S}\int_0^\infty \mu\cdot\chi(t,S,\mu)d\mu=\frac{\partial[\chi]_1}{\partial S}, \quad (10)$$

$$\int_0^\infty f(t,S)\cdot\frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial\mu}d\mu=f(t,S)\cdot\int_0^\infty d\chi(t,S,\mu)=0, \quad (11)$$

$$\int_0^\infty\left\{\int_0^\infty[\varphi(t,S,\tilde{\mu},\mu)\tilde{\mu}\chi(t,S,\tilde{\mu})]d\tilde{\mu}-\mu\chi(t,S,\mu)\right\}d\mu=\int_0^\infty\tilde{\mu}\chi(t,S,\tilde{\mu})d\tilde{\mu}-\int_0^\infty\mu\chi(t,S,\mu)d\mu=0. \quad (12)$$

Подставляя (9)-(12) в (8), получим уравнение модели производственной поточной линии в одномоментном описании [4-8]

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+\frac{\partial[\chi]_1}{\partial S}=0, \quad (13)$$

представляющее закон сохранения количества предметов труда в производственном процессе. Уравнение (13) используется для моделирования поведения состояния параметров поточной линии в одномоментном описании, является незамкнутым. Существует рад моделей, использующих разные подходы для замыкания уравнения (13). Рассмотрим один из них подробнее. Для описания конвейерных линий используется приближенная PDE-модель, содержащая уравнение (13) и замыкающее Graves-уравнение состояния $[\chi]_1 = \alpha \cdot [\chi]_0 \cdot \mathrm{c}$, где α =const -технологическая константа, c=const (метр/час) – скорость движения конвейера:

$$\frac{\partial[\chi]_0(t,S)}{\partial t}+\frac{\partial[\chi]_1(t,S)}{\partial S}=0, \qquad [\chi]_1 = \alpha \cdot [\chi]_0 \cdot c. \tag{14}$$

Подставим второе уравнение в первое, получим

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+g\frac{\partial[\chi]_0(t,S)}{\partial S}=0, \qquad g = \alpha \cdot c = 0. \tag{15}$$

Дополним (15) начальными и граничными условиями

$$[\chi]_0(0,S) = \theta(S) = 2+\sin\left(\frac{2\pi}{\mathrm{Sd}}\mathrm{S}\right), \quad [\chi]_1(\mathrm{t},0) = \phi(\mathrm{t}) = \mathrm{g}\left(2-\mathrm{t}^2\right), \tag{16}$$

вид которых определяет начальное распределение предметов труда вдоль поточной линии и интенсивность поступления предметов труда, определяемые портфелем заказов, на начало производственной линии, где $[\chi]_0(0,0) = \theta(0) = [\chi]_1(0,0)/g = \phi(0)/g$. Запишем для (15) характеристическую систему уравнений и соответствующий ей первый интеграл движения:

$$\frac{\mathrm{dt}}{1}=\frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{g}}, \qquad \mathrm{S} - \mathrm{gt} = \mathrm{const}. \tag{17}$$

С учетом (18) решение уравнения (15) имеет вид

$$[\chi]_0(t,S) = W(R), \qquad R = S - \mathrm{gt}. \tag{18}$$

Подставляя решение (18) в уравнение (15), получим тождество

$$\frac{dW(R)}{dR}\frac{\partial R}{\partial t}+a\frac{dW(R)}{dR}\frac{\partial R}{\partial S}=\frac{dW(R)}{dR}\left(\frac{\partial R}{\partial t}-a\frac{\partial R}{\partial S}\right)=\frac{dW(R)}{dR}(a-a\cdot 1)\equiv 0. \tag{19}$$

Используем начальное условие (16) и граничное условие (16) для уравнения (15), запишем решение

$$[\chi]_0(t,S) = \theta(R)\mathrm{H}(R)+\phi(R/a)\mathrm{H}(-R), \quad \mathrm{H}(R)=\begin{cases}0, & \text{если } R<0;\\ 0.5, & \text{если } R=0;\\ 1, & \text{если } R>0,\end{cases} \tag{20}$$

где $\mathrm{H}(R)$ – функция Хевисайда. В общем случае модель необходимо дополнить уравнениями связей, накладывающими ограничения на производительность технологического оборудования и на использование технологических ресурсов.

Балансовое уравнение для первого момента. Закон сохранения темпа движения предметов труда по технологическому маршруту. Проинтегрируем слагаемые уравнения баланса (6) при k=1:

$$\int_0^\infty \mu \frac{\partial \chi}{\partial t} d\mu + \int_0^\infty \mu^2 \frac{\partial \chi}{\partial S} d\mu + \int_0^\infty \mu \frac{\partial \chi}{\partial \mu} f(t,S) d\mu = \lambda_{Plant} \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty \varphi(t,S,\tilde{\mu},\mu)\tilde{\mu}\chi(t,S,\tilde{\mu}) d\tilde{\mu} - \mu\chi \right\} \mu d\mu . \quad (21)$$

Воспользуемся обозначениями для начальных моментов (4), получим по аналогии с (9)-(12)

$$\int_0^\infty \mu \frac{\partial \chi(t,S,\mu)}{\partial t} d\mu = \frac{\partial [\chi]_1}{\partial t}, \qquad \int_0^\infty \frac{\partial \chi(t,S,\mu)}{\partial S} \mu^2 d\mu = \frac{\partial [\chi]_2}{\partial S}, \quad (22)$$

$$\int_0^\infty f(t,S) \frac{\partial \chi(t,S,\mu)}{\partial \mu} \mu d\mu = f(t,S) \int_0^\infty \left(\frac{\partial [\mu \chi(t,S,\mu)]}{\partial \mu} - \chi(t,S,\mu) \right) d\mu = -f(t,S)[\chi]_0 , \quad (23)$$

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty [\varphi(t,S,\tilde{\mu},\mu)\tilde{\mu} \cdot \chi(t,S,\tilde{\mu})] d\tilde{\mu} - \mu\chi(t,S,\mu) \right\} \mu d\mu = \left(\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0} [\chi]_1 - [\chi]_2 \right). \quad (24)$$

Подставляя (22)-(24) в (21), запишем уравнение баланса первого порядка относительно начальных моментов (6)

$$\frac{\partial [\chi]_1}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_2}{\partial S} - f(t,S)[\chi]_0 = \lambda_{Plant} \left(\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0} [\chi]_1 - [\chi]_2 \right). \quad (25)$$

Уравнение (25) дополним уравнением (13), получим систему уравнений двух-моментного описания производственной поточной линии:

$$\frac{\partial [\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_1}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial [\chi]_1}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_2}{\partial S} - f(t,S)[\chi]_0 = \lambda_{Plant} \left(\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0} [\chi]_1 - [\chi]_2 \right). \quad (26)$$

Система уравнений (26) является незамкнутой. Дополним ее уравнениями

$$\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0} [\chi]_1 - [\chi]_2 = 0, \qquad [\chi]_{1\psi} = [\chi]_1, \qquad f(t,S) = 0, \quad (27)$$

получим систему уравнений для описания поточной линии, известной как двухмоментная PDE-модель с использованием уравнения Бюргерса:

$$\frac{\partial [\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_1}{\partial S} = 0, \qquad \frac{\partial [\chi]_1}{\partial t} + [\chi]_1 \frac{\partial [\chi]_1}{\partial S} = 0 . \quad (28)$$

Система уравнений (28) является замкнута, на исследовании данной модели в настоящей работе останавливаться не будем.

Балансовое уравнение для второго момента. Общая система балансовых уравнений для потоковых параметров. Проинтегрируем слагаемые уравнения баланса (6) при k=2:

$$\int_0^\infty \mu^2 \frac{\partial \chi}{\partial t} d\mu + \int_0^\infty \mu^3 \frac{\partial \chi}{\partial S} d\mu + \int_0^\infty \mu^2 \frac{\partial \chi}{\partial \mu} f(t,S) d\mu = \lambda_{Plant} \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty \varphi(t,S,\tilde{\mu},\mu)\tilde{\mu}\chi(t,S,\tilde{\mu})d\tilde{\mu} - \mu\chi \right\} \mu^2 d\mu . \quad (29)$$

Воспользуемся введенными обозначениями для начальных моментов (4), получим по аналогии с (9)-(12)

$$\int_0^\infty \mu^2 \frac{\partial \chi(t,S,\mu)}{\partial t} d\mu = \frac{\partial [\chi]_2}{\partial t}, \quad \int_0^\infty \frac{\partial \chi(t,S,\mu)}{\partial S} \mu^3 d\mu = \frac{\partial [\chi]_3}{\partial S}, \quad (30)$$

$$\int_0^\infty f(t,S) \frac{\partial \chi(t,S,\mu)}{\partial \mu} \mu^2 d\mu = f(t,S) \int_0^\infty \left(\frac{\partial [\mu \cdot \chi(t,S,\mu)]}{\partial \mu} - 2\mu\chi(t,S,\mu) \right) d\mu = -2 f(t,S) [\chi]_1, \quad (31)$$

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty [\varphi(t,S,\tilde{\mu},\mu)\tilde{\mu}\chi(t,S,\tilde{\mu})] d\tilde{\mu} - \mu\chi(t,S,\mu) \right\} \mu^2 d\mu = \left(\left(\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0} \right)^2 \left(1 + \frac{\sigma_\psi^{\ 2}}{\langle \mu_\psi \rangle^2} \right) [\chi]_1 - [\chi]_3 \right). \quad (32)$$

Подставляя (30)-(32) в (29), запишем уравнение баланса

$$\frac{\partial [\chi]_2}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_3}{\partial S} - 2 f [\chi]_1 = \lambda_{Plant} \left(\left(\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0} \right)^2 \left(1 + \frac{\sigma_\psi^{\ 2}}{\langle \mu_\psi \rangle^2} \right) [\chi]_1 - [\chi]_3 \right). \quad (33)$$

Объединяя (13), (25), (33), запишем общую систему уравнений для потоковых параметров производственного процесса:

$$\frac{\partial [\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_1}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial [\chi]_1}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_2}{\partial S} - f(t,S)[\chi]_0 = \lambda_{Plant} \left(\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0} [\chi]_1 - [\chi]_2 \right),$$

$$\frac{\partial [\chi]_k}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_{k+1}}{\partial S} + kf[\chi]_{k-1} = \int_0^\infty \mu^k \lambda_{Plant} \left\{ \int_0^\infty [\varphi(t,S,\tilde{\mu},\mu)\tilde{\mu}\chi(t,S,\tilde{\mu})] d\tilde{\mu} - \mu\chi \right\}.$$

Заметим, что модели поточных линий в трех-моментном описании в отечественной и зарубежной литературе не приводятся.

Вывод. Рассмотрена общая методика построения системы уравнений для многомоментной модели описания производственной поточной линии, основанная на использовании интегро-дифференциального кинетического уравнения, учитывающего обработку предметов труда при их движении по технологическому маршруту. Балансовые уравнения двухуровневого описания поточной линии являются незамкнуты. Возможность получить замкнутую систему уравнений основана на способах замыкание самозацепляющей цепочки балансовых уравнений методами малого параметра или заданием уравнений состояний для моментов высшего порядка. Следует отметить тот факт, что в зарубежной литературе широко используется уравнение состояния в виде clearing-функции для замыкания балансового уравнения относительно нулевого момента. В связи с этим подробно обсуждены ограничения, связанные с таким методом построения замкнутой системы уравнений. Также важным обстоятельством является и то, что при описании производственных поточных линий начальные моменты $\left[\chi\right]_k$ (4) выше второго не используются, что объясняется как сложностью построения балансовых уравнений высоких порядков, так и определением условий для их замыкания. Данное обстоятельство придает предложенной в настоящей статье методике построения практический интерес.

1.*Азаренков Н.А., Пигнастый О.М., Ходусов В.Д.* Кинетическая теория колебаний параметров поточной линии// Доповіді Національної академії наук України. – Київ: Видавничий дім "Академперіодика". – 2014. № 12: 36 – 43.

2.Бусленко *Н. П.* Математическое моделирование производственных процессов // – М.: Наука, 1964: 363 с.

3.*Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М.* Теория предприятия: Устойчивость функционирования массового производства и продвижение продукции на рынок // Харьков.: ХНУ. – 2003. – 272 с.

4.*Пигнастый О.М.* Статистическая теория производственных систем // Харьков: ХНУ, 2007. – 388 с

5. *Пигнастый О. М.* К вопросу подобия технологических процессов производственно-технических систем / *Н. А. Азаренков, О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов* // Доклад Национальной академии наук Украины. – Киев: Издательский дом "Академпериодика". - 2011. –№2– С. 29-35.

6. *Armbruster D., Kempf K.G.* The production planning problem: Clearing functions, variable leads times, delay equations and partial differential equations // Decision Policies for Production Networks.– Springer Verlag. – 2012.: 289 – 303.

7. *Ходусов В.Д.* Использование методов физической кинетики для исследования колебания параметров поточной линии / *В.Д.Ходусов,*

О.М.Пигнастый// - Восточно-европейский физический журнал. - Харьков: ХНУ. - 2014. - Vol.1. –№4. – С. 88-95.

8. *Пигнастый О.М.* О взаимосвязи микро- и макроописания производственно-технических систем / *О. М. Пигнастый, В.Я.Заруба* // Управление большими системами: труды Международной научно-практической конференции (Москва 17-19 ноября 2009). – Москва: ИПУ РАН, 2009. - С. 255-258

9.*Tian F., Willems S.P., Kempf K.G.* An iterative approach to item-level tactical production and inventory planning. // International Journal of Production Economics. – 2011. –№133: 439 – 450 .

10.*Vollmann T.E., Berry L., Whybark D.C., Jacobs F.R.* Manufacturing Planning and Control for Supply Chain Management // McGraw-Hill, New York, 2005. – 520 p.