Introduction to Dynamic Stochastic General Equilibrium Modeling with friction (DSGE)

Andrianady, Josué R. and Rajaonarison, Njakanasandratra R.

Ministère de l'Economie et des Finances, Madagascar, Université d'Antananarivo, Madagascar

13 March 2023

Introduction à la modélisation de type Modèle d'Equilibre Général Dynamique Stochastique avec friction (MEGDS)

Introduction to Dynamic Stochastic General Equilibrium Modeling with friction (DSGE)

Josué R. Andrianady [1] and Njakanasandratra R. Rajaonarison [2]

[1]Ministère de l'Economie et des Finances, Madagascar, jravahiny@gmail.com
[2]Université d'Antananarivo, Madagascar, njakanasandratra.rajaonarison@gmail.com

13 mars 2023

Résumé

Le présent document de travail a pour objectif de faire une introduction à la modélisation de type Modèle d'Equilibre Général Dynamique Stochastique avec friction (MEGDS) ou DSGE en anglais. Un modèle simple qui se base sur les acquis théoriques à partir de la littérature. Le modèle se compose de trois (3) agents qui se rencontrent sur le marché et l'économie est supposée ouverte c'est-à-dire ayant des relations avec le reste du monde.

***Mots clés**: DSGE, modèle d'équilibre général dynamique stochastique, friction.*

Abstract

The objective of this working paper is to provide an introduction to the Dynamic Stochastic General Equilibrium Model with Friction (DSGE). A simple model that is based on theoretical achievements from the literature. The model is composed of three (3) agents who meet on the market and the economy is assumed to be open, i.e. having relations with the rest of the world.

***Keywords**: DSGE, dynamic stochastic general equilibrium model, friction.*

Avertissement. Le contenu de la présente publication n'engage que les auteurs. Chacune des opinions exprimées est personnelle et ne peut en aucun cas être considérée comme représentative des points de vue de leurs entités de rattachement.

Disclaimer. The views expressed in this paper are those of the authors and do not necessarily reflect the views of the authors' organizations.

1 Structure de base de la modélisation MEGDS

Le modèle de base s'appuie sur la structure fondamentale rencontrée dans la majorité des modèles d'équilibre général DSGE. Cette structure est constituée de la façon suivante :

1. Un bloc décrivant l'offre de l'économie ;
2. Un bloc décrivant la demande de l'économie ;
3. Un bloc qui décrit les relations avec le reste du monde ;

4. Un bloc décrivant le comportement de l'Etat.

Chaque bloc est micro-fondé et traduit le comportement d'optimisation des agents de l'économie : entreprises, ménages et gouvernement. Il est possible, par ailleurs, d'ajouter un bloc représentant le reste du monde due à la situation de petite économie ouverte. Ces blocs interagissent de manière dynamique ; et autour desquels, un certain nombre de chocs viennent perturber le fonctionnement de l'économie.

2 Bloc offre

L'offre se structure autour d'une firme représentative qui fournit un bien unique qui est une hypothèse standard de la macroéconomie. En outre, on va se concentrer essentiellement sur le comportement d'une firme et supposer que toutes les autres firmes font la même chose. La fonction de production de la firme est de type *Cobb-Douglas* :

$$Y_t = a_t F(K_t, L_t) = a_t K^{\alpha} L^{1-\alpha}. \tag{1}$$

Y_t : Production de l'économie
K_t : Quantité de capital utilisée dans le processus de production
L_t : Quantité de main d'œuvre utilisée dans la production
α : La part de production qui rémunère le capital
$1-\alpha$: La part de production qui rémunère le travail
a_t : Affecte le progrès technique

Par ailleurs, on va également supposer que le capital se déprécie aux taux δ, que le marché des facteurs sont concurrentiels et qu'il est rémunéré à sa productivité marginale. Ce dernier s'obtient par la dérivée de la fonction de production par rapport au travail et au capital. Au final, notre bloc offre va être caractérisé par les équations ci-dessous :

$$r_t^k + \delta = a_t F_k(K_t, L_t). \tag{2}$$

$$W_t = a_t F_L(K_t, L_t). \tag{3}$$

r_t^k : Taux d'intérêt qui rémunère le capital
W_t : Salaire qui rémunère le travail

3 Bloc demande

Ce bloc se structure atour d'un ménage représentatif qui consomme ou offre son travail. Les préférences des ménages sont résumées par La fonction d'utilité utilisée ici est dite de type GHH (Greenwood - Hercowitz - Huffman, voir Greenwood & al. (1988)) ci-dessous qui est souvent utilisée dans la littérature pour les pays en développement :

$$E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, L_t) = E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{\left(C_t - \frac{L_t^{\omega}}{\omega}\right)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}. \tag{4}$$

C_t : Consommation courante du ménage

ω : Elasticité de substitution de l'offre de travail et de la consommation
β : Facteur d'escompte psychologique
σ : Elasticité de substitution temporelle au risques
L_t : Heure de travail

On suppose que le ménage accumule du capital physique qu'il loue à la firme contre une rémunération de r^K. De même, il loue le service de son travail contre un salaire de W. par la suite, il utilise ces ressources à chaque période pour consommer C_t et mener une activité d'accumulation de capital X_t. De ce fait, sa contrainte budgétaire se formule comme suit :

$$C_t + X_t = r_t^K K_t + W_t L_t. \tag{5}$$

L'activité d'accumulation du capital est la soustraction entre la quantité de capital de demain et actuelle plus l'ajout d'une friction Φ.

$$X_t = K_{t+1} - K_t + \Phi(K_{t+1}, K_t) K_t. \tag{6}$$

Où Φ correspond aux coût d'ajustement du capital :

$$\Phi(K_{t+1}, K_t) = \frac{\Phi}{2}(\frac{K_{t+1}}{K_t} - 1)^2. \tag{7}$$

En se basant sur l'équation (5), on introduit (6) et on obtient :

$$C_t + K_{t+1} - K_t + \Phi(K_{t+1}, K_t) K_t = r_t^K K_t + W_t L_t. \tag{8}$$

On va maintenant rendre cette contrainte budgétaire du ménage un peu plus général en incorporant le comportement optimal de la firme tout en maximisant le profit. De ce fait, en utilisant l'hypothèse de marché de facteurs concurrentiel en introduisant l'équation (2) et (3) du bloc offre dans la contrainte budgétaire du ménage, on obtient :

$$C_t + K_{t+1} - K_t + \Phi(K_{t+1}, K_t) K_t = (a_t F_k(K_t, L_t) - \delta) K_t + (a_t F_L(K_t, L_t)) L_t. \tag{9}$$

Or d'après le théorème d'Euler dans lequel si les facteurs sont rémunérés à leur productivité marginale et que les rendements d'échelle sont constants, alors la totalité de la richesse Y (avec $-\delta K_t$ dépréciation du capital) produite se répartit en rémunération de facteurs travail L et capital K. En outre :

$$(a_t F_k(K_t, L_t) - \delta) K_t + (a_t F_L(K_t, L_t)) L_t = Y_t - \delta K_t, \tag{10}$$

De ce fait, on peut avoir :

$$C_t + K_{t+1} - K_t + \Phi(K_{t+1}, K_t) K_t = Y_t - \delta K_t. \tag{11}$$

En réorganisant la contrainte budgétaire, nous obtenons la contrainte de ressources de l'économie :

$$Y_t = C_t + K_{t+1} - (1-\delta)\, K_t + \Phi(K_{t+1}, K_t) K_t. \tag{12}$$

En remarquant que l'investissement de l'économie s'écrit :

$$I_t = K_{t+1} - (1-\delta)\, K_t + \Phi(K_{t+1}, K_t) K_t. \tag{13}$$

La contrainte (39) peut donc être reformulée comme suit :

$$Y_t = C_t + I_t. \tag{14}$$

Nous pouvons d'ores et déjà formuler le programme d'optimisation du ménage :

$$\max_{C_t, L_t, K_{t+1}} E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{\left(C_t - \frac{L_t^{\omega}}{\omega}\right)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}. \tag{15}$$

$$Y_t = C_t + K_{t+1} - (1-\delta)\, K_t + \Phi(K_{t+1}, K_t) K_t. \tag{16}$$

On est ici dans une économie fermée avec absence du gouvernement. On obtient le lagrangien suivant qui est la somme entre la maximisation de la consommation du ménage et la contrainte budgétaire :

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{\left(C_t - \frac{L_t^{\omega}}{\omega}\right)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \lambda_t (Y_t - C_t - K_{t+1} + (1-\delta)\, K_t - \Phi(K_{t+1}, K_t) K_t). \tag{17}$$

4 Modèle déterministe

Après avoir effectué l'optimisation de la fonction d'utilité du ménage et celle de la firme représentative, nous obtenons les conditions de premier ordre (CPO).

4.1 Condition du premier ordre

$$L_t^{\omega-1} = (1-\alpha) \frac{Y_t}{L_t}. \tag{18}$$

$$E_t \left(1 + \phi \left(\frac{K_{t+1}}{K_t} - 1\right)\right) = \beta E_t \left(\frac{\lambda_t + 1}{\lambda_t} (\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}} + (1-\delta) + \frac{\Phi}{2} ((\frac{K_{t+1}}{K_t})^2 - 1))\right) \tag{19}$$

$$Y_t = C_t + K_{t+1} - (1-\delta)\, K_t + \Phi(K_{t+1}, K_t) K_t. \tag{20}$$

$$Y_t = a_t K^{\alpha} L^{1-\alpha}. \tag{21}$$

4.2 Etat stationnaire

Les solutions à l'état stationnaire, dont les variables seront en fonction des paramètres, sont les suivantes :

$$L = (1-\alpha)^{1/(\omega-1)}(((1/\beta)-1+\delta)/\alpha)^{\alpha/((\alpha-1)*(\omega-1))}. \tag{22}$$

$$K = L((((1/\beta)-1+\delta)/\alpha)^{1/(\alpha-1))}. \tag{23}$$

$$Y_t = aK^\alpha L^{1-\alpha}. \tag{24}$$

$$C = Y - \delta K. \tag{25}$$

5 Ajout de composante stochastique

5.1 Choc de productivité des facteurs

Nous allons ajouter un premier choc macroéconomique au modèle affectant l'offre au niveau de la productivité totale des facteurs :

$$Y_t = a_t F(K_t, L_t) = a_t K^\alpha L^{1-\alpha}. \tag{26}$$

Ceci revient à rajouter une variable exogène au modèle qui sera une nouvelle variable d'état exogène, de ce fait, le paramètre a va devenir la variable a_t. En outre, des éléments extérieurs au modèle vont modifier la production de l'économie de façon stochastique et transitoire et le modèle nous permet de calculer l'influence de ces éléments sur toutes les variables du modèle.

Nous supposons que ce choc est transitoire et suit un processus autoregressif d'ordre 1 (AR(1)) :

$$ln(a_t) = \rho_\alpha ln(a_{t-1}) + \epsilon_t^a \tag{27}$$

Avec ϵ_t^a suit une loi normale $N(0, \sigma_a^2)$

La valeur courante de a dépend de la valeur à la période précédente et d'une innovation ϵ_t^a. Ce processus est stationnaire et transitoire car nous supposons que la persistance du processus est une partie de l'innovation à la période courante se propage à la période suivante mais cette influence s'aménuise dans le temps.

Nous introduisons deux nouveau paramètres ρ_a et σ_a et on supprime a. A l'état stationnaire, l'innovation retourne à sa moyenne donc ϵ_t^a= 0.

La variable a_t perd son aspect dynamique et devient constante, ce qui fait que l'équation précédente devient :

$$ln(a_t) = \rho_\alpha ln(a) + 0.(1-\rho_\alpha)ln(a) = 0.ln(a) = 0 \tag{28}$$

$$(1-\rho_\alpha)ln(a) = 0. \tag{29}$$

$$ln(a) = 0. \tag{30}$$

$$\exp(ln(a)) = \exp(0). \tag{31}$$

$$a = 1. \tag{32}$$

La nouvelle état stationnaire est la suivante :

$$L = (1-\alpha)^{1/(\omega-1)}(((1/\beta)-1+\delta)/\alpha)^{\alpha/((\alpha-1)*(\omega-1))}. \tag{33}$$

$$K = L((((1/\beta)-1+\delta)/\alpha)^{1/(\alpha-1))}. \tag{34}$$

$$Y_t = aK^\alpha L^{1-\alpha}. \tag{35}$$

$$C = Y - \delta K. \tag{36}$$

$$a = 1. \tag{37}$$

5.2 Ouverture du modèle

Nous allons introduire dans cette section de manière simplifiée des éléments de petite économie ouverte avec les conditions suivantes :

- Une ouverture de l'économie c'est-à-dire que le pays a des relations avec l'extérieur à travers l'accès au marché financier international ;
- Le pays n'a aucune influence sur le taux d'intérêt international sur ce marché ;
- Le ménage représentatif a accès au marché international pour s'endetter, nous appelons la dette du ménage D_t.

Nous notons q_t le coût d'achat d'une dette et nous définissons :

$$q_t = \frac{1}{1+r_t+\Psi(D_t+1)} \tag{38}$$

Avec $\Psi(D_{t+1}) = \psi(\exp(D_{t+1}-\bar{d})-1)$ détermine la sensibilité du coût de l'endettement extérieru au niveau de dette courant. Ainsi, nous pouvons mettre à jour la contrainte de ressources (contrainte budgétaire) de l'économie :

$$Y_t + q_t D_{t+1} = C_t + K_{t+1} - (1-\delta)\,K_t + D_t + \Phi(K_{t+1}, K_t)K_t. \tag{39}$$

En terme de notation, nous définissons $R_t = 1 + r_t$ et R_t^* le taux d'intérêt brut sur le marché financier international. Dans un premier temps, nous supposons que le taux d'intérêt international est constant et que $R_t = R_t^*$.

Dans la situation suivante, nous pouvons faire une ré-optimisation du modèle et determiner une nouvelle CPO par rapport à D_{t+1} :

$$\frac{1}{q_t}\beta E_t \frac{(C_{t+1} - \frac{L_{t+1}^{\omega}}{\omega})^{-\sigma}}{(C_t - \frac{L_t^{\omega}}{\omega})^{-\sigma}}. \tag{40}$$

6 Le comportement de l'Etat

Dans ce modèle, l'Etat prélève des taxes T_t pour financer la dépense publique du gouvernement G_t. la contrainte budgétaire de l'Etat doit également être en équilibre de sorte que : $G_t = T_t$. Nous pouvons mettre à jour la contrainte de ressource(contrainte budgétaire) de l'économie en remplaçant les taxes dedans grâce à la contrainte de l'Etat :

$$Y_t + q_t D_{t+1} = C_t + G_t + K_{t+1} - (1-\delta) K_t + D_t + \Phi(K_{t+1}, K_t) K_t. \tag{41}$$

L'ajout du bloc Etat avec les relations avec le reste du monde nous conduit à introduire de nouveaux chocs macroéconomiques :

1. Un choc de dépense publique ;
2. Un choc sur l'évolution du taux d'intérêt international.

Pour le choc de dépense publique, nous supposons qu'à l'état stationnaire, cette dépense est une fraction constante $\kappa^{\frac{G}{Y}}$ du PIB à l'état stationnaire. Le processus stochastique qui décrit l'évolution de la dépense publique est un processus $AR(1)$:

$$\ln(G_t) = (1-\rho_g)\ln(\bar{G}) + \rho_g \ln(G_{t-1}) + \epsilon_t^g, \tag{42}$$

Où ϵ_t^g suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma_g^2)$.

Nous remarquons qu'à l'état stationnaire $G = \bar{G} = \kappa^{\frac{G}{Y}}$. Sans cette dernière, G_t vaudrait en moyenne 1, ce qui ne correspond à aucune donne empirique. Par ailleurs, nous pouvons utiliser la littérature pour trouver une valeur du paramètre $\kappa^{\frac{G}{Y}}$ qui correspond au pays que nous étudions et utiliser pour déterminer $\bar{Y}$, le PIB de l'état stationnaire.

En ce qui concerne le choc sur l'évolution du taux d'intérêt international, nous supposons également que R_t^* suit un processus stochastique exogène de type $AR(1)$, d'où,

$$\ln(R_t^*) = (1-\rho_R)\ln(\bar{R}^*) + \rho_R \ln(R_{t-1}^*) + \epsilon_t^R, \tag{43}$$

Où ϵ_t^R suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma_R^2)$.

$\bar{R}^*$ correspond à la valeur moyenne de long terme du taux d'intérêt international. Ces chocs macroéconomiques additionnels permettrons de mieux comprendre la dynamique de l'évolution de l'économie. Enfin, en utilisant les données, il est possible d'estimer les valeurs des paramètres liés à ces chocs.

Références

Fernandez-Villaverde, J. (2010), “The econometrics of dsge models„.Series 1(1-2), 3–49..

Greenwood & al. (1988), “Investment, Capacity Utilization, and the Real Business Cycle„. The American Economic Review.

Luca & Sargent (1978), “Macroeconomic revolution on shaky grounds : Lucas/Sargent critique's inherent contradictions„. (University of Wuppertal).

Mankiw G. et D. Romer (1991), “The New Keynesian Approach to Dynamic General Equilibrium Modeling : Models, Methods and Macroeconomic Policy Evaluation„.

Ruge-Murcia, F. J. (2007) “Methods to estimate dynamic stochastic general equilibrium models. Journal of Economic Dynamics and Control 31(8)„2599–2636.

Sims Eric (2017), “ Graduate Macro Theory II : Fiscal Policy in RBC Model„ (University of Notre Dame).