Forecasting key Russian macroeconomic variables using a TVP model with Bayesian shrinkage

Polbin, Andrey and Shumilov, Andrei

Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration

2024

Прогнозирование основных российских макроэкономических показателей с помощью TVP-модели с байесовским сжатием параметров

А.В. Полбин[1], А.В. Шумилов[2]

Аннотация: В работе тестируется качество прогнозов российского ВВП и элементов его использования (потребления домашних хозяйств, валового накопления основного капитала, экспорта и импорта) с помощью модели с байесовским сжатием меняющихся во времени параметров (TVP) на основе априорного иерархического нормального-гамма распределения. Модели такого типа позволяют учитывать возможную нелинейность взаимосвязей и одновременно бороться с проблемой переобучения. На выборке квартальных данных 2001–2022 гг. показано, что по сравнению с более простыми бенчмарками байесовская TVP-модель с экзогенными предикторами дает более точные прогнозы ВВП на 2-4 квартала вперед, инвестиций в основной капитал – на 1 и 3 квартала вперед. При прогнозировании других компонентов ВВП байесовские TVP-модели не демонстрируют систематического превосходства над другими моделями.

Ключевые слова: прогнозирование, ВВП России и его компоненты, модель с меняющимися во времени параметрами, байесовское сжатие параметров, априорное нормальное-гамма распределение.

Классификация JEL: C22, C53.

[1] Полбин Андрей Владимирович, ведущий научный сотрудник Центра математического моделирования экономических процессов РАНХиГС при Президенте Российской Федерации, заведующий Международной лабораторией математического моделирования экономических процессов Института экономической политики имени Е.Т. Гайдара, канд. экон. наук (Москва), e-mail: apolbin@iep.ru

[2] Шумилов Андрей Валерьевич, старший научный сотрудник РАНХиГС при Президенте Российской Федерации, канд. физ.-мат. наук (Москва), e-mail: shumilov-av@ranepa.ru

Введение

Прогнозирование макроэкономических показателей является неотъемлемым элементом при выработке эффективных мер экономической политики для стабилизации делового цикла, для стимулирования экономического роста, для своевременной поддержки уязвимых слоев населения, для предотвращения развития пузырей на финансовых рынках. Важной проблемой при разработке прогнозных моделей является их нестабильность - модели, продемонстрировавшие успехи в прогнозировании на отдельных периодах времени, терпят крах при прогнозировании на последующих временных промежутках и уступают в качестве прогнозирования моделям, ранее демонстрировавшим посредственные способности в прогнозировании. Данная проблема характерна как для зарубежных экономик, так и для российской экономики. Объяснением этому могут являться как изменения в проводимой экономической политике в стране, так и изменения в условиях функционирования экономики. Например, в последние годы все больше усиливается санкционный фактор в функционировании российской экономики, что, по-видимому, будет приводить к серьезным изменениям в динамических характеристиках и взаимосвязях российских макроэкономических показателей. В этих условиях перспективным инструментарием для прогнозирования динамики отечественной экономики может являться подход прогнозирования с помощью моделей с меняющимися во времени параметрами. Данные модели активно развиваются в зарубежной литературе и демонстрируют определенные успехи в прогнозировании. Современные модели с меняющимися параметрами способны идентифицировать как изменения в значениях коэффициентов модели, так и идентифицировать смену в релевантных предикторах (в некоторый момент времени может произойти смена подмножества предикторов для целевой переменной).

Известным недостатком использования большого числа предикторов для прогнозирования макропеременных на не слишком длинных выборках является риск переобучения – вследствие малого количества наблюдений относительно числа предикторов модель дает хорошие внутривыборочные прогнозы и неточные вневыборочные. Популярным средством решения этой проблемы являются методики сжатия (*англ.* shrinkage) параметров, вводящие некоторый штраф, который препятствует переобучению модели, вызванному неоправданно высокими оценками коэффициентов, смещая их к нулю. В случае байесовского оценивания это выражается в наложении априорных ограничений на распределения коэффициентов модели (De Mol et al., 2008).

Для класса моделей с меняющимися во времени параметрами (TVP), позволяющих учесть возможную нелинейность взаимосвязей, разными авторами было предложено большое количество методик байесовской регуляризации, при использовании которых коэффициенты при регрессорах автоматически разделяются на три категории: меняющиеся во времени, постоянные во времени и обнуляющиеся коэффициенты. В частности, в работе (Frühwirth-Schnatter, Wagner, 2010) в качестве априорного было рассмотрено двухкомпонентное распределение пик-плато (spike and slab), где первая компонента (пик) оказывает гораздо более сильное глобальное сжимающее воздействие на параметры модели, чем вторая (плато). В исследовании (Belmonte et al., 2014) была предложена методика байесовской иерархической регуляризации LASSO – аналог регуляризации LASSO (Least Absolute Shrinkage and Selection Operator) в традиционных моделях. В работе (Bitto, Frühwirth-Schnatter, 2019) была разработана методика байесовского сжатия коэффициентов TVP-модели на основе априорного нормального-гамма распределения, которая по сравнению с байесовским LASSO позволяет более четко идентифицировать коэффициенты, постоянные во времени, и избежать излишнего сжатия коэффициентов модели, меняющихся во времени. В работе (Cadonna et al., 2020) было предложено расширение нормального-гамма распределения – априорное нормальное-гамма-гамма распределение параметров, обладающее свойствами байесовского усреднения моделей (BMA), являющегося общепринятым подходом к проблеме неопределенности процесса, генерирующего данные. Использование указанных методик байесовской регуляризации для прогнозирования таких макропеременных, как инфляция в ЕС и США, показало, что они дают меньшую ошибку прогноза, чем традиционные эконометрические модели, не обладающим сжимающими свойствами.

В настоящей работе методика байесовского сжатия работы (Bitto, Frühwirth-Schnatter, 2019), реализованная в пакете shrinkTVP для языка программирования R (Knaus et al., 2021), применяется для прогнозирования квартального российского ВВП и ключевых элементов его использования (потребления домохозяйств, валового накопления основного капитала, экспорта и импорта)[3]. В следующем разделе исследования описывается TVP-модель с байесовским сжатием параметров на основе априорного нормального-гамма распределения. В разделе 2 обсуждаются используемые данные и альтернативные модели для прогнозирования макропеременных. Далее приводятся результаты прогнозных экспериментов. В заключении представлены выводы работы.

[3] Для прогнозирования месячной инфляции в России данная методика была использована в работе (Полбин, Шумилов, 2023), где было показано, что модель с байесовским сжатием параметров по сравнению с рядом стандартных альтернатив дает более точные прогнозы инфляции в период 2011-2022 гг. на горизонтах менее полугода.

1. TVP-модель с байесовским сжатием параметров

Модель регрессии с меняющимися во времени параметрами (TVP) записывается как:

$$y_t = \boldsymbol{x}_t \boldsymbol{\beta}_t + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2), \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\beta}_t = \boldsymbol{\beta}_{t-1} + \boldsymbol{w}_t, \boldsymbol{w}_t \sim N_n(0, \boldsymbol{Q}), \quad (2)$$

где y_t – зависимая переменная, $\boldsymbol{x}_t = (x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tn})$ – вектор n регрессоров (x_{t1} – константа), $\boldsymbol{\beta}_t$ – вектор коэффициентов, следующий процессу случайного блуждания. Предполагается, что $\boldsymbol{Q} = \mathrm{Diag}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ (изменения коэффициентов не зависят друг от друга), и что неизвестное начальное значение $\boldsymbol{\beta}_0$ имеет нормальное распределение со средним $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$: $\beta_0 \sim N_n(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{Q})$.

С помощью определения $\tilde{\beta}_{ti} = \frac{\beta_{ti} - \beta_i}{\sqrt{\theta_i}}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ модель (1), (2) можно переписать в эквивалентном так называемом нецентрированном виде (Frühwirth-Schnatter, Wagner, 2010):

$$y_t = \boldsymbol{x}_t \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{x}_t \,\mathrm{Diag}\left(\sqrt{\theta_1}, \sqrt{\theta_2}, \dots, \sqrt{\theta_n}\right) \tilde{\boldsymbol{\beta}}_t + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2), \quad (3)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_t = \tilde{\boldsymbol{\beta}}_{t-1} + \tilde{\boldsymbol{u}}_t, \tilde{\boldsymbol{u}}_t \sim N_n(0, I_n), \quad (4)$$

где $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_0 \sim N_n(\boldsymbol{0}, I_n)$, I_n – единичная матрица. В данной модели пространства состояний с вектором состояний $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_t = \left(\tilde{\beta}_{t1}, \tilde{\beta}_{t2}, \dots, \tilde{\beta}_{tn}\right)'$ уравнение измерений (3) содержит все неизвестные параметры (постоянные во времени коэффициенты $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ и стандартные отклонения инноваций процесса случайного блуждания $\sqrt{\theta_1}, \sqrt{\theta_2}, \dots, \sqrt{\theta_n}$), в то время как уравнение состояний (4) от этих параметров не зависит.

Байесовское оценивание нецентрированной TVP-модели (3), (4) осуществляется на основе использования сжимающего нормального-гамма (NG) априорного распределения (Griffin, Brown, 2010) для параметров $\sqrt{\theta_j}$ и β_j (условного нормального распределения с дисперсией, имеющей гамма-распределение):

$$\sqrt{\theta_j} \,\middle|\, \xi_j^2 \sim N\left(0, \xi_j^2\right), \quad \xi_j^2 \,\middle|\, a^{\xi}, \kappa_B^2 \sim \mathcal{G}\left(a^{\xi}, \frac{a^{\xi} \kappa_B^2}{2}\right),$$

$$\beta_j \,\middle|\, \tau_j^2 \sim N\left(0, \tau_j^2\right), \quad \tau_j^2 \,\middle|\, a^{\tau}, \lambda_B^2 \sim \mathcal{G}\left(a^{\tau}, \frac{a^{\tau} \lambda_B^2}{2}\right),$$

где ξ_j^2, τ_j^2 – локальные, а a^{ξ}, κ_B^2, a^{τ}, λ_B^2 – глобальные параметры “сжатия”. В частности, чем больше κ_B^2 (λ_B^2), тем б*о*льшая вероятностная масса сконцентрирована вокруг нуля в априорных распределениях всех параметров $\sqrt{\theta_j}$ (β_j).

В рассматриваемом нами полностью иерархическом варианте сжимающего NG-распределения глобальные параметры сжатия также имеют собственные априорные распределения. Согласно (Knaus et al., 2021), параметры κ_B^2, λ_B^2, a^ξ и a^τ характеризуются априорными гамма-распределениями:

$$\kappa_B^2 \sim \mathcal{G}(d_1, d_2), \qquad \lambda_B^2 \sim \mathcal{G}(e_1, e_2),$$
$$a^\xi \sim \mathcal{G}\big(\alpha_{a^\xi}, \alpha_{a^\xi}\beta_{a^\xi}\big), \qquad a^\tau \sim \mathcal{G}(\alpha_{a^\tau}, \alpha_{a^\tau}\beta_{a^\tau}),$$

где задаются следующие значения гиперпараметров: $d_1 = d_2 = e_1 = e_2 = 0{,}001, \alpha_{a^\xi} = \alpha_{a^\tau} = 5, \beta_{a^\xi} = \beta_{a^\tau} = 10$. При таком выборе значений априорные средние $\mathrm{E}\big(a^\xi\big) = \mathrm{E}(a^\tau) = 0{,}1$.

Для гомоскедастичной дисперсии ошибок σ^2 в уравнении измерения используется иерархическое априорное распределение, где параметр масштаба C_0 обратного гамма-распределения для σ^2 имеет гамма-распределение:

$$\sigma^2 \mid C_0 \sim \mathcal{G}^{-1}(c_0, C_0), C_0 \sim \mathcal{G}(g_0, G_0).$$

Значения гиперпараметров c_0, g_0 и G_0 выбираются следующими: $c_0 = 2{,}5, g_0 = 5, G_0 = g_0/(c_0 - 1)$.

Апостериорные распределения параметров TVP-модели оцениваются методом Монте-Карло по схеме марковских цепей (Bitto, Frühwirth-Schnatter, 2019; Cadonna et al., 2020). Общее число итераций марковской цепи в наших расчетах берется равным 35000. Первые 5000 из этих итераций отбрасываются (burn-in). Оставшиеся 30000 используются для получения характеристик апостериорных распределений параметров.

2. Описание данных и моделей для прогнозирования ВВП и его компонент

Для построения прогнозов в настоящем исследовании используются квартальные данные за период 2001-2022 гг. Зависимыми переменными являются ВВП и элементы его использования в постоянных ценах: потребление домашних хозяйств, валовое накопление основного капитала, экспорт и импорт (источник данных: Росстат[4]). В качестве предикторов ВВП и его компонент берутся следующие показатели:

1. Среднеквартальная ставка по межбанковским однодневным кредитам MIACR (Источник: ЦБ РФ).
2. Среднеквартальный курс российского рубля к доллару США (Источник: ЦБ РФ).
3. Денежный агрегат М2 на конец квартала (Источник: ЦБ РФ).

[4] Источник: https://rosstat.gov.ru/statistics/accounts.

4. Среднеквартальная мировая цена на нефть марки Brent (Источник: International Monetary Fund).
5. Индекс промышленного производства по ОКВЭД (Источник: Росстат).
6. Оборот розничной торговли в постоянных ценах (Источник: Росстат).

Все используемые переменные преобразованы к сезонно-дифференцированному виду $\ln\left(\frac{x_t}{x_{t-4}}\right)$, где x_t – оригинальный ряд[5]. Такой подход позволяет избавиться от сезонности в данных без применения сложных методик, затрудняющих прогнозирование.

В виде, удобном для прямого прогнозирования на h кварталов вперед, TVP-зависимость ВВП или какой-то его компоненты y_{t+h} от вышеуказанных шести предикторов $\mathbf{z}_t$ и собственных лагов записывается как:

$$y_{t+h} = \sum_{j=0}^{p-1} \phi_{jt} y_{t-j} + \mathbf{z}_t \gamma_t + \varepsilon_{t+h}, \;\; \varepsilon_{t+h} \sim N(0, \sigma^2). \quad (5)$$

По своим прогнозным свойствам байесовские модели квартального ВВП и его компонент TVP-NG-AR(p)-Pred вида (5), оцениваемые на основе иерархического априорного нормального-гамма распределения, сравниваются с более простыми бенчмарками. К таковым относятся оцениваемый с помощью МНК линейный аналог TVP-модели (OLS-AR(p)-Pred), линейная авторегрессия без включения регрессоров $\mathbf{z}_t$ (OLS-AR(p)) и модель с меняющимися во времени параметрами без регрессоров $\mathbf{z}_t$ (TVP-NG-AR(p)), оцениваемая на основе сжимающего нормального-гамма распределения. Вышеперечисленные модели рассмотрены в вариантах с количеством лагов зависимой переменной $p \in \{1, 2\}$, поскольку минимальное значение информационного критерия Шварца в авторегрессионных моделях всех макропоказателей достигается при числе лагов, не превышающем 2.

Для оценки качества прогнозирования моделей ВВП и его компонент на горизонтах от 1 до 6 кварталов используется тестовая выборка с 1 кв. 2015 г. по 4 кв. 2022 г., на которой строятся прямые точечные прогнозы на основе расширяющегося окна оценивания (начальная обучающая выборка охватывает период 2001–2014 гг.). Отметим, что для байесовских моделей точечный прогноз на h шагов вперед рассчитывается как математическое ожидание π_{t+h} на основе оцененной предсказательной плотности $p(\pi_{t+h}|Data_t)$ (функция eval_pred_dens в пакете shrinkTVP). Для линейных моделей без предикторов OLS-AR(p) на тестовой выборке строятся также итеративные точечные прогнозы Iter-OLS-AR(p).

[5] Исключение – ряд ставки межбанковского кредитования MIACR. Он стационарный и не имеет сезонности и, соответственно, берется в исходном виде.

Регрессионные модели по качеству прогнозов дополнительно сравниваются с наивной моделью, где в качестве прогноза берется значение того или иного макропоказателя за последний квартал обучающей выборки.

3. Результаты прогнозирования

Для оценки качества прогнозирования конкурирующих моделей мы используем два стандартных показателя – среднеквадратичную ошибку прогноза (MSFE, Mean Squared Forecast Error) и среднюю абсолютную ошибку прогноза (MAFE, Mean Absolute Forecast Error):

$$\mathrm{MSFE} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} (\hat{y}_t - y_t)^2, \mathrm{MAFE} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} (|\hat{y}_t - y_t|),$$

где $\hat{y}_t$ – прогнозное значение того или иного макроэкономического показателя, y_t – фактическое значение, T – количество точечных прогнозов на тестовой выборке.

Результаты расчета статистик MSFE и MAFE для прогнозов альтернативных моделей сезонно-дифференцированного ВВП в постоянных ценах на 1-6 кварталов вперед в относительном виде (100% – MSFE и MAFE наивной модели) приведены в таблице 1.

По качеству прогнозирования, измеряемому MSFE, на горизонте 1 квартал лучшей среди альтернатив оказывается авторегрессионная байесовская модель без предикторов TVP-NG-AR(1) с отрывом от ближайшего конкурента из других категорий (OLS-AR(1)) всего лишь в 1%. На горизонтах 2-4 квартала наиболее точные прогнозы ВВП согласно MSFE дают баейсовские модели с предикторами TVP-NG-AR(2)-Pred и TVP-NG-AR(1)-Pred. На указанных горизонтах преимущество лидера над второй по MSFE моделью из других категорий составляет 6%, 17% и 5% соответственно. На горизонтах 5 и 6 кварталов лучшей по качеству становится линейная авторегрессионная модель с одни лагом ВВП (итеративное прогнозирование). Модели с байесовским сжатием параметров при этом дают намного менее точные прогнозы ВВП, чем линейная авторегрессионная модель OLS-AR(1).

Если в качестве показателя качества прогнозирования ВВП рассматривать MAFE, то на горизонтах 1 и 2 квартала лучшей моделью становится линейная авторегрессионная модель с одним лагом. Преимущество модели OLS-AR(1) над TVP-NG-AR(1) (горизонт – 1 квартал) и TVP-NG-AR(2)-Pred (горизонт – 2 квартала) при этом относительно невелико (2% и 5% соответственно). На горизонтах 3 и 4 квартала, как и прежде, наиболее точные прогнозы ВВП дают баейсовские модели с предикторами TVP-NG-AR(2)-Pred и TVP-NG-AR(1)-Pred. На горизонтах 5 и 6 кварталов лучшей становится линейная авторегрессионная модель с одни лагом ВВП (итеративная схема прогнозирования). Как и в случае показателя

MSFE, на больших горизонтах TVP-модели с байесовским сжатием параметров сильно уступают лидеру в качестве прогнозирования.

Таблица 1 – Относительные ошибки прогнозирования (MSFE и MAFE) альтернативных моделей ВВП

Модель	**Метрика**	**Горизонт прогнозирования, кварталы**					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Наивная	RMSE	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	MAFE	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
OLS-AR(1)	RMSE	0,91	0,79	0,66	0,53	**0,60**	**0,63**
	MAFE	**0,91**	**0,83**	0,82	0,80	0,81	0,84
OLS-AR(2)	RMSE	1,17	0,94	0,66	0,56	0,61	0,63
	MAFE	*1,11*	1,00	0,88	0,83	0,82	0,84
Iter-OLS-AR(1)	RMSE	0,91	0,83	0,76	0,69	0,66	0,66
	MAFE	**0,91**	0,86	0,85	0,80	**0,77**	**0,79**
Iter-OLS-AR(2)	RMSE	1,17	0,98	0,76	0,75	0,69	0,72
	MAFE	1,11	1,00	0,95	0,92	0,92	0,96
TVP-NG-AR(1)	RMSE	**0,90**	0,98	0,84	0,67	1,75	0,91
	MAFE	0,93	0,96	0,93	0,82	1,25	1,03
TVP-NG-AR(2)	RMSE	1,13	0,84	0,82	1,18	1,39	0,90
	MAFE	1,10	0,92	0,88	1,05	1,16	1,02
OLS-AR(1)-Pred	RMSE	0,97	*1,16*	*1,22*	1,16	1,60	1,44
	MAFE	0,99	*1,23*	*1,32*	1,23	1,40	1,36
OLS-AR(2)-Pred	RMSE	0,94	0,88	0,98	*1,20*	1,85	*1,77*
	MAFE	1,04	1,08	1,16	*1,28*	*1,48*	*1,52*
TVP-NG-AR(1)-Pred	RMSE	*1,19*	0,94	0,55	**0,50**	*1,91*	1,43
	MAFE	1,04	0,88	0,75	**0,76**	1,45	1,27
TVP-NG-AR(2)-Pred	RMSE	0,98	**0,74**	**0,55**	0,67	1,53	1,21
	MAFE	0,98	0,88	**0,74**	0,84	1,34	1,21

Примечание. Жирным шрифтом выделено наименьшее значение ошибки для каждого горизонта прогнозирования, курсивом – наибольшее.

Результаты расчета показателей MSFE и MAFE прогнозов конкурирующих моделей потребления домашних хозяйств в постоянных ценах представлены в таблице 2. Как видно из таблицы, по метрике MSFE байесовская модель с предикторами TVP-NG-AR(2)-Pred является лучшей на горизонте 1 квартала, имея очень небольшое преимущество в качестве прогнозирования перед ближайшей моделью из других категорий OLS-AR(1)-Pred в 1%. На горизонтах 2 и 3 квартала наиболее точные прогнозы согласно MSFE дают линейные авторегрессионные модели с предикторами с одним и двумя лагами потребления соответственно. На горизонтах от 4 до 6 кварталов лучшими являются линейные авторегрессионные модели с одним и двумя лагами потребления. Отметим, что на горизонтах 4-6 кварталов байесовские модели с предикторами существенно уступают наилучшим альтернативам (разница в качестве прогнозирования составляет как минимум 25%).

По качеству прогнозирования потребления домохозяйств, измеряемому с помощью MAFE, байесовская модель с предикторами TVP-NG-AR(1)-Pred оказывается лучшей только на одном горизонте в 2 квартала. На горизонте 1 квартал на первое место выходит байесовская модель без предикторов TVP-NG-AR(1) с преимуществом над второй по качеству моделью из других категорий OLS-AR(1)-Pred в 5%. На горизонте 3 квартала лучшей является линейная модель с предикторами OLS-AR(2)-Pred, а на горизонтах 4-6 кварталов – линейные AR-модели с одним и двумя лагами. В последнем случае байесовские модели с предикторами значительно уступают лидерам по показателю качества MAFE.

Таблица 2 – Относительные ошибки прогнозирования (MSFE и MAFE) альтернативных моделей потребления домохозяйств

Модель	**Метрика**	**Горизонт прогнозирования, кварталы**					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Наивная	RMSE	1,00	1,00	*1,00*	1,00	*1,00*	*1,00*
	MAFE	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
OLS-AR(1)	RMSE	0,89	0,81	0,73	0,58	**0,56**	**0,53**
	MAFE	0,93	0,90	0,81	0,73	**0,74**	**0,72**
OLS-AR(2)	RMSE	*1,01*	*1,02*	0,76	0,65	0,76	0,67
	MAFE	*1,04*	0,99	0,81	**0,69**	0,78	0,78
Iter-OLS-AR(1)	RMSE	0,89	0,81	0,73	0,70	0,66	0,69
	MAFE	0,93	0,89	0,85	0,83	0,83	0,86
Iter-OLS-AR(2)	RMSE	*1,01*	0,91	0,83	0,75	0,63	0,59
	MAFE	*1,04*	0,95	0,86	0,80	0,75	0,73
TVP-NG-AR(1)	RMSE	0,80	0,92	0,95	0,73	0,85	0,82
	MAFE	**0,86**	0,98	0,99	0,88	0,98	0,98
TVP-NG-AR(2)	RMSE	0,83	0,94	0,87	0,77	0,82	0,76
	MAFE	0,89	0,97	0,89	0,91	0,98	0,93
OLS-AR(1)-Pred	RMSE	0,76	**0,64**	0,68	**0,57**	0,72	0,90
	MAFE	0,91	0,80	0,83	0,87	0,95	1,12
OLS-AR(2)-Pred	RMSE	0,77	0,68	**0,67**	0,57	0,72	0,94
	MAFE	0,91	0,80	**0,79**	0,90	0,95	*1,15*
TVP-NG-AR(1)-Pred	RMSE	0,75	0,71	0,75	*1,03*	0,93	0,71
	MAFE	0,94	**0,77**	0,84	*1,12*	*1,06*	0,93
TVP-NG-AR(2)-Pred	RMSE	**0,75**	0,72	0,83	0,98	0,91	0,71
	MAFE	0,95	0,79	0,91	1,10	1,06	0,93

Примечание. Жирным шрифтом выделено наименьшее значение ошибки для каждого горизонта прогнозирования, курсивом – наибольшее.

Значения показателей MSFE и MAFE для прогнозов разных моделей валового накопления основного капитала в постоянных ценах приведены в таблице 3. Из таблицы следует, что на горизонтах 1 и 3 квартала наилучшее качество прогноза по MSFE имеет байесовская модель с предикторами TVP-NG-AR(1)-Pred. Эта модель на указанных горизонтах превосходит вторую по метрике MSFE модель из других категорий (линейную авторегрессию с одним лагом) на 8% и 4% соответственно. На горизонте 2 квартала наилучший результат показывает линейная авторегрессионная модель с двумя лагами (итерационный прогноз). Разница в качестве между ней и ближайшим конкурентом из моделей с байесовским сжатием параметров (TVP-NG-AR(1)-Pred) составляет 19%. На горизонтах от 4 до 6 кварталов на первое место по качеству прогнозирования, измеряемому MSFE, выходит линейная авторегрессионная модель с одним лагом (прямой прогноз), превосходя лучшую модель с байесовским сжатием параметров (с предикторами или без них) как минимум на 25%.

При оценивании качества прогнозирования валового накопления основного капитала с помощью метрики MAFE относительная расстановка байесовских и конкурирующих с ними моделей почти не меняется. Модель с предикторами с байесовским сжатием параметров TVP-NG-AR(1)-Pred превосходит все альтернативные на горизонтах прогнозирования 1 и 3 квартала. На горизонте 2 квартала наилучшее качество показывает линейная авторегрессионная модель с двумя лагами (итерационная схема прогнозирования), а на горизонтах 4-6 кварталов – линейная авторегрессионная модель с одним лагом (прямое прогнозирование).

Таблица 3 – Относительные ошибки прогнозирования (MSFE и MAFE) альтернативных моделей валового накопления основного капитала

Модель	**Метрика**	**Горизонт прогнозирования, кварталы**					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Наивная	RMSE	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	MAFE	*1,00*	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
OLS-AR(1)	RMSE	0,92	0,84	0,69	**0,51**	**0,41**	**0,32**
	MAFE	0,94	0,93	0,81	**0,68**	**0,66**	**0,55**
OLS-AR(2)	RMSE	*1,06*	0,95	0,74	0,61	0,45	0,34
	MAFE	0,98	0,89	0,80	0,73	0,66	0,57
Iter-OLS-AR(1)	RMSE	0,92	0,86	0,78	0,68	0,61	0,54
	MAFE	0,94	0,95	0,87	0,84	0,80	0,74
Iter-OLS-AR(2)	RMSE	*1,06*	**0,81**	0,69	0,57	0,45	0,35
	MAFE	0,98	**0,85**	0,79	0,75	0,70	0,63
TVP-NG-AR(1)	RMSE	0,92	1,05	0,99	0,97	1,02	0,85
	MAFE	0,94	1,04	0,97	0,95	1,03	0,89
TVP-NG-AR(2)	RMSE	0,97	1,08	1,08	1,00	0,98	0,85
	MAFE	0,93	1,05	0,95	0,96	1,01	0,90
OLS-AR(1)-Pred	RMSE	0,96	*1,37*	*1,65*	*1,82*	*1,93*	*1,64*

	MAFE	0,99	*1,10*	*1,24*	*1,22*	*1,39*	*1,19*
OLS-AR(2)-Pred	RMSE	0,96	1,14	1,47	1,61	1,81	1,55
	MAFE	0,97	0,98	1,23	1,18	1,34	1,14
TVP-NG-AR(1)-Pred	RMSE	**0,85**	1,00	**0,66**	0,90	0,84	0,42
	MAFE	**0,89**	1,02	**0,78**	0,91	0,91	0,65
TVP-NG-AR(2)-Pred	RMSE	0,86	1,04	1,00	0,96	0,85	0,42
	MAFE	0,90	1,05	1,00	0,97	0,90	0,66

Примечание. Жирным шрифтом выделено наименьшее значение ошибки для каждого горизонта прогнозирования, курсивом – наибольшее.

Рассмотрим далее статистики прогнозов различных моделей экспорта в постоянных ценах, представленные в таблице 4. По показателю MSFE на двух горизонтах прогнозирования из шести (1 и 5 кварталов) наилучшими среди альтернатив являются модели с предикторами с байесовским сжатием параметров: TVP-NG-AR(1)-Pred – на горизонте 1 квартал, TVP-NG-AR(2)-Pred – на горизонте 5 кварталов. На указанных горизонтах эти модели по качеству превосходят ближайшего конкурента из других категорий (TVP-NG-AR(2) и TVP-NG-AR(1)) на 15% и 39% соответственно. На трех горизонтах (3, 4 и 6 кварталов) наилучшее качество прогноза импорта показывает байесовская авторегрессионная модель без предикторов TVP-NG-AR(2) с существенным отрывом от моделей из других категорий. Наконец, на горизонте 2 квартала наиболее точный по MSFE прогноз дает линейная AR(1)-модель с итеративной схемой прогнозированием.

Из результатов расчета показателя качества прогнозирования MAFE видно, что на горизонте 1 квартал наилучшей является модель с предикторами с байесовским сжатием параметров TVP-NG-AR(1)-Pred, а на горизонте 5 кварталов – байесовская модель TVP-NG-AR(2)-Pred. Байесовская авторегрессионная модель без предикторов TVP-NG-AR(2) теперь дает наиболее точный среди альтернатив прогноз импорта только на горизонте 3 квартала, однако ее отставание от лучшей по качеству модели на горизонтах 4 и 6 кварталов OLS-AR(2) невелико. На горизонте 2 квартала, как и в случае показателя MSFE, наилучший результат по метрике MAFE показывает линейная AR(1)-модель с итеративной схемой прогнозирования.

Таблица 4 – Относительные ошибки прогнозирования (MSFE и MAFE) альтернативных моделей экспорта

Модель	**Метрика**	**Горизонт прогнозирования, кварталы**					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Наивная	RMSE	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	MAFE	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

OLS-AR(1)	RMSE	0,95	0,94	0,85	0,76	1,02	1,12
	MAFE	0,90	0,90	0,90	0,81	0,93	0,89
OLS-AR(2)	RMSE	0,96	0,95	0,85	0,72	0,98	1,09
	MAFE	0,91	0,92	0,87	**0,80**	0,93	**0,89**
Iter-OLS-AR(1)	RMSE	0,95	**0,93**	0,84	0,77	1,01	1,17
	MAFE	0,90	**0,90**	0,88	0,84	0,91	0,89
Iter-OLS-AR(2)	RMSE	0,96	0,94	0,85	0,77	1,01	1,16
	MAFE	0,91	0,91	0,89	0,84	0,92	0,89
TVP-NG-AR(1)	RMSE	0,98	0,96	0,88	0,50	0,86	0,86
	MAFE	0,92	0,94	0,93	0,82	0,99	0,92
TVP-NG-AR(2)	RMSE	0,95	0,95	**0,56**	**0,49**	0,86	**0,86**
	MAFE	0,91	0,94	**0,85**	0,82	0,99	0,92
OLS-AR(1)-Pred	RMSE	1,42	1,47	*1,24*	*1,46*	1,05	1,42
	MAFE	1,11	1,25	1,38	*1,29*	1,04	1,18
OLS-AR(2)-Pred	RMSE	*1,44*	*1,52*	1,24	1,45	*1,14*	*1,54*
	MAFE	*1,13*	*1,27*	*1,39*	1,29	*1,10*	*1,26*
TVP-NG-AR(1)-Pred	RMSE	**0,80**	1,10	0,90	0,67	0,57	1,16
	MAFE	**0,88**	1,00	1,03	0,94	0,78	0,97
TVP-NG-AR(2)-Pred	RMSE	0,85	1,14	0,71	0,67	**0,53**	1,16
	MAFE	0,90	0,99	0,95	0,93	**0,74**	0,97

Примечание. Жирным шрифтом выделено наименьшее значение ошибки для каждого горизонта прогнозирования, курсивом – наибольшее.

Результаты расчета метрик качества MSFE и MAFE прогнозов альтернативных моделей российского импорта в постоянных ценах представлены в таблице 5. Как видно из таблицы, по показателю качества MAFE на большинстве горизонтов прогнозирования (от 2 до 6 кварталов) наилучшей является линейная авторегрессионная модель с двумя лагами импорта (итеративный прогноз). На горизонте прогнозирования 1 месяц лучшей по MAFE оказалась линейная AR(2)-модель с предикторами с отрывом от ближайшего конкурента – линейной AR(2)-моделью - на 5,5%. Байесовские модели с предикторами на горизонтах от одного до пяти кварталов существенно уступают лидеру по показателю MAFE, и только на горизонте 6 кварталов преимущество лучшей модели над байесовской моделью TVP-NG-AR(1)-Pred составляет всего 5%.

Что касается показателя качества прогнозирования MSFE, то по нему на горизонтах 2-5 кварталов наилучшими среди альтернатив для импорта также оказываются различные варианты линейных авторегрессионных моделей. На горизонте 1 квартал наиболее точный прогноз дает байесовская авторегрессионная модель без предикторов TVP-NG-AR(2) (преимущество по MSFE перед второй по качеству моделью – 6,5%). На горизонте 6 кварталов лучшей моделью оказывается байесовская модель AR(1) с предикторами, превосходя ближайшего конкурента (OLS-AR(2)-ITER) по MSFE на 4%.

Подводя итог экспериментов по изучению прогнозных свойств TVP-моделей с байесовским сжатием параметров применительно к ключевым макроэкономическим показателям (ВВП, потребление домашних хозяйств, валовое накопление основного капитала, экспорт и импорт в постоянных ценах), можно сказать, что байесовские TVP-модели, хотя и являются лидерами прогнозирования каждой их указанных макропеременных как минимум на одном из шести горизонтов, в целом не дают систематического и значительного улучшения качества прогноза по сравнению с более простыми бенчмарками. Для отдельных показателей - ВВП и валового накопления основного капитала - TVP-модели с байесовским сжатием параметров, тем не менее, можно считать перспективным инструментом краткосрочного прогнозирования (на период до одного года).

Таблица 5 – Относительные ошибки прогнозирования (MSFE и MAFE) альтернативных моделей импорта

Модель	**Метрика**	**Горизонт прогнозирования, кварталы**					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Наивная	RMSE	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	MAFE	1,00	1,00	1,00	*1,00*	1,00	1,00
OLS-AR(1)	RMSE	0,93	0,78	0,63	**0,48**	**0,44**	0,45
	MAFE	0,89	0,81	0,75	0,68	0,64	0,62
OLS-AR(2)	RMSE	0,82	**0,70**	0,57	0,51	0,49	0,49
	MAFE	0,85	0,75	0,70	0,65	0,65	0,64
Iter-OLS-AR(1)	RMSE	0,93	0,83	0,75	0,67	0,62	0,59
	MAFE	0,89	0,88	0,86	0,81	0,79	0,78
Iter-OLS-AR(2)	RMSE	0,82	0,71	**0,57**	0,52	0,44	0,44
	MAFE	0,85	**0,75**	**0,68**	**0,62**	**0,61**	**0,60**
TVP-NG-AR(1)	RMSE	0,91	1,04	0,96	0,74	0,91	0,90
	MAFE	0,89	1,02	1,00	0,89	0,96	0,94
TVP-NG-AR(2)	RMSE	**0,77**	0,93	0,77	0,76	0,91	0,89
	MAFE	0,86	0,97	0,91	0,91	0,96	0,92
OLS-AR(1)-Pred	RMSE	1,15	1,21	*1,24*	*1,14*	*1,36*	1,25
	MAFE	1,02	1,05	*1,11*	0,98	1,10	1,11
OLS-AR(2)-Pred	RMSE	0,87	0,94	1,15	1,12	1,35	*1,26*
	MAFE	**0,84**	0,95	1,07	0,97	*1,12*	*1,13*
TVP-NG-AR(1)-Pred	RMSE	*1,24*	*1,34*	0,91	0,54	1,13	**0,42**
	MAFE	*1,02*	*1,07*	0,95	0,77	1,04	0,63
TVP-NG-AR(2)-Pred	RMSE	0,99	1,27	0,80	0,56	1,22	0,45
	MAFE	0,96	1,06	0,92	0,77	1,09	0,67

Примечание. Жирным шрифтом выделено наименьшее значение ошибки для каждого горизонта прогнозирования, курсивом – наибольшее.

Заключение

В работе было протестировано качество прогнозов российского ВВП и его основных компонентов (потребления домохозяйств, валового накопления основного капитала, экспорта и импорта) с помощью модели с байесовским сжатием меняющихся во времени параметров на основе априорного иерархического нормального-гамма распределения. На квартальных данных 2001–2022 гг. показано, что по сравнению с более простыми бенчмарками байесовская TVP-модель с экзогенными предикторами дает более точные прогнозы ВВП на 2-4 квартала вперед, валового накопления основного капитала – на 1 и 3 квартала вперед. При прогнозировании других компонентов ВВП TVP-модели с байесовским сжатием параметров не демонстрируют систематического превосходства над другими моделями.

Литература

1. Полбин А.В., Шумилов А.В. Прогнозирование инфляции в России с помощью TVP-модели с байесовским сжатием параметров // Вопросы статистики. 2023. Т. 30. №. 4. С. 22-32.
2. Belmonte M.A.G., Koop G., Korobilis D. Hierarchical shrinkage in time-varying parameter models // Journal of Forecasting. 2014. Vol. 33. No. 1. Pp. 80-94.
3. Bitto A., Frühwirth-Schnatter S. Achieving shrinkage in a time-varying parameter model framework // Journal of Econometrics. 2019. Vol. 210. No. 1. Pp. 75-97.
4. Cadonna A., Frühwirth-Schnatter S., Knaus P. Triple the gamma – a unifying shrinkage prior for variance and variable selection in sparse state space and TVP models // Econometrics. 2020. Vol. 8. No. 2.
5. De Mol C., Giannone D., Reichlin L. Forecasting using a large number of predictors: Is Bayesian shrinkage a valid alternative to principal components? // Journal of Econometrics. 2008. Vol. 146. No. 2. Pp. 318-328.
6. Frühwirth-Schnatter S., Wagner H. Stochastic model specification search for Gaussian and partial non-Gaussian state space models // Journal of Econometrics. 2010. Vol. 154. No. 1. Pp. 85-100.
7. Griffin J.E., Brown P.J. Inference with Normal-Gamma prior distributions in regression problems // Bayesian Analysis. 2010. Vol. 5. No. 1. Pp. 171-188.
8. Knaus P., Bitto-Nemling A., Cadonna A., Frühwirth-Schnatter S. Shrinkage in the time-varying parameter model framework using the R package shrinkTVP // Journal of Statistical Software. 2021. Vol. 100. Pp. 1-32.

Forecasting Key Russian Macroeconomic Variables Using a TVP model with Bayesian shrinkage

A.V. Polbin, A.V. Shumilov

Abstract: The paper examines the quality of forecasts of Russian GDP and its components (household consumption, investment, exports and imports) using a model with Bayesian shrinkage of time-varying parameters (TVP) based on hierarchical normal-gamma prior. Such models account for the possible nonlinearity of relationships and, at the same time, can deal with the overfitting problem. We find that, compared to simpler benchmarks, the Bayesian TVP model with exogenous predictors gives better forecasts for GDP at horizons of 2-4 quarters, and for investment – at horizons of 1-3 quarters. When predicting other components of GDP, Bayesian TVP models do not demonstrate systematic superiority over other models.

Keywords: forecasting, Russian GDP and its components, time-varying parameter model, Bayesian shrinkage, normal-gamma prior.

JEL: C22, C53.