



Munich Personal RePEc Archive

Structural estimation of a sequential decision model of college dropout

Murasawa, Yasutomo

Konan University

21 June 2024

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/121262/>
MPRA Paper No. 121262, posted 21 Jun 2024 04:50 UTC

大学中退の逐次意思決定モデルの構造推定*

村澤 康友**

初稿：2022年2月

最新版：2024年6月21日

<要旨>

本稿では某大学某学部 2016 年 4 月入学者のうち男子 301 名の入学後 4 年間の成績データを用いて大学中退の逐次意思決定モデルの構造母数の推定と反実仮想分析を試みる。動的離散選択モデルの構造推定の代表的な手法の 1 つである条件付き選択確率 (CCP) 法は、ノンパラメトリック推定した誘導形の中退確率関数 (CCP 関数) から積分した価値関数を逆算し、在学/退学の 2 値ロジット・モデルに補正項を加えて構造母数を推定する。最適停止モデルで停止の価値 (退学後の期待生涯所得) が既知なら CCP 法は容易である。ただし中退者が少ないと 2 値ロジット・モデルに完全分離が生じる場合がある。そこで本稿では在学/退学の対数オッズ比のノンパラメトリック推定値を従属変数として最小 2 乗法を適用する修正案を検討する。モンテカルロ実験の結果、構造母数の推定精度は誘導形の CCP 関数の推定精度に依存し、最適停止モデルでは一部の状態が観測されにくいため、構造母数の正確な推定には大標本が必要と判明した。実際に本稿のデータでは構造母数の正確な推定は困難であった。ただしある種の反実仮想の行動は、割引因子と尺度母数を所与として他の構造母数と独立に識別できる。例として某大学某学部 2016 年 4 月入学者の男子について、入学後 4 年間の在学者への学費補助が中退確率を引き下げる処置効果を試算し、毎学期 10 万円の学費補助は 4 年間の累積中退確率を約 2.2% 引き下げるとの結果を得た。ただし累積中退確率の低下は必ずしも卒業確率の上昇を意味せず、退学の意思決定を遅らせる効果と解釈すべきである。

JEL Classification Codes : C25, C41, I21

Keywords : 動的離散選択モデル, 最適停止モデル, 短期パネル, 条件付き選択確率 (CCP) 法

* 本稿の執筆期間中、2021 年 9 月～2022 年 8 月に大阪府立大学大学院経済学研究科に客員研究員として滞在した際は、鹿野繁樹教授に大変お世話になった。また同氏の他、中尾圭介氏、松田一茂氏、および甲南大学・大阪府立大学・同志社大学でのセミナー参加者から有益な示唆・助言を頂いた。ここに記して感謝する。

**村澤 康友：甲南大学経済学部・教授。

Structural Estimation of a Sequential Decision Model of College Dropout

By Yasutomo MURASAWA

Abstract

Using the four-year academic records of 301 male students who enrolled in a specific department at a certain university in April 2016, this paper estimates the structural parameters of a sequential decision model of college dropout and conducts a counterfactual analysis. A well-known method for structural estimation of a dynamic discrete choice model is the Conditional Choice Probability (CCP) method, which recovers the integrated value function from a nonparametric estimate of the reduced-form dropout probability function (CCP function) and constructs a correction term to be added to a binary logit model of staying/dropout to ensure consistent estimation of the structural parameters. The CCP method is especially easy to apply to optimal stopping models, given the value of stopping (expected lifetime earnings after dropout). If dropouts are rare, however, ML estimation of the binary logit model may fail due to complete separation. To avoid this problem, this paper considers a modification of the CCP method, which uses a nonparametric estimate of the log odds ratio of staying/dropout as the dependent variable to apply the least squares method. Monte Carlo experiments show that precise estimation of the structural parameters requires precise estimation of the reduced-form CCP function, which requires a large sample since some states may rarely occur in optimal stopping models. Indeed, precise estimation of the structural parameters was difficult with our data. Nevertheless, given the discount factor and the scale parameter, certain counterfactual behaviors are identifiable independently from the remaining structural parameters. As an example, this paper estimates the effect of four-year tuition subsidies on the dropout probability of the male students in our data. The results show that a tuition subsidy of 100,000 yen per semester reduces the four-year cumulative dropout probability by approximately 2.2%. However, the lower cumulative dropout probability is due to later dropout decisions, and does not necessarily imply a higher graduation probability.

JEL Classification Codes: C25, C41, I21

Keywords: dynamic discrete choice model, optimal stopping model, short panel, Conditional Choice Probability (CCP) method

1. はじめに

労働政策研究・研修機構 (2023, 表 21-1) によると, 日本の一般労働者 (正社員・正職員のうち雇用期間の定め無し) の生涯賃金 (退職金を含まない) は, 男性が高校卒 2 億 300 万円, 大学卒 2 億 4740 万円, 女性が高校卒 1 億 4920 万円, 大学卒 1 億 9800 万円であり, その差は男性 4440 万円, 女性 4880 万円に上る. これらは既卒者の 2022 年の年齢階級別平均賃金に基づく生涯賃金であり, 現在の学生が将来受け取る生涯賃金とは異なるが, それでも大学卒業の期待収益は機会費用 (= 直接費用 + 逸失利益) を大きく上回ると解釈してよいであろう¹. 大学・学部・個人により大卒プレミアムに格差はあるものの, その平均値だけを見ると, 過去最高となった 2023 年度の日本の大学進学率 57.7% (「学校基本調査」) は, むしろ低すぎる印象さえある².

少子化が進む中, 大学進学率は高まっているが, 大卒プレミアムの存在にも関わらず, 中途退学者も数多く発生している. 文部科学省調査「学生の中途退学や休学等の状況について」(平成 26 年 9 月 25 日) によると, 日本の大学・短大・高専 1,191 校のうち, 回答した 1,163 校における平成 24 年度 (2012 年度) の学部生 (高専を除く) の中途退学者数は 68,962 人であった³. 読売新聞教育ネットワーク事務局 (2018) の調査によると, 日本の大学 755 校 (大学院大学・通信制のみの大学・募集停止の大学は除く) のうち, 回答した 692 校における 2014 年 4 月入学者 (6 年制学部・学科は 2012 年入学者) の 2018 年 3 月時点の退学率は 7.0% であった (表 1). 留年者の退学も含めれば, 最終的な退学率はもっと高くなる. 下瀬川 (2015) によると, 日本では大学・短大中退者は正社員就業しづらく, 正社員経験があれば高卒より高い賃金が得られるが, そうでなければ高卒と同等の賃金しか得られない. したがって中途退学による大卒プレミアムの放棄は, 完全情報下の合理的行動としては説明しにくい. 同様の現象は日本以外でも見られ, Stange (2012, p. 52) は「大学中退パズル (college dropout puzzle)」と呼んでいる.

実際は在学期間中の経済状況, 自身の将来の可能性, 大学・学部に対する関心や適性, 大学生生活の楽しさ等是不確実であり, 大学進学の意味決定時の情報は不完全である. その場合は中途退学のリスクやコストと大卒プレミアム等のメリットを勘案し, 大学進学の見込期待収益率やオプション価値が十分に高ければ, とりあえず大学進学を試みるのが合理的である (Manski (1989)). 結果的に中途退学に終わっても, リスクを取る行動自体は社会的に非効率とは限らず, 一定数の中途退学者の発生は社会的に止むを得ない. それでも現在の中途退学の状況に問題がないとは言えず, 個別の大学の経営の視点では中途退学者は少ない方がよいし, 学生・保護者の視点では卒業の意思・見込みがなければ早く退学した方がよい⁴. また大学進学の意味決定時の不確実性も可能な限り解消・軽

1 大卒学歴の (私的) 収益率 (= 大卒プレミアム) の日本の現状については北條 (2018) が詳しい.

2 文部科学省報道発表資料「令和 5 年度学校基本統計 (学校基本調査の結果) 確定値を公表します。」(令和 5 年 12 月 20 日) によると, 令和 5 年度の高等教育機関進学率 (過年度卒を含む) 84.0% の内訳は, 大学 (学部) 進学率 57.7%, 短期大学 (本科) 進学率 3.4%, 高等専門学校 4 年進学率 1.0%, 専門学校進学率 21.9% となっている.

3 中途退学の理由は (1) 経済的理由 15,210 人 (22.1%), (2) 転学 11,283 人 (16.4%), (3) 学業不振 10,520 人 (15.3%), (4) 就職 8,369 人 (12.1%) となっている. 高専・大学院生を含めた数値では, 経済的理由は平成 19 年度 (2007 年度) の 14.0% から平成 24 年度 (2012 年度) は 20.4% に大きく上昇しており, 景気後退の影響が大きいとみられる.

4 入学定員 2000 人の大学で中退率が 1% 上がると中退者は 20 人増える. 例えば 20 人とも 2 年次終了時に中退すると,

表 1: 2014 年（6 年制は 2012 年）4 月入学者の 2018 年 3 月時点の中途退学・卒業・留年状況

		入学者数	退学者数	卒業者数	留年者数	退学／入学	卒業／入学	留年／入学
国立	男	56,293	1,862	45,315	9,116	.033	.805	.162
	女	33,188	698	29,170	3,320	.021	.879	.100
公立	男	12,247	688	9,735	1,824	.056	.795	.149
	女	15,083	462	13,233	1,388	.031	.877	.092
私立	男	227,745	22,072	174,689	30,984	.097	.767	.136
	女	193,592	11,802	168,602	13,188	.061	.871	.068
計		538,148	37,584	440,744	59,820	.070	.819	.111

注) 退学は除籍を含む。

資料) 読売新聞教育ネットワーク事務局 (2018, p. 15)

減するのが望ましい。

合理的な行動として中途退学を理解し、適切な対応策を検討するために、本稿では大学中退行動を最適停止問題として定式化し、某大学某学部 2016 年 4 月入学者のうち男子 301 名の入学後 4 年間の成績データを用いて意思決定モデルの構造母数の推定と反実仮想分析を試みる⁵。最適停止問題では継続（在学）した場合と停止（退学）した場合の価値を逐次的に評価し、継続の価値が停止の価値を下回った時点で停止する。本稿では累積修得単位数と GPA を分析者が観測する状態変数と仮定し、積分したベルマン方程式を選択肢別価値関数で表して、在学／退学の 2 値ロジット・モデルを導出する。意思決定期間の一部（大学入学後 4 年間）のみ観測する短期パネル（short panel）では、選択肢別価値関数を後ろ向き帰納法で解いて尤度関数を評価する最尤法は煩雑になる⁶。条件付き選択確率（conditional choice probability, CCP）法は、ノンパラメトリック推定した誘導形の中退確率関数（CCP 関数）から積分した価値関数を逆算し、2 値ロジット・モデルに補正項を加えて意思決定モデルの構造母数を推定する。最適停止モデルで停止の価値（分析者から見た退学後の期待生涯所得）が既知なら構造母数は一定の条件の下で識別でき、推定も比較的容易である。CCP 法の入門的な解説は Arcidiacono and Ellickson (2011) を参照。

なお日本の各大学・学部における各学期の中退者数は、例えばアメリカの大学と比較して遥かに少ない点には注意が必要である。中退者が少ないと 2 値ロジット・モデルの最尤推定量は小標本で偏りが大きく、中退者が 0 など完全分離が生じると最尤推定値は存在しない。Bajari et al. (2016) は CCP 法の簡便化を 2 つ提案した：(1) 期待値の定義式でなくノンパラメトリック回帰で補正項を計算する (2) ロジット・モデルでなく対数オッズ比のノンパラメトリック推定値を従属変数としたモデルに最小 2 乗法を適用して構造母数を推定する。後者は完全分離の問題の回避に役立つ。本稿は後者のみ取り入れた修正 CCP 法を検討する。

割引因子・尺度母数を含む構造母数の識別は、理論と簡単なモンテカルロ実験で確認できる。し

年間授業料が 100 万円なら 4000 万円の減収となる。この減収額は入学検定料が 4 万円なら 1000 人の志願者減に相当する。

5 伊神 (2018, 第 5 章) の実証分析の 3 作法、すなわち (1) データ分析 (狭義) (2) 対照実験 (3) シミュレーションのうち、本稿は (3) のアプローチを採用する。なお同書は動的離散選択モデルの構造推定の入門書としても優れている。

6 Keane and Wolpin (1994), Eisenhauer (2018) を参照。Gabler and Raabe (2020) が開発した Python の respay パッケージは、有限期間の動的離散選択モデル（キャリア選択モデル）のシミュレーション最尤法／積率法による推定を支援する。

かし構造母数の推定精度はノンパラメトリックな誘導形の CCP 関数の定式化と推定精度に依存する。最適停止モデルでは一部の状態が観測されにくいいため、構造母数の正確な推定には大標本が必要となる。実験結果を踏まえ、本稿では単純な 2 値ロジット・モデルで誘導形の CCP 関数を推定したが、300 人×8 学期程度の小標本では構造母数の正確な推定値は得られなかった。

ただし在学／退学が同時に発生する母数の組み合わせは限られるので、構造母数の妥当な範囲に関する情報は得られる。それを踏まえて割引因子と尺度母数を設定すれば、効用関数の一時的な変化の反実仮想 CCP は他の構造母数と独立に（誘導形の CCP 関数と状態遷移確率分布のみから）識別できる。本稿では例として某大学某学部 2016 年 4 月入学者の男子について、入学後 4 年間の在学者への学費補助が中退確率を引き下げる処置効果を試算し、毎学期 10 万円の学費補助は 4 年間の累積中退確率を約 2.2%引き下げるとの結果を得た。ただし学費補助は成績に直接的に影響しないので、4 年間の累積中退確率の低下は必ずしも卒業確率の上昇を意味せず、退学の意味決定を遅らせる効果と解釈すべきである。

本稿の貢献は以下の 3 点に整理できる。第 1 に、本稿は大学中退の逐次意思決定モデルの構造推定の日本における初の試みである。アメリカの先行研究は存在するが、アメリカと日本の大学中退率は大きく異なる。日本の大学に応用する際の様々な課題の発見が本稿の第 1 の貢献である。第 2 に、本稿は有限期間の最適停止モデルの構造母数の識別と推定を詳細に検討している。特に以下の 3 点の課題の発見と解決の試みが本稿の第 2 の貢献である。

1. 動的離散選択モデルの構造推定では尺度母数を 1 と基準化する例が多い。しかし本稿のモデルでは効用を金額で測るため、尺度母数の識別と推定が必要となる。そこで尺度母数を 1 または既知とした場合の割引因子の識別に関する先行研究の結果を拡張し、割引因子と尺度母数の識別の条件を明確にした。
2. 日本の大学は中退者が少ないため、2 値ロジット・モデルに完全分離が生じ、CCP 法が失敗する場合がある。そこで完全分離の問題を回避する修正 CCP 法を提案した。
3. 修正 CCP 法による推定量の性質をモンテカルロ実験で検討した。その結果、最適停止モデルでは一部の状態が観測されにくいいため、誘導形の CCP 関数の推定精度が低く、本稿の標本では構造母数の正確な推定は困難と判明した。そこで構造母数を推定せずに（誘導形は推定）反実仮想分析を行った。

第 3 に、本稿は学費補助が中退確率を引き下げる処置効果を反実仮想シミュレーションで計測した。因果推論と構造推定には一長一短がある。一般に前者の方が仮定が少なく分析も容易だが、後者の方が因果構造が明確で実験も不要である。したがって両者は補完的に使用すべきである。モデルの構造より学費補助は退学の意味決定を遅らせる効果をもつ。この効果を定量的に示したのが本稿の第 3 の貢献である。学費補助は成績に直接的に影響しないため、入学後 4 年間の退学の減少は卒業でなく留年の増加を意味する。この視点は大学無償化や授業料引き上げの是非を論ずる際にも重要であろう。

本稿の構成は以下の通りである。第 2 節では海外の先行研究と日本の関連研究を概観する。第 3 節では大学中退行動を最適停止問題として定式化し、在学／退学の逐次意思決定の構造モデルを導

出する。第4節では構造母数と各種の反実仮想 CCP の識別を確認する。第5節では修正 CCP 法による構造母数の推定手順を解説する。第6節では簡単なモンテカルロ実験で推定量の性質を検討する。第7節では某大学某学部 2016 年 4 月入学者の男子の成績データを用いて構造母数の推定と学費補助の反実仮想分析を試みる。第8節では結論と今後の課題を述べる。煩雑な証明は付録にまとめる。

2. 先行研究

2.1 海外の先行研究

大学進学・中退行動の包括的な研究は、National Longitudinal Study of the High School Class of 1972 (NLS72) の個票データを分析した Manski and Wise (1983) を嚆矢とするが、不確実性下の逐次意思決定として大学進学・中退行動を分析した研究としては、Manski (1989) の理論研究と Altonji (1993) の実証研究が先駆的である⁷。大学進学は不確実性下の試みであり、中退は事後的に最適な判断である。したがって大学中退率を引き下げる政策は必ずしも社会厚生を改善しないと Manski (1989) は指摘した。また大学進学の意味決定は、大学卒業の事後収益率でなく、中退確率を考慮した事前収益率で判断する。Altonji (1993) は NLS72 の個票データを用いて誘導形の中退確率関数と対数賃金関数を推定し、大学進学の前収益率を内部収益率として属性別に計算した。

個人のライフコース／キャリア選択の逐次意思決定モデルの構造推定の研究が発展する中で、大学中退の意思決定モデルの構造推定も既に行われている。Arcidiacono (2004) は NLS72 の個票データを用いて大学と専攻（自然科学／ビジネス／人文社会科学／教育）の選択について高校卒業時・大学3年進級時・大学卒業後の3期間モデル（意思決定は2回）を構造推定し、自己選択による専攻別の能力格差（主に数学）や観測されない異質性を統制した上でも専攻別の収益率格差すなわち処置効果（自然科学が最も高い）が存在するが、処置効果より個人の選好が専攻の選択に影響するとしている。当該研究の主眼は大学と専攻の選択であるが、中退も選択肢に含まれており、大学入学後の成績から自身の適性を学習して転学／転専攻／中退を選択することを示している。

大学レベルの勉強に対する自身の適性は、入学前は不確実であり、入学後に成績を通じて学習する。高卒就職後の大学進学が困難な場合、「とりあえず」大学に行くことは、不確実性下で不可逆的な意思決定を保留するオプション価値をもつ。Stange (2012) は National Educational Longitudinal Study (NELS) の男子学生 2055 名（53%が大学進学）の個票データを用いて高校卒業時から大学4年進級時までの4期間の進学・中退意思決定モデルを観測されない異質性を統制した上で構造推定し、反実仮想分析で大学進学の前収益率を計測している。1992年の大学進学の前収益率価値は平均 14,900 ドル（大学進学の前収益率の総価値の 14%）、合格ぎりぎりの学力の学生で最

7 大学中退の研究の歴史は古く、デュルケーム『自殺論』の枠組みに費用・便益分析を加味した Tinto (1975, 1993) の理論モデルが教育社会学の分野では有名である。ただし図式的なモデルであり、数式モデルを開発する際のヒントにはなるが、そのままでは厳密な理論・実証分析には適さない。Nicoletti (2019) は Tinto のモデルをアルゴリズム化する際の課題を指摘している。

大 25,000 ドルと評価している。

大学中退の逐次意思決定モデルを解く際は、中退／卒業後の生涯所得の期待値や、状態変数（成績）の予測分布が必要となる。事後的なデータから合理的な期待値や予測分布を計算する従来の手法に対し、合理的期待を仮定せず、主観的な期待値や予測分布をアンケート調査する手法も近年は増えている。Stinebrickner and Stinebrickner (2014) は、自ら設計した Berea Panel Study における Berea College（アメリカ）の 2001 年度入学生 341 名の学期毎のアンケート調査と成績データを接合し、1 年次前期から卒業までの 9 期間の中退意思決定モデル（意思決定は 1 年次後期開始時から 4 年次後期開始時までの 7 回）を構造推定している。成績は (1) 落第確率 (2) 将来の所得 (3) 大学生生活の楽しさの 3 つに直接的に影響する。成績の主観的な予測分布は楽観的であり、成績の情報は主に (2) と (3) への負の効果を通じて早期の中退者を増やすことを反実仮想分析で示している。

2.2 日本の関連研究

大学中退の逐次意思決定モデルを構造推定した日本の実証研究は見当たらない。これまでの日本の実証研究は、分析対象により以下の通り分類できる。

標本調査を用いた研究 村澤 (2008) は「2005 年社会階層と社会移動全国調査 (SSM)」の若年層 Web 調査 (2007 年 SSM 若年層インターネット調査) の個票データを用いて大学中退行動の規定要因を混合 2 値ロジット・モデルで分析している。朴澤 (2016a) は東京大学大学院教育学研究科大学経営・政策研究センターが 2005～2011 年に実施した「高校生の進路についての調査」のパネル・データを用いて 2006 年度に現役で大学に進学した学生の 2 年次／4 年次までの中退率を計測している。

大学・学部を観測単位とした研究 丸山 (1984) は広島大学大学教育研究センターが全国の大学の学部を対象に 1982 年に実施した「大学教育に関する調査」のデータを用いて退学者数と退学率の規定要因を重回帰分析している。近年は読売新聞教育取材班『大学の實力』のデータを用いた研究が目につく。清水 (2013) は社会科学系学部を対象とし、2013 年調査における 2008 年度入学者の退学率・就職率・決定率 (= 就職率 + 進学率)・実質決定率 (= $(1 - \text{退学率}) \times \text{決定率}$) の規定要因を重回帰分析している。姉川 (2014) は 2008～2010 年調査に回答した大学についてパネル・データを構築し、入学後 1 年間の退学率と標準修業年限卒業率の 2 変数について、それぞれロジット変換して 2 段階最小 2 乗法で規定要因を分析している。立石・小方 (2016) は 2016 年調査における 2011 年度 (6 年制学部は 2009 年度) 入学者の退学率・留年率について、多項ロジット・モデル (退学率・留年率の高低で 4 グループに分類) と二分回帰木で規定要因を分析している。

集計時系列データを用いた研究 朴澤 (2016b) は「学校基本調査」の集計データから日本全体の男女合計の 8 年以内中退率を作成し、1973～2005 年を推定期間とした時系列回帰分析で変動要因を分析している。

特定の大学・学部の学生を対象とした研究 入江・丸岡 (2017) は某私立大学の 2011 年度入学生の 2015 年 3 月までの在籍に関する生存曲線の規定要因を Cox 比例ハザード・モデルで分析して

いる。大学における IR (institutional research) の必要性和ビッグデータ・AI への関心の高まりから機械学習の手法を用いた個別の学生の中退予測の研究が最近が多い。大友他 (2014) は某大学の学生の 1 年次後期履修登録完了時のデータを用いて 2 年次 / 4 年次終了までの退学と留年をサポートベクターマシンで予測している。鎌田・井上 (2016) は某地方国立大学の 2011 年度入学生の 2015 年 5 月までの中退の要因を分類木で分析している。竹橋他 (2016) は東京未来大学の 2013 年度入学生の 2 年次後期開始時の在籍者について、3 年次後期開始時の在籍状況を 2 値ロジット・モデルで予測している。近藤・畠中 (2016) は某大学の 2009~2012 年度入学生の 1 年次前期開始時 / 終了時のデータを用いて機械学習ツール Weka で利用できる様々な手法で 3 年次 4 月の在籍状況を予測している。高野 (2020) は兵庫大学の 2011~2018 年度入学生の入学時 / 1 年次前期終了時 / 1 年次後期終了時のデータを用いて 2019 年 6 月末までの中退の規定要因を分類木で分析している。白鳥他 (2020) は某大学の 2012~2014 年度入学生について、2 値ロジット・モデルで算出した学期ごとの中退確率の推移を X -means 法でクラスタリングして中退パターンを類型化している。

本稿は特定の学部 of 学生を分析対象とするが、中退予測でなく意思決定モデルの構造母数の推定と反実仮想分析を目的とする点が日本の従来の研究と異なる。

3. 最適停止モデル

本節では大学中退行動を最適停止問題として定式化し、学生の在学 / 退学の逐次意思決定を確率的計画法で考える。ただし学生の状態 (在学状況・学業成績・家庭の経済状況・大学生活の楽しさなど) の一部のみ分析者は観測すると仮定し、分析者に観測されない状態は誤差とみなす。そのため状態を所与として学生の最適な選択は一意に定まるが、一部の状態のみ観測する分析者から見た学生の選択は確率的になる。以下では分析者が観測する状態ベクトルを所与として、分析者から見た条件付き選択確率 (CCP) 関数 (在学確率関数) を導出する。本節の内容は Arcidiacono and Ellickson (2011, sec. 2) の動的離散選択モデルの解説の一部を本稿の文脈に沿って拡張したものである。

3.1 最適停止問題

時点 $t = 0, \dots, T$ で継続 / 停止 (在学 / 退学) の 2 値選択を逐次的に行い、時点 $T + 1$ の卒業後は在学 / 退学の選択の機会がなく、時点 T^* まで生存する個人を考える。停止 (退学) は不可逆的であり、停止した時点で意思決定は終了する。効用関数は時間について加法分離的とする⁸。 d_t を選択 (継続を 1, 停止を 0 とする継続ダミー), \mathbf{s}_t を状態ベクトル (前期の選択 d_{t-1} を含む), $D(\mathbf{s}_t)$ を選択集合 (継続中は $\{0, 1\}$, 停止後は $\{0\}$), $U_t(d_t; \mathbf{s}_t)$ を (d_t, \mathbf{s}_t) がもたらす効用, β を (1 期当たりの) 割引因子とする。 $\{d_t, \mathbf{s}_t\}$ をマルコフ過程とし, $\{P_t(\cdot | \cdot; \cdot)\}$ を $\{\mathbf{s}_t\}$ の状態遷移確率分

⁸ 例えば消費流 $\{c_t\}$ 上の効用関数 $u(\cdot)$ が時間について加法分離的なら $u(c_0, \dots, c_T) = u_0(c_0) + \dots + u_T(c_T)$ と表せる。

布とする。すなわち $t = 0, \dots, T^* - 1$ について

$$\mathbf{s}_{t+1} \sim P_{t+1}(\cdot | \mathbf{s}_t; d_t)$$

時点 0 の期待効用最大化問題は、 \mathbf{s}_0 を所与として

$$\begin{aligned} \max_{\{\delta_t(\cdot)\}} \quad & \mathbb{E} \left(\sum_{t=0}^T \beta^t U_t(\delta_t(\mathbf{s}_t); \mathbf{s}_t) + \sum_{t=T+1}^{T^*} \beta^t U_t(\delta_T(\mathbf{s}_T); \mathbf{s}_t) | \mathbf{s}_0 \right) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{s}_{t+1} \sim P_{t+1}(\cdot | \mathbf{s}_t; \delta_t(\mathbf{s}_t)), \quad t = 0, \dots, T-1 \\ & \mathbf{s}_{t+1} \sim P_{t+1}(\cdot | \mathbf{s}_t; \delta_T(\mathbf{s}_T)), \quad t = T, \dots, T^* - 1 \\ \text{and} \quad & \delta_t(\mathbf{s}_t) \in D(\mathbf{s}_t), \quad t = 0, \dots, T \end{aligned}$$

ただし $\delta_t(\cdot)$ は状態空間から選択集合 $D(\mathbf{s}_t)$ への方策関数とする。

3.2 価値関数

確率動的計画法で最適停止問題を解くために、価値関数を定義してベルマン方程式を導出する。時点 t の価値関数を $V_t(\cdot)$ とする。すなわち $t \leq T$ なら任意の \mathbf{s}_t について

$$\begin{aligned} V_t(\mathbf{s}_t) := \max_{\{\delta_s(\cdot)\}} \quad & \mathbb{E} \left(\sum_{s=t}^T \beta^{s-t} U_s(\delta_s(\mathbf{s}_s); \mathbf{s}_s) + \sum_{s=T+1}^{T^*} \beta^{s-t} U_s(\delta_T(\mathbf{s}_T); \mathbf{s}_s) | \mathbf{s}_t \right) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{s}_{s+1} \sim P_{s+1}(\cdot | \mathbf{s}_s; \delta_s(\mathbf{s}_s)), \quad s = t, \dots, T-1 \\ & \mathbf{s}_{s+1} \sim P_{s+1}(\cdot | \mathbf{s}_s; \delta_T(\mathbf{s}_T)), \quad s = T, \dots, T^* - 1 \\ \text{and} \quad & \delta_s(\mathbf{s}_s) \in D(\mathbf{s}_s), \quad s = t, \dots, T \end{aligned}$$

時点 $T+1$ では任意の \mathbf{s}_{T+1} について

$$V_{T+1}(\mathbf{s}_{T+1}) := \mathbb{E} \left(\sum_{t=T+1}^{T^*} \beta^{t-(T+1)} U_t(d_T; \mathbf{s}_t) | \mathbf{s}_{T+1} \right)$$

後ろ向き帰納法により、時点 $t = T, \dots, 0$ のベルマン方程式は、任意の \mathbf{s}_t について

$$\begin{aligned} V_t(\mathbf{s}_t) = \max_{d_t \in D(\mathbf{s}_t)} \quad & \{U_t(d_t; \mathbf{s}_t) + \beta \mathbb{E}(V_{t+1}(\mathbf{s}_{t+1}) | \mathbf{s}_t; d_t)\} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{s}_{t+1} \sim P_{t+1}(\cdot | \mathbf{s}_t; d_t) \end{aligned}$$

$V_t^1(\cdot), V_t^0(\cdot)$ を継続中/停止後の価値関数とすると、停止（退学）は不可逆的なので、時点 t のベルマン方程式は、任意の \mathbf{s}_t について

$$V_t^1(\mathbf{s}_t) = \max_{d_t \in \{0,1\}} \left\{ U_t(d_t; \mathbf{s}_t) + \beta \mathbb{E} \left(V_{t+1}^{d_t}(\mathbf{s}_{t+1}) | \mathbf{s}_t; d_t \right) \right\} \quad (1)$$

$$V_t^0(\mathbf{s}_t) = \mathbb{E} \left(\sum_{s=t}^{T^*} \beta^{s-t} U_s(0; \mathbf{s}_s) | \mathbf{s}_t; d_t = 0 \right) \quad (2)$$

3.3 積分した価値関数

状態ベクトル \mathbf{s}_t の一部のみ分析者は観測する．分析者が観測する状態ベクトルを \mathbf{x}_t とする．分析者から見た効用（分析者の情報に基づく個人の効用の期待値）を $u_t(d_t; \mathbf{x}_t) := E(U_t(d_t; \mathbf{s}_t) | \mathbf{x}_t)$ ，個人の効用と分析者から見た効用の差を $e_t(d_t) := U_t(d_t; \mathbf{s}_t) - u_t(d_t; \mathbf{x}_t)$ とし， $\mathbf{e}_t := (e_t(0), e_t(1))'$ とする． \mathbf{e}_t を分析者に観測されない状態と解釈すると，時点 t のベルマン方程式は，任意の $(\mathbf{x}_t, \mathbf{e}_t)$ について

$$V_t^1(\mathbf{x}_t, \mathbf{e}_t) = \max_{d_t \in \{0,1\}} \left\{ u_t(d_t; \mathbf{x}_t) + e_t(d_t) + \beta E \left(V_{t+1}^{d_t}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{e}_{t+1}) | \mathbf{x}_t, \mathbf{e}_t; d_t \right) \right\} \quad (3)$$

$$V_t^0(\mathbf{x}_t, \mathbf{e}_t) = E \left(\sum_{s=t}^{T^*} \beta^{s-t} (u_s(0; \mathbf{x}_s) + e_s(0)) | \mathbf{x}_t, \mathbf{e}_t; d_t = 0 \right) \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{t+1} \\ \mathbf{e}_{t+1} \end{pmatrix} \sim P_{t+1}(\cdot | \mathbf{x}_t, \mathbf{e}_t; d_t)$$

$\{d_t, \mathbf{x}_t\}$ は $\{\mathbf{e}_t\}$ と独立とし， $\{\mathbf{e}_t\}$ は独立かつ同一な分布 $G(\cdot)$ にしたがうと仮定する． $\{F_t(\cdot, \cdot; \cdot)\}$ を $\{\mathbf{x}_t\}$ の状態遷移確率分布とする．すなわち $t = 0, \dots, T^* - 1$ について

$$\mathbf{x}_{t+1} \sim F_{t+1}(\cdot | \mathbf{x}_t; d_t)$$

$V_t^0(\cdot, \cdot), V_t^1(\cdot, \cdot)$ を \mathbf{e}_t について積分した価値関数を $\bar{V}_t^0(\cdot), \bar{V}_t^1(\cdot)$ とする．すなわち $j = 0, 1$ と任意の \mathbf{x}_t について

$$\bar{V}_t^j(\mathbf{x}_t) := \int V_t^j(\mathbf{x}_t, \mathbf{e}_t) dG(\mathbf{e}_t)$$

時点 t の積分したベルマン方程式は，任意の \mathbf{x}_t について

$$\bar{V}_t^1(\mathbf{x}_t) = E \left(\max_{d_t \in \{0,1\}} \left\{ u_t(d_t; \mathbf{x}_t) + e_t(d_t) + \beta E \left(\bar{V}_{t+1}^{d_t}(\mathbf{x}_{t+1}) | \mathbf{x}_t; d_t \right) \right\} | \mathbf{x}_t \right) \quad (5)$$

$$\bar{V}_t^0(\mathbf{x}_t) = E \left(\sum_{s=t}^{T^*} \beta^{s-t} u_s(0; \mathbf{x}_s) | \mathbf{x}_t; d_t = 0 \right) \quad (6)$$

導出は Arcidiacono and Ellickson (2011, pp. 367–368) を参照．

3.4 選択肢別価値関数

時点 t の選択肢別期待価値関数を $V_t^e(\cdot; \cdot)$ とする（添え字 e は「期待」の意味）．すなわち任意の (d_t, \mathbf{x}_t) について

$$V_t^e(\mathbf{x}_t; d_t) := E \left(\bar{V}_{t+1}^{d_t}(\mathbf{x}_{t+1}) | \mathbf{x}_t; d_t \right) \quad (7)$$

積分したベルマン方程式 (5), (6) より任意の \mathbf{x}_t について

$$\bar{V}_t^1(\mathbf{x}_t) = E \left(\max_{d_t \in \{0,1\}} \left\{ u_t(d_t; \mathbf{x}_t) + e_t(d_t) + \beta V_t^e(\mathbf{x}_t; d_t) \right\} | \mathbf{x}_t \right) \quad (8)$$

$$\bar{V}_t^0(\mathbf{x}_t) = u_t(0; \mathbf{x}_t) + \beta V_t^e(\mathbf{x}_t; 0) \quad (9)$$

時点 t の選択肢別価値関数を $v_t(\cdot, \cdot)$ とする。すなわち任意の (d_t, \mathbf{x}_t) について

$$v_t(\mathbf{x}_t; d_t) := u_t(d_t; \mathbf{x}_t) + \beta V_t^e(\mathbf{x}_t; d_t) \quad (10)$$

式 (8), (9) より任意の \mathbf{x}_t について

$$\bar{V}_t^1(\mathbf{x}_t) = E \left(\max_{d_t \in \{0,1\}} \{v_t(\mathbf{x}_t; d_t) + e_t(d_t)\} | \mathbf{x}_t \right) \quad (11)$$

$$\bar{V}_t^0(\mathbf{x}_t) = v_t(\mathbf{x}_t; 0) \quad (12)$$

式 (11) より継続（在学）中の個人の2値選択は、分析者から見ると確率効用モデルとなる。ただし静的モデル ($\beta = 0$) と異なり、動的2値選択モデルの分析では $\{v_t(\cdot, \cdot)\}$ を解く必要がある。

3.5 条件付き選択確率 (CCP)

時点 t で継続（在学）中の個人の選択を考える。 \mathbf{x}_t を所与とすると、最適な選択は

$$\begin{aligned} d_t^* &:= \arg \max_{d_t \in \{0,1\}} \{v_t(\mathbf{x}_t; d_t) + e_t(d_t)\} \\ &= [v_t(\mathbf{x}_t; 1) + e_t(1) > v_t(\mathbf{x}_t; 0) + e_t(0)] \end{aligned}$$

ただし $[\cdot]$ は指示関数（アイバーソンの記法）である。 \mathbf{x}_t を所与とした d_t^* の条件付き確率質量関数を $p_t(\cdot | \mathbf{x}_t)$ とすると、継続（在学）の条件付き選択確率 (CCP) は

$$\begin{aligned} p_t(1 | \mathbf{x}_t) &:= \Pr[d_t^* = 1 | \mathbf{x}_t] \\ &= \Pr[v_t(\mathbf{x}_t; 1) + e_t(1) > v_t(\mathbf{x}_t; 0) + e_t(0) | \mathbf{x}_t] \\ &= \int [v_t(\mathbf{x}_t; 1) + e_t(1) > v_t(\mathbf{x}_t; 0) + e_t(0)] dG(e_t) \end{aligned}$$

ここで確率効用モデルからロジット・モデルを導出する場合と同様に、 $\{e_t(j)\}$ は位置母数 $-\gamma\sigma$ (γ はオイラー定数)、尺度母数 σ の独立かつ同一なガンベル分布にしたがうと仮定する⁹。すると任意の \mathbf{x}_t について

$$p_t(1 | \mathbf{x}_t) = \frac{\exp(v_t(\mathbf{x}_t; 1)/\sigma)}{\exp(v_t(\mathbf{x}_t; 0)/\sigma) + \exp(v_t(\mathbf{x}_t; 1)/\sigma)} = \Lambda \left(\frac{v_t(\mathbf{x}_t; 1) - v_t(\mathbf{x}_t; 0)}{\sigma} \right) \quad (13)$$

ただし $\Lambda(\cdot)$ はロジスティック関数を表す。また任意の \mathbf{x}_t について

$$\bar{V}_t^1(\mathbf{x}_t) = \sigma \ln \left(\exp \left(\frac{v_t(\mathbf{x}_t; 0)}{\sigma} \right) + \exp \left(\frac{v_t(\mathbf{x}_t; 1)}{\sigma} \right) \right) \quad (14)$$

以上の結果は Arcidiacono and Ellickson (2011, p. 372) に依る（ただし $\sigma \neq 1$ に拡張している）。

CCP 関数 $\{p_t(\cdot, \cdot)\}$ と選択肢別価値関数 $\{v_t(\cdot, \cdot)\}$ について、後で使用する基本的な結果を補題としてまとめておく。

9 位置母数 λ , 尺度母数 σ のガンベル分布の累積分布関数は、任意の $x \in \mathbb{R}$ について $F(x) := e^{-e^{-(x-\lambda)/\sigma}}$, 平均は $\lambda + \gamma\sigma$ 。したがって位置母数が $-\gamma\sigma$ ならガンベル分布の平均は 0 となる。効用の計測単位が任意なら尺度母数 σ は 1 に基準化できる。

補題 1 任意の \mathbf{x}_t について

$$\ln \frac{p_t(1|\mathbf{x}_t)}{p_t(0|\mathbf{x}_t)} = \frac{v_t(\mathbf{x}_t; 1) - v_t(\mathbf{x}_t; 0)}{\sigma} \quad (15)$$

証明 式 (13) より明らか. □

補題 2 任意の \mathbf{x}_t と $j = 0, 1$ について

$$\bar{V}_t^1(\mathbf{x}_t) = v_t(\mathbf{x}_t; j) - \sigma \ln p_t(j|\mathbf{x}_t)$$

証明 式 (13), (14) より任意の \mathbf{x}_t と $j = 0, 1$ について

$$\ln p_t(j|\mathbf{x}_t) = \frac{v_t(\mathbf{x}_t; j) - \bar{V}_t^1(\mathbf{x}_t)}{\sigma}$$

式変形により結果が得られる. □

補題 3 時点 $t = 0, \dots, T-1$ において, 任意の \mathbf{x}_t と $j = 0, 1$ について

$$v_t(\mathbf{x}_t; 1) = u_t(1; \mathbf{x}_t) + \beta \mathbb{E}(v_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1}; j) - \sigma \ln p_{t+1}(j|\mathbf{x}_{t+1}) | \mathbf{x}_t; d_t = 1) \quad (16)$$

$$v_t(\mathbf{x}_t; 0) = u_t(0; \mathbf{x}_t) + \beta \mathbb{E}(v_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1}; 0) | \mathbf{x}_t; d_t = 0) \quad (17)$$

証明 式 (7), (10) の定義より任意の \mathbf{x}_t と $j = 0, 1$ について

$$v_t(\mathbf{x}_t; j) = u_t(j; \mathbf{x}_t) + \beta \mathbb{E}(\bar{V}_{t+1}^j(\mathbf{x}_{t+1}) | \mathbf{x}_t; d_t = j)$$

$\bar{V}_{t+1}^1(\cdot)$ は前補題, $\bar{V}_{t+1}^0(\cdot)$ は式 (12) を 1 時点ずらして代入する. □

3.6 後ろ向き帰納法

式 (13) より $p_t(\cdot|\cdot)$ と $v_t(\cdot;\cdot)$ は 1 対 1 に対応する. したがって選択肢別価値関数 $\{v_t(\cdot;\cdot)\}$ が求まれば条件付き選択確率 (CCP) 関数 $\{p_t(\cdot|\cdot)\}$ も求まる. 効用関数 $\{u_t(\cdot;\cdot)\}$, 割引因子 β , 尺度母数 σ に加え, 時点 T の選択肢別期待価値関数 $V_T^c(\cdot;\cdot)$ と $\{\mathbf{x}_t\}$ の状態遷移確率分布 $\{F_t(\cdot|\cdot;\cdot)\}$ を所与として, $\{v_t(\cdot;\cdot)\}$ は後ろ向き帰納法で求まる. まず停止の価値関数 $\{v_t(\cdot; 0)\}$ を以下の手順で求める.

1. $V_T^c(\cdot; 0)$ が所与なので $v_T(\cdot; 0) := u_T(0; \cdot) + \beta V_T^c(\cdot; 0)$.
2. 時点 $t = 0, \dots, T-1$ において, 任意の \mathbf{x}_t について

$$v_t(\mathbf{x}_t; 0) = u_t(0; \mathbf{x}_t) + \beta \mathbb{E}(\bar{V}_{t+1}^0(\mathbf{x}_{t+1}) | \mathbf{x}_t; d_t = 0)$$

ただし式 (12) より

$$\mathbb{E}(\bar{V}_{t+1}^0(\mathbf{x}_{t+1}) | \mathbf{x}_t; d_t = 0) = \int v_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1}; 0) dF_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t; d_t = 0)$$

これを逆順で逐次的に計算する。

次に $\{v_i(\cdot; 0)\}$ を所与として継続の価値関数 $\{v_i(\cdot; 1)\}$ を以下の手順で求める。

1. $V_T^e(\cdot; 1)$ が所与なので $v_T(\cdot; 1) := u_T(1; \cdot) + \beta V_T^e(\cdot; 1)$.
2. 時点 $t = 0, \dots, T-1$ において, 任意の \mathbf{x}_t について

$$v_t(\mathbf{x}_t; 1) = u_t(1; \mathbf{x}_t) + \beta \mathbb{E}(\bar{V}_{t+1}^1(\mathbf{x}_{t+1}) | \mathbf{x}_t; d_t = 1) \quad (18)$$

ただし式 (14) より

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\bar{V}_{t+1}^1(\mathbf{x}_{t+1}) | \mathbf{x}_t; d_t = 1) \\ &= \sigma \int \ln \left(\exp \left(\frac{v_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1}; 0)}{\sigma} \right) + \exp \left(\frac{v_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1}; 1)}{\sigma} \right) \right) dF_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t; d_t = 1) \end{aligned}$$

これを逆順で逐次的に計算する。

4. 識別

4.1 識別問題

多数の個人の逐次的な選択と状態ベクトル $\{d_t, \mathbf{x}_t\}$ のパネル・データを用いて最適停止モデルの構造母数を推定したい。その前提として構造母数の識別を検討する。本稿の最適停止モデルは以下の4つで構成される。

1. (分析者から見た) 効用関数 $\{u_t(\cdot; \cdot)\}$
2. 割引因子 β
3. 観測される状態ベクトル $\{\mathbf{x}_t\}$ の状態遷移確率分布 $\{F_t(\cdot; \cdot; \cdot)\}$
4. 観測されない状態 $\{e_t(\cdot)\}$ の分布 $G(\cdot)$

$\{F_t(\cdot; \cdot; \cdot)\}$ は各時点の経験 (累積) 分布関数で識別できる。本稿では $\{e_t(j)\}$ を平均 0, 尺度母数 σ の独立かつ同一なガンベル分布に従うと仮定する。誘導形の CCP 関数 $\{p_t(\cdot; \cdot)\}$ は各時点のノンパラメトリック回帰で識別できる¹⁰。したがって $\{F_t(\cdot; \cdot; \cdot)\}, \{p_t(\cdot; \cdot)\}$ を既知として $(\{u_t(\cdot; \cdot)\}, \beta, \sigma)$ の識別を検討する。

一般に $\{p_t(\cdot; \cdot)\}$ から $(\{u_t(\cdot; \cdot)\}, \beta, \sigma)$ は一意に定まらない。例えば $\beta = 0, \sigma = 1$ とすると, 式 (13) より任意の \mathbf{x}_t について

$$p_t(1 | \mathbf{x}_t) = \Lambda(u_t(1; \mathbf{x}_t) - u_t(0; \mathbf{x}_t))$$

すなわち静的な 2 値ロジット・モデルとなる。ここで選択確率 $p_t(\cdot; \cdot)$ は効用の差 $u_t(1; \cdot) - u_t(0; \cdot)$ のみに依存する。したがって (β, σ) が既知でも $p_t(\cdot; \cdot)$ から効用の水準 $u_t(\cdot; \cdot)$ は定まらない。一般に $(\{u_t(\cdot; \cdot)\}, \beta, \sigma)$ の識別には追加的な識別制約が必要となる。

10 一致推定量が得られる限り, ここではノンパラメトリック回帰の具体的な手法は特に限定しない。

4.2 割引因子

割引因子 β に関する代表的な識別制約は、効用関数の引数から一部の状態変数を除外する除外制約である。除外制約による β の識別の詳細は Abbring and Daljord (2020) を参照。非定常な有限期間モデルでは、時点 t を状態変数と解釈できるので、効用関数 $u_t(\cdot; \cdot)$ が t に依存しなければ除外制約は成立する。また最適停止モデルで停止の価値が既知または 0 と基準化できるなら、階数条件の下で $\{u_t(\cdot; \cdot)\}$ と独立に β は一意に識別できる。Bajari et al. (2016, Theorem 2(i)) を参照。本稿のモデルでは停止の価値を 0、ガンベル分布の尺度母数 σ を 1 と基準化できないため、Daljord et al. (2019, Theorem 1) の結果を次のように修正・拡張する。

定理 1 以下を仮定する。

1. (除外制約) 継続時の効用関数 $u_t(1; \cdot)$ は時点 t に依存しない。
2. 停止の価値関数 $v_t(\cdot; 0)$ は状態ベクトル \mathbf{x}_t に依存しない。
3. (階数条件) ある 2 つの状態 $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ について

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\ln p_{t+1}(0|\mathbf{x}_{t+1})|\mathbf{x}_t = \mathbf{x}; d_t = 1) - \mathbb{E}(\ln p_t(0|\mathbf{x}_t)|\mathbf{x}_{t-1} = \mathbf{x}; d_{t-1} = 1) \\ & \neq \mathbb{E}(\ln p_{t+1}(0|\mathbf{x}_{t+1})|\mathbf{x}_t = \mathbf{x}'; d_t = 1) - \mathbb{E}(\ln p_t(0|\mathbf{x}_t)|\mathbf{x}_{t-1} = \mathbf{x}'; d_{t-1} = 1) \end{aligned}$$

このとき 3 期間以上のパネル・データから β は一意に識別できる。

証明 付録を参照。 □

4.3 尺度母数

割引因子 β を所与としてガンベル分布の尺度母数 σ の識別を確認する。前定理の条件に加え、停止の価値 $\{v_t(\cdot; 0)\}$ が一定でなく既知なら階数条件の下で σ は一意に識別できる。

定理 2 以下を仮定する。

1. (除外制約) 継続時の効用関数 $u_t(\cdot; 1)$ は時点 t に依存しない。
2. 停止の価値関数 $v_t(\cdot; 0)$ は状態ベクトル \mathbf{x}_t に依存せず既知で $\Delta v_t(\cdot; 0) \neq 0$ 。
3. (階数条件) ある状態 \mathbf{x} について

$$\Delta \ln \frac{p_t(1|\mathbf{x})}{p_t(0|\mathbf{x})} \neq -\beta(\mathbb{E}(\ln p_{t+1}(0|\mathbf{x}_{t+1})|\mathbf{x}_t = \mathbf{x}; d_t = 1) - \mathbb{E}(\ln p_t(0|\mathbf{x}_t)|\mathbf{x}_{t-1} = \mathbf{x}; d_{t-1} = 1))$$

このとき β を所与として 3 期間以上のパネル・データから σ は一意に識別できる。

証明 付録を参照。 □

4.4 効用関数

割引因子 β と尺度母数 σ を所与とすれば、効用関数 $\{u_t(\cdot; \cdot)\}$ は前定理の条件の下で識別できる。

定理 3 停止の価値関数 $\{v_t(\cdot; 0)\}$ を既知とする。このとき (β, σ) を所与として $\{u_t(\cdot; \cdot)\}$ はノンパラメトリックに識別できる。

証明 付録を参照。 □

4.5 反実仮想 CCP

4.5.1 効用関数の一時的な変化

個人の効用でなく行動（選択）の反実仮想分析が目的なら、想定する反実仮想により意思決定モデルの完全な識別が不要な場合がある。例えば効用関数の一時的な変化の反実仮想 CCP の識別に効用関数の識別は不要である。非定常なモデルにおける反実仮想 CCP の識別の詳細は Arcidiacono and Miller (2020) を参照。

反実仮想の効用関数を $\{u_t^*(\cdot; \cdot)\}$ 、効用関数の変化を $\Delta_t(\cdot; \cdot) := u_t^*(\cdot; \cdot) - u_t(\cdot; \cdot)$ 、反実仮想 CCP を $\{p_t^*(\cdot)\}$ とする。ただし効用関数の変化は観測期間のみとし、 $t > T$ では $\Delta_t(\cdot; \cdot) = 0$ とする。反実仮想における継続中／停止後の積分した価値関数を $\bar{V}_t^{1*}(\cdot), \bar{V}_t^{0*}(\cdot)$ とすると、時点 $T+1$ の問題は変化しないので、 $j = 0, 1$ について $\bar{V}_{T+1}^{j*}(\cdot) = \bar{V}_{T+1}^j(\cdot)$ となる。

反実仮想の選択枝別価値関数を $\{v_t^*(\cdot; \cdot)\}$ とすると、時点 T では任意の \mathbf{x}_T と $j = 0, 1$ について

$$\begin{aligned} v_T^*(\mathbf{x}_T; j) &= u_T^*(j; \mathbf{x}_T) + \beta \mathbb{E} \left(\bar{V}_{T+1}^j(\mathbf{x}_{T+1}) | \mathbf{x}_T; d_T = j \right) \\ &= u_T(j; \mathbf{x}_T) + \Delta_T(j; \mathbf{x}_T) + \beta \mathbb{E} \left(\bar{V}_{T+1}^j(\mathbf{x}_{T+1}) | \mathbf{x}_T; d_T = j \right) \\ &= v_T(\mathbf{x}_T; j) + \Delta_T(j; \mathbf{x}_T) \end{aligned}$$

継続／停止の価値の差は、任意の \mathbf{x}_T について

$$v_T^*(\mathbf{x}_T; 1) - v_T^*(\mathbf{x}_T; 0) = v_T(\mathbf{x}_T; 1) - v_T(\mathbf{x}_T; 0) + \Delta_T(1; \mathbf{x}_T) - \Delta_T(0; \mathbf{x}_T)$$

継続／停止の対数オッズ比は、補題 1 より任意の \mathbf{x}_T について

$$\begin{aligned} \ln \frac{p_T^*(1 | \mathbf{x}_T)}{p_T^*(0 | \mathbf{x}_T)} &= \frac{v_T^*(\mathbf{x}_T; 1) - v_T^*(\mathbf{x}_T; 0)}{\sigma} \\ &= \frac{v_T(\mathbf{x}_T; 1) - v_T(\mathbf{x}_T; 0)}{\sigma} + \frac{\Delta_T(1; \mathbf{x}_T) - \Delta_T(0; \mathbf{x}_T)}{\sigma} \\ &= \ln \frac{p_T(1 | \mathbf{x}_T)}{p_T(0 | \mathbf{x}_T)} + \frac{\Delta_T(1; \mathbf{x}_T) - \Delta_T(0; \mathbf{x}_T)}{\sigma} \end{aligned}$$

したがって σ が既知なら $p_T(\cdot | \cdot)$ と $\Delta_T(\cdot; \cdot)$ のみから $p_T^*(\cdot | \cdot)$ は求まる。さらに β も既知なら $p_T^*(\cdot | \cdot)$ を所与として $\{p_t^*(\cdot | \cdot)\}$ は逆順で逐次的に求まる。

定理 4 時点 $t = 0, \dots, T-1$ において, 任意の \mathbf{x}_t と $j = 0, 1$ について

$$\begin{aligned} \ln \frac{p_t^*(1|\mathbf{x}_t)}{p_t^*(0|\mathbf{x}_t)} &= \ln \frac{p_t(1|\mathbf{x}_t)}{p_t(0|\mathbf{x}_t)} + \frac{\Delta_t(1; \mathbf{x}_t) - \Delta_t(0; \mathbf{x}_t)}{\sigma} \\ &+ \sum_{s=1}^{T-t} \beta^s \mathbb{E} \left(\frac{\Delta_{t+s}(j; \mathbf{x}_{t+s})}{\sigma} - \ln \frac{p_{t+s}^*(j|\mathbf{x}_{t+s})}{p_{t+s}(j|\mathbf{x}_{t+s})} \middle| \mathbf{x}_t; d_t = 1 \right) \\ &- \sum_{s=1}^{T-t} \beta^s \mathbb{E} \left(\frac{\Delta_{t+s}(0; \mathbf{x}_{t+s})}{\sigma} \middle| \mathbf{x}_t; d_t = 0 \right) \end{aligned}$$

証明 付録を参照. □

定理より (β, σ) が既知なら $\{p_t(\cdot|\cdot)\}$ と $\{\Delta_t(\cdot; \cdot)\}$ のみから $\{p_t^*(\cdot|\cdot)\}$ は識別できる. すなわち $\{u_t(\cdot; \cdot)\}$ の識別は不要である. なお停止時の効用関数の変化 $\Delta_t(0; \cdot)$ が状態ベクトル \mathbf{x}_t に依存しない場合, 定理は少し単純化できる¹¹. 特に $\Delta_t(0; \cdot) = 0$ なら時点 $t = 0, \dots, T-1$ において, 任意の \mathbf{x}_t について

$$\begin{aligned} \ln \frac{p_t^*(1|\mathbf{x}_t)}{p_t^*(0|\mathbf{x}_t)} &= \ln \frac{p_t(1|\mathbf{x}_t)}{p_t(0|\mathbf{x}_t)} + \frac{\Delta_t(1; \mathbf{x}_t)}{\sigma} \\ &- \sum_{s=1}^{T-t} \beta^s (\mathbb{E}(\ln p_{t+s}^*(0|\mathbf{x}_{t+s})|\mathbf{x}_t; d_t = 1) - \mathbb{E}(\ln p_{t+s}(0|\mathbf{x}_{t+s})|\mathbf{x}_t; d_t = 1)) \end{aligned} \quad (19)$$

上式の $\{\mathbb{E}(\ln p_{t+s}(0|\mathbf{x}_{t+s})|\mathbf{x}_t; d_t = 1)\}$ と $\{\mathbb{E}(\ln p_{t+s}^*(0|\mathbf{x}_{t+s})|\mathbf{x}_t; d_t = 1)\}$ の計算は, 状態 \mathbf{x}_t から \mathbf{x}_{t+s} への経路の数が s の指数関数で増えるため, s が大きいと直接的な計算が困難になる. この「次元の呪い」は逐次計算で回避できる.

定理 5 時点 $t = 0, \dots, T-2$ において, 任意の \mathbf{x}_t と $s = 2, \dots, T-t$ について

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(\ln p_{t+s}(0|\mathbf{x}_{t+s})|\mathbf{x}_t; d_t = 1) \\ &= \int \mathbb{E}(\ln p_{t+s}(0|\mathbf{x}_{t+s})|\mathbf{x}_{t+1}; d_{t+1} = 1) p_{t+1}(1|\mathbf{x}_{t+1}) dF_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t; d_t = 1) \end{aligned}$$

証明 付録を参照. □

定理より $\{\mathbb{E}(\ln p_{t+1}(0|\mathbf{x}_{t+1})|\mathbf{x}_t; d_t = 1)\}$ から $\{\mathbb{E}(\ln p_{t+2}(0|\mathbf{x}_{t+2})|\mathbf{x}_t; d_t = 1)\}$ を計算できる. これを繰り返して $\{\mathbb{E}(\ln p_{t+s}(0|\mathbf{x}_{t+s})|\mathbf{x}_t; d_t = 1)\}$ を逐次的に計算する. $\{\mathbb{E}(\ln p_{t+s}^*(0|\mathbf{x}_{t+s})|\mathbf{x}_t; d_t = 1)\}$ も同様に計算できる.

将来の継続確率の計算には次の系が有用である.

¹¹ 例えば在学中の学費補助による退学後の（分析者から見た）期待生涯所得の変化が在学中の成績に依存しない場合が該当する.

系 1 時点 $t = 0, \dots, T-2$ において, 任意の \mathbf{x}_t と $s = 2, \dots, T-t$ について

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(p_{t+s}(1|\mathbf{x}_{t+s})|\mathbf{x}_t; d_t = 1) \\ &= \int \mathbb{E}(p_{t+s}(1|\mathbf{x}_{t+s})|\mathbf{x}_{t+1}; d_{t+1} = 1)p_{t+1}(1|\mathbf{x}_{t+1}) dF_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t; d_t = 1) \end{aligned}$$

証明 付録を参照. □

系より $\{\mathbb{E}(p_{t+1}(1|\mathbf{x}_{t+1})|\mathbf{x}_t; d_t = 1)\}$ から $\{\mathbb{E}(p_{t+2}(1|\mathbf{x}_{t+2})|\mathbf{x}_t; d_t = 1)\}$ を計算できる. これを繰り返して $\{\mathbb{E}(p_{t+s}(1|\mathbf{x}_{t+s})|\mathbf{x}_t; d_t = 1)\}$ を逐次的に計算する. ここで $t = 0$ とすれば $\{\mathbb{E}(p_s(1|\mathbf{x}_s)|\mathbf{x}_0)\}$ が得られるが, これは逐次期待値の法則より $\{\mathbb{E}(d_s|\mathbf{x}_0)\}$ すなわち時点 0 で見た将来の継続確率に等しい. 反実仮定の継続確率も同様に計算できる.

4.5.2 状態遷移確率分布の一時的な変化

効用関数の一時的な変化の場合と異なり, 状態遷移確率分布の一時的な変化の反実仮定 CCP の識別は, 短期パネルだと特に難しい. 反実仮定の状態遷移確率分布を $\{F_t^*(\cdot|\cdot; \cdot)\}$, 反実仮定 CCP を $\{p_t^*(\cdot|\cdot)\}$ とする. ただし状態遷移確率分布の変化は観測期間のみとし, $t > T$ では $F_{t+1}^*(\cdot|\cdot; \cdot) = F_{t+1}(\cdot|\cdot; \cdot)$ とする. 反実仮定における継続中/停止後の積分した価値関数を $\bar{V}_t^{1*}(\cdot), \bar{V}_t^{0*}(\cdot)$ とすると, 時点 $T+1$ の問題は変化しないので, $j = 0, 1$ について $\bar{V}_{T+1}^{j*}(\cdot) = \bar{V}_{T+1}^j(\cdot)$ となる.

反実仮定の選択枝別価値関数を $\{v_t^*(\cdot; \cdot)\}$ とし, 反実仮定の期待値を $\mathbb{E}^*(\cdot)$ で表すと, 時点 T では任意の \mathbf{x}_T と $j = 0, 1$ について

$$\begin{aligned} v_T^*(\mathbf{x}_T; j) &= u_T(j; \mathbf{x}_T) + \beta \mathbb{E}^* \left(\bar{V}_{T+1}^j(\mathbf{x}_{T+1})|\mathbf{x}_T; d_T = j \right) \\ &= u_T(j; \mathbf{x}_T) + \beta \mathbb{E} \left(\bar{V}_{T+1}^j(\mathbf{x}_{T+1})|\mathbf{x}_T; d_T = j \right) \\ &\quad + \beta \mathbb{E}^* \left(\bar{V}_{T+1}^j(\mathbf{x}_{T+1})|\mathbf{x}_T; d_T = j \right) - \beta \mathbb{E} \left(\bar{V}_{T+1}^j(\mathbf{x}_{T+1})|\mathbf{x}_T; d_T = j \right) \\ &= v_T(\mathbf{x}_T; j) + \beta \left(\mathbb{E}^* \left(\bar{V}_{T+1}^j(\mathbf{x}_{T+1})|\mathbf{x}_T; d_T = j \right) - \mathbb{E} \left(\bar{V}_{T+1}^j(\mathbf{x}_{T+1})|\mathbf{x}_T; d_T = j \right) \right) \end{aligned}$$

継続/停止の価値の差は, 任意の \mathbf{x}_T について

$$\begin{aligned} v_T^*(\mathbf{x}_T; 1) - v_T^*(\mathbf{x}_T; 0) &= v_T(\mathbf{x}_T; 1) - v_T(\mathbf{x}_T; 0) \\ &\quad + \beta \left(\mathbb{E}^* \left(\bar{V}_{T+1}^1(\mathbf{x}_{T+1})|\mathbf{x}_T; d_T = 1 \right) - \mathbb{E} \left(\bar{V}_{T+1}^1(\mathbf{x}_{T+1})|\mathbf{x}_T; d_T = 1 \right) \right) \\ &\quad - \beta \left(\mathbb{E}^* \left(\bar{V}_{T+1}^0(\mathbf{x}_{T+1})|\mathbf{x}_T; d_T = 0 \right) - \mathbb{E} \left(\bar{V}_{T+1}^0(\mathbf{x}_{T+1})|\mathbf{x}_T; d_T = 0 \right) \right) \end{aligned}$$

したがって $p_T^*(\cdot|\cdot)$ の識別には $\bar{V}_{T+1}^1(\cdot), \bar{V}_{T+1}^0(\cdot)$ が必要となる. 割引因子の一時的な変化の場合も同様である. 詳細は Arcidiacono and Miller (2020, p. 480) を参照.

5. 構造推定

効用関数と状態遷移確率分布に有限次元の母数を導入すれば、動的離散選択モデルの構造推定は最尤法でも可能だが、反復計算のステップ毎に尤度関数に含まれる選択肢別価値関数を後ろ向き帰納法で再計算するため煩雑になる。また短期パネルだと後ろ向き帰納法の起点となる最終期が観測されない問題も生じる。

本節では動的離散選択モデルの構造推定のもう1つの代表的な手法である CCP 法を解説し、本稿のデータに CCP 法を適用した場合の問題点を指摘する。そして Bajari et al. (2016) による CCP 法の簡便化 (BCNP 法と呼ぶ) を紹介し、そのアイデアの一部を借用して CCP 法を修正する。

5.1 最尤法

状態遷移確率分布 $\{F_t(\cdot, \cdot; \cdot)\}$ の確率質量／密度関数を $\{f_t(\cdot, \cdot; \cdot)\}$ とする。初期状態 \mathbf{x}_0 を所与とした選択と状態ベクトル $(d_0, \{d_t, \mathbf{x}_t\}_{t=1}^T)$ の条件付き確率質量／密度関数の予測誤差分解は、 $\{d_t, \mathbf{x}_t\}$ のマルコフ性より

$$\begin{aligned} p(d_0, \{d_t, \mathbf{x}_t\}_{t=1}^T | \mathbf{x}_0) &= \prod_{t=1}^T p(d_t, \mathbf{x}_t | d_{t-1}, \mathbf{x}_{t-1}) p(d_0 | \mathbf{x}_0) \\ &= \prod_{t=1}^T p_t(d_t | \mathbf{x}_t) f_t(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}; d_{t-1}) p_0(d_0 | \mathbf{x}_0) \\ &= \prod_{t=0}^T p_t(d_t | \mathbf{x}_t) \prod_{t=1}^T f_t(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}; d_{t-1}) \end{aligned}$$

ただし式 (13) より

$$p_t(d_t | \mathbf{x}_t) = \frac{\exp(v_t(\mathbf{x}_t; d_t) / \sigma)}{\exp(v_t(\mathbf{x}_t; 0) / \sigma) + \exp(v_t(\mathbf{x}_t; 1) / \sigma)}$$

効用関数の母数を θ_1 、状態遷移確率分布の母数を θ_2 とし、効用関数を $\{u_t(\cdot, \cdot; \theta_1)\}$ 、状態遷移確率分布の確率質量／密度関数を $\{f_t(\cdot, \cdot; \theta_2)\}$ と書く。 θ_1 を推定したい (θ_2 に関心はない)。選択肢別価値関数 $\{v_t(\cdot, \cdot; \cdot)\}$ は (θ_1, θ_2) と割引因子 β と尺度母数 σ に依存するので CCP 関数 $\{p_t(\cdot, \cdot; \cdot)\}$ も $(\theta_1, \theta_2, \beta, \sigma)$ に依存する。CCP 関数を $\{p_t(\cdot, \cdot; \theta_1, \theta_2, \beta, \sigma)\}$ と書くと、 $\{d_t, \mathbf{x}_t\}$ を所与とした $(\theta_1, \theta_2, \beta, \sigma)$ の対数尤度関数は

$$\ell(\theta_1, \theta_2, \beta, \sigma; \{d_t, \mathbf{x}_t\}) = \sum_{t=0}^T \ln p_t(d_t | \mathbf{x}_t; \theta_1, \theta_2, \beta, \sigma) + \sum_{t=1}^T \ln f_t(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}; d_{t-1}; \theta_2)$$

大きさ n の無作為標本 $\{d_{i,t}, \mathbf{x}_{i,t}\}$ を所与とした $(\theta_1, \theta_2, \beta, \sigma)$ の対数尤度関数は

$$\ell(\theta_1, \theta_2, \beta, \sigma; \{d_{i,t}, \mathbf{x}_{i,t}\}) = \sum_{i=1}^n \sum_{t=0}^T \ln p_t(d_{i,t} | \mathbf{x}_{i,t}; \theta_1, \theta_2, \beta, \sigma) + \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \ln f_t(\mathbf{x}_{i,t} | \mathbf{x}_{i,t-1}; d_{i,t-1}; \theta_2)$$

この対数尤度関数を最大化する解が $(\theta_1, \theta_2, \beta, \sigma)$ の最尤推定量となる。また第 2 項のみで θ_2 を推定し、 θ_2 を所与として第 1 項の 2 値ロジット・モデルのみで $(\theta_1, \beta, \sigma)$ を推定しても一致推定量が得られる。ただし推定効率は低下する。Arcidiacono and Ellickson (2011, p. 371) を参照。

対数尤度関数の第 1 項に含まれる $\{v_t(\cdot; \cdot)\}$ は、反復計算のステップ毎に新たな母数の下で第 3.6 節の後ろ向き帰納法により再計算する必要がある。そのため動的離散選択 (2 値ロジット) モデルの最尤法による構造推定は計算負荷が大きい。また短期パネルだと後ろ向き帰納法の起点となる最終期が観測されず、最尤法は困難になる。

5.2 CCP 法

式 (13) の 2 値ロジット・モデルの最尤推定の際は、反復計算のステップ毎に後ろ向き帰納法で選択肢別価値関数 $\{v_t(\cdot; \cdot)\}$ を再計算する必要がある。ただし誘導形の CCP 関数 $\{p_t(\cdot)\}$ をノンパラメトリック帰帰で推定すれば、 $\{v_t(\cdot; 0)\}$ を所与として $\{p_t(\cdot)\}$ から $\{v_t(\cdot; 1)\}$ を逆算できる。特に割引因子 β が既知で尺度母数 $\sigma = 1$ 、停止の価値 $v_t(\cdot; 0) = 0$ と基準化できるなら、動的な部分の補正項を作成して静的な 2 値ロジット・モデルに加えれば、効用関数の母数を簡単に推定できる (CCP 法)。以下では本稿のモデルに沿って、 β が未知で $\sigma \neq 1$ 、 $v_t(\cdot; 0) \neq 0$ の場合に CCP 法を修正・拡張する。

継続時の効用関数 $u_t(1; \cdot)$ は時点 t に依存せず (除外制約)、停止の価値関数 $v_t(\cdot; 0)$ は状態ベクトル \mathbf{x}_t に依存しないと仮定する。 $u(1; \cdot) := u_t(1; \cdot)$ 、 $y_t := v_t(\cdot; 0)$ とすると、式 (16) より時点 $t = 0, \dots, T-1$ において、任意の \mathbf{x}_t について

$$\begin{aligned} v_t(\mathbf{x}_t; 1) - v_t(\mathbf{x}_t; 0) &= u_t(1; \mathbf{x}_t) + \beta E(v_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1}; 0) - \sigma \ln p_{t+1}(0|\mathbf{x}_{t+1})|\mathbf{x}_t; 1) - v_t(\mathbf{x}_t; 0) \\ &= u(1; \mathbf{x}_t) + \beta y_{t+1} - \beta \sigma E(\ln p_{t+1}(0|\mathbf{x}_{t+1})|\mathbf{x}_t; 1) - y_t \end{aligned}$$

式 (13) に代入すると、任意の \mathbf{x}_t について

$$p_t(1|\mathbf{x}_t) = \Lambda \left(\frac{u(1; \mathbf{x}_t)}{\sigma} + \frac{\beta y_{t+1}}{\sigma} - \beta z_t(\mathbf{x}_t) - \frac{y_t}{\sigma} \right)$$

ただし

$$z_t(\mathbf{x}_t) := E(\ln p_{t+1}(0|\mathbf{x}_{t+1})|\mathbf{x}_t; d_t = 1) = \int \ln p_{t+1}(0|\mathbf{x}_{t+1}) dF_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t; d_t = 1) \quad (20)$$

$\{F_t(\cdot; \cdot)\}$, $\{p_t(\cdot)\}$ から $\{z_t(\cdot)\}$ は計算できる。なお $p_t(\cdot) \in [0, 1]$ より $z_t(\cdot) \leq 0$ の符号制約がある。ここで $\sigma = 1$ 、 $y_t = 0$ と基準化できるなら、任意の \mathbf{x}_t について

$$p_t(1|\mathbf{x}_t) = \Lambda(u(1; \mathbf{x}_t) - \beta z_t(\mathbf{x}_t))$$

すなわち β が既知なら静的な 2 値ロジット・モデルに補正項 $-\beta z_t(\mathbf{x}_t)$ を加えれば、 $u(1; \cdot)$ の母数を簡単に推定できる。CCP 法の解説は Arcidiacono and Ellickson (2011, pp. 381–382) を参照¹²。

¹² CCP 法による推定量の漸近特性や漸近分散共分散行列は Hotz and Miller (1993, Proposition 2) が与えており、状態空間が有限集合なら標準的な結果となる。漸近分散共分散行列はブートストラップ法でも推定できる。Kasahara and Shimotsu (2008, sec. 6.6) を参照。

$\theta := \theta_1$ として $u(1; \mathbf{x}_t) := \mathbf{x}'_t \theta$ と定式化し, $\eta := \sigma^{-1}$ とする. $\{y_t\}$ が既知なら無作為標本 $\{d_{i,t}, \mathbf{x}_{i,t}\}$ を用いて以下の手順で構造母数 (θ, β, η) を推定できる.

1. 状態遷移確率分布 $\{F_t(\cdot, \cdot; \cdot)\}$ を推定し, 推定値を $\{\hat{F}_t(\cdot, \cdot; \cdot)\}$ とする.
2. 誘導形の CCP 関数 $\{p_t(\cdot, \cdot)\}$ をノンパラメトリック回帰で推定し, 推定値を $\{\hat{p}_t(\cdot, \cdot)\}$ とする.
3. $\{\hat{F}_t(\cdot, \cdot; \cdot)\}, \{\hat{p}_t(\cdot, \cdot)\}$ から補正関数 $\{\hat{z}_t(\cdot)\}$ を計算する.
4. 次式の 2 値ロジット・モデルを用いて (θ, β, η) を最尤法で推定する.

$$p_t(1|\mathbf{x}_{i,t}) = \Lambda(\mathbf{x}'_{i,t} \eta \theta + \beta \eta y_{t+1} - \beta \hat{z}_t(\mathbf{x}_{i,t}) - \eta y_t)$$

必要なら最後のステップで $\beta \in [0, 1], \eta > 0$ の制約を課す (ただし母数空間を制約すると統計的推測は複雑になる).

なお最後のステップで 2 値ロジット・モデルに完全分離が生じると最尤推定値は求まらない. 本稿のデータは小標本で停止 (退学) の観測数が少ないため, 実際に完全分離が生じて CCP 法の適用は失敗した. そこで以下では, まず Bajari et al. (2016) による CCP 法の簡便化を紹介し, そのアイデアの一部を借用して CCP 法を修正する.

5.3 BCNP 法

Bajari et al. (2016, sec. 3.3) は, 以下の 2 点で CCP 法を簡便化した (BCNP 法).

1. 状態遷移確率分布 $\{F_t(\cdot, \cdot; \cdot)\}$ を使わずに, ノンパラメトリック回帰で補正関数 $\{z_t(\cdot)\}$ を推定する. そのため状態ベクトル $\{\mathbf{x}_t\}$ が連続でも $\{z_t(\cdot)\}$ を容易に計算できる. ただし推定した補正関数は必ずしも $z_t(\cdot) \leq 0$ の符号制約を満たさない.
2. 2 値ロジット・モデルでなく, 対数オッズ比のノンパラメトリック推定値を従属変数としたモデルに最小 2 乗法を適用して構造母数を推定する. そのため推定効率は少し低下するが, 推定結果は安定しやすい.

本稿のモデルに BCNP 法を適用する場合は, 以下の手順 1-3 の通り, 最小 2 乗法を 3 回繰り返して構造母数 (θ, β, η) を推定する.

1. 誘導形の CCP 関数 $\{p_t(\cdot, \cdot)\}$ をノンパラメトリック回帰で推定し, 推定値を $\{\hat{p}_t(\cdot, \cdot)\}$ とする.
2. $\{\hat{p}_t(\cdot, \cdot)\}$ を用いて $E(\ln \hat{p}_{t+1}(0|\mathbf{x}_{t+1})|\mathbf{x}_t; d_t = 1)$ のノンパラメトリック回帰で $\{z_t(\cdot)\}$ を推定し, 推定値を $\{\hat{z}_t(\cdot)\}$ とする.
3. 次式を用いて (θ, β, η) を非線形最小 2 乗法で推定する.

$$\ln \frac{\hat{p}_t(1|\mathbf{x}_{i,t})}{\hat{p}_t(0|\mathbf{x}_{i,t})} = \mathbf{x}'_{i,t} \eta \theta + \beta \eta y_{t+1} - \beta \hat{z}_t(\mathbf{x}_{i,t}) - \eta y_t$$

必要なら最後のステップで $\beta \in [0, 1], \eta > 0$ の制約を課す¹³.

¹³ Bajari et al. (2016, Appendix C) はコンパクトな状態空間を仮定して, BCNP 法による推定量の漸近特性や漸近分散共分散行列を導出している. 漸近分散共分散行列はサブサンプリング法でも推定できる. Bajari et al. (2016, p. 318) を参照.

5.4 修正 CCP 法

CCP 法と BCNP 法には一長一短がある。CCP 法の最後のステップは、小標本で停止の観測数が少ないと 2 値ロジット・モデルに完全分離が生じ、推定値が求まらない場合がある。ノンパラメトリック回帰で推定する BCNP 法の補正関数は、必ずしも符号制約を満たさない。本稿では両者の欠点を補う中間的な手法（修正 CCP 法と呼ぶ）を採用し、以下の手順で構造母数を推定する。

1. 状態遷移確率分布 $\{F_t(\cdot|\cdot;\cdot)\}$ を推定し、推定値を $\{\hat{F}_t(\cdot|\cdot;\cdot)\}$ とする。
2. 誘導形の CCP 関数 $\{p_t(\cdot|\cdot)\}$ をノンパラメトリック回帰で推定し、推定値を $\{\hat{p}_t(\cdot|\cdot)\}$ とする。
3. $\{\hat{F}_t(\cdot|\cdot;\cdot)\}, \{\hat{p}_t(\cdot|\cdot)\}$ から補正関数 $\{\hat{z}_t(\cdot)\}$ を計算する。
4. 次式を用いて (θ, β, η) を非線形最小 2 乗法で推定する。

$$\ln \frac{\hat{p}_t(1|\mathbf{x}_{i,t})}{\hat{p}_t(0|\mathbf{x}_{i,t})} = \mathbf{x}'_{i,t}\eta\theta + \beta\eta y_{t+1} - \beta\hat{z}_t(\mathbf{x}_{i,t}) - \eta y_t \quad (21)$$

必要なら最後のステップで $\beta \in [0, 1]$, $\eta > 0$ の制約を課す¹⁴。

6. モンテカルロ実験

6.1 大学中退モデル

大学中退の逐次意思決定モデルの構造母数について、修正 CCP 法による推定量の性質を簡単なモンテカルロ実験で確認する。在学者は每学期 12 科目履修すると仮定し、8 学期の在籍と 64 科目の修得を卒業要件とする。卒業要件を満たさなければ留年となる。観測期間は第 1～8 期の 8 期間とし、留年者の第 9 期以降の選択・状態は観測しない（短期パネル）。また第 1 期の期首の退学者は入学者に含まれず存在しない。

学生 i の第 t 期の修得科目数を $n_{i,t}$ 、累積修得科目数を $N_{i,t}$ とする。1 学期当たり 8 科目修得すれば 8 学期で 64 科目となるので、超過累積修得科目数を $N_{i,t}^* := N_{i,t} - 8t$ と定義する。1～4 の 4 つの水準に離散化した GPA 水準を $g_{i,t}$ とする。第 t 期の期首の選択（在学ダミー）を $d_{i,t}$ 、状態ベクトルを $\mathbf{x}_{i,t} := (N_{i,t-1}^*, g_{i,t-1})'$ とする。每学期 12 科目のみ履修するため、状態空間は有限集合となる。

単純化のため $n_{i,t}$ は $g_{i,t}$ のみ、 $g_{i,t}$ は $g_{i,t-1}$ のみに依存すると仮定する。在学中の状態遷移確率分布は、確率の乗法定理より、任意の N^* と $g = 1, \dots, 4$ について

$$\begin{aligned} & \Pr [N_{i,t}^* = N^*, g_{i,t} = g | N_{i,t-1}^*, g_{i,t-1}] \\ &= \Pr [N_{i,t}^* = N^* | g_{i,t} = g, N_{i,t-1}^*, g_{i,t-1}] \Pr [g_{i,t} = g | N_{i,t-1}^*, g_{i,t-1}] \\ &= \Pr [N_{i,t}^* = N^* | g_{i,t} = g, N_{i,t-1}^*] \Pr [g_{i,t} = g | g_{i,t-1}] \end{aligned} \quad (22)$$

14 修正 CCP 法による推定量の漸近特性や漸近分散共分散行列は、状態空間が有限集合なら標準的な結果となる。本稿は応用が主眼なので、漸近理論には深入りせず、簡便なブートストラップ法で統計的推測を行う。

ただし

$$\begin{aligned}
\Pr [N_{i,t}^* = N^* | g_{i,t} = g, N_{i,t-1}^*] &= \Pr [N_{i,t} - 8t = N^* | g_{i,t} = g, N_{i,t-1}] \\
&= \Pr [N_{i,t-1} + n_{i,t} - 8t = N^* | g_{i,t} = g, N_{i,t-1}] \\
&= \Pr [n_{i,t} = N^* + 8t - N_{i,t-1} | g_{i,t} = g, N_{i,t-1}]
\end{aligned} \tag{23}$$

翌学期も同じ GPA 水準に留まる確率を π とし, $\{g_{i,t}\}$ に次の遷移確率行列を仮定する.

$$\mathbf{P} := \begin{bmatrix} \pi & 1 - \pi & 0 & 0 \\ (1 - \pi)/2 & \pi & (1 - \pi)/2 & 0 \\ 0 & (1 - \pi)/2 & \pi & (1 - \pi)/2 \\ 0 & 0 & 1 - \pi & \pi \end{bmatrix}$$

科目修得確率は GPA 水準の増加関数とし, $n_{i,t} | g_{i,t} \sim \text{Bin}(12, p(g_{i,t}))$ と仮定する.

(分析者から見た) 退学・卒業・留年の価値は, 状態ベクトル (成績) に依存せず, 期待生涯賃金として観測されると仮定する¹⁵. したがって効用は金額で測られる. 在学時の効用関数 $u(1; \cdot)$ は学期 t に依存せず, 状態ベクトルの線形関数とする¹⁶. すなわち任意の $\mathbf{x}_{i,t} := (N_{i,t-1}^*, g_{i,t-1})'$ について

$$u(1; \mathbf{x}_{i,t}) := \alpha + \kappa N_{i,t-1}^* + \lambda g_{i,t-1} \tag{24}$$

効用の確率的な部分 $\{e_{i,t}(j)\}$ は平均 0, 尺度母数 σ の独立かつ同一なガンベル分布にしたがうと仮定する.

6.2 実験デザイン

本稿では (分析者から見た) 退学の価値 = 退学後の生涯賃金とし, 労働政策研究・研修機構 (2023, pp. 304-305) にしたがって退学後の生涯賃金を計算する. 具体的には入学時の年齢を 18 歳とし, 大学中退 = 高卒扱いと仮定して, 退学した年の「賃金構造基本統計調査」の年齢階級別「きまって支給する現金給与額」と「年間賞与等」から退学後の生涯賃金を男女別に計算する. 大学卒業の価値も同様に計算する. 便宜的に留年の価値 = 入学 4 年後の退学の価値とする¹⁷. 2016 年 4 月入学者の生涯賃金の計算結果は表 2 の通りである^{18,19}. 一般に遅く退学すると就労期間が短くなり

15 留年 = 在学なので留年の価値は成績に依存すると考えられるが, ここでは構造母数の推定量の性質を調べるのが目的なので, 意思決定モデルを単純化して実験を行う.

16 在学時の効用と学期 t の直接的な関係の有無の検証は今後の検討課題としたい. 直接的な関係がある場合は別の除外変数が必要となる.

17 実際の留年の価値は入学 4 年後の状態ベクトル (成績) に依存する. 卒業・留年の価値は構造母数の推定には不要だが, 在学/退学の意思決定のシミュレーションに必要となる.

18 「令和 2 年賃金構造基本統計調査」の学歴区分等の変更に伴い, 労働政策研究・研修機構 (2023) では生涯賃金の計算方法が変更された. 主な変更は以下の 3 点である: (1) 学歴区分の「大学・大学院卒」を「大学卒」「大学院卒」に細分化 (2) 翌年調査でなく賃金と同じ年の「年間賞与等」を使用 (3) 60 歳でなく 59 歳まで (ただし 59 歳は 6.5 か月分の賃金を合計).

19 労働政策研究・研修機構 (2023) が作成する「生涯賃金」は, 「賃金構造基本統計調査」の年齢賃金プロフィールを生涯の賃金プロフィールとみなし, 割引因子を 1 として求めた割引現在価値と理解できる. 分析の単純化のため本稿では

生涯賃金は減少するが、賃金水準の上昇により期待生涯賃金が逆に増加する場合もある。以下の実験では 2016 年 4 月入学者の男子を想定する。

表 2: 中途退学・卒業・留年した場合の生涯賃金 (2016 年 4 月入学者)

年	月	男	女
2016	4	—	—
	10	200,429,233	141,633,100
2107	4	201,086,392	142,294,675
	10	199,568,542	140,990,725
2018	4	200,240,967	141,366,350
	10	198,480,267	139,908,600
2019	4	197,705,279	139,594,313
	10	195,916,929	138,115,613
2020	4	187,133,375	134,073,588
大卒		247,468,413	198,814,696

注) 労働政策研究・研修機構 (2023, pp. 304–305) にしたがって各年の「賃金構造基本統計調査」の年齢階級別「きまって支給する現金給与額」と「年間賞与等」から計算。
資料) 「賃金構造基本統計調査」(平成 28～令和 2 年)

次のように構造母数を設定する。

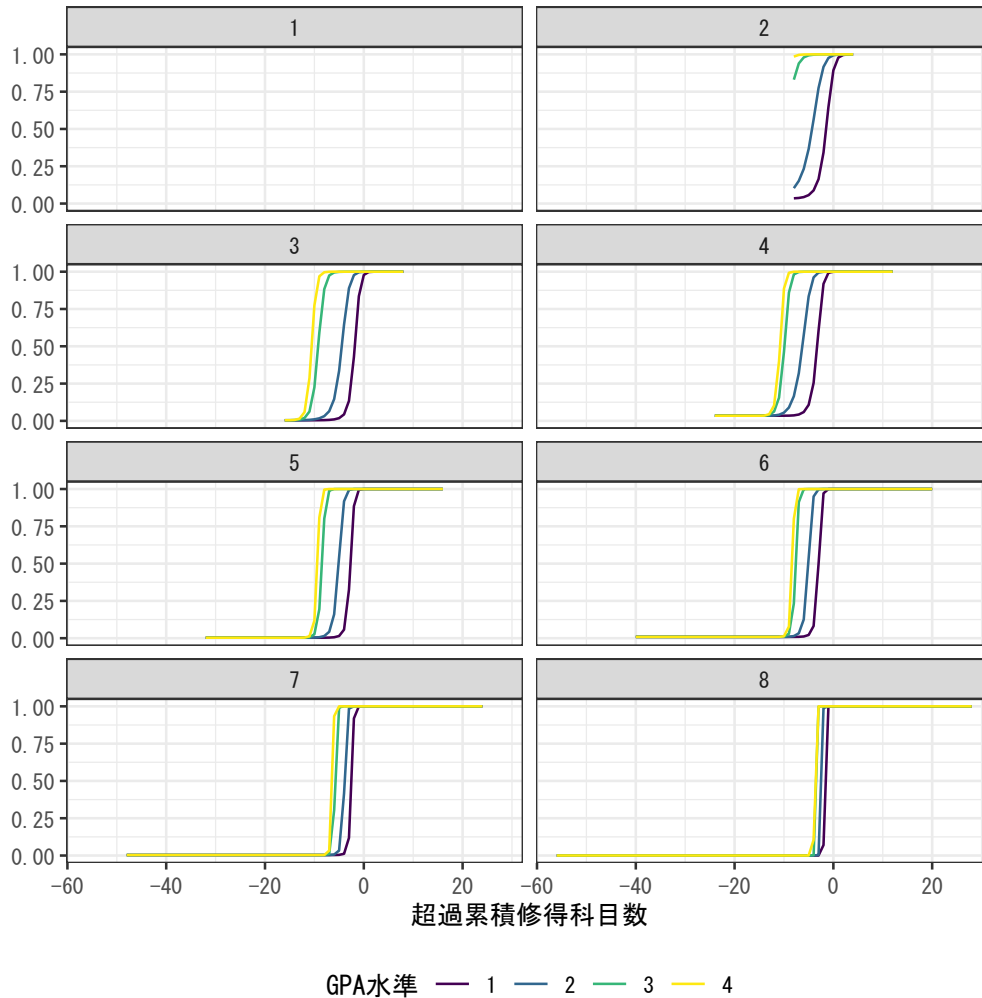
- 割引因子： $\beta = .98$
- 尺度母数： $\sigma = 100$ (万円) すなわち $\eta := 1/\sigma = .01$
- 効用関数の係数： $\alpha = \kappa = \lambda = 0$
- 同じ GPA 水準に留まる確率： $\pi = .5$
- 科目修得確率： $p(1) = .6, p(2) = .7, p(3) = .8, p(4) = .9$

退学・卒業・留年の価値と状態遷移確率分布から式 (18) の後ろ向き帰納法で在学の価値関数を計算し、在学／退学の価値関数から式 (13) の CCP 関数 (在学確率関数) $\{p_t(1|\cdot)\}$ を得る。図 1 は学期・GPA 水準別の $\{p_t(1|\cdot)\}$ のプロットである。超過累積修得科目数が多く、GPA 水準が高く、学年が低いほど在学確率は高い。超過累積修得科目数が極端に少なく卒業の見込みがないと在学確率はほぼ 0 になる²⁰。第 4 期の在学確率の下限が 0 より少し大きいのは、退学の価値 (生涯賃金) が翌学期に上昇するためと解釈できる。図 1 の在学確率関数を対数オッズ比で示したのが図 2 である。在学／退学の対数オッズ比は超過累積修得科目数の S 字型関数となっている。仮定より退学の価値は成績に依存しないため、式 (15) より在学の価値 $\{v_t(\cdot; 1)\}$ が超過累積修得科目数の S 字型関数となる。学生 i の第 1 期の GPA 水準 $g_{i,1}$ を $\{g_{i,t}\}$ の定常分布から生成し、それを初期値として状態遷移確率分布にしたがって在学中の状態ベクトル $\{\mathbf{x}_{i,t}\}$ を生成する。一様乱数 $U \sim U[0, 1]$ を生成し、 $d_{i,t} := [U \leq p_t(1|\mathbf{x}_{i,t})]$ として在学中の意思決定をシミュレートする。

生涯賃金は在学期の割引因子に依存しないと仮定する。また退学による生涯賃金の減少は自己選択の結果なので、表 2 の数値は必ずしも因果効果を意味しない (ただし構造母数の推定に卒業の価値は不要)。以上 2 点は今後の検討課題としたい。

20 留年の価値を高く設定すれば、超過累積修得科目数が少なくても在学確率は必ずしも 0 にならない。

図 1: 学期・GPA 水準別の在学確率関数



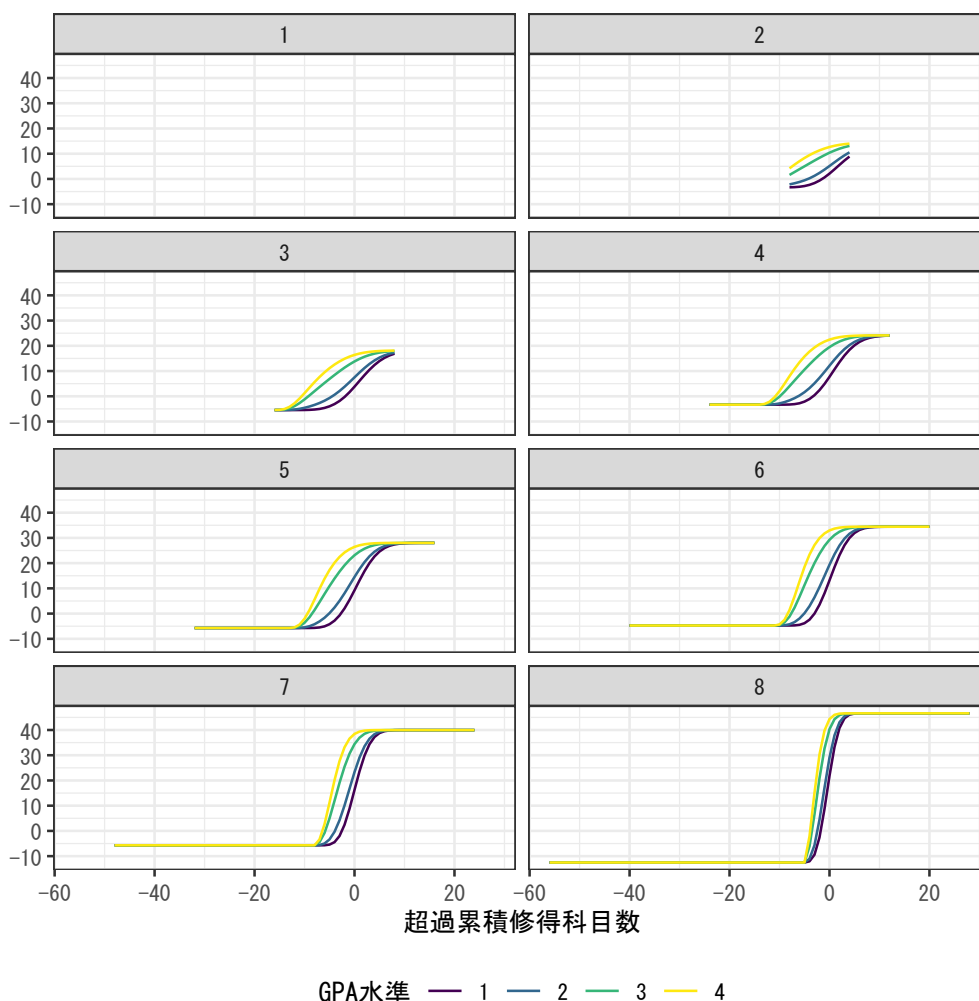
状態遷移確率分布は学期別の経験分布で推定する。誘導形の CCP 関数は、学期・GPA 水準のダミー変数と超過累積修得科目数を説明変数とした 2 値ロジット・モデルで推定する²¹。 β, η が所与なら式 (21) は θ について線形なので、数値計算の効率化のために、まず β, η を所与として θ について残差 2 乗和を最小化し、その最小残差 2 乗和関数を (β, η) について最小化する。実験では β, η の範囲を制約せずに推定量の性質を調べる。計算には R Core Team (2024) が開発した無料の統計ソフト R 4.4.0 を使用する。

6.3 実験結果

単純化のため $\kappa = \lambda = 0$ は既知とする。したがって構造母数は在学の効用 α 、割引因子 β 、尺度母数 σ の逆数 η の 3 つとなる。入学者数 n のパネル・データをシミュレーションで生成し、修正

²¹ より柔軟な定式化も試したが、理論的に在学確率は超過累積修得科目数の単調な増加関数なので (図 1)、単純な 2 値ロジット・モデルを用いた実験結果が最も安定した。実際の応用でも様々な定式化を試行錯誤すべきである。

図 2: 学期・GPA 水準別の在学確率関数 (対数オッズ比)

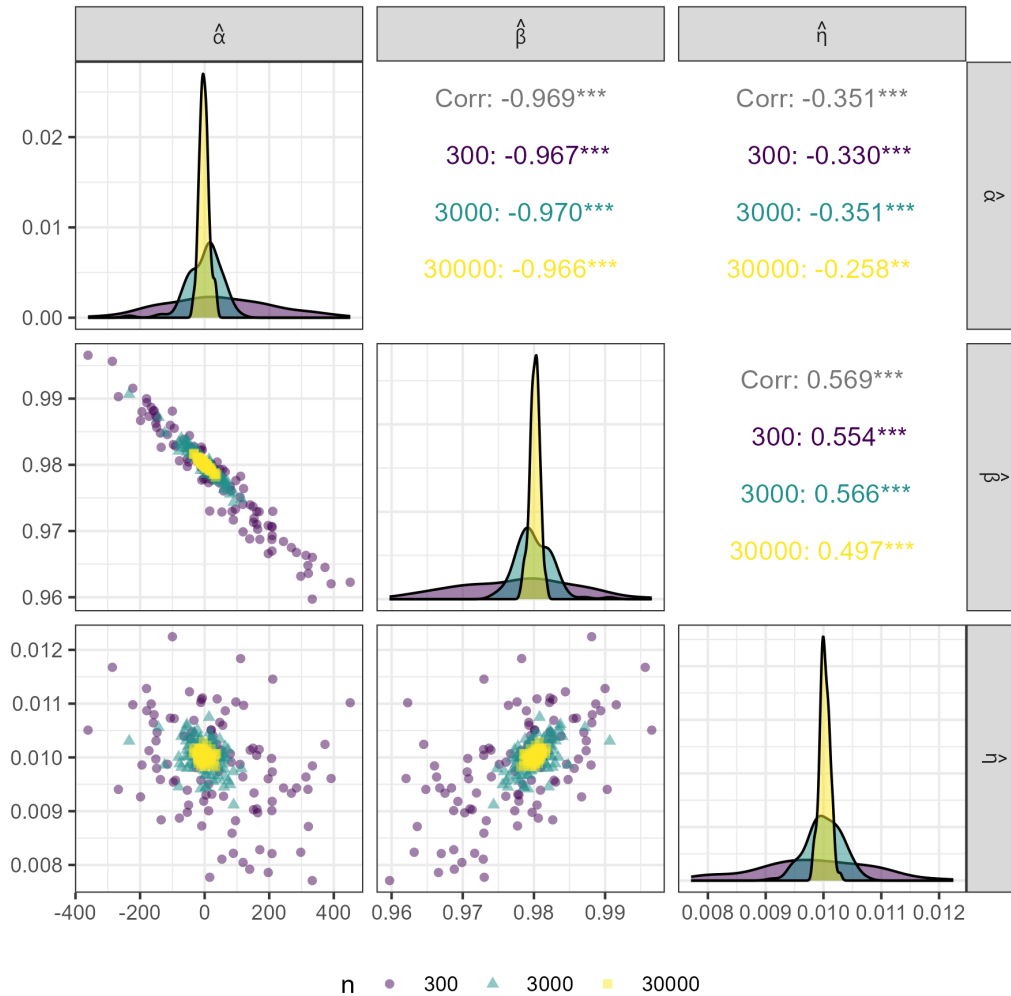


CCP 法で (α, β, η) を推定する試行を 100 回繰り返して推定値 $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\eta})$ の分布を得る. この分布を $n = 300, 3000, 30000$ の 3 つのケースで比較する.

まず図 1 の真の CCP 関数を用いて修正 CCP 法を適用し, 構造母数の識別を確認する. 図 3 は $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\eta}$ の同時/周辺分布を $n = 300, 3000, 30000$ の 3 つのケースで比較する散布図行列である. 対角線上の確率密度関数の形状の変化より CCP 関数が既知なら推定量は明らかに一致性をもつ. Bajari et al. (2016, sec. 4) は $\eta := 1$ と基準化したモデルで BCNP 法を適用し, 同様の結果を得ている. したがって Bajari et al. (2016, p. 297) が指摘するように, 誘導形の CCP 関数の推定精度が CCP/BCNP 法の成功の鍵となる. また $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ に強い負の相関が見られる. モデルの構造より β が小さいと卒業の価値が大きく割り引かれるため, α が大きくないと誰も在学を選択しない. このトレードオフ関係を負の相関は表していると解釈できる.

次に推定した CCP 関数を用いる本来の修正 CCP 法を適用し, 構造母数の推定量の性質を確認する. 図 4 は $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\eta}$ の周辺分布を $n = 300, 3000, 30000$ の 3 つのケースで比較する箱ひげ図, 表 3

図 3: 真の CCP 関数を用いた修正 CCP 法による構造母数の 100 個の推定値の散布図行列



は 3 つのケースにおける $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\eta}$ の周辺分布の平均値と 5 数要約である。実験結果は次のように整理できる。

1. $\hat{\alpha}$ の推定精度は低く、極端な外れ値が見られる。
2. $\hat{\beta}$ は一致性の傾向が僅かに見られるが、収束が極めて遅い。
3. $\hat{\eta}$ は真の値 .01 より下方バイアスがある。

式 (21) より $\eta = 0$ だと α は識別されず (ただし $\sigma > 0$ より $\eta = 0$ は本来は母数空間に含まれない), $\hat{\eta} \approx 0$ だと $\hat{\alpha}$ は外れ値になりやすい。したがって $\hat{\eta}$ の下方バイアスは $\hat{\alpha}$ の推定精度を低下させる。また前述の $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の強い負の相関により、 $\hat{\alpha}$ の低い推定精度は $\hat{\beta}$ の収束に悪影響を及ぼす。 $\hat{\eta}$ のバイアスの原因は、単純な 2 値ロジット・モデルで表した誘導形の CCP 関数の定式化の誤りと考えられる。

誘導形の CCP 関数の定式化を柔軟にすると、実験結果は非常に不安定になる。状態空間が有限

図 4: 修正 CCP 法による構造母数の 100 個の推定値の分布の箱ひげ図

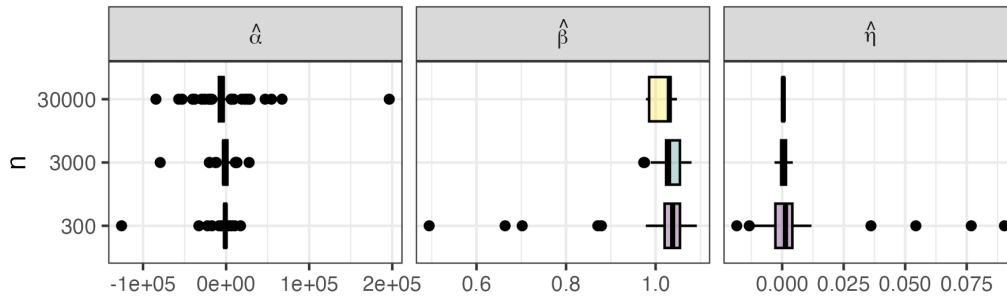


表 3: 修正 CCP 法による構造母数の 100 個の推定値の分布の平均値と 5 数要約

	$n = 300$			$n = 3000$			$n = 30000$		
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\eta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\eta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\eta}$
平均値	-2513.1	1.023	.003	-1946.0	1.036	.001	-3281.0	1.020	.000
最小値	-125832.7	.494	-.018	-79324.0	.973	-.003	-84461.0	.979	-.001
Q1	-2018.3	1.020	-.003	-3346.0	1.023	.000	-8669.0	.986	.000
Q2	-977.0	1.038	.001	-2195.0	1.029	.001	-4462.0	1.031	.000
Q3	-2.2	1.055	.004	1578.0	1.054	.002	-3146.0	1.033	.001
最大値	17369.9	1.092	.090	27687.0	1.080	.004	196378.0	1.048	.001

集合なら状態の数だけ母数を導入すれば正しい定式化となり一致性は保証される。しかし最適停止モデルでは一部の状態が非常に観測されにくいため（確実に停止を選択するような状態は、そこに至る以前に既に停止している）、誘導形の CCP 関数の正確な推定には大標本が必要となる²²。したがって実際の応用では様々な定式化を試行錯誤し、可能ならモンテカルロ実験で構造母数の推定精度を確認すべきである。正確な推定が困難な場合は、以下の対応策が考えられる。

1. 事前情報を積極的に活用する。多くの先行研究は β を既知とし、 $\sigma := 1$ と基準化している。母数の符号や関数の形状に制約を課すのも一案である。
2. 構造母数の推定を断念し、構造母数の識別が不要な反実仮想分析のみを行う（第 4.5 節を参照）。

22 不動産ローン返済の最適停止モデルの構造推定を行った Bajari et al. (2016, p. 294) は次のように述べている。

There are several reasons to expect that a large sample is necessary in order to precisely estimate the CCPs. First, the state variables are assumed to be drawn from continuous distributions, and the CCPs must be reasonably estimated over the entire support. Furthermore, non-stationarity of agents' optimal behavior implies that CCPs must be estimated separately for each time period, decreasing the effective sample size for estimation. Finally, given our chosen parameter values, defaults are rare close to the final period, necessitating a large sample in order to estimate the default probabilities close to the final period T to a reasonable degree of precision.

7. 応用

7.1 使用データ

某大学某学部 2016 年 4 月入学者（男子 301 名・女子 101 名）の入学後 4 年間の成績データを用いて大学中退モデルの構造母数の推定と反実仮想分析を試みる．分析の単純化のため休学の意味決定は考慮せず，休学者は休学期間中の修得単位数が 0 の在学者として扱う．留学のために休学した学生が留学先で修得した単位の読み替えを希望する場合は，帰国後に申請して認められれば翌学期（復学した学期）の修得単位となる．4 年次終了時の卒業／留年（卒業延期を含む）／退学の意味決定は本稿では扱わない．4 年次終了時点での中途退学者数は男子 12 名・女子 2 名，卒業生数は男子 242 名・女子 94 名，留年者数は男子 47 名・女子 5 名であった（表 4）．

表 4: 某大学某学部 2016 年 4 月入学者の 2020 年 3 月末時点の中途退学・卒業・留年状況

	入学者数	退学者数	卒業生数	留年者数	退学／入学	卒業／入学	留年／入学
男	301	12	242	47	.040	.804	.156
女	101	2	94	5	.020	.931	.050
計	402	14	336	52	.035	.836	.129

注) 退学は復籍していない除籍者を含む．

在学／退学の意味決定の際に考慮する退学の価値（＝期待生涯賃金）は，分析者から見て表 2 の生涯賃金に等しいと仮定する．また分析者が観測する状態変数は，単純化のため以下の 2 変数のみとする．

超過累積修得単位数 累積修得単位数は卒業の可能性の判断に役立つ．某大学某学部には 1～3 年次留年・飛び級・早期卒業制度はなく，全員が 4 年次まで毎年進級できる．卒業必要単位数は 128 単位である．分析の単純化のため単位数以外の卒業要件（必修科目等）は考慮しない．なお 1 年次は通年 32 単位，2 年次以降は通年 48 単位の登録単位制限があるが，制限の対象外の科目もあり，制限を超えた単位数を修得する学生も珍しくない．1 学期あたり 16 単位修得すれば 8 学期で 128 単位となるので，第 t 期の累積修得単位数を N_t として超過累積修得単位数を $N_t^* := N_t - 16t$ と定義する．

GPA GPA は大学での勉強に対する適性の判断に役立つ．某大学では成績評価の「秀」を 4 点，「優」を 3 点，「良」を 2 点，「可」を 1 点，「不可」を 0 点として GPA を定めている．定期試験を欠席した科目は 2018 年度まで GPA 算出の対象外であったが，2019 年度から「不可」扱いとなった．なお履修登録数が 0 だと GPA は定義できず欠損値となるが，以下では便宜的に履修登録数が 0 なら GPA は 0 とする．

図 5 は男女別の各学生の超過累積修得単位数の推移である．多くの学生が卒業に必要な 128 単位を 3 年次までに修得している ($N_6^* \geq 32$)．4 年次終了時に 128 単位を修得していない ($N_8^* < 0$) 学生

は男子に多い.

図 5: 男女別の各学生の超過累積修得単位数の推移

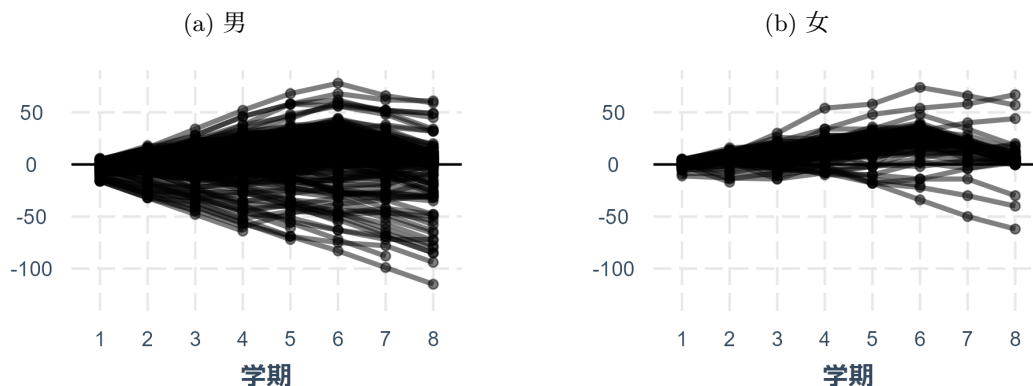


表 5 は使用する成績データの要約統計量である. 特徴は以下の通りである.

1. 男子は 1 年次後期から各学期で退学者 (= 欠損数の増分) が発生しているが, 女子は 4 年間で 2 名のみである.
2. 男女とも 4 年次は修得単位数が少なく GPA も低い. これは卒業必要単位数を超えて履修する学生が少ないためである. また定期試験を欠席した科目が 2019 年度から「不可」扱いとなり, GPA の低下を防ぐために履修科目を絞った可能性もある.
3. 1~3 年次は前期より後期の方が修得単位数が多い. これは通年科目の単位認定が後期に行われるためである (某大学では 1・2 年次の語学科目に通年科目が多く, 某学部では 3 年次ゼミのみ通年科目).
4. 修得単位数・GPA の平均は男子より女子の方が高く, 標準偏差は男子より女子の方が小さい.

男女の異質性より男女別の推定が望ましいが, 女子の退学者数が 4 年間で 2 名と少ないため, 以下では分析対象を男子に限定する.

7.2 モデルの定式化

第 1 期 (1 年次前期) の期首の退学者は入学者に含まれないので, 第 2~8 期 (1 年次後期~4 年次後期) の在学/退学的意思決定を考える. すなわち $T := 8$ とする. 学生 i の第 t 期の修得単位数を $n_{i,t}$, 累積修得単位数を $N_{i,t}$, 超過累積修得単位数を $N_{i,t}^* := N_{i,t} - 16t$, GPA を $g_{i,t}^*$ とする. 分析の単純化のため $g_{i,t}^*$ を 4 つの水準に離散化し, その変数を $g_{i,t}$ とする. すなわち

$$g_{i,t} := \begin{cases} 1 & \text{if } g_{i,t}^* \in [0, 1) \\ 2 & \text{if } g_{i,t}^* \in [1, 2) \\ 3 & \text{if } g_{i,t}^* \in [2, 3) \\ 4 & \text{if } g_{i,t}^* \in [3, 4) \end{cases}$$

表 5: 成績データの要約統計量

(a) 男

変数	学期	観測数	欠損数	平均	標準偏差	最小値	Q1	Q2	Q3	最大値
修得単位数	1	301	—	15.5	3.9	0	15	17	17	22
	2	298	3	20.1	5.8	0	19	21	23	30
	3	297	4	16.3	6.6	0	12	16	20	34
	4	296	5	20.6	7.9	0	16	22	26	40
	5	294	7	19.1	6.7	0	16	20	22.8	36
	6	291	10	21.0	7.4	0	18	22	26	54
	7	290	11	7.7	7.1	0	2	6	12	32
	8	289	12	5.1	7.1	0	0	2	8	30
GPA	1	301	—	2.35	.80	.00	1.89	2.47	2.93	4.00
	2	298	3	2.24	.84	.00	1.72	2.38	2.86	3.86
	3	297	4	1.79	.81	.00	1.22	1.83	2.38	3.64
	4	296	5	2.09	.81	.00	1.57	2.17	2.68	4.00
	5	294	7	2.03	.85	.00	1.50	2.00	2.58	3.78
	6	291	10	2.17	.78	.00	1.72	2.25	2.69	4.00
	7	290	11	1.24	1.01	.00	.21	1.17	2.00	4.00
	8	289	12	1.14	1.26	.00	.00	.90	2.00	4.00

(b) 女

変数	学期	観測数	欠損数	平均	標準偏差	最小値	Q1	Q2	Q3	最大値
修得単位数	1	101	—	16.6	2.6	5	15	17	19	21
	2	101	0	21.8	4.4	0	21	23	25	29
	3	100	1	16.8	5.9	0	14	17.5	20	36
	4	100	1	23.8	6.1	6	20	24	28	40
	5	100	1	19.6	5.9	0	16	20	22	32
	6	100	1	22.9	6.3	0	20	23	26	50
	7	99	2	6.7	7.0	0	0	4	10	26
	8	99	2	3.6	6.2	0	0	0	4	25
GPA	1	101	—	2.60	.62	.85	2.27	2.60	3.00	3.92
	2	101	0	2.63	.70	.00	2.28	2.65	3.08	3.91
	3	100	1	2.13	.77	.00	1.57	2.12	2.72	3.83
	4	100	1	2.51	.65	1.00	2.00	2.54	3.00	3.92
	5	100	1	2.28	.85	.00	1.67	2.32	2.89	3.75
	6	100	1	2.47	.72	.00	2.00	2.54	3.00	3.75
	7	99	2	1.36	1.23	.00	.00	1.40	2.28	4.00
	8	99	2	1.19	1.51	.00	.00	.00	2.00	4.00

学生 i の第 t 期の期首の選択（在学ダミー）を $d_{i,t}$ 、状態ベクトルを $\mathbf{x}_{i,t} := (N_{i,t-1}^*, g_{i,t-1})'$ とする。

モンテカルロ実験と同様に式 (24) の効用関数と式 (22) の状態遷移確率分布を仮定する。ただし科目数でなく単位数を用いるので式 (23) は修正する。すなわち任意の N^* と $g = 1, 2, 3, 4$ について

$$\Pr [N_{i,t}^* = N^* | g_{i,t} = g, N_{i,t-1}^*] = \Pr [n_{i,t} = N^* + 16t - N_{i,t-1} | g_{i,t} = g, N_{i,t-1}]$$

状態遷移確率分布は学期別の経験分布でノンパラメトリックに推定する。表 6 は学期別の GPA

水準の遷移確率行列，すなわち $\{f_t(g_{i,t}|g_{i,t-1})\}$ のノンパラメトリック推定値である．4年次を除いて GPA 水準の大幅な階層移動は少なく，GPA が大学での勉強に対する適性を反映していると解釈できる．

表 6: 学期別の GPA 水準の遷移確率行列

年次	GPA	前期					後期				
		1	2	3	4	計	1	2	3	4	計
1	1	.08	.22	.51	.20	1.00	.67	.29	.05	.00	1.00
	2						.14	.60	.26	.00	1.00
	3						.01	.22	.66	.12	1.00
	4						.00	.00	.42	.58	1.00
2	1	.71	.21	.08	.00	1.00	.36	.42	.22	.00	1.00
	2	.37	.58	.05	.00	1.00	.06	.48	.43	.02	1.00
	3	.10	.47	.41	.03	1.00	.01	.17	.62	.20	1.00
	4	.00	.17	.58	.25	1.00	.06	.06	.47	.41	1.00
3	1	.41	.41	.17	.00	1.00	.35	.47	.15	.03	1.00
	2	.18	.52	.27	.02	1.00	.09	.51	.38	.02	1.00
	3	.05	.32	.56	.08	1.00	.01	.16	.74	.09	1.00
	4	.00	.10	.34	.55	1.00	.00	.00	.31	.69	1.00
4	1	.64	.36	.00	.00	1.00	.61	.22	.09	.08	1.00
	2	.41	.45	.14	.00	1.00	.40	.42	.13	.05	1.00
	3	.41	.31	.24	.04	1.00	.56	.15	.17	.12	1.00
	4	.70	.06	.15	.09	1.00	.44	.00	.11	.44	1.00

図 6 は学期・GPA 水準別の修得単位数の度数多角形（相対度数），すなわち $\{f_t(n_{i,t}|g_{i,t})\}$ のノンパラメトリック推定値である．GPA が低いと修得単位数が少ない傾向が読み取れる．

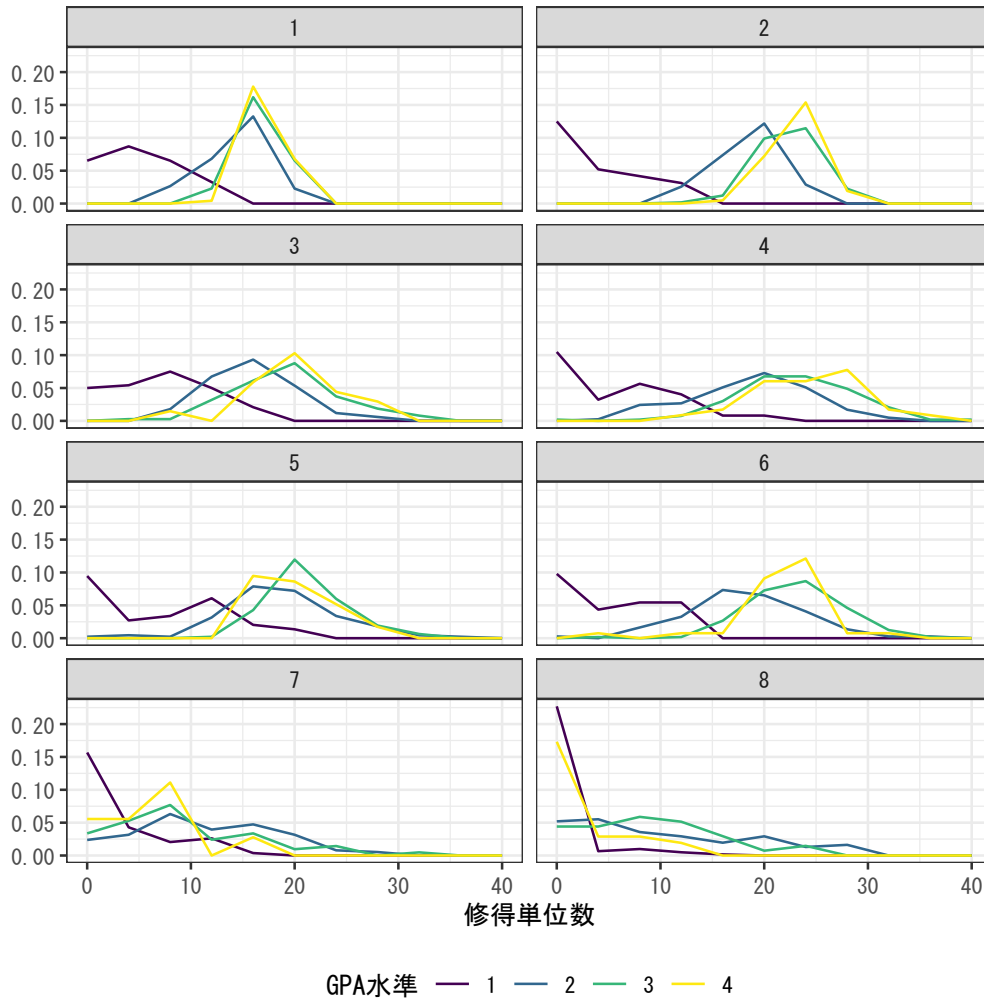
7.3 推定手順

まず第 2～8 期の誘導形の在学確率関数を推定する（第 1 期の退学は存在しない）．一般化加法モデルによる柔軟な定式化も試みたが，単純な 2 値ロジット・モデルと結果が大きく変わらないため，モンテカルロ実験の結果も踏まえ，学期・GPA 水準のダミー変数と超過累積修得単位数を説明変数とした 2 値ロジット・モデルを採用する．

図 7 は推定した在学確率関数の学期・GPA 水準別のプロットである．超過累積修得単位数が正なら在学確率は 1 に近い．各学期の修得単位数が 0 だと超過累積修得単位数は 16 単位ずつ減少する．修得単位数 0 が続くと在学確率が低下する傾向が，特に 3 年次以降で GPA 水準が 1 のグループに顕著である．ただしモンテカルロ実験の理論的な在学確率関数（図 1）と異なり，累積修得単位数が 0 でも在学確率は 0 にならない．実際に累積修得単位数が 0 でもすぐに退学しない例は珍しい．これは実験の設定と異なり実際は成績が向上すれば留年の価値が高まること，休学制度の存在，保護者の意向などが理由として考えられる．

次に図 7 の在学／退学確率関数（CCP 関数）と表 6・図 6 の状態遷移確率分布を用いて定義式 (20) より第 2～7 期の補正関数 $\{z_t(\cdot)\}$ を作成する．在学の期待価値関数 $V_t^e(\cdot; 1) = y_{t+1} - \sigma z_t(\cdot)$ は

図 6: 学期・GPA 水準別の修得単位数の度数多角形（相対度数）

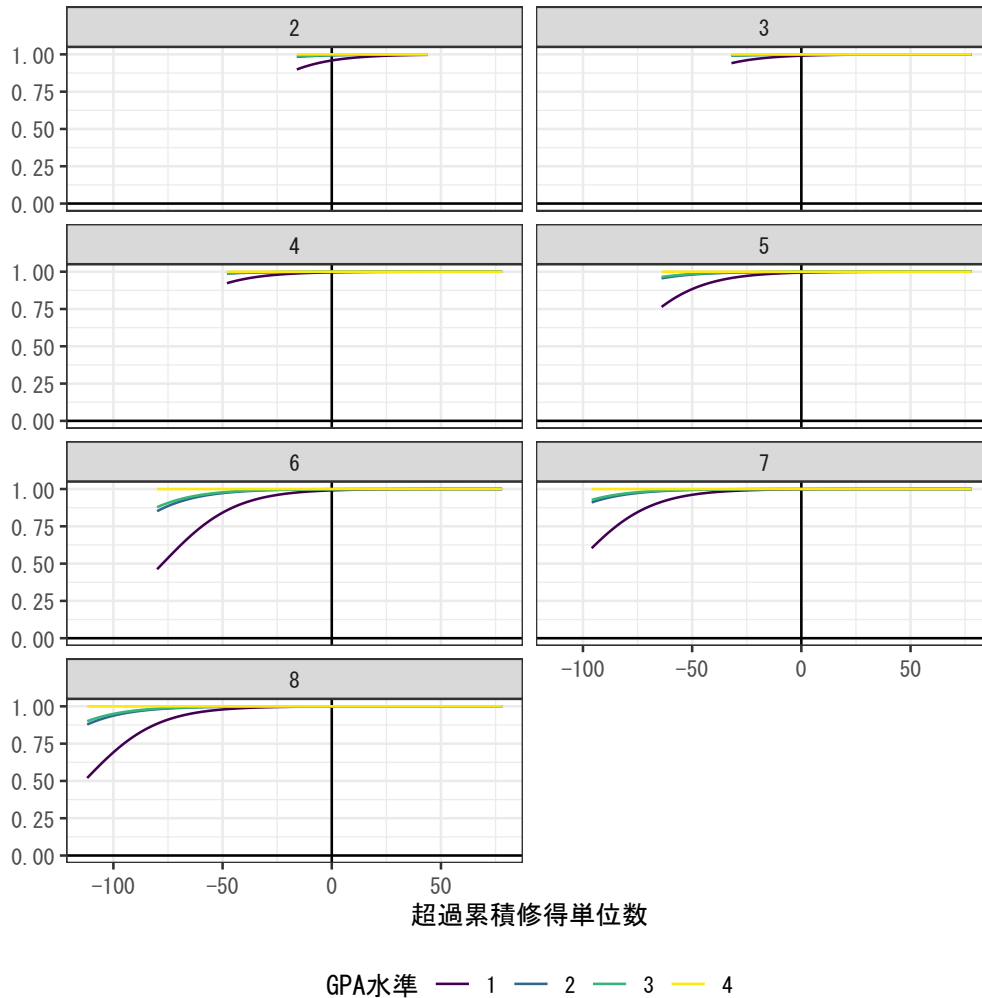


$-z_t(\cdot)$ に比例する。図 8 は作成した補正関数の符号を反転した $\{-\hat{z}_t(\cdot)\}$ の学期・GPA 水準別のプロットである。図 7 の在学確率関数より累積修得単位数が 0 でも退学確率は 1 にならず、補正関数の値は 0 にならない（式 (20) を参照）。また図 7 の在学確率関数が単純な 2 値ロジット・モデルなので、補正関数は直線に近い。GPA 水準が高く超過累積修得単位数が多いほど在学の期待価値は高い。ただし卒業が確定して単位が不要になると以降の GPA 水準が下がるため（表 6）、第 7 期のみ（前期の）GPA 水準による差は小さくなっている。

最後に図 7 の在学確率関数から得られる在学／退学の対数オッズ比の推定値を従属変数とし、図 8 の補正関数を説明変数に加えて式 (21) を非線形最小 2 乗法で推定する。 β, η が所与なら式 (21) は線形なので、 β, η を所与として θ について残差 2 乗和を最小化し、それを β を所与として η について最小化し、最後に β について最小化する。必要なら β, η の範囲を制約する。標準誤差・信頼区間はブートストラップ法で求める。

なお誘導形の CCP 関数から従属変数を作成するため、補正関数を除く構造モデルの説明変数が

図 7: 学期・GPA 水準別の在学確率関数



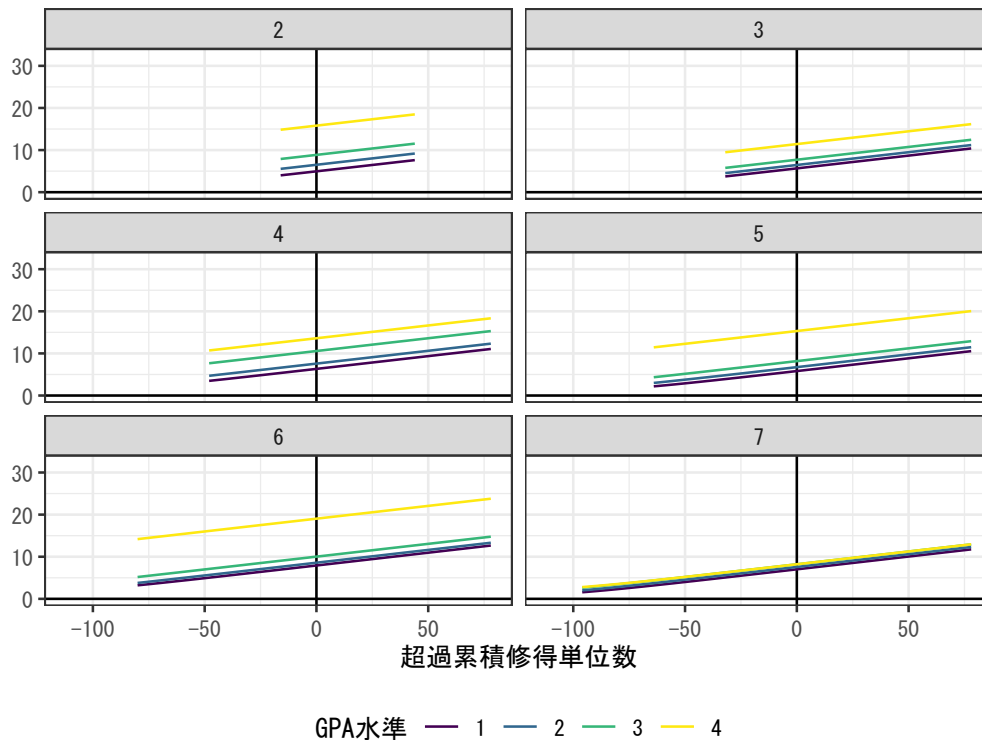
誘導形の CCP 関数の説明変数と同じだと、最小 2 乗法は完全に当てはまり、補正関数の係数 β の推定値は 0 となる。特に小標本で誘導形の CCP 関数の定式化が単純になる場合、それ以上に構造モデルの定式化を単純にする必要がある。そのため式 (24) の効用関数では GPA 水準を質的変数でなく量的変数として扱っている。

7.4 推定結果

割引因子 β は非負 (かつ 1 以下)、尺度母数 σ の逆数 η は正の符号制約がある。表 7 は制約の有無による構造母数の点推定値の比較である (推定誤差は後述)。制約なしだと $\hat{\beta} > 1$, $\hat{\eta} < 0$ の点推定値となる。 η に非負制約を課すと $\hat{\beta} > 1$, $\hat{\eta} = 0$ の端点解となる。 $\beta \in [0, 1]$ の制約も課すと $\hat{\beta} = 1$, $\hat{\eta} = 0$ の端点解となる²³。

²³ R の `optimize` 関数は 1 変数関数を閉区間上で最小化するので実際の計算では有限の下限值・上限値が必要となる。ここでは制約なしは $\beta, \eta \in [-10, 10]$, 非負制約は $\eta \in [0, 10]$ としている。また `optimize` 関数は端点の近傍で反復計算

図 8: 学期・GPA 水準別の補正関数（符号を反転）



構造母数の推定誤差はブートストラップ法で評価する。図 9 は 99 回のブートストラップで求めた β, η の制約なしの推定量の分布である²⁴。モンテカルロ実験の結果と異なり $\hat{\beta}$ に負の値があり、 $\hat{\eta}$ にも負の値が多く、入学者数 $n = 301$ (男子) の小標本では β, η の正確な推定は困難に思える。そこで以下では β, η を先験的に与えて分析を進める（実際に多くの先行研究は β を先験的に与え、 $\eta = 1$ と基準化している）。

β は .98 または 1 と想定する。退学の価値を所与とすると、 β が小さいほど将来の在学・卒業の価値を軽視して早く退学する。 $\beta = .98$ は年率約 4.1 % の割引率に相当し、経済学における典型的な想定値に近く、多くの先行研究が採用している。 $\beta = 1$ は制約付き推定の端点解である。図 9 の $\hat{\eta}$ の分布の範囲から、 η は .01 または .05 と想定する。 $\eta = .01$ なら $\sigma = 100$ (万円)、 $\eta = .05$ なら $\sigma = 20$ (同) となる。 σ が大きいほど誤差（観測されない状態）の影響が大きくなり、観測される状態の説明力が低下して、分析者から見た意思決定はランダムに近くなる。

表 8 は上記 4 ケースの構造母数の点推定値と 99 回のブートストラップで求めた 90 % ブートストラップ信頼区間である。ケース 2 の定数項を除き、各係数の 90 % 信頼区間は 0 を含んでおり、有意水準 5 % の片側検定で点推定値は統計的に有意でない²⁵。統計的有意性は別として、点推定値か

を停止するため $\hat{\eta} = 0$ (実際は $\hat{\eta} \approx 0$) でも効用関数の係数の点推定値が求まっている。

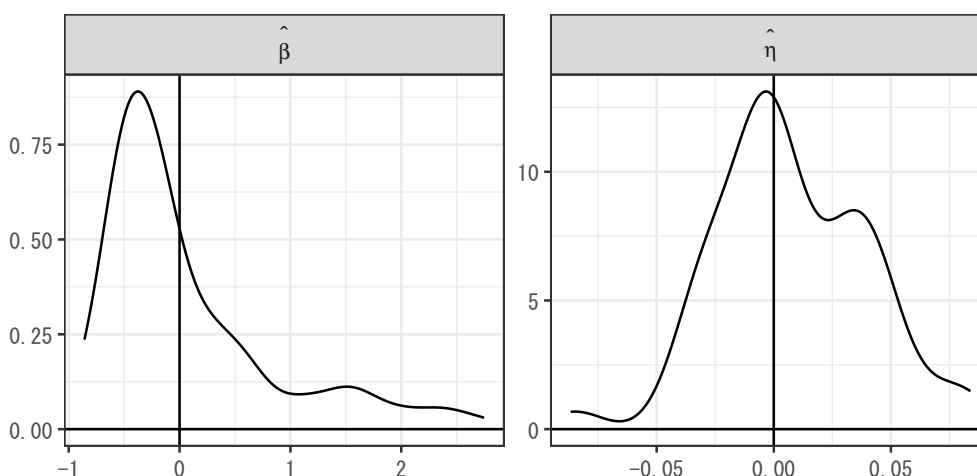
24 計算には R の `boot` パッケージを使用した。B 回のブートストラップによる α 分位点の自然な推定量はブートストラップ標本の第 $(B+1)\alpha$ 順序統計量なので、B を 100 でなく 99 としている。Davison and Hinkley (1997, pp. 18–19) を参照。

25 正の係数を想定し、片側検定の結果が読み取れるように 90 % 信頼区間を掲載した。90 % 信頼区間が 0 を含めば

表 7: 割引因子・尺度母数の制約の有無による構造母数の点推定値の比較

	制約なし	$\eta \geq 0$	$\beta \in [0, 1], \eta \geq 0$
割引因子 (β)	1.164	1.029	1.000
1/尺度母数 (η)	-.009	.000	.000
定数項	-2485.295	-97207.620	-95289.140
超過累積修得単位数	4.633	-248.593	-227.904
GPA 水準	-210.383	35340.430	36595.280
残差 2 乗和	15677.58	17576.75	17581.07

図 9: 割引因子・尺度母数（逆数）の推定量の分布（99 回のブートストラップ）



ら以下の傾向が読み取れる。

1. β が小さいと定数項が大きくなる。他の係数の変化は小さい。
2. η が小さい（ $= \sigma$ が大きい）と定数項と超過累積修得単位数の係数は小さくなるが、GPA 水準の係数は大きくなる。

前者は β が小さいと卒業の価値（=大卒の生涯賃金）が大きく割り引かれるため、それを補う分だけ在学の効用が大きくなると解釈できる（そうでないと誰も在学を選択しない）。後者の定数項についてはモンテカルロ実験の結果（図 3 左下の散布図）と逆であり、他の係数も含む非線形モデルなので解釈は難しい。超過累積修得単位数を 0、GPA 水準を 1（最小）または 4（最大）として 1 学期当たりの在学の効用の点推定値の範囲を比較すると、ケース 1~4 の順に [157, 757], [411, 509], [-249, 332], [13, 105]（万円）となる。超過累積修得単位数の効果も含めて 1 学期当たりの在学の効用／費用を数百万円以内と考えるなら、ケース 4 が最も妥当に見える。ただし残差 2 乗和は 4 ケース中最大となる。

分析結果の考察は以下のようにまとめられる。

95%信頼区間も 0 を含み、両側検定でも点推定値は有意でない。

表 8: 割引因子・尺度母数を先験的に与えた場合の構造母数の推定結果

	ケース 1	ケース 2	ケース 3	ケース 4
割引因子 (β)	.98	.98	1.00	1.00
1/尺度母数 (η)	.01	.05	.01	.05
定数項	-42.51	378.80	-443.39	-17.92
	[-1366.42, 603.75]	[113.72, 507.18]	[-1733.61, 219.78]	[-278.75, 113.91]
超過累積修得単位数	.33	1.29	.34	1.36
	[-29.71, 12.94]	[-4.82, 3.83]	[-30.08, 13.21]	[-4.79, 3.96]
GPA 水準	199.80	32.65	193.91	30.63
	[-1.69, 750.04]	[-8.02, 141.42]	[-2.49, 748.12]	[-8.50, 140.85]
残差 2 乗和	22782.24	79511.12	22981.40	82167.08

注) 括弧内は 90 %ブートストラップ信頼区間 (99 回のブートストラップ)。

1. 割引因子 β は 1 に極めて近い。
2. 尺度母数 σ は 20 万円程度。
3. 超過累積修得単位数・GPA 水準が在学の効用に直接的に影響する証拠はない。

構造モデルの解釈を通じて主観的な事前情報を取り込む手法は問題もあるが、小標本で情報が少なく他の手法が困難な状況では止むを得ない。構造母数の想定値/推定値の妥当性は反実仮想分析でも検証できる。

7.5 反実仮想分析

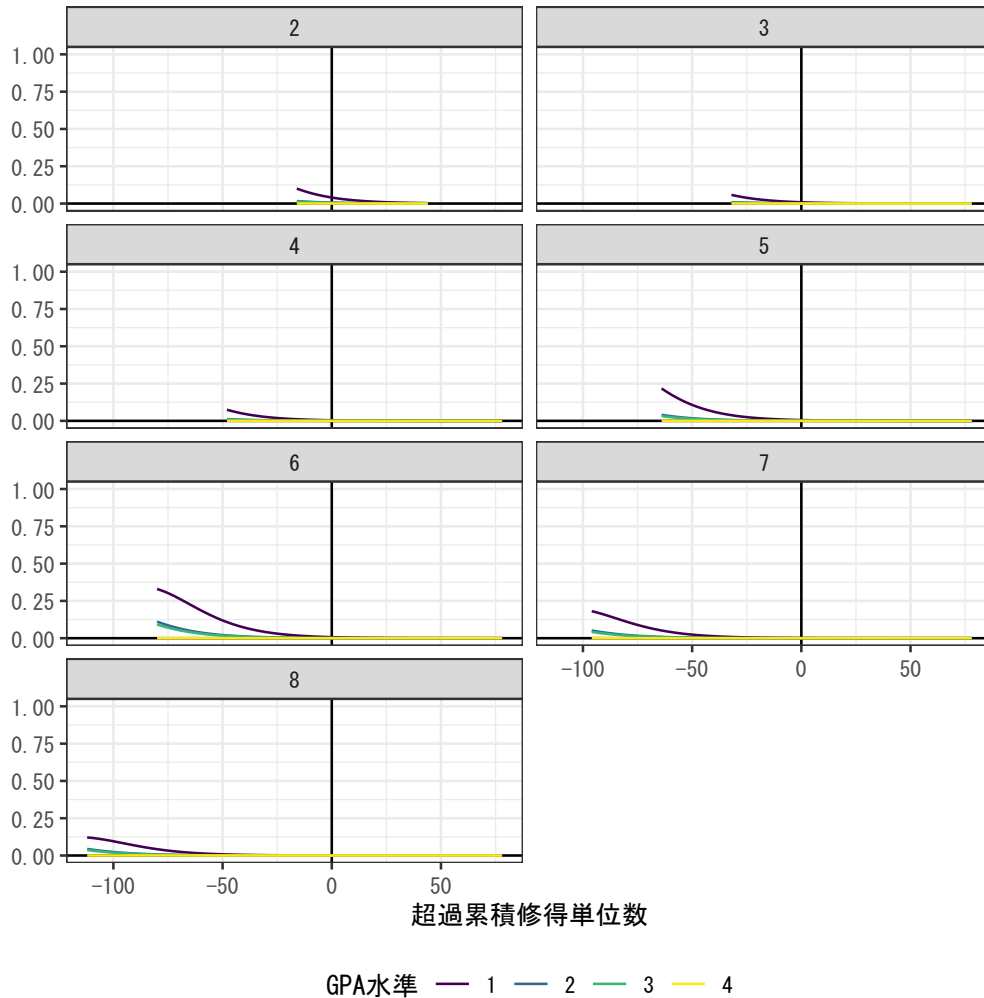
最後に反実仮想分析の例として、某大学某学部 2016 年 4 月入学者の男子について、入学後 4 年間の在学者への学費補助（または授業料減免）が中退確率を引き下げる処置効果を試算する。4 年間の学費補助は効用関数の一時的な変化と解釈できる。したがって反実仮想 CCP の識別に効用関数の識別は不要である（4.5.1 節を参照）。すなわち誘導形の CCP 関数（在学確率関数）と状態遷移確率分布を推定すれば、割引因子 β と尺度母数 σ を所与として、構造モデルの推定と独立に以下の反実仮想分析を実行できる。ただし小標本で中退者が少ないと誘導形の CCP 関数の推定精度が低い点は注意を要する。

構造モデルの推定結果を踏まえ、 $\beta = 1$ 、 $\sigma = 20$ とする。毎学期 10 万円の学費補助を想定し、式 (19) より反実仮想の在学確率関数を計算して図 7 の在学確率関数と比較する。図 10 は学費補助が在学確率関数を引き上げる処置効果である。もともと在学確率が 1 の状態での処置効果は当然 0 である。また在学の直接的な効用が大きくない限り、卒業して大卒プレミアムを得る見込みがなければ在学確率は 0 であり、学費補助は成績に影響しないので処置効果も 0 と考えられる。しかし累積修得単位数が 0 でも図 7 の在学確率は 0 でなく、GPA 水準が 1 なら図 10 の処置効果は大きい。

図 11 は $\beta = .95, 1$ と $\sigma = 20, 100$ の計 4 つの組み合わせについて、毎学期 10 万円の学費補助が累積中退確率を引き下げる処置効果を比較している²⁶。 β が大きいと将来の学費補助の割引現在価値

26 統計量 T のブートストラップ標本の標本 α 分位点を \hat{t}_α^* とすると、90 %ブートストラップ信頼区間は $[2T - \hat{t}_{.95}^*, 2T - \hat{t}_{.05}^*]$ なので、 $T \in (-1, 0)$ の制約があっても $\hat{t}_{.05}^* < 2T$ なら信頼区間の上限は正になる。 $-T$ をロジット変換して求めた信頼区間を逆変換した信頼区間は制約を満たすが、 $-\hat{t}_{.95}^* \approx 0$ のロジット変換が $-\infty$ に近いと信頼区間の下限は -1 に近くなる。

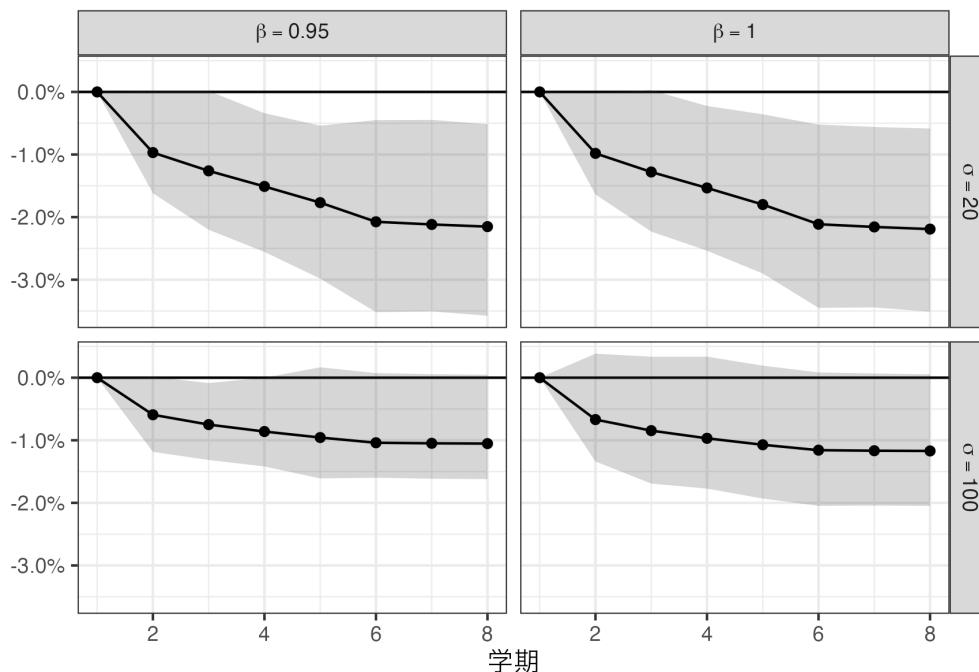
図 10: 毎学期 10 万円の学費補助が在学確率関数を引き上げる処置効果



は大きくなるが、観測値を所与として β の上昇は在学の直接的な効用の低下で相殺されるため、 $\beta \in [.95, 1]$ の範囲で処置効果の点推定値の差は小さい。 σ が大きいと効用に占める誤差（観測されない状態）の割合が大きくなり、学費補助の処置効果は小さくなる²⁷。 $\sigma = 20$ の基準ケースだと 4 年間の累積中退確率は約 2.2% 低下する。ただし学費補助は成績に影響しないので、4 年間の累積中退確率の低下は必ずしも卒業確率の上昇を意味しない。入学者が 100 人なら 4 年間の学費補助の総額は最大 8000 万円（退学者 0 の場合）、退学者が 2.2 人減ると授業料が 1 学期 50 万円なら 4 年間の授業料収入の増加は最大 770 万円（1 年次後期の退学を防いだ場合）である。したがって毎学期 10 万円の学費補助は、卒業できる学生の利益にはなるが、そうでない学生の退学を遅らせるだけで、大学の利益にもならない可能性が高い。

²⁷ 反実仮想 CCP は補助額 ÷ 尺度母数で決まるので、 $\sigma = 100$ で毎学期 10 万円の学費補助の反実仮想は $\sigma = 20$ で毎学期 2 万円の学費補助の反実仮想とも解釈できる。

図 11: 毎学期 10 万円の学費補助が累積中退確率を引き下げる処置効果：割引因子・尺度母数の値別の比較（点推定値と 99 回のブートストラップで求めた 90 %ブートストラップ信頼区間）



8. おわりに

本稿では大学中退行動を最適停止問題として定式化し、某大学某学部 2016 年 4 月入学者のうち男子 301 名の入学後 4 年間の成績データを用いて意思決定モデルの構造母数の推定と反実仮想分析を試みた。本稿と同様に特定の大学・学部の学生の在学／退学の意思決定を分析した Stinebrickner and Stinebrickner (2014) は、各学生の主観的な期待を学期毎にアンケート調査して分析に用いている。本稿は合理的期待を仮定する標準的な分析手法を採用したが、以下の点で独自の工夫を加えている。

1. 「賃金構造基本統計調査」から計算した退学後の生涯賃金を（分析者から見た）退学の価値とみなして短期パネルでの構造母数（割引因子と尺度母数を含む）の識別を確保した。
2. CCP 法を修正し、2 値ロジット・モデルの完全分離の問題を回避した。
3. 構造母数の識別と推定精度をモンテカルロ実験で確認した。
4. 小標本で中退者が少ないと構造母数の推定精度が低いため、効用関数の識別を必要としない反実仮想分析を行った。

学費補助（または授業料減免）は退学の意思決定を遅らせる効果を持つ。そのため入学後 4 年間の中退率が低下しても卒業率は必ずしも上昇せず、補助なしでも卒業する学生が最大の利益を得

る。構造母数の推定精度の問題はさておき、この種の結論は経済学では珍しくない。アメリカの白人男性のキャリア選択の意思決定モデルを構造推定した Keane and Wolpin (1997) も、大学在学時の学費補助は大学進学率・卒業率を上昇させるが、補助なしでも進学・卒業する層が最大の利益を得ることを反実仮想分析で示している。両分析とも借入制約を無視しているが、借入制約に直面する学生の支援は別の問題であろう。

誘導形モデルに比べて構造モデルの推定は、強い識別制約が必要となる上に、推定手続きが複雑で計算コストが大きく困難が多い。本稿は限られたデータと単純なモデルと簡便な手法で1つの実証結果を導いたが、将来的に克服すべき課題は多く残されている。特に構造母数の推定精度は改善を要する。学生が同質的なら複数年度・類似学部の入学者をプールして標本を大きくできる。入学から卒業までの学期毎のアンケート調査による追加的な情報収集も（4年かかるが）有用である。その他の重要な検討課題を幾つか挙げておく。

1. 在学／休学／退学の3つの選択肢で分析すると結果が変わるかもしれない。また休学時の在籍料に関する反実仮想分析も興味深い。
2. 構造母数に関する事前情報はベイズ法で扱うべきである。MCMCによるベイズ推定は一般に可能だが数値計算の負荷が大きい。無限期間の定常な動的離散選択モデルについては Ching et al. (2012) が効率的なアルゴリズムを解説している。
3. 効用関数の一時的な変化以外の反実仮想分析には留年の価値関数が必要となる。留年の価値関数をノンパラメトリックな関数で近似し、後ろ向き帰納法で尤度関数を評価して他の構造母数と同時に推定する手法も興味深い。例えば Jørgensen and Tô (2019) を参照。

また本稿では男女の異質性は統制したが、その他の異質性は統制していない。小標本で中退者が少ないと困難も予想されるが、有限混合モデルで異質性を統制する手法も検討すべきである。

なお本稿の目的は他大学・学部に一般化できる結論を得ることではない。男女に限らず大学・学部の入試難易度や分野でも学生の中退率は大きく異なる（表1）。したがって入学者をプールした分析より大学・学部別の分析結果の比較の方が興味深い。異なるデータで同じモデルを推定して構造母数や反実仮想分析を比較すれば、中退率の格差の根本的な要因を特定できる。ただし一般に他大学の学生の成績データの入手は困難なので、大学間の比較では同じモデルを各大学が別々に分析する必要がある。誘導形モデルに比べて構造モデルの推定は必ずしも容易ではないが、本稿の単純な大学中退モデルと簡便な推定手法は、そのような比較のベンチマークとして有用である。大学における IR の必要性から大学教員なら自分の大学・学部の学生のデータは容易に入手できる。合理的な中退は学生よりむしろ大学にとって不利益が大きい。また入学定員制度の下で入学時のミスマッチは社会的に非効率である。誘導形モデルによる中退予測の研究は既に広く行われており、構造モデルによる中退防止策の反実仮想分析の研究の活発化も今後は期待したい。

付録 A. 証明

A.1 定理 1

証明 補題 1 より任意の \mathbf{x}_t について

$$v_t(\mathbf{x}_t; 1) = v_t(\mathbf{x}_t; 0) + \sigma \ln \frac{p_t(1|\mathbf{x}_t)}{p_t(0|\mathbf{x}_t)}$$

上式と式 (16) を結合すると, 任意の \mathbf{x}_t について

$$v_t(\mathbf{x}_t; 0) + \sigma \ln \frac{p_t(1|\mathbf{x}_t)}{p_t(0|\mathbf{x}_t)} = u_t(1; \mathbf{x}_t) + \beta \mathbb{E}(v_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1}; 0) - \sigma \ln p_{t+1}(0|\mathbf{x}_{t+1}) | \mathbf{x}_t; d_t = 1) \quad (25)$$

$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_{t-1} = \mathbf{x}$ として階差をとると, 除外制約より任意の \mathbf{x} について

$$\begin{aligned} \Delta v_t(\mathbf{x}; 0) + \sigma \Delta \ln \frac{p_t(1|\mathbf{x})}{p_t(0|\mathbf{x})} &= \beta \mathbb{E}(v_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1}; 0) - \sigma \ln p_{t+1}(0|\mathbf{x}_{t+1}) | \mathbf{x}_t = \mathbf{x}; d_t = 1) \\ &\quad - \beta \mathbb{E}(v_t(\mathbf{x}_t; 0) - \sigma \ln p_t(0|\mathbf{x}_t) | \mathbf{x}_{t-1} = \mathbf{x}; d_{t-1} = 1) \end{aligned} \quad (26)$$

ただし Δ は差分演算子を表す. $v_t(\cdot; 0)$ は \mathbf{x}_t に依存しないので $y_t := v_t(\cdot; 0)$ とすると, 任意の \mathbf{x} について

$$\begin{aligned} \Delta y_t + \sigma \Delta \ln \frac{p_t(1|\mathbf{x})}{p_t(0|\mathbf{x})} &= \beta(y_{t+1} - \sigma \mathbb{E}(\ln p_{t+1}(0|\mathbf{x}_{t+1}) | \mathbf{x}_t = \mathbf{x}; d_t = 1)) \\ &\quad - \beta(y_t - \sigma \mathbb{E}(\ln p_t(0|\mathbf{x}_t) | \mathbf{x}_{t-1} = \mathbf{x}; d_{t-1} = 1)) \end{aligned} \quad (27)$$

$\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ について上式の差をとって σ で割ると

$$\begin{aligned} \Delta \ln \frac{p_t(1|\mathbf{x})}{p_t(0|\mathbf{x})} - \Delta \ln \frac{p_t(1|\mathbf{x}')}{p_t(0|\mathbf{x}')} \\ &= -\beta(\mathbb{E}(\ln p_{t+1}(0|\mathbf{x}_{t+1}) | \mathbf{x}_t = \mathbf{x}; d_t = 1) - \mathbb{E}(\ln p_t(0|\mathbf{x}_t) | \mathbf{x}_{t-1} = \mathbf{x}; d_{t-1} = 1)) \\ &\quad + \beta(\mathbb{E}(\ln p_{t+1}(0|\mathbf{x}_{t+1}) | \mathbf{x}_t = \mathbf{x}'; d_t = 1) - \mathbb{E}(\ln p_t(0|\mathbf{x}_t) | \mathbf{x}_{t-1} = \mathbf{x}'; d_{t-1} = 1)) \end{aligned}$$

したがって階数条件の下で β は一意に定まる. □

注 1. $v_t(\cdot; 0) = 0$ かつ $\sigma = 1$ なら式 (26) より直ちに任意の \mathbf{x} について

$$\Delta \ln \frac{p_t(1|\mathbf{x})}{p_t(0|\mathbf{x})} = -\beta(\mathbb{E}(\ln p_{t+1}(0|\mathbf{x}_{t+1}) | \mathbf{x}_t = \mathbf{x}; d_t = 1) - \mathbb{E}(\ln p_t(0|\mathbf{x}_t) | \mathbf{x}_{t-1} = \mathbf{x}; d_{t-1} = 1)) \quad (28)$$

すなわち Daljord et al. (2019, Theorem 1) の結果が得られる. この場合の階数条件は, ある状態 \mathbf{x} について

$$\mathbb{E}(\ln p_{t+1}(0|\mathbf{x}_{t+1}) | \mathbf{x}_t = \mathbf{x}; d_t = 1) \neq \mathbb{E}(\ln p_t(0|\mathbf{x}_t) | \mathbf{x}_{t-1} = \mathbf{x}; d_{t-1} = 1)$$

選択枝別期待値関数 $V_t^e(\cdot; \cdot)$ の定義と補題 2 より、時点 $t = 0, \dots, T-1$ において $v_t(\cdot; 0) = y_t$ なら任意の \mathbf{x} について

$$\begin{aligned} V_t^e(\mathbf{x}; 1) &:= \mathbb{E}(\bar{V}_{t+1}^1(\mathbf{x}_{t+1}) | \mathbf{x}_t = \mathbf{x}; d_t = 1) \\ &= \mathbb{E}(v_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1}; 0) - \sigma \ln p_{t+1}(0 | \mathbf{x}_{t+1}) | \mathbf{x}_t = \mathbf{x}; d_t = 1) \\ &= y_{t+1} - \sigma \mathbb{E}(\ln p_{t+1}(0 | \mathbf{x}_{t+1}) | \mathbf{x}_t = \mathbf{x}; d_t = 1) \end{aligned}$$

$v_t(\cdot; 0) = 0$ なら上記の階数条件は $V_t^e(\mathbf{x}; 1) \neq V_{t-1}^e(\mathbf{x}; 1)$ と表せる。したがって（継続／停止の対数オッズ比の変化 ÷ 継続の期待値の変化）として β は識別される。継続の期待値が変化しても継続確率が一定なら $\beta = 0$ となる。

注 2. 前式の階差をとると、任意の \mathbf{x} について

$$\Delta V_t^e(\mathbf{x}; 1) = \Delta y_{t+1} - \sigma (\mathbb{E}(\ln p_{t+1}(0 | \mathbf{x}_{t+1}) | \mathbf{x}_t = \mathbf{x}; d_t = 1) - \mathbb{E}(\ln p_t(0 | \mathbf{x}_t) | \mathbf{x}_{t-1} = \mathbf{x}; d_{t-1} = 1))$$

Δy_{t+1} は状態 \mathbf{x} に依存しないので、定理 1 の階数条件は $\Delta V_t^e(\mathbf{x}; 1) \neq \Delta V_t^e(\mathbf{x}'; 1)$ と表せる。したがって 2 つの状態における（継続／停止の対数オッズ比の変化の差 ÷ 継続の期待値の変化の差）として β は識別される。継続の期待値が変化しなくても、 y_t が変化すれば継続確率は変化する。ただし y_t が状態 \mathbf{x} に依存しなければ、 y_t の変化による継続／停止の対数オッズ比の変化は状態によらず均一となる。そのため「変化の比」でなく「2 つの状態における変化の差の比」で β を識別できる。継続の期待値の変化が 2 つの状態異なるのに継続／停止の対数オッズ比の変化が同じなら $\beta = 0$ となる。

A.2 定理 2

証明 式 (27) を変形すると

$$\begin{aligned} &\Delta(y_t - \beta y_{t+1}) \\ &= -\sigma \left[\Delta \ln \frac{p_t(1 | \mathbf{x})}{p_t(0 | \mathbf{x})} + \beta (\mathbb{E}(\ln p_{t+1}(0 | \mathbf{x}_{t+1}) | \mathbf{x}_t = \mathbf{x}; d_t = 1) - \mathbb{E}(\ln p_t(0 | \mathbf{x}_t) | \mathbf{x}_{t-1} = \mathbf{x}; d_{t-1} = 1)) \right] \end{aligned}$$

したがって β を所与として階数条件の下で σ は一意に定まる。 \square

注 3. 尺度母数 σ はモデルの分母に現れるので、逆数で考えると分かりやすい。簡単化のため $\Delta y_{t+1} = 0$ として考えると、（継続の期待値の変化によらない継続／停止の対数オッズ比の変化 ÷ 停止の期待値の変化）の符号を逆にして $1/\sigma$ は識別される。停止の期待値の変化に対する継続／停止の対数オッズ比の変化が小さいと $1/\sigma$ は小さく（ σ は大きく）なり、継続／停止の選択における観測されない状態の影響が大きくなる。

注 4. 定理 2 の階数条件は式 (28) と矛盾するが、 $\Delta v_t(\cdot; 0) \neq 0$ なら式 (26) より一般に式 (28) は成立しない。すなわち Daljord et al. (2019, Theorem 1) と本定理は状況が異なる。

A.3 定理 3

証明 式 (25) より任意の \mathbf{x}_t について

$$u_t(1; \mathbf{x}_t) = v_t(\mathbf{x}_t; 0) + \sigma \ln \frac{p_t(1|\mathbf{x}_t)}{p_t(0|\mathbf{x}_t)} - \beta \mathbb{E}(v_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1}; 0) - \sigma \ln p_{t+1}(0|\mathbf{x}_{t+1}) | \mathbf{x}_t; 1)$$

したがって $\{v_t(\cdot; 0)\}$ が既知なら $\{u_t(1; \cdot)\}$ はノンパラメトリックに識別できる. $\{u_t(0; \cdot)\}$ は $\{v_t(\cdot; 0)\}$ と同一視してよい. \square

A.4 定理 4

まず次の補題を示す.

補題 4 時点 $t = 0, \dots, T-1$ において, 任意の \mathbf{x}_t と $j = 0, 1$ について

$$v_t^*(\mathbf{x}_t; 1) = v_t(\mathbf{x}_t; 1) + \Delta_t(1; \mathbf{x}_t) + \sum_{s=1}^{T-t} \beta^s \mathbb{E} \left(\Delta_{t+s}(j; \mathbf{x}_{t+s}) - \sigma \ln \frac{p_{t+s}^*(j|\mathbf{x}_{t+s})}{p_{t+s}(j|\mathbf{x}_{t+s})} | \mathbf{x}_t; d_t = 1 \right)$$

$$v_t^*(\mathbf{x}_t; 0) = v_t(\mathbf{x}_t; 0) + \Delta_t(0; \mathbf{x}_t) + \sum_{s=1}^{T-t} \beta^s \mathbb{E}(\Delta_{t+s}(0; \mathbf{x}_{t+s}) | \mathbf{x}_t; d_t = 0)$$

証明 補題 3 より時点 $t = 0, \dots, T-1$ では任意の \mathbf{x}_t と $j = 0, 1$ について

$$v_t^*(\mathbf{x}_t; 1) = u_t^*(1; \mathbf{x}_t) + \beta \mathbb{E}(v_{t+1}^*(\mathbf{x}_{t+1}; j) - \sigma \ln p_{t+1}^*(j|\mathbf{x}_{t+1}) | \mathbf{x}_t; d_t = 1)$$

$$v_t^*(\mathbf{x}_t; 0) = u_t^*(0; \mathbf{x}_t) + \beta \mathbb{E}(v_{t+1}^*(\mathbf{x}_{t+1}; 0) | \mathbf{x}_t; d_t = 0)$$

逐次期待値の法則より任意の \mathbf{x}_t と $j = 0, 1$ について

$$\begin{aligned} & v_t^*(\mathbf{x}_t; 1) - v_t(\mathbf{x}_t; 1) \\ &= \Delta_t(1; \mathbf{x}_t) + \beta \mathbb{E} \left(v_{t+1}^*(\mathbf{x}_{t+1}; j) - v_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1}; j) - \sigma \ln \frac{p_{t+1}^*(j|\mathbf{x}_{t+1})}{p_{t+1}(j|\mathbf{x}_{t+1})} | \mathbf{x}_t; d_t = 1 \right) \\ &= \Delta_t(1; \mathbf{x}_t) - \beta \mathbb{E} \left(\sigma \ln \frac{p_{t+1}^*(j|\mathbf{x}_{t+1})}{p_{t+1}(j|\mathbf{x}_{t+1})} | \mathbf{x}_t; d_t = 1 \right) \\ &\quad + \beta \mathbb{E} \left(\Delta_{t+1}(j; \mathbf{x}_{t+1}) - \beta \sigma \ln \frac{p_{t+2}^*(j|\mathbf{x}_{t+2})}{p_{t+2}(j|\mathbf{x}_{t+2})} | \mathbf{x}_t; d_t = 1 \right) + \dots \\ &\quad + \beta^{T-t-1} \mathbb{E} \left(\Delta_{T-1}(j; \mathbf{x}_{T-1}) - \beta \sigma \ln \frac{p_T^*(j|\mathbf{x}_T)}{p_T(j|\mathbf{x}_T)} | \mathbf{x}_t; d_t = 1 \right) \\ &\quad + \beta^{T-t} \mathbb{E}(v_T^*(\mathbf{x}_T; j) - v_T(\mathbf{x}_T; j) | \mathbf{x}_t; d_t = 1) \end{aligned}$$

$v_T^*(\cdot; j) - v_T(\cdot; j) = \Delta_T(j; \cdot)$ より結果が得られる. $\{v_t^*(\cdot; 0)\}$ についても同様. \square

次に定理 4 を証明する.

証明 前補題より任意の \mathbf{x}_t と $j = 0, 1$ について

$$\begin{aligned}
& v_t^*(\mathbf{x}_t; 1) - v_t^*(\mathbf{x}_t; 0) \\
&= v_t(\mathbf{x}_t; 1) + \Delta_t(1; \mathbf{x}_t) + \sum_{s=1}^{T-t} \beta^s \mathbb{E} \left(\Delta_{t+s}(j; \mathbf{x}_{t+s}) - \sigma \ln \frac{p_{t+s}^*(j|\mathbf{x}_{t+s})}{p_{t+s}(j|\mathbf{x}_{t+s})} \middle| \mathbf{x}_t; d_t = 1 \right) \\
&\quad - v_t(\mathbf{x}_t; 0) - \Delta_t(0; \mathbf{x}_t) - \sum_{s=1}^{T-t} \beta^s \mathbb{E}(\Delta_{t+s}(0; \mathbf{x}_{t+s}) | \mathbf{x}_t; d_t = 0)
\end{aligned}$$

両辺を σ で割って補題 1 を適用する。 □

A.5 定理 5

証明 逐次期待値の法則と $\{d_t, \mathbf{x}_t\}$ のマルコフ性より任意の \mathbf{x}_t と $s = 2, \dots, T-t$ について

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(\ln p_{t+s}(0|\mathbf{x}_{t+s}) | \mathbf{x}_t; d_t = 1) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\ln p_{t+s}(0|\mathbf{x}_{t+s}) | \mathbf{x}_{t+1}; d_{t+1}) | \mathbf{x}_t; d_t = 1) \\
&= \int \sum_{j=0}^1 \mathbb{E}(\ln p_{t+s}(0|\mathbf{x}_{t+s}) | \mathbf{x}_{t+1}; d_{t+1} = j) p_{t+1}(j|\mathbf{x}_{t+1}) dF_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t; d_t = 1) \\
&= \int \mathbb{E}(\ln p_{t+s}(0|\mathbf{x}_{t+s}) | \mathbf{x}_{t+1}; d_{t+1} = 0) p_{t+1}(0|\mathbf{x}_{t+1}) dF_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t; d_t = 1) \\
&\quad + \int \mathbb{E}(\ln p_{t+s}(0|\mathbf{x}_{t+s}) | \mathbf{x}_{t+1}; d_{t+1} = 1) p_{t+1}(1|\mathbf{x}_{t+1}) dF_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t; d_t = 1)
\end{aligned}$$

停止は不可逆的なので、 $d_{t+1} = 0$ なら $s \geq 2$ について $p_{t+s}(0|\cdot) = 1$ 。したがって第 1 項は 0 となる。 □

A.6 系 1

証明 逐次期待値の法則と $\{d_t, \mathbf{x}_t\}$ のマルコフ性より任意の \mathbf{x}_t と $s = 2, \dots, T-t$ について

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(p_{t+s}(1|\mathbf{x}_{t+s}) | \mathbf{x}_t; d_t = 1) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(p_{t+s}(1|\mathbf{x}_{t+s}) | \mathbf{x}_{t+1}; d_{t+1}) | \mathbf{x}_t; d_t = 1) \\
&= \int \sum_{j=0}^1 \mathbb{E}(p_{t+s}(1|\mathbf{x}_{t+s}) | \mathbf{x}_{t+1}; d_{t+1} = j) p_{t+1}(j|\mathbf{x}_{t+1}) dF_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t; d_t = 1) \\
&= \int \mathbb{E}(p_{t+s}(1|\mathbf{x}_{t+s}) | \mathbf{x}_{t+1}; d_{t+1} = 0) p_{t+1}(0|\mathbf{x}_{t+1}) dF_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t; d_t = 1) \\
&\quad + \int \mathbb{E}(p_{t+s}(1|\mathbf{x}_{t+s}) | \mathbf{x}_{t+1}; d_{t+1} = 1) p_{t+1}(1|\mathbf{x}_{t+1}) dF_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t; d_t = 1)
\end{aligned}$$

停止は不可逆的なので、 $d_{t+1} = 0$ なら $s \geq 2$ について $p_{t+s}(1|\cdot) = 0$ 。したがって第 1 項は 0 となる。 □

参考文献

- 姉川恭子 (2014), 「大学の学習・生活環境と退学率の要因分析」『経済論究』第 149 号, 1-16 頁.
- 伊神満 (2018), 『「イノベーターのジレンマ」の経済学的解明』日経 BP.
- 入江智也・丸岡里香 (2017), 「大学入学時における UPI の key 項目への該当および居住形態が退学リスクに及ぼす影響—生存時間分析を用いた検討—」『学生相談研究』第 38 巻, 1-11 頁.
- 大友愛子・岩山豊・毛利隆夫 (2014), 「学内データの活用～大学における IR (Institutional Research) への取組み～」『Fujitsu』第 65 巻第 3 号, 41-47 頁.
- 鎌田浩史・井上雄介 (2016), 「教育達成モデルに基づく退学行動の研究～ディシジョンツリー分析による検討～」『大学評価と IR』第 5 号, 23-27 頁.
- 近藤伸彦・畠中利治 (2016), 「学士課程における大規模データに基づく学修状態のモデル化」『教育システム情報学会誌』第 33 巻, 94-103 頁.
- 清水一 (2013), 「大学の偏差値と退学率・就職率に関する予備的分析：社会科学系学部のケース」『大阪経大論集』第 64 巻第 1 号, 57-70 頁.
- 下瀬川陽 (2015), 「大学・短大中退が正社員就業と獲得賃金に与える効果の検討」『社会学年報』第 44 巻, 71-81 頁.
- 白鳥成彦・大石哲也・田尻慎太郎・森雅生・室田真男 (2020), 「中退確率の遷移を用いた中退学生の類型化」『日本教育工学会論文誌』第 44 巻, 11-22 頁.
- 高野敦子 (2020), 「エビデンスに基づく中途退学防止対策構築に向けての予備的分析—兵庫大学の
中退率改善に向けて」『兵庫高等教育研究』第 4 号, 121-136 頁.
- 竹橋洋毅・藤田敦・杉本雅彦・藤本昌樹・近藤俊明 (2016), 「退学者予測における GPA と欠席率の
貢献度」『大学評価と IR』第 5 号, 28-35 頁.
- 立石慎治・小方直幸 (2016), 「大学生の退学と留年—その発生メカニズムと抑制可能性—」『高等教育研究』第 19 巻, 123-143 頁.
- 朴澤泰男 (2016a), 「全国高校生調査からみた大学中退タイミング」小林雅之編『経済的理由による
学生等の中途退学の状況に関する実態把握・分析等及び学生等に対する経済的支援の在り方に関
する調査研究報告書』東京大学大学総合教育研究センター, 第 2 章, 7-15 頁.
- 朴澤泰男 (2016b), 「奨学金は大学中退を抑制するか—時系列データを用いた検討」『家計経済研
究』第 110 号, 75-83 頁.
- 北條雅一 (2018), 「学歴収益率についての研究の現状と課題」『日本労働研究雑誌』第 694 号, 29-38
頁, 5 月.
- 丸山文裕 (1984), 「大学退学に対する大学環境要因の影響力の分析」『教育社会学研究』第 39 巻,
140-153 頁.
- 村澤昌崇 (2008), 「大学中途退学の計量的分析—高等教育研究への計量分析の応用 (その 3): フ
リーソフト R を用いて—」『比治山高等教育研究』第 1 号, 153-165 頁.
- 読売新聞教育ネットワーク事務局 (2018), 『大学の實力 2019』中央公論新社.

- 労働政策研究・研修機構 (2023), 『ユースフル労働統計 2023』労働政策研究・研修機構.
- Abbring, Jaap H. and Øystein Daljord (2020). “Identifying the Discount Factor in Dynamic Discrete Choice Models.” *Quantitative Economics*, 11, 471–501.
- Altonji, Joseph G. (1993). “The Demand for and Return to Education When Education Outcomes Are Uncertain.” *Journal of Labor Economics*, 11, 48–83.
- Arcidiacono, Peter (2004). “Ability Sorting and the Returns to College Major.” *Journal of Econometrics*, 121, 343–375.
- Arcidiacono, Peter and Paul B. Ellickson (2011). “Practical Methods for Estimation of Dynamic Discrete Choice Models.” *Annual Review of Economics*, 3, 363–394.
- Arcidiacono, Peter and Robert A. Miller (2020). “Identifying Dynamic Discrete Choice Models off Short Panels.” *Journal of Econometrics*, 215, 473–485.
- Bajari, Patrick, Chenghuan Sean Chu, Denis Nekipelov and Minjung Park (2016). “Identification and Semiparametric Estimation of a Finite Horizon Dynamic Discrete Choice Model with a Terminating Action.” *Quantitative Marketing and Economics*, 14, 271–323.
- Ching, Andrew T., Susumu Imai, Masakazu Ishihara and Neelam Jain (2012). “A Practitioner’s Guide to Bayesian Estimation of Discrete Choice Dynamic Programming Models.” *Quantitative Marketing and Economics*, 10, 151–196.
- Daljord, Øystein, Denis Nekipelov and Minjung Park (2019). “Comments on “Identification and Semiparametric Estimation of a Finite Horizon Dynamic Discrete Choice Model with a Terminating Action”.” *Quantitative Marketing and Economics*, 17, 439–449.
- Davison, A. C. and D. V. Hinkley (1997). *Bootstrap Methods and Their Application*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Eisenhauer, Philipp (2018). “The Approximate Solution of Finite-Horizon Discrete-Choice Dynamic Programming Models.” *Journal of Applied Econometrics*, 34, 149–154.
- Gabler, Janos and Tobias Raabe (2020). “respy—A Framework for the Simulation and Estimation of Eckstein–Keane–Wolpin Models.” URL: <https://github.com/OpenSourceEconomics/respy>.
- Hotz, V Joseph and Robert A Miller (1993). “Conditional Choice Probabilities and the Estimation of Dynamic Models.” *Review of Economic Studies*, 60, 497–529.
- Jørgensen, Thomas H. and Maxime Tô (2019). “Robust Estimation of Finite Horizon Dynamic Economic Models.” *Computational Economics*, 55, 499–509.
- Kasahara, Hiroyuki and Katsumi Shimotsu (2008). “Pseudo-Likelihood Estimation and Bootstrap Inference for Structural Discrete Markov Decision Models.” *Journal of Econometrics*, 146, 92–106.
- Keane, Michael P. and Kenneth I. Wolpin (1994). “The Solution and Estimation of Discrete Choice Dynamic Programming Models by Simulation and Interpolation: Monte Carlo Evidence.” *Review of Economics and Statistics*, 76, 648–672.
- Keane, Michael P. and Kenneth I. Wolpin (1997). “The Career Decisions of Young Men.” *Journal of Political Economy*, 105, 473–522.

- Manski, Charles F. (1989). "Schooling As Experimentation: A Reappraisal of the Postsecondary Dropout Phenomenon." *Economics of Education Review*, 8, 305–312.
- Manski, Charles F. and David A. Wise (1983). *College Choice in America*. Harvard University Press, Cambridge, MA.
- Nicoletti, Maria Carmo (2019). "Revisiting the Tinto's Theoretical Dropout Model." *Higher Education Studies*, 9(3), 52–64.
- R Core Team (2024). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, URL: <https://www.R-project.org/>.
- Stange, Kevin M. (2012). "An Empirical Investigation of the Option Value of College Enrollment." *American Economic Journal: Applied Economics*, 4, 49–84.
- Stinebrickner, Ralph and Todd Stinebrickner (2014). "Academic Performance and College Dropout: Using Longitudinal Expectations Data to Estimate a Learning Model." *Journal of Labor Economics*, 32, 601–644.
- Tinto, Vincent (1975). "Dropout from Higher Education: A Theoretical Synthesis of Recent Research." *Review of Educational Research*, 45, 89–125.
- Tinto, Vincent (1993). *Leaving College: Rethinking the Causes and Cures of Student Attrition*, 2nd edition. University of Chicago Press, Chicago.