



Munich Personal RePEc Archive

## **Long-term memory and its evolution in returns of PX between 1999 and 2009**

Kristoufek, Ladislav

Institute of Economic Studies, Faculty of Social Sciences, Charles  
University in Prague, Institute of Information Theory and  
Automation, Academy of Sciences of the Czech Republic

8 July 2009

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/16435/>  
MPRA Paper No. 16435, posted 27 Jul 2009 21:42 UTC

# LONG-TERM MEMORY AND ITS EVOLUTION IN RETURNS OF PX BETWEEN 1999 AND 2009

Ladislav Krištoufek

Institute of Economic Studies, Faculty of Social Sciences, Charles University in Prague,  
Smetanovo nábřeží 6, 110 01 Praha 1

Institute of Information Theory and Automation, Academy of Sciences of the Czech  
Republic, Pod Vodárenskou věží 4, 182 08 Praha 8

kristoufek@ies-prague.org

## **Abstract**

Long-term memory processes have been extensively examined in recent literature as they provide simple way to test for predictability in the underlying process. However, most of the literature interprets the results of estimated Hurst exponent simply by its comparison to its asymptotic limit of 0.5. Therefore, we present results of Monte Carlo simulations for rescaled range, modified rescaled range and detrended fluctuation analysis based on chosen scales taken into consideration. The results of simulations show that even independent process can show Hurst exponent far from 0.5. In our analysis of evolution of Hurst exponent between 1999 and 2009, we show that Czech PX experienced persistent behavior which weakened in time. Nevertheless, the returns of PX remain close to confidence interval separating independent and persistent behavior.

**Keywords:** Hurst exponent, long-range dependence, time series analysis, persistence, rescaled range, detrended fluctuation analysis

**JEL Classification:** G1, G10, G14, G15

# Procesy s dlouhou pamětí a jejich vývoj ve výnosech indexu PX v letech 1999 – 2009

Ladislav Krištofuk

Institut ekonomických studií, Fakulta sociálních věd, Univerzita Karlova v Praze  
Opletalova 26, 110 00 Praha, Česká republika  
Telefon: +420 607 684 417  
E-mail: kristoufek@ies-prague.org

Ústav teorie informace a automatizace, Akademie věd České republiky  
Pod Vodárenskou věží 4, 182 08 Praha, Česká republika

## Úvod

Procesy s dlouhou pamětí jsou součástí mladého oboru mezi statistickou fyzikou, ekonometrií a ekonomikou – ekonofyzikou. Tato disciplína aplikuje metody používané v přírodních vědách na ekonomické a finanční systémy. Samotné procesy s dlouhou pamětí<sup>1</sup> spojené s odhadem Hurstova exponentu prodělaly během posledních let dramatický vývoj jak v teorii, tak i v metodách a aplikacích. Základním principem daného přístupu je popsat celý systém jednou hodnotou, která v sobě zahrnuje zároveň komplexitu a jednoduchost. Tímto číslem je již zmíněný Hurstův exponent. Pomocí jeho hodnoty můžeme posoudit, zda je zkoumaná řada predikovatelná či náhodná. Základním problémem jeho aplikace je množství metod pro jeho odhad. Exponent totiž nelze spočítat, ale pouze odhadnout.

Tento článek prezentuje dvě nejvíce používané metody pro odhad Hurstova exponentu – R/S a DFA. Jelikož jsou však obě metody vychýlené v případě, že je ve zkoumané řadě přítomen i proces s krátkou pamětí, prezentujeme i M-R/S, která je proti těmto procesům odolná. Sekce 1 obsahuje základní definice sebepodobnosti a dlouhé paměti v časových řadách. Sekce 2 se zaměřuje na detailní popis již zmíněných metod pro odhad Hurstova exponentu. Nejdůležitější částí článku je Sekce 3, ve které aplikujeme dané metody na určení časově závislého Hurstova exponentu na výnosy indexu PX mezi roky 1999 a 2009. Zároveň prezentujeme i výsledky Monte Carlo simulací pro zvolené parametry a pomocí nich konstruujeme konfidenční intervaly pro testování nulové hypotézy o nezávislosti procesu. Docházíme k závěru, že PX byl na počátku tisíciletí signifikantně predikovatelný, avšak tato předvídatelnost se v čase snižovala.

---

<sup>1</sup> Názvosloví k danému tématu je téměř výhradně anglické. Tato práce se pokouší zavést české ekvivalenty k daným pojmům. Původní označení je vždy uvedeno v poznámce pod čarou pro lepší orientaci v cizojazyčné odborné literatuře.

# 1 Sebepodobnost a dlouhá paměť v časových řadách

Základní myšlenkou sebepodobnosti<sup>2</sup> jsou stejné, či alespoň podobné, statistické vlastnosti procesu v jakémkoliv měřítku po vhodném přeškálování<sup>3</sup> (nejjednodušším způsobem je standardizace). Standardizované denní výnosy za dané časové období, pokud jsou sebepodobné, pak mají podobné statistické vlastnosti jako týdenní či měsíční výnosy po standardizaci za stejné časové období. Nejjednodušeji lze definovat sebepodobnost na základě rozdělení (Samorodnitsky, 2006). Proces je pak sebepodobný, pokud platí, že  $X(at) \rightarrow a^H X(t)$ , kde  $a$  je kladná konstanta a  $H$  je parametr sebepodobnosti, pro který platí  $0 < H < 1$ .

Parametr sebepodobnosti  $H$  se nazývá také Hurstův exponent po vodním inženýrovi Haroldu Edwinu Hurstovi a byl vyvinut při zkoumání vodních toků řeky Nilu (Hurst, 1951). Označení  $H$  pak dal exponentu Benoît Mandelbrot (Mandelbrot & van Ness, 1968), který výrazně přispěl k rozvoji teorie sebepodobnosti v jejích počátečních letech (např. Mandelbrot & Wallis, 1969; Mandelbrot, 1970; a Mandelbrot, 1972).

Důležitější implikace sebepodobnosti pro časové řady vyplývají nikoliv z distribucí, ale z dynamických vlastností řad, které mohou být jednoduše popsány autokorelační funkcí (Eichner *et al.*, 2007)

$$\gamma(k) = \frac{\sum_{t=0}^{T-k} (X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)}{\sigma^2(T-k)}, \quad (1.1)$$

kde  $X_t$  je náhodná proměnná,  $T$  je délka časové řady,  $k$  je počet zvolených zpoždění,  $\mu$  je střední hodnota, tedy průměr, a  $\sigma$  je konečná směrodatná odchylka. Sebepodobné procesy pak mají autokorelační funkci přesně a asymptoticky definovanou jako

$$\gamma(k) = \frac{(k+1)^{2H} - 2k^{2H} + (k-1)^{2H}}{2} \quad \text{pro } k \geq 0 \quad (1.2)$$

$$\gamma(k) \approx H(2H-1) * k^{2H-2} \quad \text{pro } k \rightarrow \infty \quad (1.3)$$

Kritickou hodnotou Hurstova exponentu je 0,5, která implikuje dva možné procesy. Na základě přesné autokorelační funkce dostáváme nezávislý proces (Beran, 1994). Při asymptotické autokorelační funkci můžeme mít nezávislý proces i proces s krátkou pamětí (Lillo & Farmer, 2004). Nezávislý proces má pak nulovou autokorelaci pro všechna zpoždění.

---

<sup>2</sup> Označení v zahraniční literatuře jsou „self-similarity“ či „self-affinity“, které sice nejsou definičně stejné, avšak z hlediska analýzy časových řad jsou rozdíly zanedbatelné.

<sup>3</sup> Označení škála a reškálování či přeškálování v tomto textu je ekvivalentní s anglickými výrazy „scale“ a „rescaling“.

Proces s krátkou pamětí má nenulové korelace pro nízká zpoždění, avšak nulové korelace pro vysoká zpoždění.

Proces s Hurstovým exponentem vyšším než 0,5 má kladné korelace pro všechna zpoždění a je pak nazýván jako persistentní proces<sup>4</sup> (Mandelbrot & van Ness, 1968). Korelace takového procesu klesají hyperbolickou rychlostí a jejich suma je nekonečná (Beran, 1994). Na druhou stranu, pro Hurstův exponent nižší než 0,5 má proces záporné korelace pro všechna zpoždění a je nazýván anti-persistentní<sup>5</sup> (Mandelbrot & van Ness, 1968). Proces má opět hyperbolicky klesající korelace, jejichž suma je však konečná (Embrechts & Maejima, 2002). Persistentní proces pak implikuje, že kladná hodnota je statisticky častěji následovaná kladnou hodnotou či naopak. Naproti tomu, anti-persistentní proces implikuje, že kladná hodnota je statisticky častěji následovaná zápornou hodnotou a naopak (Vandewalle, Ausloos & Boveroux, 1997). Pokračujeme nejpoužívanějšími metodami pro odhad Hurstova exponentu.

## 2 Metody pro odhad Hurstova exponentu

V této sekci se zaměříme na podrobný popis dvou nejpoužívanějších metod pro odhadnutí Hurstova exponentu – metodu přeškálovaného rozsahu a detrendovanou flukтуаční analýzu<sup>6</sup>. Při popisu metody přeškálovaného rozsahu se zaměříme i na metodu modifikovaného přeškálovaného rozsahu<sup>7</sup>, která se snaží odstranit dvě slabiny nemodifikované metody, a to použití pro heteroskedastické řady a procesy s krátkou pamětí.

### 2.1. *Metoda přeškálovaného rozsahu a modifikovaného přeškálovaného rozsahu*

Metoda přeškálovaného rozsahu (R/S) je nejstarší metodou určení Hurstova exponentu a byla vyvinuta H. E. Hurstem, když pracoval jako vodní inženýr v Egyptě (Hurst, 1951). Metoda byla použita pro vytvoření vodního rezervoáru, který by nikdy nevyschnul a nikdy nepřetekl. Na finanční řady byla metoda poprvé použita v 70. letech 20. století (Mandelbrot, 1970).

---

<sup>4</sup> V zahraniční literatuře jsou názvy pro persistentní proces velmi různorodé – “long-range dependent” (Beran, 1994), “long-memory process” (Lillo & Farmer, 2004), “persistent process” (Mandelbrot & van Ness, 1968) a “black noise” (Peters, 1994).

<sup>5</sup> Podobně jako pro persistentní proces existuje v zahraniční literatuře větší množství ekvivalentních označení – “short-range dependence” (Beran, 1994), “anti-persistent” (Mandelbrot & van Ness, 1968), “intermediate memory process” (Barkoulas, Baum & Travlos, 2000) a “pink noise” (Peters, 1994).

<sup>6</sup> Původní označení pro metody je „rescaled range analysis“ a „detrended fluctuation analysis“.

<sup>7</sup> Metoda je v zahraniční literatuře označována jako „modified rescaled range analysis“.

Postup pro určení Hurstova exponentu danou metodou můžeme rozdělit do deseti kroků (Peters, 1994; a Samorodnitsky, 2007):

- *Krok 1:* Převědeme původní řadu hodnot  $(P_0, P_1, \dots, P_T)$  na řadu logaritmických (spojitých) výnosů  $(r_1, r_2, \dots, r_T)$ , kde

$$r_i = \log P_i - \log P_{i-1} \text{ pro } i = 1, 2, \dots, T. \quad (2.1)$$

- *Krok 2:* Rozdělíme časovou řadu o délce  $T$  na  $N$  sousedících period o délce  $v$ , zatímco  $N \cdot v = T$ . Každá perioda je pak označena jako  $I_n$  pro  $n = 1, 2, \dots, N$ . Navíc označíme prvky v periodě  $I_n$  jako  $r_{k,n}$  pro  $k = 1, 2, \dots, v$ .

- *Krok 3:* Pro každou periodu  $I_n$  určíme průměrný výnos jako

$$\bar{r}_n = \frac{1}{v} \sum_{k=1}^v r_{k,n} \quad (2.2)$$

- *Krok 4:* Sestrojíme novou řadu akumulovaných odchylek od aritmetického průměru (profil řady) pro každou periodu jako

$$X_{k,n} = \sum_{i=1}^k (r_{i,n} - \bar{r}_n). \quad (2.3)$$

- *Krok 5:* Spočteme rozsah definovaný jako rozdíl maxima a minima profilu pro každou periodu, tedy

$$R_{I_n} = \max(X_{k,n}) - \min(X_{k,n}). \quad (2.4)$$

- *Krok 6:* Určíme výběrovou směrodatnou odchylku jako

$$S_{I_n} = \sqrt{\frac{1}{v-1} \sum_{i=1}^v (r_{i,n} - \bar{r}_n)^2}, \quad (2.5)$$

kde  $\bar{X}_{k,n}$  je aritmetický průměr profilu řady.

- *Krok 7:* Každý rozsah je standardizován související směrodatnou odchylkou a tvoří tak přeškálovaný rozsah jako

$$(R/S)_{I_n} = \frac{R_{I_n}}{S_{I_n}}. \quad (2.6)$$

- *Krok 8:* Zopakujeme celý postup pro každou periodu o délce  $v$  a získáme průměrný přeškálovaný rozsah jako

$$(R/S)_v = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (R/S)_{I_n}. \quad (2.7)$$

- *Krok 9:* Délka  $v$  je zvýšena a celý proces se zopakuje. Konkrétní délky se v literatuře liší. Zde volíme metodu, která vychází z teorie multiplikativních kaskád, které souvisí

s řadami s dlouhou pamětí (Lux, 2007), a použijeme délky škál jako přirozené mocniny čísla 2 (Weron, 2002).

- *Krok 10:* Získáme průměrné přeškálované rozsahy  $(R/S)_v$  pro dané délky  $v$ . Přeškálované rozsahy pak splňují vztah

$$(R/S)_v \approx c * v^H, \quad (2.8)$$

kde  $c$  je konečná konstanta nezávislá na  $v$  a  $H$  je Hurstův exponent (Taqqu, Teverovsky & Willinger, 1995).

Lineární vztah v dvojité logaritmickém měřítku lze získat přes metodu nejmenších čtverců jako

$$\log(R/S)_v \approx \log c + H \log v. \quad (2.9)$$

R/S analýza je známá a užívaná po dlouhou dobu, za kterou byla podrobena testování a kritice. Ta se na metodu snáší kvůli problémům s heteroskedastickými daty (Di Matteo, 2007) a procesy s krátkou pamětí jako ARMA a (G)ARCH (Lo & MacKinlay, 1999; a Alfi *et al.*, 2008). Heteroskedasticita je problémem kvůli užití výběrové směrodatné odchylky (2.5) a společně s filtrací pouze constantního trendu (2.3) tak celou metodu oslabuje oproti nestacionaritám v procesu. Stacionarita se dá však dobře testovat (např. ADF a KPSS test) a v jejím případě se přistupuje k metodám, které jsou pro nestacionární řady vyvinuty. Takovou nejpoužívanější metodou je detrendovaná flukтуаční analýza (DFA), kterou diskutujeme v následující sekci. Pro procesy s možnou krátkou pamětí byla R/S analýza upravena (Lo, 1991) a využívá se jako metoda modifikovaných přeškálovaných rozsahů (M-R/S), na kterou se podrobněji zaměříme.

Zásadním rozdílem M-R/S oproti R/S je užití upravené výběrové směrodatné odchylky. Takto je metoda méně citlivá oproti krátké paměti i heteroskedasticitě. Nová rovnice pro upravenou výběrovou směrodatnou odchylku je pak definována pomocí autokovariance  $\gamma$  pro každou periodu  $I_n$  až do zpoždění  $\zeta$  jako

$$S_{I_n}^M = \sqrt{S_{I_n}^2 + 2 \sum_{j=1}^{\zeta} \gamma_j \left(1 - \frac{j}{\zeta + 1}\right)}. \quad (2.10)$$

R/S se tak stává speciálním případem M-R/S při  $\zeta = 0$  (Dülger & Ozdemir, 2005). Nejdůležitějším krokem modifikované metody se stává určení počtu zpoždění, která se použijí pro určení upravené směrodatné odchylky (Wang *et al.*, 2006). Pokud je počet zpoždění příliš nízký, signifikantní závislost ve vzdálenějších zpožděních může být vynechána, a tudíž je odhadnutý Hurstův exponent stále vychýlený krátkou pamětí. Na druhou stranu, pokud

zvolíme příliš vysoké zpoždění, je odhad opět zkreslený (Teverovsky, Taquu & Willinger, 1999).

Velká část autorů neřeší volbu optimálního zpoždění a pouze odhadne Hurstův exponent či  $V$  statistiku, kterou nadefinujeme později, pro různá zpoždění. Výsledky jsou pak interpretovány na základě srovnání daných odhadů (Zhuang, Gree & Maggioni, 2000; a Alptekin, 2006). Nicméně existují dvě metody určení optimálního zpoždění. První určuje zpoždění podle délky periody a autokorelace prvního řádu  $\hat{\rho}(1)$  (Lo, 1991) jako

$$\xi^* = \left[ \left( \frac{3\nu}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{2\hat{\rho}(1)}{1 - (\hat{\rho}(1))^2} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \quad (2.11)$$

Druhá metoda určuje zpoždění pouze na základě délky periody (Chin, 2008) jako

$$\xi^* = \left[ 4 \left( \frac{\nu}{100} \right)^{\frac{2}{9}} \right]. \quad (2.12)$$

Poznamenejme, že optimální zpoždění se určuje pro každou jednotlivou periodu v proceduře odhadu Hurstova exponentu. Při metodě M-R/S se využívá  $V$  statistika, která je používaná pro testování stability Hurstova exponentu (Hurst, 1951), pro signifikantní dlouhou paměť pro konkrétní škálu (Lo, 1991) a rozpoznávání cyklů v časové řadě (McKenzie, 2002). Tato statistika je definovaná jako

$$V_\nu = \frac{(R/S)_\nu}{\sqrt{\nu}}. \quad (2.13)$$

Je vidět, že pro nezávislý proces je  $V$  statistika konstantní pro měnící se škály. Pro persistentní proces je statistika rostoucí a pro anti-persistentní proces nakonec klesající. Pokud tedy  $V$  statistika mění své chování, lze mluvit o přechodu v chování Hurstova exponentu. Tyto přechody pak dále využíváme pro stanovení optimálních škál a délky časové řady. Jako další metody pro odhalení změn v chování používáme bodové derivace<sup>8</sup> Hurstova exponentu (Bashan *et al.*, 2008). Tyto derivace jsou nadefinovány jako sklony mezi jednotlivými průměrnými přeškálovanými rozsahy. Obě pomocné metody lze použít i pro detrendovanou flukтуаční analýzu, kterou popisujeme v následující sekci.

## 2.2. Detrendovaná flukтуаční analýza

Detrendovaná flukтуаční analýza (DFA) byla navržena v roce 1994 při zkoumání řad nukleotidů v DNA (Peng *et al.*, 1994). Hlavním rozdílem DFA oproti R/S je zaměření se na

<sup>8</sup> Původní označení v zahraniční literatuře je „point to point derivatives“.



chování fluktuací okolo trendu namísto chování rozsahů. Výsledkem je pak odolnost DFA oproti nestacionaritám ve zkoumané řadě.

Samotný postup stanovení Hurstova exponentu se velmi podobá R/S. Kroky 1 až 4 jsou stejné jako pro R/S, při kterých tedy opět rozdělíme celou řadu na menší periody a zkonstruujeme profil řady. Následné kroky se pak liší (Grech & Mazur, 2005):

- *Krok 5:* Zkonstruujeme polynomiální trend profilu řady pro každou periodu a označíme jej jako  $X_{v,l}$ . Volba řádu polynomu  $l$  se volí intuitivně, avšak lineární či kvadratický řád bývá nejčastěji používán (Vandewalle, Ausloos & Boveroux, 1997). Samotná procedura je pak pojmenována podle zvoleného polynomiálního řádu jako DFA-0, DFA-1 a DFA-2 pro konstantní, lineární a kvadratický trend postupně (Hu *et al.*, 2001). V naší analýze použijeme lineární detrendování.

- *Krok 6:* Detrendovaný signál  $Y_{v,l}$  je pak zkonstruován jako

$$Y_{v,l}(t) = X(t) - X_{v,l}(t). \quad (2.14)$$

- *Krok 7:* Fluktuace  $F_{DFA}(v,l)$  je pak spočtena jako

$$F_{DFA}(v,l) = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_{v,l}^2(t)}. \quad (2.15)$$

- *Krok 8:*  $F_{DFA}(v,l)$  se pak chová jako

$$F_{DFA}(v,l) \approx c * v^{H(l)}, \quad (2.16)$$

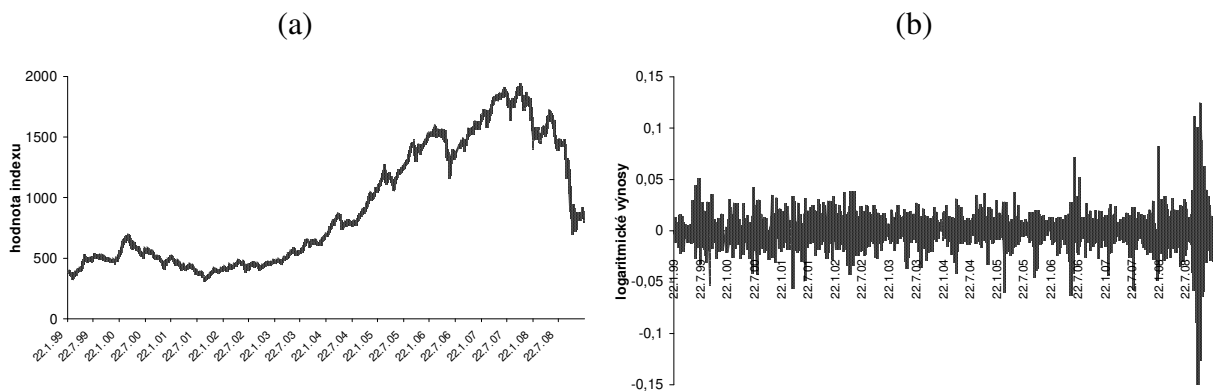
kde  $c$  je opět konstanta nezávislá na  $v$  (Weron, 2002).

Hurstův exponent získáme podobně jako při R/S, tedy metodou nejmenších čtverců aplikovanou na zlogaritmovanou rovnici (2.16). V příští sekci aplikuje časově závislý Hurstův exponent na index PX. Tato metoda spočívá v posouvání okna po původní časové řadě, čímž tedy zjednodušeně určíme Hurstův exponent pro den  $t$ , dále pro den  $t-1$  a pokračujeme, dokud délka časové řady dovolí.

### 3 Data a výsledky

Zkoumáme přítomnost procesu s dlouhou pamětí ve vývoji logaritmických výnosů indexu PX v období od 21.1.1999 do 20.1.2009 (2485 pozorování). Index byl v letech 2008 a 2009 výrazně zasažen finanční krizí, což se projevilo ve zvýšené volatilitě a tedy i možné nestacionaritě (Obrázek 1). Stacionarita však není porušena podle KPSS testu (Kwiatkowski *et al.*, 1992) při hodnotě 0,4346, přičemž kritická hodnota pro 5 % hladinu významnosti je 0,463. Při nulové hypotéze stacionarity tedy hypotézu nezamítáme. Zaměřme se nyní na deskriptivní statistiky řady výnosů – průměrný výnos 0,00028, směrodatná odchylka 0,0151,

šikmost  $-0,549$  a nadměrná špičatost  $15,005$ . Výnosy tedy nejsou normálně rozdělené již na základě hodnot šikmosti a špičatosti, tato domněnka je navíc podpořena Jarque-Bera testem (Jarque & Bera, 1981) při hodnotě  $23427$  a p-value velmi blízko hodnotě  $0$ . Tento výsledek byl však očekáván, jelikož bylo ukázáno, že většina výnosů není normálně rozdělena (Cont, 2001). Zaměříme se nyní na určení Hurstova exponentu pro zkoumanou časovou řadu.

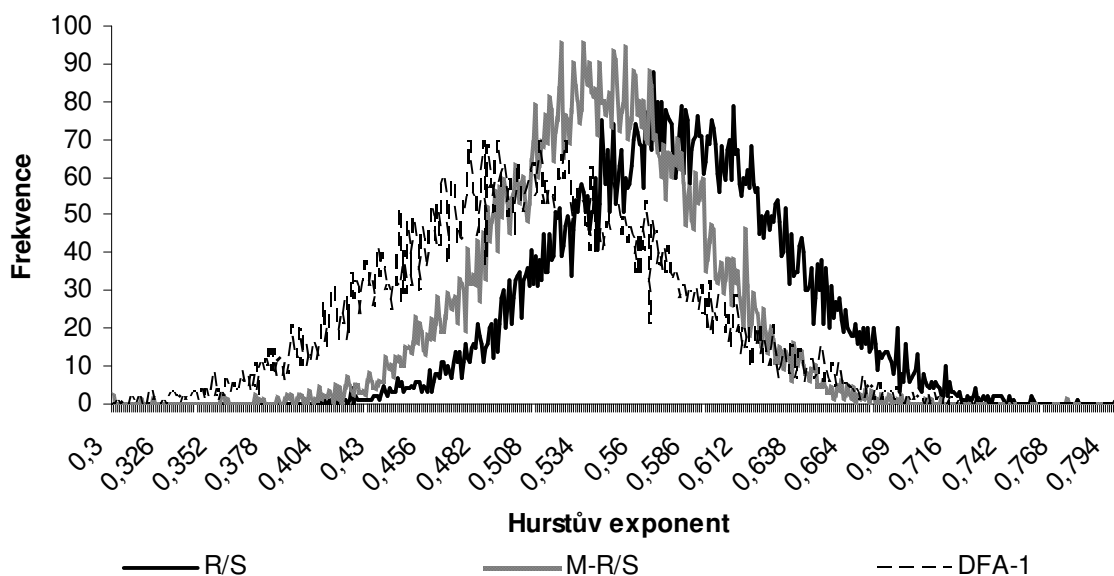


**Obrázek 1:** (a) Vývoj hodnot indexu PX, (b) logaritmické výnosy indexu PX

Analýzu Hurstova exponentu začneme detekcí možných přechodů v jeho chování. Určíme Hurstův exponent s maximálním možným počtem pozorování vzhledem k datovému souboru – v našem případě tedy 2048 denních výnosů. Obrázek A1 v příloze shrnuje výsledky pro všechny metody – R/S, M-R/S, DFA-0, DFA-1 a DFA-2. Na základě výsledků statistik  $V$  pozorujeme, že metody pro stacionární řady (tedy R/S, M-R/S a DFA-0) implikují škálování do 128 dní, a tedy přibližně půl obchodního roku, které je spojeno s persistentním chováním. Toto chování pak končí právě po horizontu 128 dní. DFA-1 a DFA-2 však napovídají, že daný přechod je způsoben trendem nebo trendy ve zkoumané řadě. Pro tyto dvě metody tedy pozorujeme persistentní chování až po nejvyšší škálu. Tyto výsledky implikují použití metod R/S, M-R/S a DFA-1, jelikož DFA-2 již žádnou další informaci oproti DFA-1 neposkytuje. Pokud se dále zaměříme na výsledky bodových derivací Hurstova exponentu, pozorujeme, že pro nejnižší škálu (tedy 8 dní) dosahují výsledky hodnot výrazně vyšších než pro střední škály. Dále i hodnoty pro škály nad 128 dní vykazují velmi rozdílné a volatilní výsledky. Jako důsledek použijeme nejnižší škálu 16 dní a nejvyšší škálu 128 dní. Pro délku zkoumané řady použijeme doporučení ve většině aplikovaných článků a udržíme nejvyšší škálu a délku řady v poměru 1:4, tedy budeme zkoumat řadu o délce 512 pozorování (Peters, 1994; Grech & Mazur, 2004; Matos *et al.*, 2008; Alvarez-Ramirez, Rodriguez & Echeverria, 2005; a Einstein, Wu & Gil, 2001).

Abychom byli schopni testovat hypotézu o nezávislosti procesu, potřebujeme konfidenční intervaly, které jsou založeny na Monte Carlo simulacích. Simulace již byly prezentovány v několika článcích (Weron, 2002; Couillard & Davison, 2005; a Peters, 1994), avšak žádný z těchto článků neprezentuje výsledky pro škály, které jsme zvolili. Provedli jsme tedy vlastní Monte Carlo simulace pro použité metody a zvolené parametry. Celkem bylo nasimulováno 10000 řad s délkou 512 pozorování z standardního normálního rozdělení  $N(0,1)$  a na každé byl aplikován postup pro danou metodu s minimální škálou 16 pozorování a maximální škálou 128 pozorování. Tento postup byl aplikován pro metody R/S, M-R/S a DFA-1. Histogramy simulací jsou uvedeny v Obrázku 2, deskriptivní statistiky jsou pak uvedeny v Tabulce 1.

**Obrázek 2 Histogramy Monte Carlo simulací**



Z Obrázku 2 i Tabulky 1 je dobře vidět, že hodnoty Hurstových exponentů se mohou velmi výrazně lišit od teoretické hodnoty 0,5 i pro nezávislý proces. Hodnoty dále napovídají, na základě Jarque-Bera statistiky (Jarque & Bera, 1981), že rozdělení hodnot není normální. Použijeme tedy pro konstrukci konfidenčních intervalů percentily (podobný postup aplikuje i Weron, 2002), konkrétně 97,5 a 2,5 procentní percentily pro testování oboustrané nulové hypotézy na hladině významnosti 5%. Konfidenční intervaly pro daný počet pozorování jsou široké a velmi znevažují přístupy, které posuzují nezávislost časových řad pouze na rovnosti Hurstova exponentu hodnotě 0,5 (např. Quang, 2007). Navíc se projevuje důležitý rozdíl v hodnotách pro R/S a M-R/S. Rozdílná hodnota v Hurstových exponentech pro R/S a M-R/S pak nemusí nutně znamenat jiný výsledek v podobě zamítnutí či nezamítnutí nulové

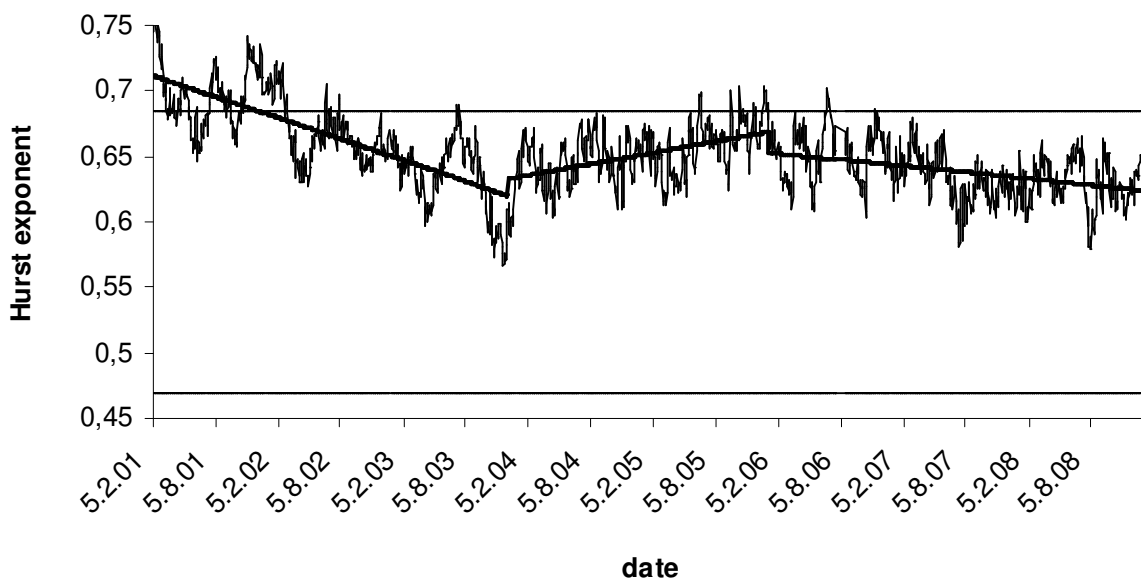
hypotézy. Pokud tedy na základě R/S zamítneme nezávislost časové řady a stejně tak i pro M-R/S a DFA-1, můžeme konstatovat, že zkoumaná řada má dlouhou paměť. Pokud však M-R/S nulovou hypotézu nezamítneme, je výsledek R/S způsoben zkreslením procesem s krátkou pamětí. Navíc můžeme výsledek změnit i po porovnání výsledků s DFA-1, která může ukázat, že původní výsledek je způsoben přítomností silného trendu ve zkoumané řadě. Zaměřme se nyní na výsledky časově závislého Hurstova exponentu pro index PX.

**Tabulka 1** Deskriptivní statistiky Monte Carlo simulací

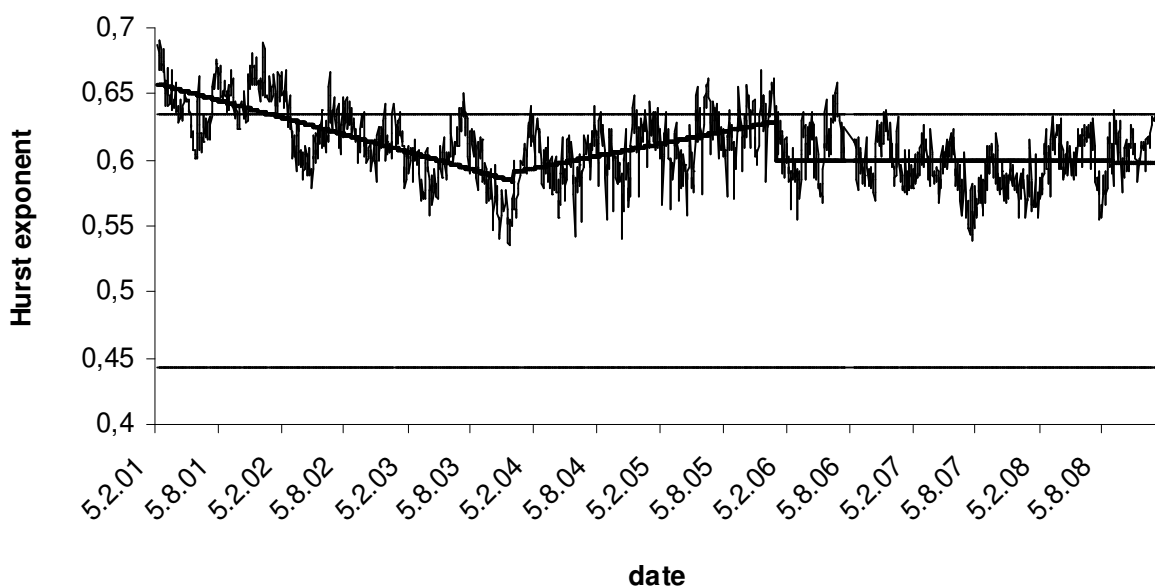
	<i>R/S</i>	<i>M-R/S</i>	<i>DFA-1</i>
<b><i>Střední hodnota</i></b>	0,5763	0,5393	0,5079
<b><i>Směrodatná odchylka</i></b>	0,0551	0,0485	0,0687
<b><i>Šikmost</i></b>	0,0104	-0,1088	0,1189
<b><i>Nadměrná špičatost</i></b>	-0,1316	0,1919	-0,0205
<b><i>Jarque-Bera statistika</i></b>	7,4569	34,9582	23,7407
<b><i>Jarque-Bera statistika (p-value)</i></b>	0,0240	0,0000	0,0000
<b><i>2,5% percentil</i></b>	0,4693	0,4436	0,3773
<b><i>97,5% percentil</i></b>	0,6848	0,6325	0,6479

Začneme výsledky pro R/S (Obrázek 3) a M-R/S (Obrázek 4). Obrázky ukazují časově závislý Hurstův exponent a konfidenční intervaly oddělující signifikantně persistentní a anti-persistentní chování od nezávislého. Zásadním poznatkem je, že na počátku pozorovaného období, mezi 2.2.2001 a 4.3.2002, se vyskytuje množství signifikantně persistentních období, ve kterých je trh predikovatelný, a tedy neefektivní. Navíc je toto zjištění potvrzeno metodou M-R/S. Další signifikantně persistentní období trvají pouze několik obchodních dní a nejsou proto pro posuzování efektivity zcela vhodné. Obě metody ukazují podobné trendy ve vývoji Hurstova exponentu. Klesající trend od signifikantně persistentních hodnot začíná na počátku pozorovaného období a končí 12.11.2003. Následuje slabě rostoucí trend, který končí okolo 6.1.2006 a na něj navazuje pomalu klesající (v případě R/S) či konstatní trend (v případě M-R/S). Důležitý zůstává fakt, že žádný z trendů není výrazný či rapidní, a tak nemůžeme jednoduše učinit další závěry. Nicméně, PX obecně následuje klesající trend Hurstova exponentu, pokud posuzujeme trend přes celé pozorované období, a tudíž je v čase efektivnější. Nezůstává však bez zajímavosti, že hodnoty Hurstova exponentu zůstávají velmi blízko horního konfidenčního intervalu, který odděluje nezávislý a persistentní proces.

Obrázek 3 Časově závislý Hurstův exponent (R/S)

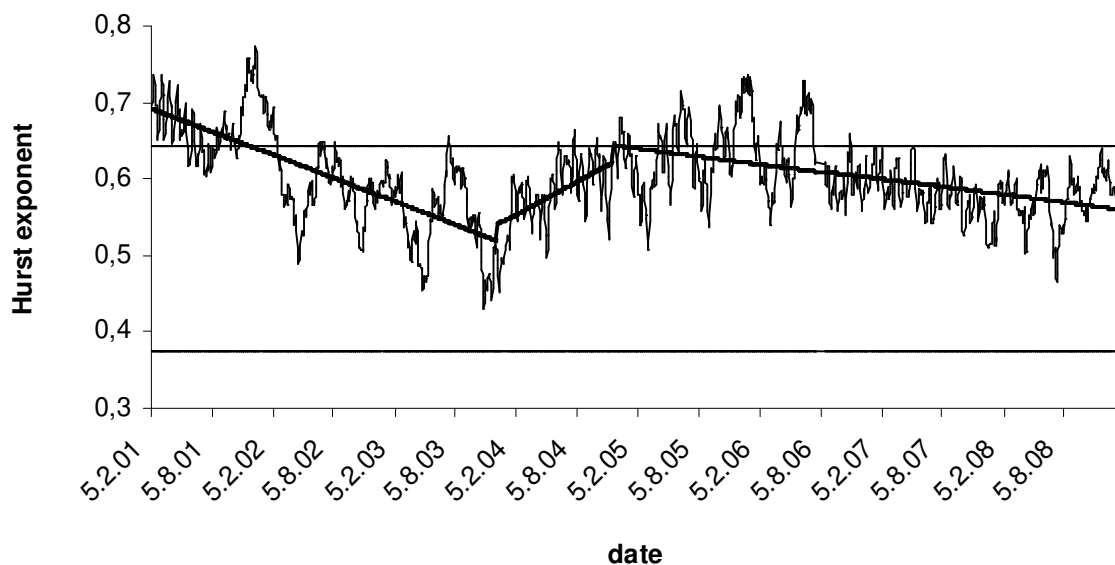


Obrázek 4 Časově závislý Hurstův exponent (M-R/S)



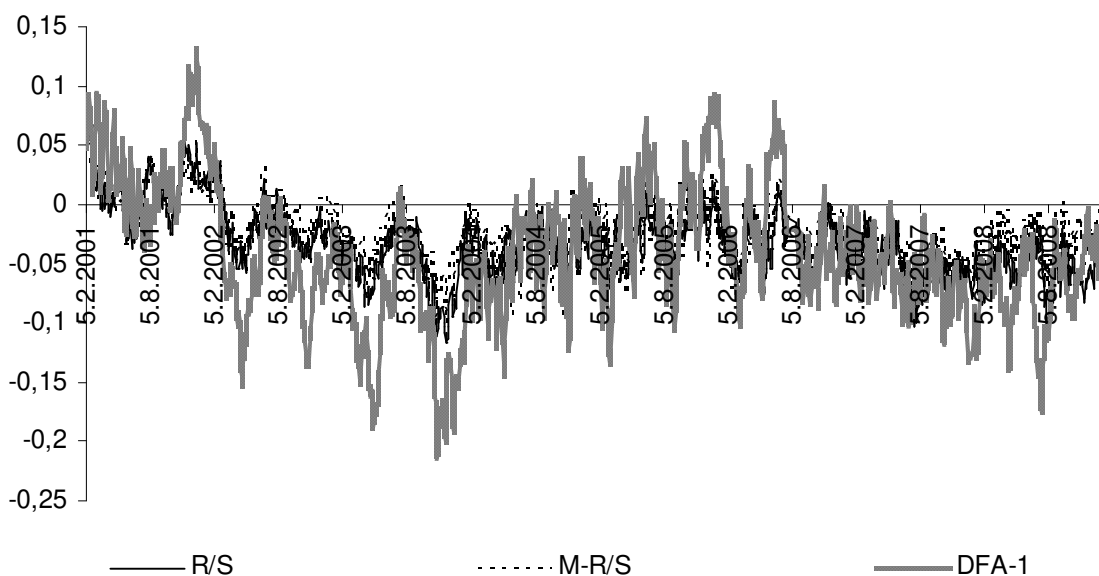
DFA-1 (Obrázek 5) ukazuje podobné výsledky jako R/S a M-R/S. Trendy časově závislého Hurstova exponentu jsou podobné se silnějším rostoucím trendem v druhé části zkoumaného období. Navíc, Hurstův exponent je více volatilní a zdá se, že i DFA-1 může nadhodnocovat výsledek, což napovídá o tom, že potenciální trend ve výnosech PX není tak silný. Periody signifikantně persistentního chování zůstávají velice srovnatelné. Pokud bychom rozdělili celé období na více částí, našli bychom signifikantně rostoucí trend Hurstova exponentu od 24.6.2008, který je spojen s počátkem současné finanční krize.

Obrázek 5 Časově závislý Hurstův exponent (DFA-1)



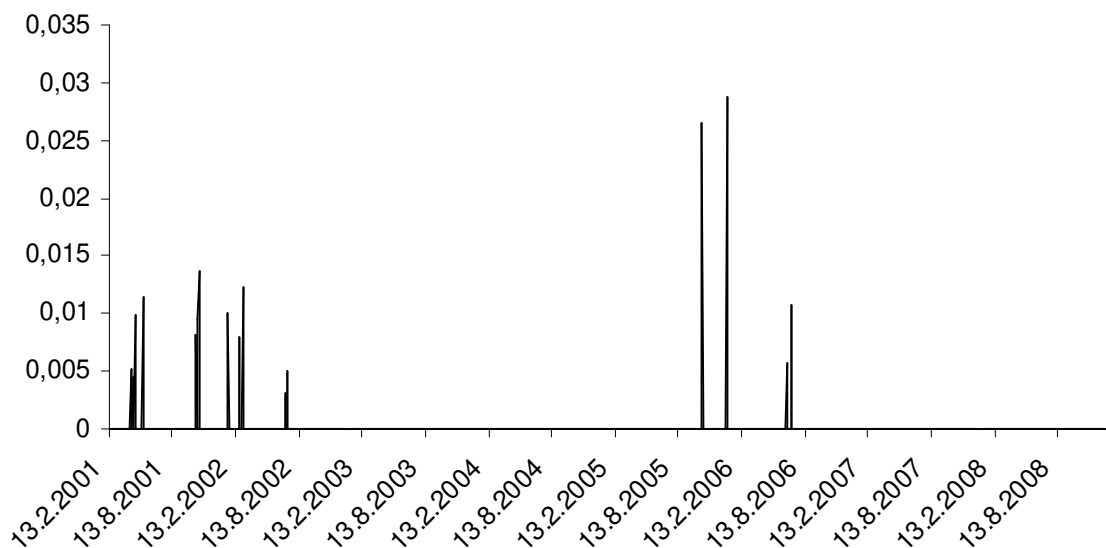
Pro lepší srovnání výsledků dále použijeme porovnání Hurstových exponentů pro všechny použité metody se souvisejícími horními konfidenčními intervaly. Jelikož exponenty pro žádnou metodu v žádné periodě neprolomily dolní konfidenční interval, je srovnání jednodušší a lépe interpretovatelné. Obrázek 6 ukazuje rozdíl Hurstova exponentu a horního konfidenčního intervalu (97,5 % percentil Monte Carlo simulací). Kladná hodnota tedy značí signifikantní perisistenci pro danou metodu, záporná hodnota naproti tomu značí období, pro které nulovou hypotézu nezávislosti zamítnout nemůžeme.

Obrázek 6 Porovnání Hurstových exponentů s horním konfidenčním intervalem



Průběh hodnot ukazuje dvě zásadní pozorování. První je fakt, že Hurstův exponent podle DFA-1 je výrazně volatilnější než podle dalších dvou metod, což nicméně odpovídá Monte Carlo simulacím, které jsme uvedli dříve v textu. Za druhé vidíme, že rozdíl mezi R/S a M-R/S je malý pro valnou většinu pozorování (navíc korelace mezi Hurstovými exponenty pro dané dvě metody je 0,91 v porovnání s 0,71 mezi R/S a DFA-1). Zaměřme se hlouběji na vztak těchto dvou metod. Zajímají nás případy, kdy metodou R/S odhadneme Hurstův exponent nad konfidenčním intervalem a metodou M-R/S pod konfidenčním intervalem. V takovém případě můžeme tvrdit, že zdánlivá persistence není způsobena dlouhou pamětí v procesu, ale pouze krátkou pamětí, která vychyluje odhad R/S. Obrázek 7 shrnuje všechny tyto případy. Můžeme konstatovat, že existují období, kdy je persistence pouze zdánlivá. Avšak je nutné poznamenat, že tak můžeme říci pouze v 13 případech z celkových 1967 odhadů. Navíc je pouze jeden případ, kdy zdánlivou persistenci pozorujeme ve více periodách na sebe přímo navazujících (pro tento případ navíc pouze dvě po sobě jdoucí odhady). Ostatní případy jsou singularitami. Celkově tedy můžeme konstatovat, že převaha krátké paměti nad dlouhou pamětí v těchto 13 obdobích je spíše náhodná.

**Obrázek 7 Porovnání krátké a dlouhé paměti**

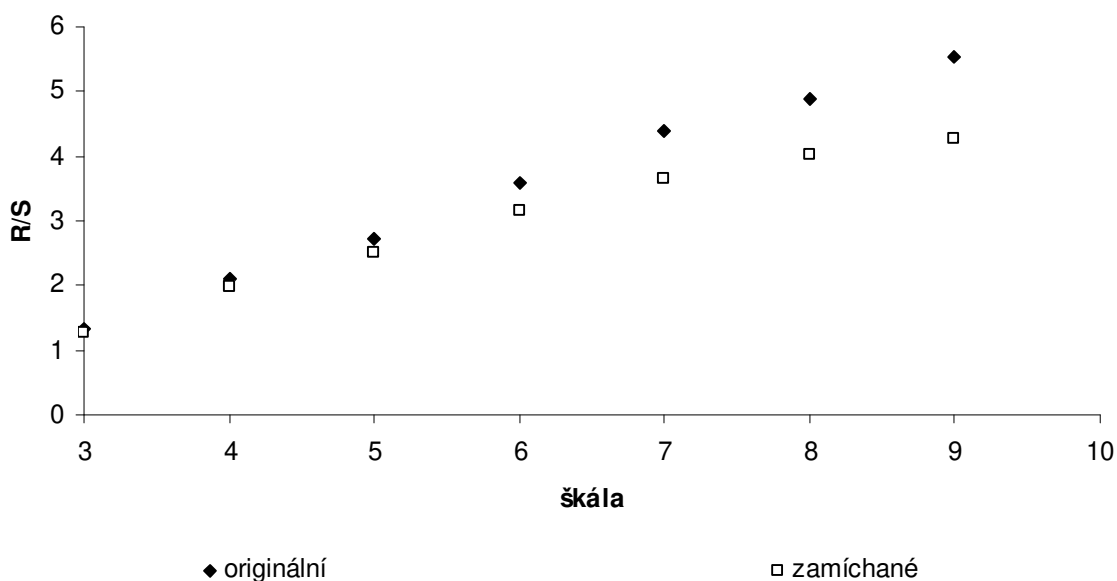


Lze tedy konstatovat, že index PX byl v jistých fázích svého vývoje signifikantně persistentní. Aby toto tvrzení bylo více robustní, zaměřme se na hodnoty Hurstova exponentu v konkrétních případech. Obě hlavní metody odhadu exponentu mohou být totiž výrazně ovlivněny extrémními hodnotami. R/S je citlivá z důvodu použití rozsahu a DFA pro počet s fluktuacemi (Di Matteo, 2007). Dříve jsme ukázali, že výnosy indexu jsou výrazně špičaté a

extrémní hodnoty v procesu jsou proto velmi pravděpodobné. Abychom ovlivnění extrémními hodnotami vyloučili, náhodně zamícháme data pro daný Hurstův exponent a ten znovu určíme. Zamícháním totiž přetrháme potenciální vazby. Pokud tedy Hurstův exponent pro zamíchanou řadu bude podobný jako pro nezamíchanou, je signifikantní hodnota exponentu způsobena extrémními hodnotami a nikoliv dlouhočasovou závislostí. Naproti tomu rozdílné hodnoty vliv extrémních hodnot vylučují. Zaměříme se na maximální hodnoty pro R/S a DFA.

Hurstův exponent podle R/S nabývá maxima 7.2.2001, kdy je jeho hodnota rovna 0,7641. Chování přeškálovaných rozsahů originální a promíchané řady je shrnuto v Obrázku 8 (ve dvojitě logaritmickém měřítku). Rozdíl v chování rozsahu je zřejmý – originální řada dosahuje vyšších hodnot pro všechny škály. Pokud bychom určily Hurstův exponent pro promíchanou řadu, dostaneme hodnotu 0,5589, která je velice blízko očekávané hodnotě podle simulací a daleko od stanovených konfidenčních intervalů. Můžeme tedy potvrdit, že vysoké hodnoty Hurstova exponentu podle R/S jsou projevem dlouhé paměti ve zkoumaném procesu a nikoliv extrémních hodnot v řadě.

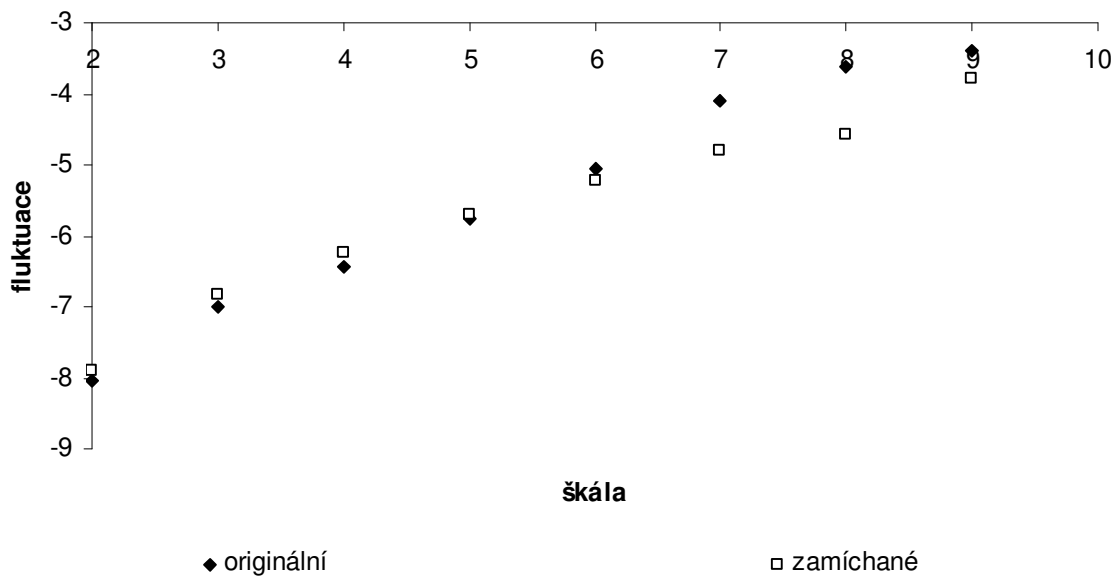
**Obrázek 8 Přeškálované rozsahy pro původní a promíchanou řadu**



DFA-1 ukazuje maximální Hurstův exponent dne 13.12.2001 při hodnotě 0,7710. Obrázek 9, opět ve dvojitě logaritmickém měřítku, ukazuje podobné výsledky jako Obrázek 8. Přestože jsou fluktuace na nižších škálách nižší, celkový sklon je evidentně vyšší pro originální řadu. Pro promíchanou řadu dostáváme Hurstův exponent o hodnotě 0,4846, což je sice nižší než očekávaná hodnota, ovšem je opět bezpečně vzdálená od konfidenčních intervalů.



Obrázek 9 Fluktuační původní a promíchané řady

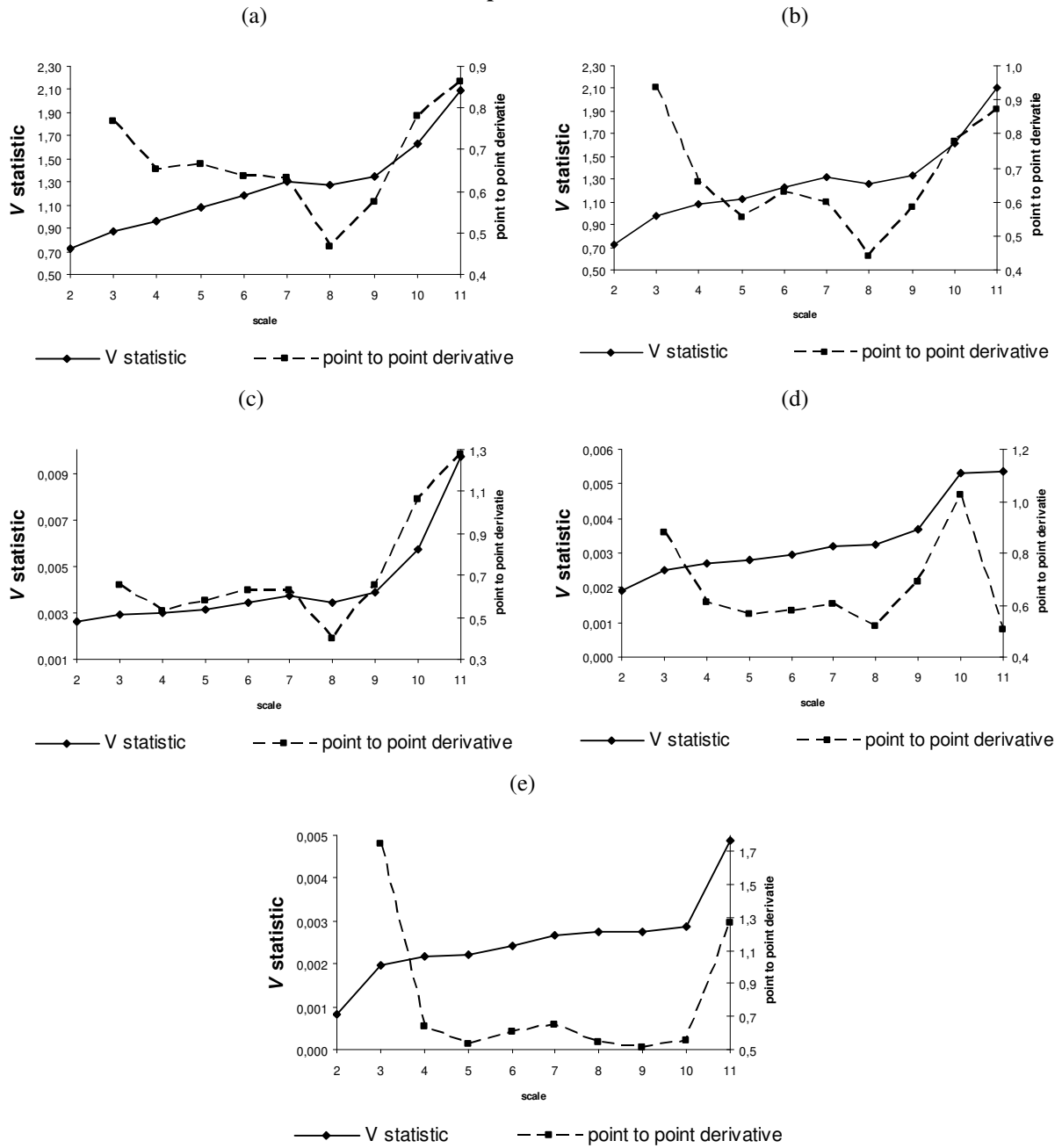


## Závěr

V článku jsme se zaměřili na detekci procesu s dlouhou pamětí ve výnosech indexu PX mezi roky 1999 a 2009. Ukázali jsme, že index prošel vývojem z persistentního do nezávislého procesu. Nicméně nezávislost výnosů je relativně křehká, jelikož se hodnoty Hurstova exponentu drží velmi blízko konfidenčního intervalu, který odděluje nezávislý od signifikantně persistentního procesu. Dále jsme ukázali, že výsledky jsou robustní proti potenciální krátké paměti. Metody pro odhad Hurstova exponentu prezentované v tomto článku mohou být navíc vychýlené přítomností extrémních hodnot v časové řadě. Podezření na extrémní hodnoty bylo založené na vysoké šikmosti distribuce výnosů. Po detailním pohledu na chování procesu pro maximální hodnoty Hurstova exponentu jsme při srovnání původní řady a náhodně promíchané řady ukázaly, že extrémní hodnoty v těchto případech nejsou důvodem vysokých hodnot exponentu.

# Příloha

Obrázek A1 Detekce změn v chování Hurstova exponentu



Detekce změn v chování Hurstova exponentu pro R/S (a), M-R/S (b), DFA-0 (c), DFA-1 (d) a DFA-2 (e). Grafy jsou zobrazeny v dvojité logaritmickém měřítku pro případ V statistik a semi-logaritmickém měřítku pro bodové derivace (point to point derivative). Výsledky pro R/S, M-R/S a DFA-0 ukazují změnu ve škálování na škále 128 dní. Tato změna je odstraněna detrendací u DFA-1 a DFA-2. Bodové derivace Hurstova exponentu dále ukazují, že vhodnou minimální škálou je 16 dní při maximální škále 128 dní.

## Literatura

- ALFI, V.; COCCETTI, F.; MAROTTA, M.; PETRI, A.; PIETRONERO, L. 2008. Exact Results for the Roughness of a Finite Size Random Walk. *Physica A*. 2008, Vol. 370, No. 1.
- ALPTEKIN, N. 2006. Long Memory Analysis of USD/TRL Exchange Rate, *International Journal of Social Sciences*. 2006, Vol. 1, No. 2.
- ALVAREZ-RAMIREZ, J.; RODRIGUEZ, E.; ECHEVERRIA, J. 2005. Detrending fluctuation analysis based on moving average filtering. *Physica A*. 2005, Vol. 354.
- BARKOULAS, J.; BAUM, CH.; TRAVLOS, N. 2000. Long memory in the Greek stock market. *Applied Financial Economics*. 2000, Vol. 10.
- BASHAN, A.; BARTSCH, R.; KANTELHARDT, J.; HAVLIN, S. 2008. Comparison of detrending methods for fluctuation analysis. *arXiv:0804.4081*
- BERAN, J. 1994. *Statistics for Long-Memory Processes, Monographs on Statistics and Applied Probability 61*. New York: Chapman & Hall, 1994. ISBN 978-0412049019.
- CHIN, W. 2008. Spurious Long-range Dependence: Evidence from Malaysian Equity Markets. *MPRA Paper*. 2008, No. 7914.
- CONT, R. 2001. Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*. 2001, Vol. 1, No. 2.
- COUILLARD, M.; DAVISON, M. 2005. A comment on measuring the Hurst exponent of financial time series. *Physica A*. 2005, Vol. 348.
- DI MATTEO, T. 2007. Multi-scaling in Finance. *Quantitative Finance*. 2007, Vol. 7, No. 1.
- DÜLGER, F.; OZDEMIR, Z. 2005. Current Account Sustainability in Seven Developed Countries. *Journal of Economic and Social Research*. 2005, Vol. 7, No. 2.
- EICHNER, J.; KANTELHARDT, J.; BUNDE, A.; HAVLIN, S. 2007. Statistics of return intervals in long-term correlated records. *Physical Review E*. 2007, Vol. 75.
- EINSTEIN, A.; WU, H.-S.; GIL, J. 2001. Detrended fluctuation analysis of chromatin texture for diagnosis in breast cytology. *Fractals*. 2001, Vol. 9, No. 4.
- EMBRECHTS, P.; MAEJIMA, M. 2002. *Selfsimilar Processes*, New Jersey: Princeton University Press, 2002. ISBN 978-0691096278.
- GRECH, D.; MAZUR, Z. 2004. Can one make any crash prediction in finance using the local Hurst exponent idea? *Physica A*. 2004, Vol. 336.
- GRECH, D.; MAZUR, Z. 2005. Statistical Properties of Old and New Techniques in Detrended Analysis of Time Series. *Acta Physica Polonica B*. 2005, Vol. 36, No. 8.
- HU, K.; IVANOV, P.; CHEN, Z.; CARPENA, P.; STANLEY, H. 2001. Effect of trends on detrended fluctuation analysis. *Physical Review E*. 2001, Vol. 64.
- HURST, H.E. 1951. Long term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Engineers*. 1951, Vol. 116.
- JARQUE, C.; BERA, A. 1981. Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals: Monte Carlo evidence. *Economics Letters*. 1981, Vol. 7, No. 4.
- KWIATKOWSKI, D.; PHILLIPS, P.; SCHMIDT, P.; SHIN, Y. 1992. Testing the null of stationarity against the alternative of a unit root: How sure are we that the economic time series have a unit root? *Journal of Econometrics*. 1992, Vol. 54.
- LILLO, F.; FARMER, J. 2004. The Long Memory of the Efficient Market. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*. 2004, Vol. 8, No. 3.

- LO, A.; MACKINLAY, C. 1999. *A Non-Random Walk Down Wall Street*. New Jersey: Princeton University Press, 1999. ISBN 0-691-09256-7.
- LO, A. 1991. Long-term memory in stock market prices. *Econometrica*. 1991, Vol. 59, No. 5.
- LUX, T. 2007. Applications of Statistical Physics in Finance and Economics. *Economics Working Paper, Christian-Albrechts-Universität Kiel*. 2007, No 2007-05.
- MANDELBROT, B.; VAN NESS, J. 1968. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*. 1968, Vol. 10, No. 422.
- MANDELBROT, B.; WALLIS, R. 1969. Robustness of the rescaled range R/S in the measurement of noncyclic long-run statistical dependence. *Water Resources Research*. 1999, Vol. 5.
- MANDELBROT, B. 1970. Analysis of long-run dependence in economics: the R/S technique. *Econometrica*. 1970, Vol. 39.
- MANDELBROT, B. 1972. Statistical methodology for non-periodic cycles: from covariance to R/S analysis. *Annals of Economic and Social Measurement*. 1972, Vol. 1.
- MATOS, J.; GAMA, S.; RUSKIN, H.; SHARKASI, A.; CRANE, M. 2008. Time and scale Hurst exponent analysis for financial markets. *Physica A*. 2008, Vol. 387, No. 15.
- MCKENZIE, M. 2002. Non-periodic Australian Stock Market Cycles: Evidence from Rescaled Range Analysis. *Economic Record*. 2002, Vol. 73, No. 239.
- PENG, C.; BULDYREV, S.; HAVLIN, S.; SIMONS, M.; STANLEY, H.; GOLDBERGER, A. 1994. Mosaic organization of DNA nucleotides. *Physical Review E*. 1994, Vol. 49, No. 2.
- PETERS, E. 1994. *Fractal Market Analysis – Applying Chaos Theory to Investment and Analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1994. ISBN 978-0471585244.
- QUANG, T. 2007. Testing the Weak Form of Efficient Market Hypothesis for the Czech Stock Market. *Politická ekonomie*. 2007, Vol. 6.
- SAMORODNITSKY, G. 2006. Long memory and self-similar processes. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques*. 2006, Vol. 25, No. 1.
- SAMORODNITSKY, G. 2007. *Long Range Dependence*, Now Publishers Inc., 2007. ISBN 978-1601980908.
- TAQQU, M.; TEVEROSKY, W.; WILLINGER, W. 1995. Estimators for long-range dependence: an empirical study. *Fractals*. 1995, Vol. 3, No. 4.
- TEVEROVSKY, V.; TAQQU, M.; WILLINGER, W. 1999. A critical look at Lo's modified R/S statistic. *Journal of Statistical Planning and Inference*. 1999, Vol. 80, No. 1-2.
- VANDEWALLE, N.; AUSLOOS, M.; BOVEROUX, PH. 1997. Detrended Fluctuation Analysis of the Foreign Exchange Market. *Econophysic Workshop, Budapest, Hungary, 1997*.
- WANG, W.; VAN GELDER, P.; VRIJLING, J.; CHEN, X. 2006. Detecting long-memory: Monte Carlo simulations and application to daily streamflow processes. *Hydrology and Earth System Sciences Discussions*. 2006, Vol. 3.
- WERON, R. 2002. Estimating long-range dependence: finite sample properties and confidence intervals. *Physica A*. 2002, Vol. 312.
- ZHUANG, Y.; GREEN, CH.; MAGGIONI, P. 2000. The Great Rebound, The Great Crash, and Persistence in British Stock Prices. *Economic Research Paper, Loughborough University*. 2000, No. 00/11.