Ruptures in the probability scale. Calculation of ruptures' values

Harin, Alexander

- ,

6 August 2009

Разрывы в шкале вероятностей.
Расчет величин разрывов

Александр Харин

Московский физико-технический институт
Современная Гуманитарная Академия

В статье поставлен вопрос о возможности существования разрывов в шкале вероятностей и о величинах этих разрывов. По предварительным расчетам, для ряда стандартных распределений величина разрыва превышает 1/3 от величины среднеквадратичного отклонения.

Содержание

Введение

До последнего времени рассмотрению шумов и неопределенностей вблизи краев шкалы вероятностей уделялось недостаточное внимание. В настоящей статье, на основании (Harin 2005 и Харин 2007), поставлен вопрос о возможности существования разрывов в шкале вероятностей. Сделаны расчеты величин разрывов для стандартных распределений и предельного случая. В настоящей статье уточняется и развивается часть результатов, представленных в (Харин 2009).

1. Исходная идея

Исходная идея состоит в том, чтобы определить, насколько близко к границе шкалы вероятностей может находиться оценка вероятности наступления некоторого события, если распределение этой оценки имеет ненулевую дисперсию. Другими словами, определить минимальное и максимальное значение оценки вероятности, распределение которой имеет ненулевую дисперсию.

Если минимальное значение оценки вероятности события строго больше 0, то можно сказать, что оценка вероятности такого события не может принимать значения между нулем и этим минимальным значением.

Если максимальное значение оценки вероятности события строго меньше 1, то можно сказать, что оценка вероятности такого события не может принимать значения между этим максимальным значением и единицей.

То есть можно сказать, что, возле границ шкалы вероятностей, для оценок вероятности, распределение которых имеет ненулевую дисперсию, как бы существуют разрывы, величина которых строго больше 0.

1.1. Аналогия. Вибрации вблизи твердой стены

Представим себе электродрель (без сверла) или аналогичное устройство с твердыми боковыми стенками корпуса, способное быстро вибрировать, например, стиральную машину, пулемет, отбойный молоток и т.д. Допустим, эта дрель, это устройство при работе вибрирует с амплитудой 1 мм.

Можем ли мы приблизить твердую боковую стенку корпуса выключенной дрели (устройства) к твердой стене:

А) на расстояние, скажем, 0,1 мм?

Б) вплотную?

Конечно да: и А) и Б). Теперь включим дрель. Чему станет равно расстояние от дрели до твердой стены?

Вибрации будут отталкивать, смещать дрель (устройство) от твердой стены:

А) Из-за вибраций, расстояние между корпусом и стеной увеличится, станет больше 0,1 мм.

Б) Между корпусом и стеной образуется зазор, разрыв.

1.2. Пример. Стрельба в мишень

Общие условия

Представим себе гипотетический переносной стенд для проверки качества винтовок, патронов и т.д. Во избежание погрешностей, связанных с человеческим фактором, винтовка и т.д. прикрепляются к основе, имитирующей стоящего человека, а прицеливание выполняется автоматически. Положим, что погрешности сведены к минимуму и составляют значительно меньше одного деления мишени.

Предположим, что стенд при очередной проверке размещен вблизи железной дороги или метро и вибрации почвы при прохождении поездов увеличивают разброс стрельбы до, скажем, двух делений. Для простоты будем считать мишень сильно вытянутой в одном из направлений, т.е. сведем рассмотрение к одномерному и равномерному (без эффектов кривизны) случаю.

Предположим, что имеет место следующий разброс: 1 попадание =точно; 1 попадание =+2 деления, 1 попадание =-2 деления.

Допустим, что деления мишени расположены в диапазоне от «0» до «10». При этом, за делением «10» снова идут деления «9», «8» и т.д. За делением «0» идет пустое пространство, эквивалентное «0».

Если прицеливание выполнено, например, в «7», то среднее значение попаданий останется неизменным. Получаем $(7+9+5)/3=7$.

А) Смещение, «отталкивание» от краев диапазона

Если прицеливание выполнено в «9», то одна пуля улетит за «10», но не в «11», а в «9». Получаем $(9+9+7)/3=25/3=8\frac{1}{3}$. Одна пуля, вместо того, чтобы выбить 11 очков, выбила 9, т.е. на 2 меньше. Среднее значение попаданий сместится от края диапазона делений (от «10») к центру (к ~ «5») на 2/3 деления.

Если прицеливание выполнено в «1», то одна пуля улетит за «0», но не в «-1», а в пустое пространство, эквивалентное «0». Получаем $(1+3+0)/3=1\frac{1}{3}$. Одна пуля, вместо того, чтобы выбить -1 очко, выбила 0, т.е. на 1 больше. Среднее значение попаданий также сместится от края диапазона делений (от «0») к центру (к ~ «5»), но на 1/3 деления.

А) Разброс приводит к смещению, «отталкиванию», среднего значения попаданий от краев диапазона мишени к центру диапазона.

Б) Образование зазоров, разрывов у краев диапазона

Если прицеливание выполнено в «10», то одна пуля улетит за «10», но не в «12», а в «8». Получаем $(10+8+8)/3=26/3=8\frac{2}{3}$. Одна пуля, вместо того, чтобы выбить 12 очков, выбила 8, т.е. на 4 меньше. Для среднего значения попаданий у края диапазона делений (у «10») образовался зазор в $1\frac{1}{3}$.

Если прицеливание выполнено в «0», то одна пуля улетит за «0», но не в «-2», а в пустое пространство, эквивалентное «0». Получаем $(0+2+0)/3=2/3$. Одна пуля, вместо того, чтобы выбить -2 очка, выбила 0, т.е. на 2 больше. Для среднего значения попаданий у края диапазона делений (у «0») образовался зазор в 2/3 деления.

Б) Разброс приводит к образованию зазоров, разрывов для среднего значения попаданий у краев диапазона мишени.

1.3. Отличие от обычно рассматриваемых распределений

Следует подчеркнуть, что, в отличие от наиболее часто рассматриваемых примеров, здесь речь идет о распределениях вероятности не для всех, а только для одного из значений какого-либо параметра. Например, распределение вероятности выигрыша в лотерею 1 млн. руб., или распределение вероятности попадания в «8» при стрельбе в мишень.

Нельзя применять выводы этой статьи к обычно рассматриваемым примерам о распределениях вероятности между всеми значениями какого-либо параметра. Например, нельзя применять выводы этой статьи к распределению вероятности между всеми значениями выигрыша в лотерею, к распределению вероятности между всеми значениями попаданий при стрельбе в мишень и т.д.

2. Неопределенность в измерении вероятностей

2.1. Шумы, помехи, фон, погрешности измерений …

Реальные измерения вероятности практически всегда проходят при наличии сторонних шумов: помех, фона и т.д. Помимо сторонних шумов на измерения могут влиять их собственные погрешности.

Величина этих шумов, погрешностей может быть как пренебрежимо малой относительно полезного сигнала, так и превышать его.

2.2. Суммарная неопределенность

Таким образом, практически в любом реальном случае, реальным измерениям вероятности присуща та или иная степень неопределенности. Это приводит к наличию не равной нулю дисперсии для всех таких случаев.

3. Процедура и предположения

3.1. О поведении распределений вблизи границы шкалы вероятностей

Вероятность не может быть меньше 0 и больше 1. Как будет вести себя распределение оценки вероятности вблизи границы шкалы вероятностей? При приближении к границе шкалы вероятностей, распределение может:

1) деформироваться от границы:
   - а) деформироваться от границы;
   - б) отражаться от границы;

2) оставаться неизменным (та часть распределения, которая выходит за границу, аннулируется без воздействия на остальное распределение и
   - а) не учитывается в общей нормировке;
   - б) сохраняется в общей нормировке;

3) деформироваться к границе:
   - а) деформироваться к границе;
   - б) накапливаться на границе:
     - ба) частично накапливаться на границе
     - бб) полностью накапливаться на границе.

3.1.1. О возможности уменьшения величины разрыва

В случае (3б), когда часть распределения оценки вероятности, выходящая за границы шкалы вероятностей, полностью или частично накапливается на границе, величина разрыва уменьшается. При полном накоплении (3бб) величина разрыва уменьшается в два раза.

В случае (2), когда часть распределения, выходящая за границы шкалы вероятностей, аннулируется как непосредственно, так и при общей нормировке (2б), величина разрыва также уменьшается в два раза, но за счет нормировки.

3.2. Процедура учета неопределенности

Примем за максимальное приближение оценки вероятности к границе шкалы вероятностей такое приближение, при котором, при равной нулю дисперсии, математическое ожидание оценки вероятности точно совместилось бы с этой границей. Такая ситуация реальна, напр., для случаев, когда уровень неопределенности был настолько мал, что дисперсию можно было считать равной нулю, но затем неопределенность повысилась (напр. появились или увеличились шумы), приведя к увеличению дисперсии.

В рамках этой процедуры, величина разрыва будет равна величине математического ожидания $M_{1/2}$ оценки вероятности для половины распределения (в одну или в другую сторону от математического ожидания полного распределения). При этом (см. п. 3.1.):

Если (1) распределение будет:

(1а) деформироваться или

(1б) отражаться от границы, то математическое ожидание $M_{1/2}$ увеличится.

Если (2) распределение будет оставаться неизменным, то:

(2а) математическое ожидание $M_{1/2}$ не изменится;

(2б) математическое ожидание $M_{1/2}$ уменьшится. Максимальное уменьшение - в 2 раза (см. п. 3.1.1.).

Если (3) распределение будет (3а) деформироваться к границе или (3б) частично или полностью накапливаться на границе, то математическое ожидание $M_{1/2}$ уменьшится. Максимальное уменьшение при

(3бб) - в 2 раза (см. п. 3.1.1.).

Для расчетов принято предположение о максимальном уменьшении математического ожидания и величины разрыва, т.е. приняты случаи (2б) и (3бб): распределение будет оставаться неизменным как в среднем случае, но величина разрыва будет равна половине величины математического ожидания $M_{1/2}$.

Для расчетов принято предположение (также минимизирующее величины разрыва) о том, что величины среднеквадратичных отклонений много меньше единицы.

В рамках этой процедуры и предположений будет выполнен расчет минимальных величин разрывов.

4. Расчет величин разрывов для типичных распределений

4.1. Величина разрыва для равномерного распределения

Для равномерного распределения оценки вероятности имеем величину разрыва $R_{rupture}$

$$D(p) = \int_{-l}^{+l} p^2 \frac{1}{2l} dp = \frac{1}{2l} \frac{p^3}{3} \Bigg|_{-l}^{+l} = \frac{1}{2l} \frac{l^3}{3} + \frac{1}{2l} \frac{l^3}{3} = \frac{l^2}{3}$$

$$R_{rupture}(p) \equiv \frac{1}{2} M_{1/2}(p) = \frac{1}{2} \int_{0}^{l} p \frac{1}{l} dp = \frac{1}{2} \frac{1}{l} \frac{p^2}{2} \Bigg|_{0}^{+l} = \frac{1}{l} \frac{l^2}{4} = \frac{l}{4}$$

$$\frac{R_{rupture}(p)}{\sqrt{D(p)}} = \frac{l}{4} \frac{\sqrt{3}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.433 > \frac{1}{3}$$

4.2. Величина разрыва для нормального распределения

Для нормального распределения оценки вероятности имеем

$$D(p) = \sigma^2$$

$$R_{rupture}(p) \equiv \frac{1}{2} M_{1/2}(p) = \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} 2p \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{p^2}{2\sigma^2}} dp =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-y} dy = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-y} \Bigg|_{0}^{+\infty} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\frac{R_{rupture}(p)}{\sqrt{D(p)}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.399 > \frac{1}{3}$$

4.3. Величина разрыва для распределения Лапласа

Для распределения Лапласа оценки вероятности имеем

$$D(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2 \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|p|} dp = -p^2 \frac{1}{2} e^{-\lambda|p|} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} 2p \frac{1}{2} e^{-\lambda|p|} dp =$$

$$= -0 + 2p \frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda|p|} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda|p|} dp = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$R_{rupture}(p) \equiv \frac{1}{2} M_{1/2}(p) = \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} p\lambda e^{-\lambda|p|} dp = \frac{1}{2} p e^{-\lambda|p|} \Bigg|_{0}^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda|p|} dp =$$

$$= 0 + \frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda|p|} \Bigg|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{2\lambda}$$

$$\frac{R_{ruptue}(p)}{\sqrt{D(p)}} = \frac{1}{2\lambda} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0.354 > \frac{1}{3}$$

4.4. Величина разрыва для краевого распределения

Для краевого распределения оценки вероятности (в пределе – две дельта функции по краям) имеем

$$D(p) = 2\int_{L-l}^{L} p^2 \frac{1}{2l} dp = \frac{1}{l}\frac{p^3}{3}\Big|_{L-l}^{L} = \frac{1}{3l}(L^3 - (L-l)^3) =$$

$$= \frac{1}{3l}(L^3 - L^3 + 3L^2 l - 3Ll^2 + l^3) = \frac{1}{3l}(3L^2 l - 3Ll^2 + l^3) =$$

$$= \frac{1}{3}(3L^2 - 3Ll + l^2) = L^2(1 - \frac{l}{L} + \frac{l^2}{3L^2}) \xrightarrow[l \to 0]{} L^2$$

$$R_{rupture}(p) \equiv \frac{1}{2} M_{1/2}(p) = \frac{1}{2}\int_{L-l}^{L} p \frac{1}{l} dp = \frac{1}{2}\frac{1}{l}\frac{p^2}{2}\Big|_{L-l}^{L} = \frac{1}{4l}(L^2 - (L-l)^2) =$$

$$= \frac{1}{4l}(L^2 - L^2 + 2Ll - l^2) = \frac{l}{4l}(2L - l) = \frac{L}{2}(1 - \frac{l}{2L}) \xrightarrow[l \to 0]{} \frac{L}{2}$$

$$\frac{R_{ruptue}(p)}{\sqrt{D(p)}} \xrightarrow[l \to 0]{} \frac{L}{2}\frac{1}{L} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

5. Общие результаты

5.1. Общая оценка величин разрывов в шкале вероятностей

Расчеты дали отношение величины разрыва к величине среднеквадратичного отклонения: для предельного краевого распределения (в пределе – две дельта функции по краям) = 0,5; для равномерного распределения ≈ 0,433; для нормального распределения ≈ 0,399; для распределения Лапласа ≈ 0,354. Видно, что, по мере увеличения доминирования центральной области над краевыми областями, это отношение уменьшается от 0,5 до 0,35.

Таким образом можно констатировать:

1) Для рассмотренных стандартных распределений величины разрывов составляют *O(ΔP)* от величин среднеквадратичных отклонений.

2) Для стандартных распределений, у которых центральная область доминирует над краевыми областями не больше, чем в распределении Лапласа, величина разрыва превышает 1/3 от величины среднеквадратичного отклонения. При отсутствии эффекта накопления, величина разрыва превышает 2/3 от величины среднеквадратичного отклонения.

5.2. Следствия существования разрывов в шкале вероятностей. Экономическая теория, прогнозирование, …

Следствием существования разрывов в шкале вероятностей для оценок вероятностей можно считать принцип неопределенного будущего (в действительности разработка гипотезы существования разрывов в шкале вероятностей проходила после разработки принципа неопределенного будущего). Как следствия принципа неопределенного будущего можно указать, в т.ч., следующее:

В экономической теории найдено единое решение: для парадоксов Алле и Эллсберга, проблемы неприятия риска, «премии за риск», equity premium puzzle, преувеличения малых и преуменьшения больших вероятностей, «парадокса четырех областей» и др. (см. Харин 2007).

В прогнозировании получена общая корректирующая формула для прогнозов длительного использования (см., напр., Харин 2008 и Harin 2009-2).

В логике, применение второго следствия принципа может преобразовать настоящее событие в бесконечное количество событий в будущем. То же произойдет и с отрицанием настоящего события. Таким образом, прямое применение закона исключенного третьего для будущих событий может стать неадекватным в рамках двузначной логики.

В теории сложных систем, применение второго следствия принципа может привести к возможности нарушения деления на группы несовместных событий для будущих событий (см. Карасев 2007).

Заключение

В статье, на стандартных примерах, показана возможность существования разрывов в шкале вероятностей для оценок вероятностей. В рамках принятой процедуры и предположений сделаны расчеты величин разрывов для стандартных распределений и предельного случая.

Для широкого класса стандартных распределений, величины разрывов превышают 1/3 от величин среднеквадратичных отклонений.

Литература

Harin, A. (2005) “A new approach to solve old problems” Game Theory and Information from Economics Working Paper Archive at WUSTL, 0505005.

Карасев (2007) частное сообщение.

Harin, A. (2009-2) “General correcting formula of forecasting?” MPRA, 15746.

Харин, А.А. (2009) “О возможности существования разрывов в шкале вероятностей. Расчет величин разрывов” Моделирование и Анализ Безопасности и Риска в Сложных Системах: Труды 9-й Международной Научной Школы МА БР–2009.

Харин, А.А. (2008) “К разработке общей формулы прогнозирования” Труды 51-й научной конференции МФТИ–2008 “Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук”.

Харин, А.А. (2007) “Принцип неопределенного будущего, примеры его применения в экономической теории, возможности его применения в теориях сложных систем, в теории множеств, теории вероятностей и логике” Моделирование и Анализ Безопасности и Риска в Сложных Системах: Труды 7-й Международной Научной Школы МА БР – 2007.