Theorem of existence of ruptures in the probability scale

Harin, Alexander

- ,

8 February 2010

Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей

Александр Харин

Московский физико-технический институт
Современная Гуманитарная Академия

В статье доказаны теоремы о существовании разрывов у границ конечных интервалов и у границ шкалы вероятностей.

Содержание

Введение

В настоящей статье, в развитие Harin (2009), доказываются простые, но принципиальные теоремы о существовании разрывов у границ конечных интервалов и у границ шкалы вероятностей.

Общая упрощенная схема доказательства

Предварительное замечание

Максимально возможная величина конечного центрального момента $E(X\text{-}M)^n$ для конечного интервала $[A, B]$ не превышает соответствующей конечной степени n величины $(B\text{-}A)$ этого интервала, т.е. конечна

$$|E(X-M)^n| \equiv \left|\int_A^B (x-M)^n f(x)dx\right| \le (B-A)^n \int_A^B f(x)dx = (B-A)^n < \infty .$$

Общая лемма

Если математическое ожидание M стремится к границе A конечного интервала $[A, B]$, то конечные центральные моменты стремятся к 0, в т.ч.

$$|E(X-M)^n| \le (B-A)^n \times 2\frac{(M-A)}{(B-A)} \xrightarrow[M\to A]{} 0 .$$

Общая теорема

Если, на конечном диапазоне, какой-либо конечный центральный момент не может приближаться к нулю ближе, чем на ненулевую величину $r_1>0$, то математическое ожидание тоже не может приближаться к границе этого диапазона ближе, чем на ненулевую величину $r_2>0$, в т.ч.

$$0 < r_1 \le |E(X-M)^n| \le (B-A)^n \times 2\frac{(M-A)}{(B-A)} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad 0 < r_2 \equiv \frac{r_1}{2(B-A)^{n-1}} \le (M-A) .$$

Другими словами, если, для функции, заданной на конечном диапазоне, существует ненулевой разрыв (rupture) $r_1>0$ между ее конечным центральным моментом и нулем, то между ее математическим ожиданием и границами диапазона тоже существуют ненулевые разрывы $r_2>0$.

Теорема для оценки вероятности

Если на диапазоне $[0, 1]$ для оценки вероятности, частоты $F\equiv M$ существует ненулевой разрыв $r_1>0$ между ее дисперсией и нулем, то между F и границами диапазона тоже существуют ненулевые разрывы $r_2>0$, в т.ч.

$$0 < r_2 \equiv \frac{r_1}{2} \le M = F .$$

Теорема для вероятности

Если вероятность P является пределом, к которому стремится оценка вероятности, частота F при стремлении количества испытаний K к бесконечности, и существуют ненулевые разрывы $r_2>0$ между F и границами шкалы вероятностей, то между P и границами шкалы вероятностей существуют такие же ненулевые разрывы $r_2>0$, в т.ч.

$$F \xrightarrow[K\to\infty]{} P \qquad \text{и} \qquad 0 < r_2 \le F \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad 0 < r_2 \le P .$$

1. Предварительные замечания

1.1. Общие условия, допущения и обозначения

Пусть далее, на интервале $X=[A, B]$: $0<(B-A)<\infty$, определены:

$f(x)$: для $x<A$ и $x>B$ справедливо $f(x)\equiv 0$ и для любой $F(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) f(x) dx = \int_A^B F(x) f(x) dx ,$$

а для $A\le x\le B$ справедливо $f(x)\ge 0$;

интеграл

$$\int_A^B f(x) dx = Const_1 \neq 0 ;$$

начальный момент первого порядка, математическое ожидание

$$EX = \frac{1}{Const_1}\int_A^B x f(x) dx \equiv M ;$$

и, для n : $1<n<\infty$, центральный момент n-го порядка

$$E(X-M)^n = \frac{1}{Const_1}\int_A^B (x-M)^n f(x) dx .$$

Без ограничения общности, $f(x)$ можно нормировать так, что $Const_1=1$. В основном тексте статьи и в приложениях записи выполняются в общей нормировке. В общей схеме доказательства, для простоты и наглядности, записи выполнены в нормировке на 1. В приложении активно используется параметр $m\equiv(M-A)/(B-A)$. Очевидно, что $0\le m\le 1$.

1.2. Максимально возможная величина центрального момента для ограниченного интервала

Максимально возможную величину центрального момента можно оценить, исходя из определения

$$|E(X-M)^n| \equiv \left|\frac{1}{Const_1}\int_A^B (x-M)^n f(x) dx\right| \le \frac{1}{Const_1}\int_A^B |(x-M)^n| f(x) dx \le$$

$$\le \frac{1}{Const_1}(B-A)^n \int_A^B f(x) dx = (B-A)^n$$

Более точную оценку (см. П1) дает имеющая максимально возможную величину центрального момента функция, сконцентрированная на краях интервала, $f(x)=C_A\delta(x-A)+C_B\delta(x-B)$: $C_A+C_B=1$. Коэффициенты C_A и C_B можно выразить через M как $C_A=(B-M)/(B-A)$ и $C_B=(M-A)/(B-A)$ и

$$Max(E(X-M)^n) = ((A-M)^n \frac{B-M}{B-A} + (B-M)^n \frac{M-A}{B-A}).$$

Через нее получаем для $n=2$ очевидный максимум при $M_{max}=(B-A)/2$

$$Max(E(X-M)^2) = (\frac{B-A}{2})^2 ,$$

а для $n=2k>>1$ - максимумы при $M_{max}\approx A+(B-A)/2n$ и $M_{max}\approx B-(B-A)/2n$

$$Max(E(X-M)^n) \approx \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{(B-A)^n}{2n} .$$

2. Общая теорема о существовании разрывов

2.1. Общая лемма о стремлении к нулю центральных моментов

Если, для $f(x)$, определенной в разделе 1.1., $M \equiv E(X)$ стремится к A или к B, то, для $1<n<\infty$, $E(X-M)^n$ стремится к нулю.

Доказательство (подробно см. П2): Для $M \to A$

$$| E(X-M)^n | \le ((M-A)^{n-1} + (B-M)^{n-1}) \frac{(M-A)(B-M)}{B-A} \le$$

$$\le ((B-A)^{n-1} + (B-A)^{n-1}) \frac{(M-A)(B-M)}{B-A} \le 2(B-A)^{n-1}(M-A)$$

$$| E(X-M)^n | \le (B-A)^n \times 2 \frac{(M-A)}{(B-A)} \xrightarrow[M \to A]{} 0 .$$

Таким образом, при конечных $(B-A)$ и n и при M, стремящемся к A, т.е. при $(M-A)$, стремящемся к нулю, $E(X-M)^n$ тоже стремится к нулю. Для $M \to B$ рассмотрение полностью аналогично вышеприведенному.

Лемма доказана.

Замечание. Можно (см. П2) получить более точную оценку сходимости к нулю центральных моментов, в т.ч. для $M \to A$

$$| E(X-M)^n | \le (B-A)^n \frac{M-A}{B-A} \xrightarrow[M \to A]{} 0$$

2.2. Общая теорема о существовании разрывов для математического ожидания

Если, для $f(x)$, определенной в разделе 1.1., существуют n : $1<n<\infty$, и $r_1>0$: $|E(X-M)^n| \ge r_1 > 0$, то существует $r_2>0$: $A<(A+r_2) \le E(X) \le (B-r_2)<B$.

Доказательство (подробно см. П3): Из леммы, для $M \to A$

$$0 < r_1 \le | E(X-M)^n | \le (B-A)^n \times 2 \frac{(M-A)}{(B-A)} = 2(B-A)^{n-1}(M-A)$$

$$0 < \frac{r_1}{2(B-A)^{n-1}} \le (M-A)$$

$$r_2 \equiv \frac{r_1}{2(B-A)^{n-1}}$$

Для $M \to B$ рассмотрение полностью аналогично вышеприведенному.

Поскольку $(B-A)$ и n – конечны, а $r_1>0$, то конечны и больше нуля - как $(M-A) \ge r_2 > 0$ так и $(B-M) \ge r_2 > 0$.

Теорема доказана.

Таким образом, если, на конечном диапазоне, конечный центральный момент не может приближаться к нулю ближе, чем на ненулевую величину $r_1>0$, то математическое ожидание тоже не может приближаться к границе этого диапазона ближе, чем на ненулевую величину $r_2>0$.

В более общем виде: Если для функции, определенной на конечном интервале, существует ненулевой разрыв (rupture), запрещенная зона $r_1>0$ между возможными значениями какого-либо из ее конечных центральных моментов и нулем, то между возможными значениями математического ожидания этой функции и любой из границ интервала тоже существуют ненулевые разрывы, запрещенные зоны $r_2>0$.

3. Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей

3.1. Общие замечания

Пусть, для серии испытаний с количеством испытаний K, в т.ч. при K, стремящемся к бесконечности $K \rightarrow \infty$, плотность $f(x)$ оценки вероятности, частоты F : $F \equiv M \equiv E(X)$, некоторого события имеет свойства, заданные в разделе 1.1., в частности, определена на $[0, 1]$ и $Const_1=1$.

3.2. Лемма о стремлении к нулю центральных моментов плотности оценки вероятности

Если для плотности $f(x)$, определенной в разделе 3.1., $E(X) \rightarrow 0$ или $E(X) \rightarrow 1$, то, для $1<n<\infty$, $E(X-M)^n \rightarrow 0$.

Доказательство: Поскольку условия данной леммы удовлетворяют условиям леммы раздела 2.1, то утверждение данной леммы так же справедливо, как и утверждение леммы раздела 2.1. Лемма доказана.

3.3. Теорема о существовании разрывов для оценки вероятности

Если для плотности $f(x)$, определенной в разделе 3.1., существуют n : $1<n<\infty$, и $r_1>0$: $E(X-M)^n \geq r_1>0$, то для оценки вероятности, частоты $F \equiv M \equiv E(X)$ существует $r_2>0$: $0<r_2 \leq F \equiv M \equiv E(X) \leq (1-r_2)<1$.

Доказательство: Поскольку условия данной теоремы удовлетворяют условиям теоремы раздела 2.2, то утверждение данной теоремы так же справедливо, как и утверждение теоремы раздела 2.2. Теорема доказана.

3.4. Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей

Если на интервале $[0,1]$ определена P : при стремлении количества испытаний K к бесконечности, оценка вероятности, частота F стремится к P, т.е. $P=LimF$, между оценкой вероятности и любой из границ интервала существуют ненулевые разрывы $0<r_2 \leq F \leq (1-r_2)<1$, то такие же ненулевые разрывы $0<r_2 \leq P \leq (1-r_2)<1$ существуют между P и любой из границ интервала.

Доказательство (подробнее см. П4): Поскольку операция взятия предела сохраняет нестрогие неравенства, то, при $P=LimF$, из $r_2 \leq F \leq (1-r_2)$ следует $r_2 \leq P \leq (1-r_2)$. Теорема доказана.

Поскольку вероятность удовлетворяет условиям, наложенным на P, то теорема справедлива и для вероятности.

Теорему можно сформулировать и для нужд практических приложений:

Если, для серии испытаний с количеством испытаний K, стремящимся к бесконечности $K \rightarrow \infty$, и оценкой вероятности, частотой F, стремящейся при этом к вероятности P, т.е. $P=LimF$, существует разрыв $r_1>0$ между возможными значениями дисперсии D оценки вероятности F и нулем, то у границ шкалы вероятностей тоже существуют разрывы $r_2>0$, как для возможных значений оценки вероятности F, так и для возможных значений вероятности P.

Следует подчеркнуть, что эти разрывы у границ шкалы вероятностей для F и для P существуют только тогда, когда имеет место ненулевой разрыв между возможными значениями дисперсии D (или иного центрального момента) оценки вероятности F и нулем.

4. Пример разрывов в шкале вероятностей

Условия

Простейший пример подобных разрывов – стрельба в мишень в одномерном приближении (подробнее см. П5):

Пусть размер мишени равен $2L>0$, а разброс попаданий, при точном прицеливании, подчиняется нормальному закону с дисперсией σ^2. Тогда максимальная вероятность попадания в мишень P_{in_Max} и минимальная вероятность промаха $P_{out\_min}=1-P_{in\_Max}$ равны (см., напр., Прохоров 1988):

Результаты

При $\sigma=0$ имеем $P_{in\_Max}=1$ и $P_{out\_min}=0$, то есть разрывов нет, то есть $r_2=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}=0$, .

При $L=3\sigma$ имеем $0\le P_{in}\le P_{in\_Max}=0{,}997<1$ и $0<0{,}003=P_{out\_min}\le P_{out}\le 1$. При этом, разрывы r_2 в шкале вероятностей для попаданий и промахов составляют $r_2=0{,}003>0$.

При $L=2\sigma$ имеем $0\le P_{in}\le P_{in\_Max}=0{,}95<1$ и $0<0{,}05=P_{out\_min}\le P_{out}\le 1$. При этом, разрывы r_2 в шкале вероятностей для попаданий и промахов составляют $r_2=0{,}05>0$.

При $L=\sigma$ имеем $0\le P_{in}\le P_{in\_Max}=0{,}68<1$ и $0<0{,}32=P_{out\_min}\le P_{out}\le 1$. При этом, разрывы r_2 в шкале вероятностей для попаданий и промахов составляют $r_2=0{,}32>0$.

Вывод

Таким образом:

При нулевой $\sigma=0$ - разрывов нет ($r_2=0$).

При ненулевой $\sigma>0$:

- появляется ненулевой разрыв $r_2>0$ между возможными значениями вероятности попадания $0\le P_{in}\le P_{in\_Max}=1-r_2<1$ и единицей;
- появляется такой же ненулевой разрыв $r_2>0$ между возможными значениями вероятности промаха $0<r_2=P_{out\_min}\le P_{out}\le 1$ и нулем.

5. Применения теоремы. Экономика. Прогнозирование

Возможность существования разрывов в шкале вероятностей должна проявляться и проявляется в реальности, в т.ч. в экономике и прогнозировании. Широко известен целый ряд парадоксов теории полезности, в т.ч. парадокс Алле, «премия за риск», преувеличение малых и преуменьшение больших вероятностей, «парадокс четырех областей». Как отметили Kahneman и Thaler (2006) эти парадоксы до сих пор не решены современной экономической теорией. Существуют проблемы точности прогнозов, наглядно проявившиеся в ходе текущего кризиса.

Использование теоремы о существовании разрывов в шкале вероятностей позволяет получить и обосновать решения этих парадоксов (см., напр., Харин 2007 и 2009), а также корректирующую формулу прогнозирования (см., напр., Харин 2008).

Заключение

В статье доказана общая возможность, при определенных условиях, существования разрывов в шкале возможных значений математических ожиданий величин, определенных на конечных интервалах. Доказана также возможность, при определенных условиях, существования разрывов в шкале вероятностей, как для оценок вероятности, так и для вероятности.

Следует заметить, что, несмотря на очевидность и элементарность теоремы, и на то, что некоторые из простых расчетов и оценок, приведенных в статье, могли публиковаться ранее, напр., в учебниках, теорема в целом является новой и полезной. Так, теорема позволяет получить и обосновать решения ряда известных парадоксов экономической теории (см., напр., Харин 2007 и 2009) и новые результаты в прогнозировании (см., напр., Харин 2008).

Литература

Harin, A. (2009) “Ruptures in the probability scale? Calculation of ruptures’ dimensions” MPRA, 19348.

Kahneman, D. and Thaler, R. (2006) “Anomalies: Utility Maximization and Experienced Utility” Journal of Economic Perspectives, 20, #1, 221-234.

Прохоров, Ю.В. ред. (1988) “Математический энциклопедический словарь” М., Советская энциклопедия, 1988.

Харин, А.А. (2009) “Учет краевых эффектов шумов – новый путь к решению проблем теории полезности?” Первый Российский экономический конгресс (РЭК-2009).

Харин, А.А. (2008) “К разработке общей формулы прогнозирования” Труды 51-й научной конференции МФТИ – 2008 “Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук”.

Харин, А.А. (2007) “Принцип неопределенного будущего, примеры его применения в экономической теории, возможности его применения в теориях сложных систем, в теории множеств, теории вероятностей и логике” Моделирование и Анализ Безопасности и Риска в Сложных Системах: Труды 7-й Международной Научной Школы МА БР – 2007.

Приложения П1-П5

Приложение П1. Подробный расчет максимально возможной величины центрального момента для ограниченного интервала

Две дельта-функции

Максимально возможную величину центрального момента $Max(E(X\text{-}M)^n)$ имеет функция $f_{Max}(x)=C_A\delta(x\text{-}A)+C_B\delta(x\text{-}B)$: $C_A+C_B=1$, представляющая собой две дельта-функции, находящиеся на разных краях интервала $[A, B]$. Коэффициенты C_A и C_B можно выразить через M как $C_A=(B\text{-}M)/(B\text{-}A)$ и $C_B=(M\text{-}A)/(B\text{-}A)$. Тогда

$$Max(E(X-M)^n) = \frac{1}{Const_1}\int_A^B (x-M)^n f_{Max}(x)dx =$$
$$= ((A-M)^n \frac{B-M}{B-A} + (B-M)^n \frac{A-M}{B-A}) .$$

Введем параметр $m\equiv(M\text{-}A)/(B\text{-}A)=C_B$, $1\text{-}m\equiv(B\text{-}M)/(B\text{-}A)=C_A$. Тогда

$$Max(E(X-M)^n) = ((-m)^n(1-m) + m(1-m)^n)\times(B-A)^n$$
$$= ((-1)^n m^n(1-m) + m(1-m)^n)\times(B-A)^n \le$$
$$\le (m^n(1-m) + m(1-m)^n)\times(B-A)^n$$

Полный анализ функции $((-1)^n m^n(1\text{-}m)+m(1\text{-}m)^n)$ не является целью данной статьи. Поэтому далее будут выполняться только самые простые оценки и расчеты.

Для $n=2k$ и для оценки сверху

$$Max(E(X-M)^n) \le (m^n(1-m) + m(1-m)^n)\times(B-A)^n$$

и первая производная по m

$$(m^n(1-m) + m(1-m)^n)'_m =$$
$$= nm^{n-1}(1-m) - m^n + (1-m)^n - nm(1-m)^{n-1} .$$

Для $n=2k+1$

$$Max(E(X-M)^n) = (-m^n(1-m) + m(1-m)^n)\times(B-A)^n$$

и первая производная по m

$$(-m^n(1-m) + m(1-m)^n)'_m =$$
$$= -nm^{n-1}(1-m) + m^n + (1-m)^n - nm(1-m)^{n-1} .$$

П1.1. Расчет для $n=2k$ и для оценки сверху

Максимум в середине интервала

Видно, что, для $n=2k$ и для оценки сверху, $Max(E(X\text{-}M)^n)$ и первая производная по m симметричны по m и $1\text{-}m$. Полагая $1\text{-}m=m$, получаем

$$\begin{aligned}&nm^{n-1}(1-m)-m^n+(1-m)^n-nm(1-m)^{n-1}=\\&=nm^{n-1}m-m^n+m^n-nmm^{n-1}=\\&=nm^{n-1}m-nmm^{n-1}-m^n+m^n\equiv 0\end{aligned},$$

т.е., для $n=2k$ и для оценки сверху, посередине интервала, при $m=1\text{-}m=1/2$, всегда имеет место экстремум либо точка перегиба. Вычислим вторую производную

$$\begin{aligned}&(nm^{n-1}(1-m)-m^n+(1-m)^n-nm(1-m)^{n-1})'_m=\\&=n(n-1)m^{n-2}(1-m)-nm^{n-1}-nm^{n-1}-\\&-n(1-m)^{n-1}-n(1-m)^{n-1}+n(n-1)m(1-m)^{n-2}=\\&=n(n-1)m^{n-2}(1-m)-2nm^{n-1}-2n(1-m)^{n-1}+n(n-1)m(1-m)^{n-2}\end{aligned}.$$

В точке $m=1\text{-}m$ вторая производная равна

$$\begin{aligned}&n(n-1)m^{n-2}(1-m)-2nm^{n-1}-2n(1-m)^{n-1}+n(n-1)m(1-m)^{n-2}=\\&=n(n-1)m^{n-1}-2nm^{n-1}-2nm^{n-1}+n(n-1)m^{n-1}=\\&=2n(n-1)m^{n-1}-4nm^{n-1}=2nm^{n-1}(n-1-2)=\\&=2nm^{n-1}(n-3)\end{aligned},$$

т.е., при $n=2$ получаем максимум, при $n>3$ – минимум, а при $n=3$ – точку перегиба либо экстремум.

Максимум при $n=2$

В точке $m=1\text{-}m=1/2$ при $n=2$ для центрального момента (дисперсии) получаем известное выражение

$$\begin{aligned}&Max(E(X-M)^2)=(m^2(1-m)+m(1-m)^2)(B-A)^2=\\&=(m^2m+mm^2)(B-A)^2=2m^3(B-A)^2=2\frac{1}{2^3}(B-A)^2=\\&=(\frac{B-A}{2})^2\end{aligned}$$

Локальные максимумы, ближайшие к краям диапазона

Найдем ближайшие к краям диапазона локальные максимумы при *n>3*. Рассмотрим области, где *m<<1* и *n>3*

$$\begin{aligned}&(m^n(1-m)+m(1-m)^n)'_m = \\ &= nm^{n-1}(1-m)-m^n+(1-m)^n-nm(1-m)^{n-1} \approx \\ &\approx (1-m)^n-nm(1-m)^{n-1} \approx 1-nm-nm = \\ &= 1-2nm\end{aligned}.$$

то есть, локальные экстремумы имеют место при

$$m \approx \frac{1}{2n}.$$

Заметим, что это подразумевает *n>>1*.

Аналогично, для *(1-m)<<1*, локальные экстремумы имеют место при

$$m \approx 1-\frac{1}{2n}.$$

В локальных экстремумах вторая производная

$$(1-2nm)'_m = -2n < 0,$$

т.е. имеют место локальные максимумы. Аналогично, локальные максимумы имеют место и в точках *m=1-1/2n*. В обоих этих случаях значения центрального момента при *n>>1* приближенно равны

$$\begin{aligned}&Max(E(X-M)^n) \le (m^n(1-m)+m(1-m)^n)(B-A)^n = \\ &= ((\frac{1}{2n})^n(1-\frac{1}{2n})+\frac{1}{2n}(1-\frac{1}{2n})^n)(B-A)^n \approx \\ &\approx ((\frac{1}{2n})^n+\frac{1}{2n}(1-\frac{1}{2n})^n)(B-A)^n \approx \\ &\approx \frac{1}{2n}(1-\frac{1}{2n})^n(B-A)^n\end{aligned}.$$

Найдем $(1-1/2n)^n$. Обозначая *x≡-2n*, получаем *n=-x/2* и, при *n>>1*, вычисление сводится к вычислению *e*

$$(1-\frac{1}{2n})^n = (1+\frac{1}{x})^{-\frac{x}{2}} \approx \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

В результате получаем для *m=1/2n* и для *m=1-1/2n*, при *n>>1*

$$\begin{aligned}&Max(E(X-M)^n) \le (m^n(1-m)+m(1-m)^n)(B-A)^n \approx \\ &\approx \frac{1}{2n}(1-\frac{1}{2n})^n(B-A)^n \approx \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{(B-A)^n}{2n}\end{aligned}.$$

Для проверки, сравним величины полученных локальных максимумов центральных моментов с величинами центральных моментов, для M в середине диапазона. Для $m=1-m=1/2$

$$Max(E(X-\frac{A+B}{2})^n) \leq (m^n(1-m)+m(1-m)^n)(B-A)^n =$$

$$=(m^n m+mm^n)(B-A)^n = 2m^{n+1}(B-A)^n = \frac{2}{2^{n+1}}(B-A)^n = (\frac{B-A}{2})^n =$$

$$=\frac{(B-A)^n}{2^n}$$

Для $m=1/2n$ и $n>>1$

$$Max(E(X-(A+\frac{B-A}{n}))^n) \approx \frac{1}{2\sqrt{e}}\frac{(B-A)^n}{n}$$

Видно, что в формулах различаются только коэффициенты знаменателя при $(B\text{-}A)^n$, т.е. $n2\sqrt{e}$ и 2^n. Степенная функция 2^n растет быстрее, чем натуральный ряд n. Оценим, начиная с какого n, коэффициент $1/n2\sqrt{e}$ станет больше, чем коэффициент $1/2^n$. Сравним

$$\frac{1}{2^n} \quad и \quad \frac{1}{2\sqrt{e}}\frac{1}{n} \approx \frac{1}{3}\frac{1}{n}.$$

При $n=3$

$$\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8} \quad > \quad \frac{1}{3}\frac{1}{3}=\frac{1}{9}.$$

При $n=4$

$$\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16} \quad < \quad \frac{1}{3}\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

Видно, что, начиная с $n=4$, величины полученных локальных максимумов центральных моментов при $m=1/2n$ превышают величины центральных моментов при $m=1/2$.

П1.2. Оценка для $n=2k+1$

Оценка максимумов для $n=2k+1$

Легко видеть, что для $n=2k+1$ функция

$$Max(E(X-M)^n) = (-m^n(1-m) + m(1-m)^n) \times (B-A)^n$$

будет на $2m^n(1-m)$ меньше оценки сверху

$$Max(E(X-M)^n) \le (m^n(1-m) + m(1-m)^n) \times (B-A)^n,$$

полученной выше.

Максимум при $n=3$

Для примера рассчитаем положение максимума при $n=3$

$$(-m^3(1-m) + m(1-m)^3)'_m =$$

$$= -3m^2(1-m) + m^3 + (1-m)^3 - 3m(1-m)^2 =$$

$$= -3m^2 + 3m^3 + m^3 + 1 - 3m + 3m^2 - m^3 - 3m + 6m^2 - 3m^3 = .$$

$$= 3m^3 - 3m^3 + m^3 - m^3 - 3m^2 + 3m^2 + 6m^2 - 3m - 3m + 1 =$$

$$= 6m^2 - 6m + 1$$

$$6m^2 - 6m + 1 = 0$$

$$m = \frac{3 \pm \sqrt{9-1}}{6} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{\frac{8}{9}}) = .$$

$$= \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{9}})$$

Вторая производная

$$(1 - 6m + 6m^2)'_m =$$

$$= -6 + 12m$$

меньше нуля для $m<1/2$ и больше нуля для $m>1/2$, т.е. имеем два максимума по абсолютному значению. Приближенно можно положить

$$\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{9}}) \approx \frac{1}{2}(1 \pm (1 - \frac{1}{2}\frac{1}{9})).$$

В частности, для $m<1/2$

$$m \approx \frac{1}{2}(1 - (1 - \frac{1}{2}\frac{1}{9})) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{9} = \frac{1}{36} = \frac{1}{6^2}$$

и

$$-m^3(1-m) + m(1-m)^3 =$$

$$= -\frac{1}{6^6}(1 - \frac{1}{6^2}) + \frac{1}{6^2}(1 - \frac{1}{6^2})^3 \approx \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$$

и

$$Max(E(X-M)^3) = (-m^3(1-m) + m(1-m)^3) \times (B-A)^3 \approx$$

$$\approx m(B-A)^3 \approx \frac{(B-A)^3}{6^2} = \frac{2}{9}(\frac{B-A}{2})^3 = 6(\frac{B-A}{6})^3$$

Замечание.

Сравнение с оценкой сверху для *n=3*

Рассмотрим оценку сверху для *n=3*:

Для *n=3* можно разложить оценку сверху по параметру x : $m=1/2(1+x)$,

$$m^3(1-m)+m(1-m)^3=\frac{1}{2^4}((1+x)^3(1-x)+(1+x)(1-x)^3)$$

$$(1+x)^3(1-x)+(1+x)(1-x)^3=$$

$$=(1+3x+3x^2+x^3)(1-x)+(1-3x+3x^2-x^3)(1+x)=$$

$$=1+3x+3x^2+x^3-x-3x^2-3x^3-x^4+$$

$$+1-3x+3x^2-x^3+x-3x^2+3x^3-x^4=$$

$$=1+2x-2x^3-x^4+$$

$$+1-2x+2x^3-x^4=2(1-x^4)$$

$$Max(E(X-M)^3)<(m^3(1-m)+m(1-m)^3)\times(B-A)^3=$$

$$=2(1-x^4)\frac{1}{2^4}(B-A)^3=$$

$$=(1-x^4)(\frac{B-A}{2})^3$$

То есть при *m=1/2* оценка сверху имеет максимум

$$Max(E(X-M)^3)<(\frac{B-A}{2})^3>\frac{2}{9}(\frac{B-A}{2})^3,$$

При *m=1/2n=1/6*

$$Max(E(X-M)^n)\le(m^n(1-m)+m(1-m)^n)(B-A)^n=$$

$$=((\frac{1}{2n})^n(1-\frac{1}{2n})+\frac{1}{2n}(1-\frac{1}{2n})^n)(B-A)^n=$$

$$=(\frac{1}{6})^3((1-\frac{1}{6})+\frac{1}{6}(1-\frac{1}{6})^3)(B-A)^3=$$

$$=(\frac{1}{6})^4(5+5^3)(B-A)^3=\frac{130}{6^4}(B-A)^3=$$

$$=\frac{130}{6}(\frac{B-A}{6})^3=\frac{65}{3}(\frac{B-A}{6})^3>$$

$$>21(\frac{B-A}{6})^3>6(\frac{B-A}{6})^3$$

Кроме того,

$$Max(E(X-(A+\frac{B-A}{3}))^3)\approx\frac{1}{2\sqrt{e}}\frac{(B-A)^3}{3}\approx\frac{1}{3}\frac{(B-A)^3}{3}=\frac{6^3}{9}(\frac{B-A}{6})^3=$$

$$=3\times2^3\times(\frac{B-A}{6})^3=24(\frac{B-A}{6})^3>6(\frac{B-A}{6})^3$$

Видно, что оценка сверху при всех подходах действительно превышает реальное значение функции.

Приложение П2. Подробное доказательство леммы о стремлении к нулю центральных моментов

Подробное доказательство

Если, для *f(x)*, определенной в разделе 1.1., $E(X)=M$ стремится к A или к B, то $E(X-M)^n$ стремится к нулю.

Доказательство:

Для $M \to A$

$$Max(E(X-M)^n) \le ((M-A)^{n-1} + (B-M)^{n-1})\frac{(M-A)(B-M)}{B-A} <$$

$$< \frac{(M-A)(B-M)}{B-A}((B-A)^{n-1} + (B-A)^{n-1}) \le 2(M-A)(B-A)^{n-1} = ,$$

$$= 2\frac{(M-A)}{B-A}(B-A)^n \equiv 2m(B-A)^n$$

Если справедливо строгое неравенство, то тем более справедливо нестрогое неравенство

$$E(X-M)^n \le (B-A)^n \times 2\frac{M-A}{B-A} \equiv (B-A)^n \times 2m \xrightarrow[m\to 0]{} 0\,,$$

достаточное для целей настоящей статьи.

Таким образом, при конечных $(B-A)$ и n и при $M \to A$, т.е. при $(M-A)$ и m, стремящихся к нулю, центральные моменты $E(X-M)^n$ тоже стремятся к нулю. Для $M \to B$ рассмотрение полностью аналогично вышеприведенному.

Лемма доказана.

Более точная оценка сходимости центральных моментов

Сделаем более точную оценку сходимости к 0 центральных моментов. Снова рассмотрим, при $M \to A$, т.е. при $m \to 0$,

$$Max(E(X-M)^n) \le (m^n(1-m) + m(1-m)^n)(B-A)^n =$$

$$= m(1-m)(m^{n-1} + (1-m)^{n-1}) \times (B-A)^n \xrightarrow[m\to 0]{}$$

$$\xrightarrow[m\to 0]{} m(1-m)^{n-1} \times (B-A)^n \xrightarrow[m\to 0]{}$$

$$\xrightarrow[m\to 0]{} m(B-A)^n$$

Для проверки, сравним эту оценку с общей формулой

$$Max(E(X-M)^n) \le m(1-m)(m^{n-1} + (1-m)^{n-1})(B-A)^n\,.$$

Оценку отличает от общей формулы только сомножитель

$$(1-m)(m^{n-1} + (1-m)^{n-1})\,.$$

Поскольку $m \le 1$, то $(1-m) \le 1$ и, для $n \ge 2$,

$$(m^{n-1} + (1-m)^{n-1}) \le (m + (1-m)) \equiv 1\,.$$

Следовательно, для $n \ge 2$

$$m(1-m)(m^{n-1} + (1-m)^{n-1})(B-A)^n \le m(B-A)^n\,.$$

Таким образом, более точную оценку сходимости центральных моментов к 0 можно применять для всего требуемого диапазона $1<n<\infty$.

Приложение П3. Подробное доказательство теоремы о существовании разрывов для математического ожидания

Подробное доказательство

Если, для $f(x)$, определенной в разделе 1.1., существуют n : $1<n<\infty$, и $r_1>0$: $|E(X-M)^n|\geq r_1>0$, то существует $r_2>0$: $A<(A+r_2)\leq E(X)\leq(B-r_2)<B$.

Доказательство.

Из условий теоремы и из леммы, для $M\rightarrow A$,

$$0<r_1\leq|E(X-M)^n|\leq(B-A)^n\times 2\frac{(M-A)}{(B-A)}=2(B-A)^{n-1}(M-A)$$

$$0<r_1\leq 2(B-A)^{n-1}(M-A)$$

$$0<r_2\equiv\frac{r_1}{2(B-A)^{n-1}}\leq(M-A)$$

$$r_2\equiv\frac{r_1}{2(B-A)^{n-1}}.$$

Для $M\rightarrow B$ рассмотрение полностью аналогично вышеприведенному.

Поскольку $(B-A)$ и n – конечны, а $r_1>0$, то конечны и больше нуля - как $(M-A)\geq r_2>0$ так и $(B-M)\geq r_2>0$.

Теорема доказана.

Возможные формулировки

Если, на конечном диапазоне, конечный центральный момент не может приближаться к нулю ближе, чем на ненулевую величину $r_1>0$, то математическое ожидание не может приближаться к границе этого диапазона ближе, чем на (другую) ненулевую величину $r_2>0$.

Другими словами, если для функции, определенной на конечном интервале, существует ненулевой разрыв (rupture), запрещенная зона $r_1>0$ между каким-либо из ее центральных моментов и нулем, то между математическим ожиданием этой функции и любой из границ интервала тоже существуют ненулевые разрывы, запрещенные зоны $r_2>0$.

В более общем виде, для возможных значений: Если для функции, определенной на конечном интервале, существует ненулевой разрыв, запрещенная зона $r_1>0$ между возможными значениями какого-либо из ее центральных моментов и нулем, то между возможными значениями математического ожидания этой функции и любой из границ интервала тоже существуют ненулевые разрывы, запрещенные зоны $r_2>0$.

Замечание 1. Более точная оценка разрыва r_2

Заметим, что, согласно П2, можно дать более точную оценку r_2

$$0 < r_1 \le | E(X - M)^n | \le (B - A)^n \frac{(M - A)}{(B - A)} = (B - A)^{n-1}(M - A)$$

$$0 < r_1 \le (B - A)^{n-1}(M - A)$$

$$0 < r_2 \equiv \frac{r_1}{(B - A)^{n-1}} \le (M - A),$$

то есть

$$r_2 \equiv \frac{r_1}{(B - A)^{n-1}}$$

и, при *(B-A)=1*

$$r_2 = r_1$$

Это же справедливо и для $M \to B$.

Замечание 2. Условия существования разрывов

Следует подчеркнуть, что разрывы для математического ожидания функции, о которых идет речь, существуют не всегда и не для всех случаев. Эти разрывы между границами интервала и математическим ожиданием функции существуют только тогда и только для тех случаев, когда и в которых существует ненулевой разрыв между возможными значениями какого-либо центрального момента функции и нулем.

Приложение П4.
Подробное доказательство теоремы для вероятности

Подробное доказательство

Пусть, для серии испытаний с количеством испытаний K, в т.ч. при K, стремящемся к бесконечности, плотность $f(x)$ оценки вероятности, частоты F : $F \equiv M \equiv E(X)$, некоторого события имеет свойства, заданные в разделе 1.1., в частности, определена на $[0, 1]$ и $Const_1=1$.

Тогда, если на интервале $[0,1]$ определена P : при стремлении количества испытаний K к бесконечности $K \to \infty$, оценка вероятности F стремится к P, т.е.

$$\lim_{K \to \infty} F = P,$$

и между оценкой вероятности и любой из границ интервала существуют ненулевые разрывы $0<r_2 \le F \le (1-r_2)<1$, то такие же ненулевые разрывы $0<r_2 \le P \le (1-r_2)<1$ существуют между P и любой из границ интервала.

Доказательство.

Из

$$\lim_{K \to \infty} F = P$$

следует, что для любого $r>0$ существует K_r : для $K>K_r$ $|F-P|<r$.

Для случая $0<r_2 \le P$ предположим, от противного, что существует $r_3>0$: $0 \le P=r_2-r_3<r_2$.

Для $K>K_r$ положим $r=(r_2-P)/2=r_3/2$. Тогда $|F-P|<r_3/2$. При $F \ge P \ge 0$, $F-P=|F-P|<r_3/2$ и $F<P+r_3/2=r_2-r_3+r_3/2=r_2-r_3/2<r_2$, то есть $F<r_2-r_3/2<r_2$, что противоречит исходному условию $F \ge r_2$.

Доказательство для случая $P \le (1-r_2)<1$ полностью аналогично вышеприведенному.

Поскольку вероятность удовлетворяет условиям, наложенным на P, то теорема справедлива и для вероятности. Теорема доказана.

Возможные формулировки

Теорему можно сформулировать и для нужд практических приложений, как более конкретно, так и в более общем виде:

Если, для серии испытаний с количеством испытаний, стремящимся к бесконечности, оценка вероятности стремится к вероятности, а дисперсия оценки вероятности, из-за каких-либо причин (например, из-за шумов, из-за нестабильностей), не может приближаться к нулю ближе, чем на ненулевую величину $r_1>0$, то, как оценка вероятности так и вероятность, тоже не могут приближаться к границе этого диапазона ближе, чем на (другую) ненулевую величину $r_2>0$.

Другими словами, если, для серии испытаний с количеством испытаний, стремящимся к бесконечности, оценка вероятности стремится к вероятности, а между дисперсией оценки вероятности и нулем, из-за каких-либо причин (например, из-за шумов, из-за нестабильностей), существует ненулевой разрыв, то у границ шкалы вероятностей тоже существуют ненулевые разрывы, как для оценки вероятности, так и для вероятности.

В более общем виде, для возможных значений можно также сказать:

Если, для серии испытаний с количеством испытаний, стремящимся к бесконечности, оценка вероятности стремится к вероятности, а между возможными значениями дисперсии оценки вероятности и нулем, из-за каких-либо причин (например, из-за шумов, из-за нестабильностей), существует ненулевой разрыв, то у границ шкалы вероятностей тоже существуют ненулевые разрывы, как для возможных значений оценки вероятности, так и для возможных значений вероятности.

Замечание 1. Более точная оценка разрыва r_2

Заметим, что, согласно П2, можно дать более точную оценку r_2

$$r_2 \equiv \frac{r_1}{(B-A)^{n-1}}$$

и, при $(B\text{-}A)=1$, то есть для случаев оценки вероятности и вероятности

$$r_2 = r_1 .$$

Замечание 2. Условия существования разрывов

Следует подчеркнуть, что разрывы, о которых идет речь, существуют не всегда и не для всех случаев. Эти разрывы в шкале вероятностей существуют и для оценки вероятности и для вероятности только тогда и только для тех случаев, когда и в которых существует ненулевой разрыв между возможными значениями дисперсии (или иного центрального момента) оценки вероятности и нулем.

Приложение П5. Подробный пример разрывов в шкале вероятностей

Условия
Результаты
Вывод
Замечание. Дисперсия σ^2 разброса попаданий и дисперсия D оценки вероятности попаданий и промахов

Условия

Самый простой пример разрывов в шкале вероятностей – стрельба в мишень (одномерный случай):

Пусть, при точном прицеливании, имеет место некоторый разброс попаданий, например:

А) из-за разброса в размере пуль (если диаметр пули меньше диаметра ствола, то пуля будет вылетать из ствола не по оптической оси ствола, а по некоторому пучку траекторий вокруг этой оси) и разброса в количестве и качестве заряда или

Б) при стрельбе дробью.

Пусть также размер мишени равен $2L$, а разброс попаданий подчиняется нормальному закону распределения с дисперсией σ^2 (и среднеквадратичным отклонением σ). Естественно, σ увеличивается, например, с уменьшением длины ствола, а также, в данном случае, с увеличением расстояния до мишени (то есть σ в данном случае измеряется в линейных, а не в угловых единицах).

Возможные значения вероятности попадания в мишень P_{in} могут, в зависимости от нахождения точки прицела, располагаться в диапазоне от минимального, нулевого значения $P_{in\_min}=0$, достигаемого, например, если точка прицела находится в направлении, противоположном мишени, до максимального значения P_{in_Max}, достигаемого, если точка прицела гарантированно находится в центре мишени.

Возможные значения вероятности промаха $P_{out}=1-P_{in}$ могут, в зависимости от нахождения точки прицела, располагаться в диапазоне от максимального значения $P_{out\_Max}=1$, достигаемого, например, если точка прицела находится в направлении, противоположном мишени, до минимального значения P_{out_min}, достигаемого, если точка прицела гарантированно находится в центре мишени.

Если точка прицела перемещается от направления, противоположного мишени, до точки, находящейся в центре мишени, то вероятность попадания в мишень P_{in} увеличивается от 0 до P_{in_Max}, а вероятность промаха P_{out} соответственно уменьшается от 1 до P_{out_min}. При этом: Если $\sigma=0$, то переходы вероятности попадания от 0 к P_{in_Max} и вероятности промаха от 1 к P_{out_min} происходят скачком. Если $\sigma>0$, то оба перехода происходят плавно и P_{in} принимает все значения между 0 и P_{in_Max}, а P_{out} принимает все значения между 1 и P_{out_min}.

Если точка прицела гарантированно находится в центре мишени, то максимальная вероятность попадания в мишень P_{in_Max} и минимальная вероятность промаха P_{out_min}, в зависимости от соотношения σ и L, равны (см., напр., Прохоров 1988):

Результаты

Для простоты рассмотрим только 4 классических точки: $\sigma=0$ (или $\sigma\approx0$ или $L>3\sigma>0$), $L=3\sigma$, $L=2\sigma$ и $L=\sigma$.

При $L>\sigma=0$, максимальная вероятность попадания в мишень составляет $P_{in\_Max}=1$, а минимальная вероятность промаха составляет соответственно $P_{out\_min}=0$. Следовательно, возможные значения вероятности попадания в мишень, в зависимости от точки прицела, могут быть равны $P_{in\_min}=0$ или $P_{in\_Max}=1$, а возможные значения вероятности промаха могут быть равны соответственно $P_{out\_Max}=1$ или $P_{out\_min}=0$. Таким образом, при $L>\sigma=0$, разрывов в шкале вероятностей нет $r_2=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}=0$.

При $\sigma\approx0$ и при $L>3\sigma>0$, когда, по «правилу трех сигм», можно полагать $\sigma\approx0$, максимальная вероятность попадания в мишень составляет $P_{in\_Max}\approx1$, и минимальная вероятность промаха составляет соответственно $P_{out\_min}\approx0$. Следовательно возможные значения вероятности попадания в мишень, в зависимости от точки прицела, могут находиться в диапазоне $0\leq P_{in}\leq P_{in\_Max}\approx1$, а возможные значения вероятности промаха могут находиться соответственно в диапазоне $0\approx P_{out\_min}\leq P_{out}\leq1$. Таким образом, при $\sigma\approx0$ и при $L>3\sigma>0$, разрывов в шкале вероятностей тоже нет, точнее говоря, разрывы в шкале вероятностей можно считать равными нулю $r_2=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}\approx0$.

При $L=3\sigma>0$, максимальная вероятность попадания в мишень составляет $P_{in\_Max}\approx0{,}997$, а минимальная вероятность промаха составляет $P_{out\_min}\approx0{,}003$. Следовательно возможные значения вероятности попадания в мишень, в зависимости от точки прицела, могут находиться в диапазоне $0\leq P_{in}\leq P_{in\_Max}=0{,}997<1$, а возможные значения вероятности промаха могут находиться соответственно в диапазоне $0<0{,}003=P_{out\_min}\leq P_{out}\leq1$. Таким образом, при $L=3\sigma>0$, в шкале вероятностей появляются ненулевые разрывы $r_2=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}=0{,}003>0$.

При $L=2\sigma>0$, максимальная вероятность попадания в мишень составляет $P_{in\_Max}=0{,}95$, а минимальная вероятность промаха составляет $P_{out\_min}=0{,}05$. Следовательно возможные значения вероятности попадания в мишень, в зависимости от точки прицела, могут находиться в диапазоне $0\leq P_{in}\leq P_{in\_Max}=0{,}95<1$, а возможные значения вероятности промаха могут находиться соответственно в диапазоне $0<0{,}05=P_{out\_min}\leq P_{out}\leq1$. Таким образом, при $L=2\sigma>0$, в шкале вероятностей существуют ненулевые разрывы $r_2=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}=0{,}05>0$.

При $L=\sigma>0$, максимальная вероятность попадания в мишень составляет $P_{in\_Max}=0{,}68$, а минимальная вероятность промаха составляет $P_{out\_min}=0{,}32$. Следовательно возможные значения вероятности попадания в мишень, в зависимости от точки прицела, могут находиться в диапазоне $0\leq P_{in}\leq P_{in\_Max}=0{,}68<1$, а возможные значения вероятности промаха могут находиться соответственно в диапазоне $0<0{,}32=P_{out\_min}\leq P_{out}\leq1$. Таким образом, при $L=\sigma>0$, в шкале вероятностей существуют ненулевые разрывы $r_2=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}=0{,}32>0$.

Результаты. Краткий список

При $L>\sigma=0$ получаем $P_{in}=P_{in\_min}=0$ или $P_{in}=P_{in\_Max}=1$,
$P_{out}=P_{out\_Max}=1$ или $P_{out}=P_{out\_min}=0$ и
$r_2=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}=0$.

При $L>3\sigma>0$, для многих практических применений, по «правилу трех сигм», можно полагать $\sigma\approx0$ и $0\leq P_{in}\leq P_{in\_Max}\approx1$,
$0\approx P_{out\_min}\leq P_{out}\leq1$ и
$r_2=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}\approx0$.

При $L=3\sigma>0$ получаем $0\leq P_{in}\leq P_{in\_Max}=0,997<1$,
$0<0,003=P_{out\_min}\leq P_{out}\leq1$ и
$r_2=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}=0,003>0$.

При $L=2\sigma>0$ получаем $0\leq P_{in}\leq P_{in\_Max}=0,95<1$,
$0<0,05=P_{out\_min}\leq P_{out}\leq1$ и
$r_2=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}=0,05>0$.

При $L=\sigma>0$ получаем $0\leq P_{in}\leq P_{in\_Max}=0,68<1$,
$0<0,32=P_{out\_min}\leq P_{out}\leq1$ и
$r_2=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}=0,32>0$.

Вывод

Таким образом, при нулевой дисперсии (и в тех случаях, когда дисперсию можно считать нулевой), т.е. при $\sigma^2=0$ (и при $\sigma\approx0$ или $L>3\sigma$) - разрывов в шкале вероятностей нет (практически нет).

При ненулевой дисперсии $\sigma^2>0$ - в шкале вероятностей появляются ненулевые разрывы $r_2>0$:

- между областью возможных (в зависимости от нахождения точки прицела) значений вероятности P_{in} : $0\leq P_{in}\leq P_{in\_Max}=1-r_2<1$, попадания в мишень и единицей, то есть верхней границей шкалы вероятностей, и

- между областью возможных (в зависимости от нахождения точки прицела) значений вероятности P_{out} : $0<r_2=P_{out\_min}\leq P_{out}\leq1$, промаха и нулем, то есть нижней границей шкалы вероятностей.

Замечание. Дисперсия σ^2 разброса попаданий
и дисперсия D оценки вероятности попаданий и промахов

Заметим, что дисперсия разброса попаданий σ^2 может определять дисперсию D оценки вероятности попаданий и промахов, но не является ею.

Если дисперсия разброса попаданий $\sigma^2=0$ (или если $\sigma^2\approx 0$ или если $L>3\sigma$), то область возможных значений дисперсии D доходит (при $\sigma^2\approx 0$ и $L>3\sigma>0$ - приблизительно доходит) до нуля. Поэтому, в данном случае, нет (практически нет) разрыва, запрещенной зоны между возможными значениями дисперсии D оценки вероятности и нулем, то есть $r_1=0$ (или $r_1\approx 0$).

Если $3\sigma>L>0$, то область возможных значений дисперсии D не доходит до нуля, то есть существует разрыв $r_1>0$:

Для оценки вероятности попадания в мишень – только в области вблизи 1

(Если точка прицела находится в направлении, противоположном мишени, то есть если оценка вероятности попадания в мишень находится в области вблизи 0, то увеличение, изменение σ от $\sigma=0$ до $\sigma>0$ не влияет на D. Следовательно, вблизи оценки вероятности попаданий, равной 0, дисперсия D оценки вероятности попадания в мишень может быть равна 0).

Для оценки вероятности промаха – только в области вблизи 0

(Если точка прицела находится в направлении, противоположном мишени, то есть если оценка вероятности промаха находится в области вблизи 1, то увеличение, изменение σ от $\sigma=0$ до $\sigma>0$ также не влияет на D. Следовательно, вблизи оценки вероятности промаха, равной 1, дисперсия D оценки вероятности промаха может быть равна 0).

Вследствие этого, данный простой пример может иллюстрировать теорему о существовании разрывов в шкале вероятностей наглядно, но лишь частично, в отдельных областях, а именно:

Для оценки вероятности и вероятности попадания в мишень – только в области вблизи 1.

Для оценки вероятности и вероятности промаха – только в области вблизи 0.