A Model of Resource Redistribution

Polterovich, Victor

CEMI RAS

1970

English version: A model of Resource Redistribution, Matecon, 1971, 7(3), pp. 245-262

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

В. М. ПОЛТЕРОВИЧ

(Москва)

В работе исследуются процедуры перераспределения ресурсов, в некоторых отношениях напоминающие процессы обмена. Принятое нами определение элементарного акта взаимодействия предусматривает, что любой участник на каждом шаге может использовать только информацию о состояниях фиксированного числа других участников. Сформулированы достаточные условия существования процедуры из заданного класса, обеспечивающей оптимальное в некотором смысле предельное распределение ресурсов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему, включающую m участников, каждый из которых характеризуется вогнутой (выпуклой вверх) функцией $f_k(x_k)$, $x_k \in R^n$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Векторы $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_m)$ размерности $n \times m$ с неотрицательными компонентами будем называть состояниями системы.

Положим: $f(x) = \sum_{k=1}^{m} f_k(x_k)$. Для каждого подмножества участников $\alpha \subset M = \{1, 2, \ldots, m\}$ определим при $x \geqslant 0$ точечно-множественное отображение $\xi_\alpha(x)$

$$\xi_\alpha(x) = \{z \mid z \in G_\alpha(x), f(z) = \max_{y \in G_\alpha(x)} f(y)\}, \tag{1}$$

где $G_\alpha(x) = \{y \mid y = (y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_m), y_k \in R^n, y \geqslant 0,$

$$\sum_{k \in \alpha} y_k = \sum_{k \in \alpha} x_k,\ y_k = x_k \text{ для } k \overline{\in} \alpha \Big\}. \tag{2}$$

Из соотношений (1), (2) следует, что $f(\xi_\alpha(x)) \geqslant f(x)$ при любых α и $x \geqslant 0$.

Зададим некоторую систему А подмножеств множества M, $\Lambda = \{\alpha\}$, $\alpha \subset M$, $\alpha \neq \Phi$. В дальнейшем А будет чаще всего содержать всевозможные подмножества фиксированной мощности θ, $2 \leqslant \theta \leqslant m$.

Определение 1. Точечно-множественное отображение $\xi_\alpha(x)$, задаваемое соотношениями (1), (2), назовем допустимым преобразованием, или допустимой сделкой, если $\alpha \in$ А.

Определение 2. Точку $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_m)$, $x \geqslant 0$, назовем оптимальной, если она является решением задачи

$$f(y) = \sum_{k=1}^{m} f_k(y_k) \to \max, \quad \sum_{k=1}^{m} y_k = \sum_{k=1}^{m} x_k, \quad y_k \geqslant 0, \quad k = 1, \ldots m. \tag{3}$$

Максимальное значение $f(y)$ в (3) обозначим через $f^*(x)$.

Определение 3. Последовательность состояний $x^s, s=0,1,\ldots$, будем называть оптимизирующей, если $x^s \in \xi_{\alpha_s}(x^{s-1})$, $\alpha_s \in A$, $s=1,2,\ldots$, и $f(x^s) \to f^*(x^0)$ при $s \to \infty$.

Поясним введенные определения. Будем интерпретировать функции $f_k(x_k)$ как полезности вектора ресурсов x_k для k-го участника, измеренные в одних и тех же единицах. Пусть $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_k^0, \ldots, x_m^0)$ — произвольное начальное распределение ресурсов. Преобразование $\xi_\alpha(x^0)$ соответствует следующему акту взаимодействия. Участники из множества α объединяют свои ресурсы и находят произвольное решение задачи

$$\sum_{k\in\alpha} f_k(y_k) \to \max, \qquad \sum_{k\in\alpha} y_k = \sum_{k\in\alpha} x_k^0, \qquad y_k \geqslant 0, \qquad k \in \alpha. \tag{4}$$

Затем ресурсы перераспределяются в соответствии с найденным решением. При этом ресурсы участников, не входящих во множество α, остаются без изменения. Результатом сделки будет новое состояние системы $x^1 = (x_1^1, \ldots, x_k^1, \ldots, x_m^1)$, в котором осуществляется сделка между участниками из некоторого другого множества и т. д. В процессе таких преобразований суммарная полезность $f(x)$ не убывает и суммарное количество ресурсов остается равным $\sum_{k=1}^{m} x_k^0$.

Конечно, для некоторых участников значения функций полезности после сделки могут оказаться меньше исходных. Поэтому следует предположить, что одновременно с процессом передачи ресурсов осуществляются денежные расчеты («побочные платежи» по терминологии теории игр), так что в результате сделки ни один из участников не проигрывает. Система денежных расчетов может быть определена многими способами, но для наших целей конкретное определение несущественно.

Предположим теперь, что число участников каждой сделки не превосходит θ. Спрашивается, существует ли для данного начального состояния x^0 такая последовательность сделок $\xi_\alpha(\cdot)$, что при некотором способе выбора $x^s \in \xi_\alpha{}^s\ (x^{s-1})$ суммарная полезность будет стремиться к максимуму? (Величина этого максимума $f^*(x^0)$ определяется только начальным состоянием.) Простейшие примеры показывают, что такие последовательности могут не существовать.

Пример. Рассмотрим систему, включающую трех участников со следующими функциями полезности: $f_1(y_1) = \min(u_1; v_1)$, $f_2(y_2) = 0{,}4u_2$, $f_3(y_3) = 0{,}4v_3$. Здесь $y_k = (u_k, v_k)$, u_k, v_k — скаляры, $k=1,2,3$. Пусть начальное состояние $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ таково: $x_1^0 = (0,0)$; $x_2^0 = (1,0)$; $x_3^0 = (0,1)$ и допустимы только сделки между всевозможными парами участников. Легко проверить, что любое из множеств $\xi_\alpha(x^0)$, $\alpha = \{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ содержит x^0 и не содержит никаких других точек. Таким образом, никакая последовательность допустимых сделок не выводит систему из состояния x^0. Между тем, как легко проверить, $f(x^0) = 0{,}8 < f^*(x^0) = 1$. Для достижения оптимального состояния $x^* = (1{,}1;\ 0{,}0;\ 0{,}0)$ требуется одновременная передача ресурса u от второго участника и ресурса v от третьего участника — первому, т. е. сделка между тремя участниками.

Аналогичный по идее пример приведен в [1], где изучалась модель, близкая к описанной выше, но рассматривались только парные сделки. Из результатов [1] следует, что при $n=1$ (случай одного ресурса) за счет парных сделок всегда можно достичь оптимального состояния.

Таким образом, для того чтобы гарантировать существование оптимизирующей последовательности, необходимо допустить на каждом шаге взаимодействие между определенным числом участников. Ниже будет показано, что это число зависит, вообще говоря, не только от числа n ресурсов, но и от дифференциальных свойств функций полезности. В связи с этим нам потребуется понятие квазисумматорной функции, рассматриваемое в следующем разделе.

2. КВАЗИСУММАТОРНЫЕ ФУНКЦИИ

Приведем некоторые известные определения и результаты [2], которые будут использованы в дальнейшем.

Пусть $\varphi(y)$ — вогнутая функция, $y \in R^n$. Вектор $p \in R^n$ называется опорным функционалом к $\varphi(y)$ в точке y, если $\varphi(y+h) \leqslant \varphi(y) + ph^*$ для всех $h \in R^n$. Множество $P(y)$ опорных функционалов к $\varphi(y)$ в точке y замкнуто, выпукло и ограничено. Если $\varphi(y) = \sum_{k=1}^{m} a_k\varphi_k(y)$, $a_k \geqslant 0$, то $P(y) = \sum_{k=1}^{m} a_k P_k(y)$. Для дифференцируемой в точке y функции множество $P(y)$ содержит единственный вектор — градиент. Через $\varphi'(y, h)$, $h \in R^n$ будем обозначать предел

$$\varphi'(y,h) = \lim_{t\to+0} \frac{\varphi(y+th) - \varphi(y)}{t}. \tag{5}$$

Если $\varphi(y)$ вогнута, то предел (5) существует для любых $y, h \in R^n$, причем

$$\varphi'(y,h) = \min_{p\in P(y)} ph. \tag{6}$$

Пусть $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\nu \subset N = \{1, 2, \ldots n\}$, $\bar\nu = N \setminus \nu$. Обозначим через $Pr_\nu y$ вектор с координатами z_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющими условию

$$\begin{aligned} z_i &= y_i, \ \text{если } i \in \nu; \\ z_i &= 0, \ \text{если } i \in \bar\nu. \end{aligned} \tag{7}$$

Следующее ниже определение, по-видимому, вводится впервые и является основным в этом разделе.

Определение 4. Функцию $\varphi(y)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, назовем квазисумматорной по множеству переменных $\{y_i, i \in \nu\}$ в точке y^0, если $\varphi'(y^0, h)$ существует и для всех $h \in R^n$ выполняется равенство

$$\varphi'(y^0, h) = \varphi'(y^0, Pr_\nu h) + \varphi'(y^0, Pr_{\bar\nu} h). \tag{8}$$

В дальнейшем наряду с выражением «$\varphi(y)$ квазисумматорна по множеству переменных $\{y_i, i \in \nu\}$», будем использовать более короткое: «$\varphi(y)$ квазисумматорна по ν». Если $\varphi'(y^0, h)$ существует для любого h, то, как следует из определения, $\varphi(y)$ квазисумматорна в точке y^0 по N и пустому множеству Φ. Квазисумматорность по $\nu \subset N$ всегда влечет квазисумматорность по $\bar\nu$. Функция $\varphi(y)$, дифференцируемая в точке y^0, квазисумматорна в этой точке по любому подмножеству переменных. Действительно, в этом случае $\varphi'(y^0, h) = \sum_{i=1}^{n} p_i h_i$, где $p = (p_1, \ldots, p_n)$ — градиент $\varphi(y)$ в точке y^0.

* ph — скалярное произведение векторов p и h.

Укажем еще один важный подкласс квазисумматорных функций. Пусть $\varphi(y)=\psi(g_1(y^1),\dots,g_i(y^i),\dots,g_l(y^l))$; $\tilde z_i = g_i(\tilde y^i)$, $y^i\in R^{k_i}$, $y=(y^1,\dots,y^i,\dots,y^l)$, функция $\psi(z_1,\dots,z_l)$ дифференцируема в точке $\tilde z = (\tilde z_1,\dots,\tilde z_l)$ и все производные $g_i'(\tilde y^i, h^i)$, $i=1,2,\dots,l$, существуют для любого $h_i\in R^{k_i}$. Непосредственно из соотношения (5) легко получить, что $\varphi'(\tilde y,h)=\sum\limits_{i=1}^{l}\psi_i' g_i'(\tilde y^i,h^i)$, где $\psi'=(\psi_1',\dots,\psi_i',\dots,\psi_l')$ — градиент $\psi(z_1,\dots,z_l)$ в точке $\tilde z$. Отсюда следует, что $\varphi(y)$ квазисумматорна по множеству координат компоненты y^i для любого $i=1,2,\dots,l$.

Пусть $P\subset R^n$, $\nu\subset N=\{1,2,\dots,n\}$. Введем обозначение

$$P_\nu = Pr_\nu P=\{z\,|\,z=Pr_\nu y,\ y\in P\}. \tag{9}$$

Ниже будут использоваться следующие очевидные свойства операции проектирования множеств

$$Pr_\nu(P+Q)=Pr_\nu P+Pr_\nu Q, \tag{10}$$

$$Pr_\nu Pr_\mu P=Pr_{\nu\cap\mu}P, \tag{11}$$

$$Pr_\Phi P=0, \qquad Pr_N P=P. \tag{12}$$

Полезно, кроме того, иметь ввиду соотношение

$$Pr_\mu P+Pr_\nu P\supset Pr_{\mu\cup\nu}P, \tag{13}$$

справедливое при $\nu\cap\mu=\Phi$.

Теорема 1. *Пусть P — множество опорных функционалов к вогнутой функции $\varphi(y)$, $y\in R^n$, в точке y^0. Для того, чтобы $\varphi(y)$ была квазисумматорна по $\nu\subset N$ в этой точке, необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение*

$$P=P_\nu+P_{\bar\nu}. \tag{14}$$

Доказательство. Согласно (6), равенство (8) эквивалентно следующему соотношению: $\min\limits_{p\in P} ph=\min\limits_{p\in P} pPr_\nu h+\min\limits_{p\in P} pPr_{\bar\nu}h$. Легко проверить, что $\min\limits_{p\in P} pPr_\nu h+\min\limits_{p\in P} pPr_{\bar\nu}h=\min\limits_{p\in P_\nu} ph+\min\limits_{p\in P_{\bar\nu}} ph=\min\limits_{p\in P_\nu+P_{\bar\nu}} ph$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать эквивалентность соотношений (14) и (15)

$$\min_{p\in P} ph=\min_{p\in P_\nu+P_{\bar\nu}} ph. \tag{15}$$

Последнее соотношение должно выполняться тождественно по $h\in R^n$. Очевидно, что из (14) следует (15) и что $P_\nu+P_{\bar\nu}\supset P$. Покажем, что если выполняется (15), то $P_\nu+P_{\bar\nu}\subset P$ *. Если это не так, то существует вектор $\tilde p\in(P_\nu+P_{\bar\nu})\setminus P$. Рассмотрим гиперплоскость, строго отделяющую $\tilde p$ от замкнутого выпуклого ограниченного множества P. Пусть q — ее направляющий вектор, и $qp>q\tilde p$ для всех $p\in P$. Но тогда $\min\limits_{p\in P_\nu+P_{\bar\nu}} qp\leqslant q\tilde p<\min\limits_{p\in P} qp$, что противоречит (15). Теорема доказана.

Следствие 1. Если вогнутая функция $\varphi(y)$, $y\in R^n$ квазисумматорна в точке y^0 по множествам $\nu,\mu\subset N=\{1,2,\dots,n\}$, то она квазисумматорна по их пересечению и объединению.

* Последующие рассуждения, по существу, воспроизводят доказательство леммы 1 работы [2].

Доказательство. По условию и согласно теореме 1 имеют место равенства: $P=P_\nu+P_{\bar\nu}=P_\mu+P_{\bar\mu}$. Поэтому, используя соотношения (10)—(13), получим $P=Pr_\mu(P_\nu+P_{\bar\nu})+Pr_{\bar\mu}(P_\nu+P_{\bar\nu})=P_{\mu\cap\nu}+P_{\mu\cap\bar\nu}+P_{\bar\mu\cap\nu}+P_{\bar\mu\cap\bar\nu}\supset P_{\mu\cap\nu}+P_{\overline{\mu\cap\nu}}$. Но тогда $P=P_{\mu\cap\nu}+P_{\overline{\mu\cap\nu}}$ и, по теореме 1, $\varphi(y)$ квазисумматорна по $\mu\cap\nu$.

Поскольку $\varphi(y)$ квазисумматорна по $\bar\mu$, $\bar\nu$, то она, как только что доказано, квазисумматорна по $\bar\mu\cap\bar\nu$, а следовательно, и по $\overline{\bar\mu\cap\bar\nu}=\mu\cup\nu$.

Следствие 2. Пусть множества ν_i, $i=1,2,\dots,l$, образуют разбиение множества $N=\{1,2,\dots,n\}$ *. Для того, чтобы вогнутая функция $\varphi(y)$, $y\in R^n$ была квазисумматорной по каждому ν_i в точке y^0, необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение

$$P=\sum_{i=1}^{l}P_{\nu_i}. \tag{16}$$

Здесь, как и выше, P — множество опорных функционалов к функции $\varphi(y)$ в точке y^0.

Доказательство. Из (16) и (13) нетрудно получить соотношение: $P\supset P_{\nu_i}+P_{\bar\nu_i}$. Но тогда, согласно (12) и (13), $P=P_{\nu_i}+P_{\bar\nu_i}$. Достаточность следует теперь из теоремы 1. Необходимость будем доказывать по индукции. По теореме 1, доказываемое утверждение верно при $l=2$. Пусть оно верно для $l-1$. Тогда, используя следствие 1, можем записать: $P=\sum\limits_{i=1}^{l-2}P_{\nu_i}+P_{\nu_{l-1}\cup\nu_l}$. Но поскольку $P=P_{\nu_l}+P_{\bar\nu_l}$ (теорема 1), то, воспользовавшись соотношениями (10)—(13), получим

$$P=Pr_{\nu_l}\Big(\sum_{i=1}^{l-2}P_{\nu_i}+P_{\nu_{l-1}\cup\nu_l}\Big)+Pr_{\bar\nu_l}\Big(\sum_{i=1}^{l-2}P_{\nu_i}+P_{\nu_{l-1}\cup\nu_l}\Big)=$$

$$=P_{\nu_l}+\sum_{i=1}^{l-2}P_{\nu_i}+P_{\nu_{l-1}},$$

что и требовалось.

3. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ОПТИМИЗИРУЮЩЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Приступим теперь к рассмотрению проблемы, сформулированной в разделе 1. Ниже будут указаны достаточные условия существования оптимизирующей последовательности состояний и способ ее построения.

Положим: $x_k=(x_{1k},\dots,x_{jk},\dots,x_{nk})$, $k=1,2,\dots,m$; $N=\{1,2,\dots,n\}$. Выше пространство R^n интерпретировалось как пространство наборов ресурсов; в соответствии с этим множество $\nu\subset N$ будем отождествлять со множеством всех ресурсов, которые занумерованы числами из ν.

Определение 5. Множество (ресурсов) $\nu\subset N$, $\nu\neq\Phi$ назовем комплектом в точке $x^0=(x_1{}^0,\dots,x_k{}^0,\dots,x_m{}^0)$ относительно функции $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{m}f_k(x_k)$, $x_k\in R^n$, если а) все функции $f_k(x_k)$, $k=1,2,\dots,m$

* Т. е. $\nu_i\cap\nu_j=\Phi$, $i,j=1,\dots,l$, $\bigcup\limits_{i=1}^{l}\nu_i=N$.

квазисумматорны по $\{x_{jk}|j \in \nu\}$ в точке x_k^0; б) ни одно собственное подмножество множества ν свойством а) не обладает.

В любой точке существует хотя бы один комплект, поскольку функции $f_k(x_k)$ квазисумматорны по N. Если ν и μ два различных комплекта в точке x^0, то $\nu \cap \mu = \Phi$. В противном случае, согласно следствию 1, множество $\nu \cap \mu$ обладало бы свойством а), что противоречило бы определению 5. Если ν — комплект, то множество $\bar{\nu}$ либо само есть комплект, либо содержит некоторый комплект. Таким образом, справедливо следующее предложение.

Лемма 1. *В любой точке совокупность комплектов образует разбиение множества N.*

Введенное нами понятие комплекта связано с соответствующим понятием, используемым в экономической практике. «Ценность» малого приращения ресурса, входящего в комплект ν, вообще говоря, зависит от того, какие приращения получают другие ресурсы из ν, и не зависит от изменения ресурсов, относящихся к другим комплектам. Ниже будет показано, что структура эффективного локального поведения при перераспределении ресурсов во многом определяется характером разбиения множества ресурсов на комплекты.

Прежде чем переходить к доказательству основных теорем, введем еще некоторые понятия, которые будут полезны в дальнейшем.

Определение 6. Допустимое преобразование $\xi_\alpha(x)$ называется эффективным в точке $x \geqslant 0$, если $f(\xi_\alpha(x)) > f(x)$. Если $\alpha \in A$ и $f(\xi_\alpha(x)) = \max_{\beta \in A} f(\xi_\beta(x))$, то преобразование $\xi_\alpha(x)$ назовем наиболее эффективным в точке x. Определения 1 и 6 устанавливают также смысл выражений «эффективная сделка» и «наиболее эффективная сделка» (в точке x).

Определение 7. Точка $x \geqslant 0$ называется тупиковой, если в ней ни одно допустимое преобразование не является эффективным.

Оптимальная точка является, конечно, тупиковой; обратное, вообще говоря, неверно (см. пример в п.1).

Теорема 2. *Пусть $f_k(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, вогнуты, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$ — тупиковая точка и θ — максимальное число ресурсов, составляющих в ней комплект, $\theta < m$. Если сделки между любыми $\theta + 1$ участниками допустимы, то $\tilde{x}$ — оптимальная точка.*

Доказательство. Из условия и определения тупиковой точки следует, что для любого $\alpha \in A$ совокупность векторов $\{\tilde{x}_k | k \in \alpha\}$ образует решение задачи

$$\sum_{k\in\alpha} f_k(y_k) \to \max, \qquad \sum_{k\in\alpha} y_k = \sum_{k\in\alpha} \tilde{x}_k; \qquad y_k \geqslant 0, \qquad k \in \alpha. \tag{17}$$

Пусть P_k — множество опорных функционалов к функции $f_k(y_k)$ в точке $\tilde{x}_k$. Для того, чтобы набор $y_k = \tilde{x}_k$, $k \in \alpha$, являлся решением задачи (17), необходимо и достаточно, чтобы существовали векторы $p_k^\alpha \in P_k$, $w_k^\alpha \geqslant 0$ и λ^α, удовлетворяющие условиям [2]

$$p_k^\alpha = \lambda^\alpha - w_k^\alpha, \qquad w_k^\alpha \cdot \tilde{x}_k = 0, \qquad k \in \alpha. \tag{18}$$

Пусть ν_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, — разбиение множества N на комплекты в точке $\tilde{x}$. Введем обозначения

$$W_k = \{w_k | w_k \geqslant 0, \quad w_k \tilde{x}_k = 0\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{19}$$

$$L_{ki} = Pr_{\nu_i} P_k + Pr_{\nu_i} W_k, \qquad i = 1, 2, \ldots, l, \qquad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{20}$$

Множества L_{ki}, очевидно, выпуклы; их можно считать сосредоточенными на подпространстве размерности θ. Из соотношений (18)—(20) заключаем, что для любого допустимого α $\bigcap_{k\in\alpha} L_{ki} \ni Pr_{\nu_i} \lambda^\alpha$.

Поскольку все α, содержащие $\theta + 1$ индексов, допустимы, можем применить теорему Хелли * о пересечении выпуклых множеств. Получим: $\bigcap_{k\in M} L_{ki} \neq \Phi$ для любого i (напомним, что $M = \{1, 2, \ldots, m\}$). Пусть $\lambda_i \in \bigcap_{k\in M} L_{ki}$, тогда $\lambda_i \in Pr_{\nu_i} P_k + Pr_{\nu_i} W_k$ для всех $k \in M$. Обозначим $\lambda^M = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i$. Очевидно, $W_k = \sum_{i=1}^{l} Pr_{\nu_i} W_k$; кроме того, согласно следствию 2, $P_k = \sum_{i=1}^{l} Pr_{\nu_i} P_k$. Таким образом, для любого k существуют векторы $p_k^M \in P_k$, $w_k^M \in W_k$ такие, что $\lambda^M = p_k^M + w_k^M$. Это соотношение эквивалентно (18) при $\alpha = M$ и является достаточным условием оптимальности $\tilde{x}$. Теорема доказана.

Следствие 3. Пусть для любого k функция $f_k(x_k)$ дифференцируема в точке $\tilde{x}_k$ и всевозможные сделки между парами участников допустимы. Если $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_k, \ldots, \tilde{x}_m)$ — тупиковая точка, то она и оптимальная.

Доказательство. Поскольку $f_k(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, квазисумматорна в точке $\tilde{x}_k = (\tilde{x}_{1k}, \ldots, \tilde{x}_{nk})$ по любому множеству $\{x_{jk}\}$, включающему одну переменную, то каждый ресурс образует комплект и $\theta = 1$, что и требовалось доказать.

Следствие 4. Пусть $m > n$. Если всевозможные сделки между $n + 1$-м участником допустимы, то любая тупиковая точка является оптимальной **.

Доказательство. Пусть $\tilde{x}$ — тупиковая точка и θ — максимальное число ресурсов, составляющих в ней комплект. Если A не содержит всех подмножеств $\alpha \subset M$ мощности $\theta + 1$, то рассмотрим новое множество индексов допустимых сделок: $A_1 = \{\alpha | \alpha \neq \Phi, \ \alpha \subset \beta, \ \beta \in A\}$. Поскольку $\theta \leqslant n$, то A_1 содержит все множества из $\theta + 1$ участника. Если сделка $\xi_\beta(x)$ не является эффективной в некоторой точке, то для любого $\alpha \subset \beta$ сделка $\xi_\alpha(x)$ и подавно не является эффективной в той же точке. Следовательно, точка $\tilde{x}$ остается тупиковой и для расширенного множества допустимых сделок. Поэтому наше утверждение оказывается следствием теоремы 2.

Покажем, теперь, что в условиях теоремы 2 для любой начальной точки существует оптимизирующая последовательность.

Теорема 3. *Пусть $x^s \in \xi_{\alpha^s}(x^{s-1})$, $s = 1, 2, \ldots$, $\alpha_s \in A$. Если а) множество допустимых сделок выбрано так, что любая тупиковая точка является оптимальной, и б) последовательность ξ_{α_s} содержит бесконечную подпоследовательность наиболее эффективных сделок (определение 6), то $f(x^s) \to f^*(x^0)$ *** при $s \to \infty$.*

---

* **Теорема Хелли.** *Пусть K — семейство выпуклых множеств в θ-мерном векторном пространстве, причем K — конечно или каждое множество из K компактно. Если каждые $\theta + 1$ из множеств семейства K имеют общую точку, то пересечение всех множеств семейства K не пусто* [3, 4].

** Идея рассматривать взаимодействие между $n + 1$-м участником для случая n ресурсов была высказана автору Б. С. Митягиным при обсуждении работы [1].

*** Напомним, что $f^*(x^0)$ — максимальное значение функции $f(y)$ в задаче (3) при $x = x^0$ (а следовательно, и при $x = x^s$).

Доказательство. Последовательность $f(x^s)$ монотонно не убывает и потому сходится. Пусть $f(x^s) \to \bar{f} < f^*(x^0)$ и $\alpha_{s_i} = \beta(i)$ — подпоследовательность индексов наиболее эффективных сделок, таких, что $x^{s_i-1} \to \bar{x}$. Поскольку $f(x^{s_i-1}) \to f(\bar{x}) < f^*(x^0)$, то в точке $\bar{x}$ существует эффективная сделка с индексом $\gamma \in A$. Требуемое противоречие получаем теперь из следующей цепочки соотношений:

$$\bar{f} < f(\xi_\gamma(\bar{x})) = \lim_{i\to\infty} f(\xi_\gamma(x^{s_i-1})) \leqslant \lim_{i\to\infty} f(\xi_{\beta(i)}(x^{s_i-1})) = \lim_{i\to\infty} f(x^{s_i}) = \bar{f}.$$

Здесь была использована непрерывность $f(\xi_\gamma(x))$ как функции x. Теорема доказана.

На основании теорем 2 и 3 получаем следующие достаточные условия существования оптимизирующей последовательности.

Теорема 4. *Пусть* $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_k^0, \ldots, x_m^0)$, $x^0 \geqslant 0$, *и для любого* y, *удовлетворяющего условиям:* $y \geqslant 0$, $\sum_{k=1}^m y_k = \sum_{k=1}^m x_k^0$, *максимальное число ресурсов в комплекте не превосходит* θ. *Если все сделки между* $\theta + 1$ *участником допустимы, то существует оптимизирующая последовательность состояний, исходящая из точки* x^0.

Вместо условия допустимости всех сделок между $\theta + 1$-м участником можно потребовать, чтобы выполнялось несколько менее жесткое условие: для любого $\alpha \subset M$, содержащего $\theta + 1$ элемент, найдется $\beta \in A$ такое, что $\alpha \subset \beta (*)$. Если условие $(*)$ не выполняется, то утверждение теоремы 4, вообще говоря, неверно. Соответствующий пример для $\theta = n = 2$ был рассмотрен в разделе 1. Он может быть легко обобщен на случай любых n и θ.

Заслуживает упоминания еще одно следствие доказанных выше утверждений. Назовем точку $x \geqslant 0$ изолированной, если она не содержится ни в одной оптимизирующей последовательности состояний. Тупиковая точка может не быть ни оптимальной, ни изолированной. Из теоремы 3 следует, что при отсутствии неоптимальных тупиковых точек отсутствуют и изолированные. Следствие 3 показывает, что множество неоптимальных тупиковых точек принадлежит множеству точек недифференцируемости функции $f(x)$ (если только парные сделки допустимы) и, следовательно, имеет нулевую меру Лебега. Между тем более тщательное рассмотрение примера из раздела 1 показывает, что мера множества изолированных точек не обязательно равна нулю. Таким образом, в результате «локальных» изменений функций $f_k(x_k)$ могут возникать «глобальные» эффекты.

4. СЛУЧАЙНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СДЕЛОК

Указанный в теореме 3 способ отыскания оптимизирующей последовательности требует, чтобы на бесконечной подпоследовательности шагов осуществлялись наиболее эффективные сделки. Возникает вопрос, можно ли обеспечить выполнение этого условия, не предполагая наличия в системе централизованной информации. Естественно считать, что участники вступают в сделки в соответствии с некоторым случайным механизмом. Одна из возможных постановок задачи такова.

На множестве $\Omega = \{\omega\}$ последовательностей вида $\omega = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s \ldots)$, $\alpha_s \in A$, определим меру μ так, чтобы для любых конечных наборов $\beta_i \in A_i$ и α_{s_i}, $i = 1, 2, \ldots, t$, выполнялось равенство: $\mu\{\omega | \alpha_{s_i} = \beta_i, i = 1, 2, \ldots, t\} = \prod_{i=1}^t p_{\beta_i}$, где $\sum_{\beta \in A} p_\beta = 1$, $p_\beta \geqslant p > 0$ для всех $\beta \in A$.

Такое определение соответствует независимому выбору на каждом шаге s некоторого допустимого множества участников с вероятностями p_β, не зависящими от номера s. Введем, кроме того, обозначения

$$U(\omega, x^0) = \{u | u = (x^0, x^1, \ldots, x^s \ldots), x^s \in \xi_{\alpha_s}(x^{s-1}), \ s = 1, 2, \ldots\}, \tag{21}$$

$$F(\omega, x^0) = \inf_{u \in U(\omega, x^0)} \lim_{s\to\infty} f(x^s). \tag{22}$$

Отметим, что $\lim_{\to\infty} f(x^s)$ заведомо существует для любой последовательности состояний $u \in U(\omega, x^0)$, поскольку в этом случае $f(x^s)$ ограничена и монотонно не убывает. Спрашивается, можно ли утверждать, что равенство

$$F(\omega, x^0) = f^*(x^0) \tag{23}$$

выполняется с вероятностью 1. Поскольку $\lim_{s\to\infty} f(x^s) \leqslant f^*(x^0)$, выполнение равенства (23) означает, что для почти всех ω $\lim_{s\to\infty} f(x^s) = f^*(x^0)$ при любом выборе векторов x^s из множества решений соответствующей экстремальной задачи.

Если результат любой сделки определяется единственным образом ($\xi_\alpha(x)$ — однозначные отображения), то ответ на поставленный вопрос легко следует из результатов раздела 3. Действительно, в этом случае $U(\omega, x^0)$ является однозначной функцией ω и x^0. Фиксируем начальное состояние. Тогда по ω можно однозначно определить последовательность $l(\omega)$ индексов наиболее эффективных сделок, $l(\omega) = (l_1, l_2, \ldots, l_s, \ldots)$. Рассмотрим события $B_s = \{\omega | \alpha_s \neq l_s\}$, $s = 1, 2, \ldots$. Случайный элемент $\alpha_s(\omega)$ не зависит от $\alpha_1(\omega), \ldots, \alpha_{s-1}(\omega)$, в то время как $l_s(\omega)$, напротив, однозначно определяется по их значениям.

Поэтому $\mu(B_s) = \sum_{\alpha \in A} \mu\{\omega | l_s = \alpha\} \mu\{\omega | \alpha_s \neq \alpha\} \leqslant 1 - p$. Предположим, что

$$\mu\Big(\bigcap_{s=1}^{h-1} B_s\Big) \leqslant (1 - p)^{h-1}.$$

Тогда

$$\mu\Big(\bigcap_{s=1}^{h} B_s\Big) = \mu\{\omega | \alpha_s \neq l_s, \quad s = 1, 2, \ldots, h\} = \sum_{\alpha \in A} \mu\{\omega | \alpha_s \neq l_s,$$

$$s = 1, 2, \ldots, h - 1, l_h = \alpha\} \mu\{\omega | \alpha_h \neq \alpha\} \leqslant (1 - p)\mu\Big(\bigcap_{s=1}^{h-1} B_s\Big) \leqslant (1 - p)^h.$$

Из полученного неравенства следует, что почти все ω содержат бесконечную подпоследовательность наиболее эффективных сделок. Теперь с помощью теорем 2 и 3 устанавливается справедливость следующего утверждения.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4 и каждая допустимая сделка является однозначным отображением. Тогда* $f(x^s) \to f^*(x^0)$ *с вероятностью* $\mu = 1$.

Для случая одного ресурса утверждение теоремы 5 непосредственно следует из результатов работы [1] *.

---

* Подчеркнем, что приведенное в [1] доказательство справедливо лишь в условиях однозначности отображений $\xi_\alpha(x)$ (это обстоятельство в [1] не оговорено).

Однозначность отображений $\xi_\alpha(x)$ гарантируется, например, в случае строгой вогнутости функций $f_k(x_k)$.

Можно показать, что в условиях теоремы 4 равенство (23) выполняется с вероятностью 1 для вогнутых дифференцируемых (но не обязательно строго вогнутых) функций $f_k(x_k)$.

В общем случае аналогичное утверждение остается недоказанным. В связи с этим, возможно, представляет интерес рассмотрение схемы взаимодействия, близкой к изучавшейся выше, для которой аналогичная проблема решена в положительном смысле.

Пусть $x=(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_m)$ — состояние системы, $a>0$ — числовой параметр. Введем определение элементарного преобразования

$$\xi_\alpha(x,a)=\begin{cases}\Psi_\alpha(x,a), & \text{если } \Psi_\alpha(x,a)\neq\Phi,\\ x, & \text{если } \Psi_\alpha(x,a)=\Phi;\end{cases} \tag{24}$$

$$\Psi_\alpha(x,a)=\Big\{y\,|\,y\geqslant 0,\ f(y)\geqslant f(x)+a,\ \sum_{k\in\alpha}y_k=\sum_{k\in\alpha}x_k,\quad y_k=x_k \text{ при } k\,\overline{\in}\,\alpha\Big\} \tag{25}$$

Здесь, как и выше, $y=(y_1,\ldots,y_k,\ldots,y_m)$, $f(y)=\sum_{k=1}^m f_k(y_k)$, α — подмножество участников. Очевидно, что любая последовательность вида $x^s\in\xi_{\alpha_s}(x^{s-1},a)$, $s=1,2,\ldots$ останавливается за конечное число шагов. Пусть x^a — любое предельное состояние. Ясно, что оно не обязано быть оптимальным, но в условиях теоремы 4 оказывается близким к оптимальному при малых a.

Теорема 6. *Пусть в последовательности α_s каждый символ $\alpha\in A$ повторяется бесконечное число раз и множество A таково, что любая тупиковая точка является оптимальной. Тогда $f(x^a)\to f^*(x^0)$ при $a\to 0$ независимо от выбора конечных состояний x^a.*

Доказательство. Очевидно, что для любого $\alpha\in A$

$$0\leqslant f(\xi_\alpha(x^a))-f(x^a)\leqslant a.$$

Отображение $\xi_\alpha(x)$ по-прежнему задается соотношениями (1), (2). Пусть $a\to 0$, $a>0$. Тогда

$$f(\xi_\alpha(x^a))-f(x^a)\to 0. \tag{26}$$

Если $\bar{x}$ — предельная точка последовательности x^a, то, как следует из (26), и непрерывности $f(\xi_\alpha(x))$, имеет место включение: $\bar{x}\in\xi_\alpha(\bar{x})$ $\forall\alpha\in A$. Таким образом, $\bar{x}$ — тупиковая точка, и значит, по условию, оптимальная, откуда и следует требуемая сходимость.

Таким образом, в условиях теоремы 4, любой случайный механизм, порождающий с вероятностью 1 последовательности, содержащие в бесконечном числе каждую из допустимых сделок вида (24), обеспечивает при малых a близкое к оптимальному распределение ресурсов.

Примечание. Для каждого $\alpha\subset\{1,2,\ldots m\}$ рассмотрим следующую задачу выпуклого программирования:

$$f(y_1,\ldots,y_k,\ldots,y_m)\to\max, \tag{27}$$

$$\sum_{k=1}^m g_k(y_k)\geqslant 0, \tag{28}$$

$$y_k\in Q_k,\quad k=1,2,\ldots,m, \tag{29}$$

$$y_k=\tilde{x}_k,\quad k\,\overline{\in}\,\alpha. \tag{30}$$

Здесь y_k — векторы размерности r_k; $g_k(y_k)$, $k=1,2,\ldots m$ — вектор-функции, имеющие n скалярных компонент; $\sum_{k=1}^m g_k(\tilde{x}_k)\geqslant 0$, $\tilde{x}_k\in Q_k$ $k=1,2,\ldots m$, $m>n$.

Следующее утверждение, обобщающее следствие 4, может быть доказано тем же методом, что и теорема 2.

Теорема 7. *Пусть функция $f(y_1,\ldots,y_k,\ldots,y_m)$ вогнута и квазисумматорна по y_k, $k=1,2,\ldots m$, в точке $(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_k,\ldots,\tilde{x}_m)$, вектор-функции $g_k(y_k)$ вогнуты, множества Q_k замкнуты и выпуклы. Если вектор $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_k,\ldots,\tilde{x}_m)$ является решением задач (27)—(30) для любого α, содержащего $n+1$ элемент, то $\tilde{x}$ максимизирует функцию (27) при ограничениях (28) и (29).*

Для случая дифференцируемой функции $f(y_1,\ldots,y_k,\ldots,y_m)$, линейных вектор-функций $g_k(y_k)$ и $Q_k=\{y_k|y_k\geqslant 0\}$ это утверждение доказывается в статье [5], появившейся после того, как настоящая работа была сдана в печать.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. В. Гусева. Последовательность обменов в одной задаче выпуклого программирования. Экономика и матем. методы, 1968, т. IV, вып. 3.
2. Б. Н. Пшеничный. Выпуклое программирование в нормированном пространстве. Кибернетика, 1965, № 5.
3. Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли. Теорема Хелли. М., «Мир», 1968.
4. С. Карлин. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., «Мир», 1964.
5. О. В. Гусева. Последовательность обменов в задаче выпуклого программирования. Экономика и матем. методы, 1969, т. V, вып. 6.

Поступила в редакцию
21 X 1969