Economic Equilibrium and the Optimum

Polterovich, Victor

CEMI RAS

1973

ЭКОНОМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ И ОПТИМУМ

В. М. ПОЛТЕРОВИЧ

(Москва)

Модели экономического равновесия выгодно отличаются от оптимизационных моделей тем, что в явном (хотя и весьма схематичном) виде отражают наличие в системе многих несовпадающих целей. Согласование целей осуществляется благодаря использованию цен в качестве параметров, общих для всех локальных задач. Равновесные цены позволяют каждому участнику экономического процесса выбрать уровни потребления и производства так, чтобы, не нарушая собственных интересов, обеспечить соблюдение вещественных и финансовых балансов по системе в целом. Таким образом, в моделях равновесия априорно предполагается механизм цен, интегрирующий локальные экономические объекты в единое целое. Это допущение является основной причиной того, что понятие экономического равновесия не обладает достаточно прозрачным нормативным содержанием, таким, какое, например, присуще задаче максимизации целевой функции потребления.

Несмотря на то, что нормативный аспект теории экономического равновесия интересовал многих авторов, результатов в этом направлении получено немного. К ним относится теорема об оптимальности равновесных состояний в смысле Парето [1—3]. Поскольку оптимальное по Парето множество, как правило, существенно богаче множества точек равновесия, эта теорема не исчерпывает проблемы. Многочисленные попытки свести задачу отыскания равновесия к вычислению условного экстремума некоторой функции не привели к успеху в общем случае. Для одной весьма частной модели изящный результат в этом направлении получен Эйзенбергом и Гейлом [4].

В настоящей статье для нормативной характеризации понятия «экономическое равновесие» используется метод, неоднократно применявшийся в теории игр при изучении других принципов оптимальности [5, 6]. Мы сформулируем четыре требования, не использующих понятия цены, каждое из которых разумно предъявить к обоснованному правилу распределения потребительских благ, а затем покажем, что если правило, удовлетворяющее всем этим требованиям, существует, то соответствующие ему распределения являются равновесными. Отсюда, конечно, не следует, что равновесные состояния предпочтительнее всех остальных в некоем абсолютном смысле. Однако применение других принципов распределения неизбежно связано с отказом от некоторых из четырех формулируемых ниже аксиом. Кроме того, в статье продолжается изучение связей между равновесием и задачами экстремизации.

1. ПРОБЛЕМА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим систему, включающую m участников-потребителей. Каждый из них может соответствовать некоторой группе населения, выделенной по региональному или какому-либо иному признаку. Будем характеризовать k-го потребителя функцией полезности (целевой функцией потребления) $f_k(x_k)$, заданной на подмножестве Q_k неотрицательных n-мерных векторов потребления x_k, и фиксированным доходом $\beta_k > 0$. Векторы, не входящие в множество Q_k, недоступны для k-го участника в силу внешних ограничений (климатических условий, особенностей системы снабжения и т. п.). В частном случае Q_k может включать все неотрицательные n-мерные векторы. Вектор $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_m)$ размерности $n \times m$ будем называть распределением потребительских благ между участниками, или просто распределением. Совокупность суммарных векторов выпуска предметов потребления, доступных всему обществу, обозначим Y и назовем технологическим множеством. Естественно считать допустимыми только такие распределения, которые удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{m} x_k \leqslant y, \quad x_k \in Q_k, \quad k = 1, \ldots, m, \quad y \in Y. \tag{1}$$

Совокупность всех допустимых распределений обозначим через X.

В простейшем случае вектор выпуска фиксирован, но в более общей ситуации технологическое множество включает различные наборы потребительских благ, и благодаря этому общество располагает бо́льшими возможностями при выборе своего состояния. Каким образом должен быть осуществлен этот выбор, т. е. какие распределения следует считать «справедливыми» или обоснованными?

Исследование этого вопроса облегчается, если не рассматривать описанную ситуацию как единичную, а искать правило, пригодное для целого класса подобных ситуаций. Такое правило естественно подчинить ряду требований, проистекающих из необходимости согласовать друг с другом решения, принимаемые при различных обстоятельствах. Для наших целей достаточно предполагать, что ситуации различаются лишь наборами f функций полезности, $f = (f_1, \ldots, f_k, \ldots, f_m)$, а количество участников m, доходы β_k и множества Q_k и Y фиксированы. Поэтому в дальнейшем правило распределения потребительских благ задается отображением $D(f)$, которое каждому набору f функций полезности из данного класса наборов F ставит в соответствие некоторое непустое подмножество допустимых распределений. Причины, по которым нецелесообразно ограничиваться рассмотрением только однозначных отображений, станут ясны из дальнейшего.

Будем говорить, что распределения $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_m)$ и $z = (z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_m)$ эквивалентны при данном наборе функций полезности $f = (f_1, \ldots, f_k, \ldots, f_m)$, если $f_k(x_k) = f_k(z_k)$, $k = 1, \ldots, m$.

Определение 1. Отображение D: $F \Rightarrow 2^X$ назовем решением проблемы распределения в классе F, а распределения из $D(f)$ — обоснованными при данном f, если выполняются формулируемые ниже условия I—IV.

I. Отображение D инвариантно относительно положительных линейных преобразований каждой функции полезности: если $f, \varphi \in F$, $f_k = \varphi_k$ для всех $k \neq j$, $\varphi_j = af_j + b$, $a > 0$, b — любое число, то $D(f) = D(\varphi)$.

II. При изменении предпочтений в пользу обоснованного распределения оно остается обоснованным: если $f, \varphi \in F$, $f_k = \varphi_k$ для всех $k \neq j$, $\varphi_j(x_j) \leqslant f_j(x_j)$ для любого $x_j \in Q_j$, $z = (z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_m) \in D(f)$ и $\varphi_j(z_j) = f_j(z_j)$, то $z \in D(\varphi)$.

III. Пусть все функции полезности одинаковы, линейны и монотонно не убывают по всем аргументам: $f_k(x_k) = cx_k$, $k = 1, \ldots, m$, $c \in R^n$, $c \geqslant 0$. Если допустимое распределение $z = (z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_m)$: а) доставляет максимум суммарной полезности при данной технологии $\sum_{k=1}^{m} cz_k = \max_{y \in Y} cy$ и, кроме того, б) обеспечивает пропорциональность полезностей доходам: $\beta_j cz_k = \beta_k cz_j$, $k, j = 1, \ldots, m$, то z является обоснованным распределением: $z \in D(f)$.

IV. При любом $f \in F$ все обоснованные распределения эквивалентны: если $x, z \in D(f)$, то $f_k(x_k) = f_k(z_k)$, $k = 1, \ldots, m$.

Как известно, существующие методы не позволяют однозначно определить начало отсчета и единицу измерения полезностей. Поэтому две ситуации, переводимые одна в другую положительными линейными преобразованиями, неразличимы, а следовательно, им обеим должно быть сопоставлено одно и то же множество обоснованных распределений (аксиома I). Как будет показано ниже, при определенных предположениях из допущений I—IV следует инвариантность решения относительно любого монотонно возрастающего преобразования.

В аксиоме II рассматривается случай, когда вкусы одного из участников изменились, но так, что ценность любого вектора по отношению к ценности обоснованного распределения не увеличилась. С позиций доброжелательного арбитра (всегда готового при прочих равных условиях улучшить положение каждого участника) отказ от прежнего обоснованного распределения после изменения не более оправдан, нежели до него *.

Если все участники имеют одну и ту же линейную функцию полезности, то естественно принять ее в качестве глобальной целевой функции при определении суммарного количества потребительских благ (аксиома IIIа). Аксиома IIIб устанавливает роль величин β_k в рассматриваемой модели. Эти величины являются носителями определенной информации о праве участников на достижение тех или иных относительных уровней удовлетворения. Таким образом, они отражают лишь нормативный аспект понятия «доход» и непосредственно не связаны с какой-либо конкретной — денежной или натуральной его формой. Возражения против пропорциональности доходов и уровней удовлетворения обычно опираются, во-первых, на несопоставимость полезностей разных индивидов и, во-вторых, на закон убывания предельных полезностей. Оба аргумента теряют силу для совокупности одинаковых «линейных» потребителей. Таким образом, если бы все неотрицательные векторы были в принципе доступны каждому потребителю, то распределение z, удовлетворяющее условиям а) и б), следовало бы, по-видимому, считать обоснованным. Аксиома III сверх того утверждает, что такое распределение должно остаться обоснованным, если индивидуальные ограничения Q_k не препятствуют его выбору.

Согласно аксиоме IV правило распределения должно давать окончательное разрешение конфликта. Если бы среди обоснованных распределений, относящихся к одной и той же ситуации, имелись неэквивалентные, то потребовались бы дополнительные соображения в пользу выбора одного из них.

Основная цель дальнейшего изложения состоит в доказательстве теоремы, утверждающей, что при определенных условиях решение проблемы распределения существует и единственно. Более того выяснится, что рас-

* Из дальнейшего будет следовать, что (при определенных условиях) обоснованное распределение z остается таковым, если в результате изменения вкусов множество распределений, более предпочтительных, чем z, не расширяется. Это утверждение, являющееся усилением аксиомы II, может быть принято вместо нее в качестве постулата. Отметим, что оно не предполагает численной измеримости полезностей.

пределение обоснованно тогда и только тогда, когда оно оказывается рав-
новесным в некоторой модели, формулировка которой явным образом
предполагает наличие феномена цен и соблюдение финансовых балансов.
Это обстоятельство следует особенно подчеркнуть в связи с тем, что в при-
веденной системе аксиом ни слова не говорится о механизме цен.

2. МОДЕЛЬ РАВНОВЕСИЯ

Предположим, что каждый k-й потребитель предъявляет спрос на по-
требительские блага, максимизируя свою целевую функцию $f_k(x_k)$ в пре-
делах допустимого множества Q_k и бюджетного ограничения. Иными сло-
вами, при любом векторе цен $p \geqslant 0$ вектор спроса является решением сле-
дующей экстремальной задачи

$$f_k(x_k) \to \max, \tag{2}$$

$$px_k \leqslant \beta_k, \tag{3}$$

$$x_k \in Q_k. \tag{4}$$

Введем в рассмотрение еще одного участника — производственную си-
стему. Этот участник формирует предложение потребительских благ, мак-
симизируя свою выручку в рамках технологических возможностей

$$py \to \max, \ y \in Y. \tag{5}$$

При произвольных значениях цен некоторые товары могут оказаться
дефицитными, в то время как другие не будут распроданы. Этого не про-
исходит, если система находится в состоянии равновесия.

Определение 2. Совокупность векторов x_k^*, $k = 1, \ldots, m$, y^* и p^* назовем
равновесием, если при $p = p^*$ векторы x_k^*, y^* являются решениями соответ-
ственно задач (2) – (4) и (5) и, кроме того, выполняются соотношения

$$\sum_{k=1}^{m} x_k^* \leqslant y^*, \tag{6}$$

$$p^* \sum_{k=1}^{m} x_k^* = p^* y^*. \tag{7}$$

Согласно (6) и (7) в состоянии равновесия предложение должно быть
не меньше суммарного спроса и в точности равно ему для всех продуктов,
имеющих положительную равновесную цену. Обозначим через R_+^n сово-
купность неотрицательных n-мерных векторов. Имеет место следующее
утверждение.

Теорема 1. *Предположим, что*: а) *функции $f_k(x_k)$ вогнуты и непрерыв-
ны на Q_k*; б) *множества Q_k замкнуты и выпуклы, $0 \in Q_k \subset R_+^n$*; в) *числа
β_k строго положительны*; г) *Y — выпуклый компакт, $Y \subset R_+^n$*; д) *любой
из n продуктов может быть произведен в некотором количестве: для вся-
кого $j = 1, \ldots n$ найдется $y = (y_1, \ldots, y_n) \in Y$, такой, что $y_j > 0$. Тогда рав-
новесие в модели* (2) – (7) *существует.*

Простейший вариант описанной модели равновесия ($f_k(x_k)$ — линейны,
$Q_k = R_+^n$, технологическое множество Y содержит единственный вектор)
изучался в [4]. В [7] существование равновесия было доказано для во-
гнутых функций полезности (при некоторых дополнительных предполо-
жениях). В [8] включена в модель производственная система, однако
требуется дифференцируемость функций полезности и строгая положи-
тельность всех векторов выпуска. Последнее допущение весьма обремени-
тельно. Все упомянутые выше результаты о существовании равновесия
непосредственно следуют из теоремы 1. Чтобы не загромождать изложение,
наметим ее доказательство при естественном дополнительном условии:
$\sup\limits_{x_k \in Q_k} f_k(x_k) > f_k(z_k)$ для всех $z_k \in Q_k$ (отсутствие насыщения [1–3]). Для
этого в задаче потребителя заменим (3) на неравенство: $px_k \leqslant \gamma_k \max\limits_{y \in Y} py$,
где $\gamma_k = \beta_k \Big/ \sum\limits_{k=1}^{m} \beta_k$. Покажем, что в построенной модели Эрроу – Дебре
(с одним производственным блоком и нулевыми начальными запасами)
существует рвновесие p', x_k^*, y^*; тогда совокупность векторов p^*, x_k^*, y^*,
где $p^* = p' \sum\limits_{k=1}^{m} \beta_k / p' y^*$, окажется равновесием для исходной модели. В силу
условий б) и д) модифицированная задача потребителя удовлетворяет
условию Слейтера при любых ценах из стандартного симплекса. Поэтому
функция избыточного спроса полунепрерывна сверху [9]. Применяя к
ней лемму Гейла [1–3] и воспользовавшись отсутствием насыщения, по-
лучим требуемое утверждение.

3. РАВНОВЕСИЕ И ЗАДАЧИ МАКСИМИЗАЦИИ

Будем называть распределение потребительских благ $x^* = (x_1^*, \ldots$
$\ldots, x_k^*, \ldots, x_m^*)$ равновесным, если оно образует равновесие вместе с не-
которыми векторами цен и выпуска. В модели Эрроу – Дебре и ряде дру-
гих равновесие является при довольно общих предположениях одним из
решений векторной задачи максимизации функций полезности на допу-
стимом множестве. Аналогичный факт имеет место и для рассматриваемо-
го случая. Соответствующая точная формулировка использует два извест-
ных понятия, которые введем применительно к изучаемой ситуации. Го-
ворят, что допустимое распределение $z = (z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_m)$ оптимально по
Парето, если не существует допустимого распределения, имеющего для
каждого k-го участника не меньшую, а хотя бы для одного – большую по-
лезность, нежели $f_k(z_k)$. Распределение z назовем ненасыщенным, если ни
одна из функций полезности не достигает максимума на Q_k в точке z_k, т. е.
если $f_k(z_k) < \sup\limits_{x_k \in Q_k} f_k(x_k)$.

Для упрощения формулировок в дальнейшем будем предполагать, не
оговаривая этого специально, что выполняются условия теоремы 1.

Теорема 2. *Если равновесное распределение является ненасыщенным,
то оно оптимально по Парето.*

Один из возможных способов управления равновесием состоит в пере-
распределении доходов между потребителями. При этом, как показывает
теорема 2, система не выходит за пределы множества состояний, опти-
мальных по Парето. Спрашивается, можно ли таким образом вывести си-
стему на некоторый наперед заданный оптимум Парето? Частичный от-
вет на поставленный вопрос дает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть функции полезности монотонно возрастают по всем
аргументам и $Q_k = R_+^n$. Тогда любое оптимальное по Парето распределе-
ние $z = (z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_m)$ такое, что $z_k \neq 0$, $k = 1, \ldots, m$, является равно-
весным при некоторых положительных значениях доходов.*

Доказательства теорем 2 и 3 используют стандартные для теории рав-
новесия схемы рассуждений [2, стр. 361] и [1, стр. 348].

Из теоремы 2 и известной теоремы об эффективных точках [1, стр. 254] непосредственно следует, что равновесное распределение максимизирует взвешенную сумму функций полезности на допустимом множестве X. Но отыскать взвешивающие коэффициенты, по существу, столь же трудно, как и само состояние равновесия. В некоторых случаях, однако, «глобальная» целевая функция может быть построена по целевым функциям потребителей и значениям их доходов без каких бы то ни было дополнительных вычислений. Впервые возможность такого рода была обнаружена Гейлом и Эйзенбергом [4] для модели распределения фиксированного вектора потребительских благ с линейными функциями полезности и при отсутствии собственных ограничений участников на доступные им потребительские блага (т. е. при $Q_k = R_+^n$). А. А. Малинин, В. М. Володин заметили, что этот результат остается верным и для положительно однородных вогнутых дифференцируемых функций одинаковой степени однородности. Следующая теорема является его дальнейшим обобщением.

Теорема 4. *Пусть для любого k функция f_k положительно однородна степени $\alpha_k > 0$ и неотрицательна на Q_k, множество Q_k является конусом с вершиной в нуле и содержит вектор, на котором эта функция строго положительна. Совокупность векторов x_k^*, $k = 1, \ldots, m$, y^*, p^* является равновесием тогда и только тогда, когда векторы x_k^*, $k = 1, \ldots, m$, y^* образуют решение задачи*

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\beta_k}{\alpha_k} \ln f_k(x_k) \to \max, \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{m} x_k \leqslant y, \tag{9}$$

$$x_k \in Q_k, \quad y \in Y, \tag{10}$$

а p^* есть вектор множителей Лагранжа, соответствующий неравенству (9).

Доказательство теоремы 4 приведено в последнем разделе работы.

Следствие. В условиях теоремы 4 все равновесные распределения эквивалентны.

Доказательство. Пусть распределения $x^* = (x_1^*, \ldots, x_k^*, \ldots, x_m^*)$ и $z^* = (z_1^*, \ldots, z_k^*, \ldots, z_m^*)$ равновесны и $f_j(x_j^*) \neq f_j(z_j^*)$. В силу вогнутости f_k, монотонности и строгой вогнутости логарифмической функции имеем

$$\ln f_k\left(\frac{x_k^* + z_k^*}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2} \ln f_k(x_k^*) + \frac{1}{2} \ln f_k(z_k^*), \tag{11}$$

причем для $k = j$ в (11) имеет место строгое неравенство. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\beta_k}{\alpha_k} \ln f_k\left(\frac{x_k^* + z_k^*}{2}\right) > \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \frac{\beta_k}{\alpha_k} \ln f_k(x_k^*) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \frac{\beta_k}{\alpha_k} \ln f_k(z_k^*). \tag{12}$$

Набор векторов $\frac{1}{2}(x_k^* + z_k^*)$ допустим в задаче (8) — (10), а наборы x_k^* и z_k^*, согласно теореме 4, максимизируют функцию (8). Следовательно, неравенство (12) невозможно.

Замечание. Эквивалентность равновесных распределений имеет место и без условия неотрицательности f_k. Чтобы убедиться в этом, достаточно в задаче (8) — (10) вместо Q_k рассмотреть конус $Q_k \cap \{x_k | f_k(x_k) \geqslant 0\}$.

4. РАВНОВЕСИЕ КАК ПРИНЦИП РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Изложенные результаты позволяют при некоторых дополнительных условиях получить решение проблемы распределения, поставленной в первом разряде.

Обозначим через $E(f)$ множество равновесных распределений, соответствующих набору f функций полезности. Это множество не пусто, поскольку выполнены предположения теоремы 1. Имеет место

Теорема 5. *Пусть множества Q_k суть конусы с вершинами в нуле и F — класс всевозможных наборов функций полезности f_k таких, что $f_k(x_k) - f_k(0)$ положительно однородны и принимают на Q_k хотя бы одно положительное значение. Тогда решение D проблемы распределения существует, причем $D(f) = E(f)$ для любого $f \in F$.*

Поскольку функция $f_k(x_k) - f_k(0)$ непрерывна в нуле и не равна тождественно константе, степень ее однородности больше нуля. Согласно сделанному в конце раздела 3 замечанию, из условий теоремы 5 вытекает эквивалентность равновесных распределений при любом $f \in F$. Поэтому теорема 5 является непосредственным следствием приводимого ниже более общего утверждения.

Теорема 6. *Предположим, что:* а) *класс F содержит всевозможные наборы линейных одинаковых с точностью до положительного линейного преобразования монотонно неубывающих функций: если $f_k = a_k c x_k + b_k$, где $c \in R^n$, $c \geqslant 0$, $c \neq 0$, $a^k > 0$, то $f = (f_1, \ldots, f_k, \ldots, f_m) \in F$;* б) *для любого $f \in F$ все равновесные распределения ненасыщены. Решение проблемы распределения существует на F тогда и только тогда, когда при любом $f \in F$ все равновесные распределения эквивалентны. Если решение $D(f)$ существует, то оно совпадает с $E(f)$.*

Прежде чем доказывать теорему 6, остановимся на некоторых вытекающих из нее следствиях. Общепринято, что «справедливое» распределение потребительских благ должно быть оптимально по Парето. Хотя ни одна из аксиом I—IV не влечет за собой этого фундаментального свойства, сопоставив теоремы 6 и 2, легко получаем

Следствие. Если в условиях теоремы 6 решение D существует, то все обоснованные распределения оптимальны по Парето.

Решение проблемы распределения было определено как точечно-множественное отображение. Необходимость такого определения была продиктована задачей охарактеризовать равновесие как принцип распределения потребительских благ и тем обстоятельством, что даже в простейших ситуациях равновесие неединственно. Все же аксиомы I—IV описывают равновесие для более узкого класса наборов функций полезности, нежели тот, для которого теорема 1 утверждает существование равновесия, и в этом смысле задача характеризации решена неполностью. Основная причина состоит в том, что для многих ситуаций имеются неэквивалентные равновесные распределения, и следовательно, отображение $E(f)$ не удовлетворяет аксиоме IV. В связи с этим интересно заметить, что приводимое ниже доказательство включения $E(f) \subset D(f)$ (см. (20)) опирается только на аксиомы I—III. Иными словами, если правило, состоящее в выборе равновесного распределения, не определяет единственным образом значений функций полезности, то и всякое другое правило, удовлетворяющее первым трем аксиомам, допускает такую же или большую неопределенность.

В настоящей работе мы не касаемся проблемы определения обоснованных уровней доходов. Этот вопрос имеет решающее значение на практике, но, по-видимому, гораздо более труден для теоретического анализа. Правда, известны модели равновесия, в которых доходы определяются апостериорно, но зато в них делаются не менее существенные априорные предположения: считается заданным распределение начальных запасов, акци и т. п. Однако и после того, как доходы фиксированы, распределение по требительских благ может быть осуществлено многими способами. Теоре ма 6 — дополнительный аргумент, демонстрирующий преимущества равно весного подхода при решении проблемы распределения.

Имеется интересная связь между рассмотренной здесь проблемой рас пределения и задачей торга по Нэшу [5]. Предположим, что выполнены условия теоремы 4 и пусть V — совокупность всех значений набора функций полезности на допустимом множестве: $V = \{v = (v_1, \ldots, v_m)$ $\in R^m \mid v_k = f_k(x_k),\ x_k \in Q_k, \sum_{k=1}^{m} x_k \leqslant y,\ y \in Y\}$. Рассмотрим задачу торга начальной точкой в нуле. Можно проверить, что все предположения Нэш выполняются. Его аксиомы приводят к выбору точки $v^* = (v_1^*, \ldots, v_k^*, \ldots, v_m^*)$, являющейся решением задачи

$$\sum_{k=1}^{m} \ln v_k \to \max, \quad v = (v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_m) \in V. \qquad (13)$$

Предположим теперь дополнительно, что степени однородности функ ций полезности одинаковы и доходы всех участников равны. Сопоставля (13) и теоремы 4 и 5, убеждаемся в том, что обоснованные распределени (и только они — см. ниже лемму 1) удовлетворяют рекомендациям Нэша если $x^* = (x_1^*, \ldots, x_k^*, \ldots, x_m^*) \in D(f)$, то $f_k(x_k^*) = v_k^*$, $k = 1, \ldots, m$. При невыполнении перечисленных выше условий решения проблемы распреде ления и задачи торга по Нэшу, вообще говоря, не совпадают.

Для доказательства теоремы 6 нам потребуется следующее вспомога тельное утверждение.

Лемма 1. *Если допустимые распределения x_k^*, $k = 1, \ldots, m$, и z_k^*, $k = 1, \ldots, m$, эквивалентны, ненасыщены и одно из них равновесно, то дру гое также равновесно.*

Доказательство. Пусть x_k^*, $k = 1, \ldots, m$, — равновесное распреде ление и p^* — соответствующий вектор равновесных цен. Покажем, что $p^* x_k^* = \beta_k$. Действительно, если $p^* x_k^* < \beta_k$, то рассмотрим семейство векто ров $u_k(t) = x_k^* + t(\bar{x}_k - x_k^*)$, где $1 \geqslant t > 0$, $\bar{x}_k \in Q_k$ и $f_k(\bar{x}_k) > f_k(x_k^*)$. Век тор $\bar{x}_k$ существует, поскольку равновесие ненасыщено. Очевидно, $p^* \bar{x}_k >$ $> \beta_k$, $u_k(t) \in Q_k$ и $f_k(u_k(t)) > f_k(x_k^*)$. Положим: $t^* = (\beta_k - p^* x_k^*) / (p^* \bar{x}_k -$ $- p^* x_k^*)$. Вектор $u_k(t^*)$ удовлетворяет всем ограничениям задачи потреби теля и доставляет функции $f_k(x_k)$ большее значение, нежели x_k^*, а это противоречит определению равновесия. Используя аналогичные соображе ния и эквивалентность распределения x_k^*, $k = 1, \ldots, m$, и z_k^*, $k = 1, \ldots, m$, легко показать, что

$$p^* z_k^* \geqslant \beta_k = p^* x_k^*. \qquad (14)$$

Пусть y^* — равновесный выпуск, тогда по определению равновесия для любого $y \in Y$ справедливо соотношение

$$p^* \sum_{k=1}^{m} x_k^* = p^* y^* \geqslant p^* y. \qquad (15)$$

Поскольку распределение z_k^*, $k = 1, \ldots, m$, допустимо, существует вектор $w^* \in Y$ такой, что

$$\sum_{k=1}^{m} z_k^* \leqslant w^*. \qquad (16)$$

Последнее неравенство вместе с (14) и (15) приводит к следующей цепочке соотношений

$$p^* \sum_{k=1}^{m} x_k^* = p^* y^* \geqslant p^* w^* \geqslant p^* \sum_{k=1}^{m} z_k^* \geqslant p^* \sum_{k=1}^{m} x_k^*. \qquad (17)$$

Таким образом, $p^* \sum_{k=1}^{m} x_k^* = p^* \sum_{k=1}^{m} z_k^*$. Сопоставляя это равенство с (14), убеждаемся в том, что

$$p^* z_k^* = \beta_k, \quad k = 1, \ldots, m. \qquad (18)$$

Далее, из (17) и (15) получаем для любого $y \in Y$

$$p^* \sum_{k=1}^{m} z_k^* = p^* w^* \geqslant p^* y. \qquad (19)$$

Из (18) и условия эквивалентности следует, что вектор z_k^* — решение задачи k-го потребителя при $p = p^*$. Но тогда в силу (16) и (19) совокупность векторов z_k^*, $k = 1, \ldots, m$, w^*, p^* является равновесием. Лемма доказана.

Доказательство теремы 6. Пусть $f \in F$, тогда, согласно теореме 1, $E(f) \neq \varnothing$ *. Покажем, что если решение D проблемы распределения существует, то

$$E(f) \subset D(f). \qquad (20)$$

Пусть $x^* = (x_1^*, \ldots, x_k^*, \ldots, x_m^*) \in E(f)$ и p^* — соответствующие равновесные цены. Из определения равновесия и ненасыщенности распределения x^* следует

$$p^* \geqslant 0,\ p^* \neq 0,\ p^* \sum_{k=1}^{m} x_k^* = \max_{y \in Y} p^* y,\ p^* x_k^* = \beta_k. \qquad (21)$$

Рассмотрим набор функций полезности $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots, \varphi_m)$, где $\varphi_k = p x_k$. В силу условия а) и первых двух соотношений (21) φ принадлежит F. Сопоставляя два последних равенства (21) с условиями а) и б) аксиомы III, заключаем, что $x^* \in D(\varphi)$. Применяя к задаче k-го потребителя (2) — (4) при $p = p^*$ теорему Куна — Таккера, получим для любого $x_k \in Q_k$

$$f_k(x_k^*) + \lambda_k(p^* x_k - \beta_k) \geqslant f_k(x_k), \qquad (22)$$

где множитель Лагранжа λ_k неотрицателен. Введем обозначение: $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_k, \ldots, \psi_m)$, $\psi_k(x_k) = f_k(x_k^*) + \lambda_k(p^* x_k - \beta_k)$. Из условия ненасыщенности следует, что $\lambda_k > 0$, поэтому $\psi \in F$. Далее, функции ψ_k являются положительными линейными преобразованиями функций φ_k. Многократное использование аксиомы 1 дает: $x^* \in D(\psi)$. Согласно (22), $\psi_k(x_k) \geqslant f_k(x_k)$ для всех $x_k \in Q_k$ и $\psi_k(x_k^*) = f_k(x_k^*)$. Применяя аксиому II, получим требуемое включение: $x^* \in D(f)$.

* Напомним, что условия теоремы 1 предполагаются выполненными.

Из (20) и аксиомы IV следует эквивалентность равновесных распределений для любого $f \in F$. Таким образом, условие эквивалентности необходимо для существования решения. Если $z^* \in D(f)$ и $x^* \in E(f) \subset D(f)$, то согласно аксиоме IV распределения z^* и x^* эквивалентны. Из условия б) и леммы 1 заключаем, что z^* равновесно. Итак, если решение существует, то $D(f) = E(f)$.

Для завершения доказательства остается проверить, что отображение $E(f)$ удовлетворяет аксиомам I—III. Выполнение требований I и II следует непосредственно из определения равновесия. Убедимся в том, что аксиома III также выполняется. Пусть $f = (cx_1, \ldots, cx_k, \ldots, cx_m) \in F$, $c \in R^n$, $c \geqslant 0$, и допустимое распределение $z = (z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_m)$ удовлетворяет условиям а) и б) аксиомы III. Поскольку $c \neq 0$ и множество Y содержит строго положительный вектор, имеем: $\max\limits_{y \in Y} cy > 0$. Поэтому из условий а) и б) следует, что величина $cz_k / \beta_k = \gamma$ положительна и не зависит от k. Теперь легко проверить, что распределение z является равновесным вместе с вектором цен $p = \frac{1}{\gamma} c$. Теорема полностью доказана.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4

Рассмотрим равновесие x_k^*, $k = 1, \ldots, m$, y^*, p^*. Очевидно, вектор x_k^* является решением задачи

$$\frac{\beta_k}{\alpha_k} \ln f_k(x_k) \to \max, \quad p^* x_k \leqslant \beta_k, \quad x_k \in Q_k. \tag{23}$$

Поскольку $0 \in Q_k$ и $\beta_k > 0$, в (23) выполняется условие Слейтера. Используя теорему Куна — Таккера, имеем для любого $x_k \in Q_k$

$$\frac{\beta_k}{\alpha_k} \ln f_k(x_k^*) \geqslant \frac{\beta_k}{\alpha_k} \ln f_k(x_k) + \lambda_k(\beta_k - p^* x_k), \tag{24}$$

где $\lambda_k \geqslant 0$. Заметим теперь, что

$$p^* x_k^* = \beta_k. \tag{25}$$

В противном случае нашелся бы вектор вида tx_k^*, $t > 1$, удовлетворяющий ограничениям задачи (23); это противоречило бы оптимальности x_k^*, поскольку $f_k(x_k^*) < t^{\alpha_k} f_k(x_k^*) = f_k(tx_k^*)$. Полагая в (24) $x_k = tx_k^*$, $t > 0$, а затем используя (25) и однородность f_k, легко получить неравенство

$$\lambda_k(t-1) \geqslant \ln t. \tag{26}$$

Если $t < 1$, то $\lambda_k \leqslant \ln t / t - 1$, и переходя к пределу при $t - 1 \to -0$, получаем: $\lambda_k \leqslant 1$. Предельный переход при $t - 1 \to +0$ дает неравенство противоположного смысла. Итак,

$$\lambda_k = 1. \tag{27}$$

Суммируя (24) по k и учитывая (25) и (27), получим

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\beta_k}{\alpha_k} \ln f_k(x_k^*) \geqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{\beta_k}{\alpha_k} \ln f_k(x_k) + p^* \left(\sum_{k=1}^{m} x_k^* - \sum_{k=1}^{m} x_k \right). \tag{28}$$

Заметим теперь, что согласно определению равновесия

$$p^* y^* \geqslant p^* y \text{ для любого } y \in Y, \tag{29}$$

$$p^* \sum_{k=1}^{m} x_k^* = p^* y^*, \quad p^* \geqslant 0. \tag{30}$$

Из (28) — (30) имеем для любых $x_k \in Q_k$ и $y \in Y$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\beta_k}{\alpha_k} \ln f_k(x_k^*) \geqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{\beta_k}{\alpha_k} \ln f_k(x_k) + p^* \left(y - \sum_{k=1}^{m} x_k \right). \tag{31}$$

Векторы x_k^*, $k = 1, \ldots, m$, y^* удовлетворяют ограничениям (9), (10). Выполнение условий (30), (31) означает, что эти векторы образуют решение задачи (8) — (10) а p^* является соответствующим вектором множителей Лагранжа.

Доказательство второй части теоремы использует обратный порядок идей. Пусть x_k^*, $k = 1, \ldots, m$, y^* — решение, а p^* — вектор множителей Лагранжа в задаче (8)—(10). Это означает, что справедливы соотношения (31) и (30). Из (31) и (30) при $x_k = x_k^*$ получаем неравенство (29), а при $y = y^*$ — неравенство (28). Положив в (28) $x_k = tx_k^*$, после несложных выкладок имеем для любых k и $t > 0$

$$(t-1) p^* x_k^* \geqslant \beta_k \ln t. \tag{32}$$

Это неравенство аналогично (26). Из него следует справедливость (25). Подставляя (25) в (28), получаем соотношение (24) при $\lambda_k = 1$, которое вместе с (25) показывает, что вектор x_k^* является решением задачи k-го потребителя (2) — (4). Учитывая теперь, что векторы x_k^*, $k = 1, \ldots, m$, y^*, p^* удовлетворяют условиям (9), (29), (30), заключаем, что они образуют равновесие. Теорема 4 доказана.

Отметим, что в условиях теоремы 4 степень однородности функций полезности не может быть больше единицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Карлин. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., «Мир», 1964.
2. Х. Никайдо. Выпуклые структуры и математическая экономика. М., «Мир», 1972.
3. G. Debreu. Theory of Value. N. Y., Wiley, 1959.
4. Д. Гейл. Теория линейных экономических моделей. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
5. J. F. Nash. The Bargaining Problem. Econometrica, 1950, v. 18, N. 2.
6. Н. Н. Воробьев. Современное состояние теории игр. Успехи матем. наук, 1970, т. XXV, вып. 2 (152).
7. М. Е. Примак. Об одной общей равновесно-оптимальной задаче и некоторых моделях экономики. Докл. АН СССР, 1971, т. 200, № 3.
8. М. Е. Примак. Об одной общей равновесно-оптимальной задаче математической экономики. В сб. Тр. IV зимней школы по математическому программированию. 25 января — 6 февраля 1972 г. Дрогобыч. Вып. 2. М., 1972 (ЦЭМИ АН СССР).
9. С. М. Мовшович. Модели экономического равновесия. В сб. Тр. I зимней школы по математическому программированию. 23 января — 5 февраля 1968, г. Дрогобыч. Вып. 1. М., 1969 (ЦЭМИ АН СССР).

Поступила в редакцию
30 X 1972