

MPRA

Munich Personal RePEc Archive

Asset Pricing - A Brief Review

Li, Minqiang

2010

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/22379/>
MPRA Paper No. 22379, posted 30 Apr 2010 17:08 UTC

Asset Pricing Models – A Brief Review

Minqiang Li
Georgia Institute of Technology

Abstract

I first introduce the early-stage and modern classical asset pricing and portfolio theories. These include: the capital asset pricing model (CAPM), the arbitrage pricing theory (APT), the consumption capital asset pricing model (CCAPM), the intertemporal capital asset pricing model (ICAPM), and some other important modern concepts and techniques. Finally, I discuss the most recent development during the last decade and the outlook in the field of asset pricing.

1. 引言

“资产 (asset)” 是一个比较笼统的金融学词汇。简单地来说，资产可以分为显性以及隐性两大类。显性资产包括个人的地产，企业的厂房，设备以及它发行的各种有形的证券，国家的外汇储备等具体的各种资产形式。隐性资产则包括一个公司拥有的名声，专利权，以及潜在的实体期权式的投资机会，等等。所谓“资产定价 (asset pricing)” 顾名思义就是对各种显性或隐形的资产进行价值上的粗略评估或精确计算。“投资组合 (portfolio)” 是指在资产定价理论的基础上根据不同的投资目标选择资产的最佳搭配。

从人类文明出现物质交换时，人类就已经开始进行资产定价了。在商品经济高度发达的现代社会，资产定价已经发展成了一个比较成熟的，严谨的金融学分支学科。另外，资产定价本身又已经分化出了各个清晰的分支，比如说金融衍生生物 (financial derivatives)，固定收益证券 (fixed income securities) 等等。由于资产定价和投资组合的高度相关性，早期的经典理论如资本资产定价模型并未对二者进行细致的区分。但近年来，随着资产定价理论大框架建立的完成，投资组合理论开始出现了独立发展的趋向。

资产定价以及投资组合理论的重要性是不言而喻的。从个人层面来说，它们对个人投资理财提供了理论上的指引。对公司来说，公司的各项金融决策经常依赖于资产的定价。比如公司在需要资金时，它可以根据当前股票的定价来决定应当发行债券还是股票。公司也可以利用不同的金融工具来应对各种潜在的风险。从国家层面来说，国家需要随时监控市场上资产定价的秩序是否正常。国家的各种政策如税收，交易额度，社会福利保障等又反过来影响资产的定价。另外，许多国家拥有主权投资基金 (sovereign investment funds)。如何对这些基金进行战略性投资也是一个重要的资产定价及投资组合课题。

我在本文中介绍各种资产定价及投资组合的理论，重点将被放在近十年来的理论发展。在此基础上，我也介绍最近以来这个领域的发展并提出未来的研究展望。鉴于资产定价理论的广度及深度，本文将试图较全面地对这个领域中最为重要的核心内容进行阐述。我将略去一些已经自成体系的分支，比如行为金融学 (behavioral finance)，金融工程学 (financial engineering)，等等。我也不特意阐述只特定于投资组合的理论。资产定价中一个核心的课题是股权溢价之谜 (equity premium puzzle)。本文也不具体讨论。另外，关于理论和实证之间的种种关联，也请读者参考其它文献。

在开始本文之前，我认为介绍一下已经出版的西方资产定价专著或综合评论是极其有用的。比较有启发性的综合评论有 Campbell (2000)，Mehra 和 Prescott (2003)，以及 Cochrane (2005)。Campbell 是对 2000 年以前的资产定价领域的综述，主要着眼于实证和理论之间的互动。Mehra 和 Prescott 着重阐述股权溢价之谜。Cochrane 着眼于资产定价和宏观经济之间的联系。关于专著，早期比较有名的有 Ingersoll (1987)，以及 Huang 和 Litzenberger (1988)。两者都是极好的书，

比较着重资产定价的微观理论模型。缺憾是稍稍显老了一些，另外两书中都不详细覆盖连续时间模型。比较新的书有 Duffie (2001)，Cochrane (2001)，LeRoy 和 Werner (2001)，Pennacchi (2008)，以及 Skiadas (2009)。其中 Cochrane (2001)，LeRoy 和 Werner 以及 Skiadas 都不详细涉及连续时间模型。Cochrane 全书都建立在随机折现因子 (stochastic discount factor) 的基础上，不同的模型由不同的随机折现因子导出。它主要讲述离散时间模型。此书数学要求较低，但概念讲得相当透彻。LeRoy 和 Werner 也不涉及连续时间模型，着重阐述资产定价的微观理论基础。它对数学要求程度和 Cochrane 相当，主要特色是资产的未来收益率被定义在一个有限维的希尔伯特空间 (Hilbert space) 之上，由此避免了各种数学上的技术性困难。Skiadas 及 LeRoy 和 Werner 两本书比较类似，所不同的是 Skiadas 更加理论化，对读者的数学程度要求较高，但也不涉及连续时间模型。Duffie 是比较权威的论著，涉及连续时间模型，但对资产定价的初学者可能过于深奥和简练。最后，和大部分其它书不同，Pennacchi 覆盖面比较广，基本涵盖了资产定价的所有最重要的部分，数学程度也适中，是一本初学者不可多得的入门书籍，对教学者来说也是一本极其实用的入门教材。但本书的深度比其它的书略浅些。另外，对连续时间和金融工程感兴趣的读者可以参考 Björk (2009) 或 Shreve (2004)。

本文的具体安排如下。在第二节里，我介绍早期的资产定价经典理论。第三节讲述一些稍近期的重要概念及技巧，基本上是八十年代以后的成果。第四节里将着重讲述资产定价最近十年以来的进展。第五节是总结。

2. 经典理论

资产定价理论的核心完整地建立在三个互相等价的基石上，那就是，套利 (arbitrage)，优化 (optimization) 和平衡 (equilibrium)。所谓套利是指市场上不存在套利机会，优化则指单一的代表性投资者进行优化决策，而平衡则指市场的供求平衡。如果我们假定其中的任何一个，我们就能证明随机折现因子的存在。不同的模型则导出不同的折现因子。在这个意义上，尽管不同的模型可能会给出很不一样的价格或指示很不一样的决策，不同的资产定价模型是统一的。有些模型则研究特定的市场或资产，比如固定收益类，金融衍生产品，等等。在初学资产定价理论时，如果清楚这个大框架，就不会在众多的模型前觉得眼花缭乱。

在资产定价理论的发展中，比较有影响的理论包括资本资产定价模型 (Capital Asset Pricing Model, 后略为 CAPM)，套利定价理论 (Arbitrage Pricing Theory, 后略为 APT)，跨期资本资产定价模型 (Intertemporal Capital Asset Pricing Model, 后略为 ICAPM)，消费资本资产定价模型 (Consumption Capital Asset Pricing Model, 后略为 CCAPM)，以及期权定价理论 (Option Pricing Theory)。其中，Markowitz, Miller 和 Sharpe 因为提出和发展 CAPM 而获得 1990 年度诺贝尔经济学奖，Merton 和 Scholes 则因为提出和发展期权定价理论而获得 1997 年度诺贝尔经济学奖。尽管这些早期模型的实证表现并不是特别出色，对它们的透彻理解有助于我们体会建立更复杂模型的必要性和可行性，因此极其重要。下面我分别对这些理论做一个介绍。

2.1 资本资产定价模型

CAPM 是一个单期的理论，对它的发展起重要作用的文章有 Markowitz (1952)，Sharpe (1964)，Lintner (1965)，Mossin (1966)，以及 Black (1972)。Markowitz 的工作是开创性的。在他之前，人们已经认识到了风险和预期收益率之间的关系。Markowitz 的贡献在于它提出了风险分散 (diversification) 这个概念。一个厌恶风险的投资者希望在固定预期收益率的同时承担尽量小的风险。Markowitz 用方差来描述一个随机收益率的风险。投资者通过调节各个资产在组合中的比例来使方差最小化。尽管可以说 Markowitz 开启了或退一步说影响了整个理论金融界，在当时他的工作的重要性并没有被马上认识到。事实上，在 Markowitz 的博士论文委员会中的 Friedman (后者以后也是诺贝尔奖获得者) 质疑 Markowitz 的工作是否达到了经济学博士的水准要求。后来，Sharpe (1964)，Lintner (1965)，Mossin (1966)，以及 Black (1972) 又对 Markowitz 的均值-方差理论作了延伸。Sharpe 的脚注中已经第一次出现了现代 CAPM 的方程式，只是他的符号和现代通用的有所不同。Black 证明了如果不存在无风险资产时，通常的 CAPM 会被一个零 β - CAPM 所代替。这些早期的文献中已经提出了市场风险 (亦即系统风险) 和公司特定风险 (亦即非系统风险) 这个收益率分解形式。另外，有效边界 (efficient frontier)，零相关组合 (zero-correlated portfolio)，基金分离定理 (fund separation theorem) 等也是 CAPM 中极其重要的概念。顺便提一下，读这些原著时需注意在早期文献中有效边界图中横纵坐标分别是预期回报率和标准方差，和现代的习惯正好相反。

理论上，单期的 CAPM 的推导有多种形式。比如我们可以假定正态分布的随机收益率或特定的效用函数。我采用的期望值-方差优化方法如下。假设投资机会是 n 个线性不相关的带风险资产，并让 R_i 表示资产 i 在时期末的随机收益率。假设预期回报率向量是 $\mathbf{ER} = \bar{\mathbf{R}}$ ，协方差矩阵是 $\mathbf{Var}(\mathbf{R}) = \mathbf{V}$ 。一个期望值-方差投资者的问题是怎样选择各个资产的权重 \mathbf{w} 来使得投资组合的方差最小。这里有两个限制条件。一个是权重得加和为 1。另一个条件是投资组合的预期收益率固定在一个实数值 \bar{R}_p 。我们以 \mathbf{e} 来代表所有分量都是 1 的向量。具体的优化问题如下：

$$\min \frac{1}{2} \mathbf{w}' \mathbf{V} \mathbf{w} \quad (2.1)$$

并满足权重加和为 1，以及达到目标预期收益率 \bar{R}_p

$$\mathbf{w}' \bar{\mathbf{R}} = \bar{R}_p, \quad \mathbf{w}' \mathbf{e} = 1. \quad (2.2)$$

在 \bar{R}_p 历遍实数轴时所有的解都被称为有效组合 (efficient portfolio)，它们的全体就是有效边界。这个问题很容易用拉格朗日乘子 (Lagrangian multiplier) 的方法求解。解的形势是两个有效组合的加权平均。第一个组合的权重和 $\mathbf{V}^{-1} \bar{\mathbf{R}}$ 成正比。第二个组合的权重和 $\mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}$ 成正比。第二个组合其实正是全局方差最小化组合 (global

minimum variance portfolio)。可以证明有效边界在标准方差-预期收益率空间中是一条双曲线的正支。

有效组合的权重形式的另一个极重要的特点是和固定的预期收益率 $\overline{R_p}$ 成正比。如果任意在有效边界上选择两个非全局方差最小组合，这个成正比的特点使得所有有效边界上的组合都可以通过这两个选定的组合来产生。这就是一个共同基金定理，通常称为二基金分离定理（Two Funds Separation Theorem）。二基金分离定理指出，尽管最初给定的投资机会中有 n 个带风险资产，对一个期望值-方差投资者来说，如果只给他两个有效组合作为带风险资产，投资机会和原来的 n 个带风险资产是完全等同的。

CAPM 中一个极重要的概念是 β 。在讲 β 的时候，我们必须给定两个有序的组合 p 和 q （不一定得有效）。这个 β_{pq} 的定义是组合 p 和 q 的随机收益率的协方差除以组合 q 的随机收益率的方差。熟悉线性回归的读者可能已经发现这就是单一变量线性回归的系数。引入 β 这个概念以后，对任何一个非全局最小方差有效组合 m ，我们可以证明存在唯一的一个有效组合 z ，使得 $\beta_{mz} = 0$ 。也就是说除了全局最小方差有效组合，其它的有效组合都是一对一对的，每一对里的两个组合是不相关的。进一步，每一对里的两个组合分别处于全局最小方差有效组合的两侧。它们的两个预期收益率与全局最小方差有效组合的预期收益率的距离的乘积是一个不依赖于这个特定对的常数，并且它们的两个随机收益率的方差的调和平均正好是全局最小方差有效组合的预期收益率的方差的两倍。这两个性质似乎未曾在文献中出现过。利用这些性质，对固定的一个不相关组合对 m 和 z ，可以证明任何一个有效组合 p 的随机收益率都是 m 和 z 的随机收益率的加权平均，而两个权重恰恰就是 p 关于 m 和 z 的 β 值。这就是 Black（1972）里提出的零 β - CAPM 模型。以上的证明方法优于原著中比较基本和琐碎的方法。注意零 β - CAPM 模型实际上是一个随机收益率分解形式。在这个分解形式中的两个基就是 m 和 z 的随机收益率。

在通常形式的 CAPM 里是有无风险资产的。在标准方差-预期收益率空间中无风险资产和任何其它资产的所有组合的轨迹是一条直线。我们已知所有带风险资产给出的最佳投资机会就是有效边界。因此，在加入一个无风险资产后，最佳投资机会就成了一条与原有效边界相切的正斜率的直线。这条切线就是所谓的资本市场线（capital market line）。这个切点上的组合就是所谓的市场组合 m 。所有的投资者，不管他们的风险意愿如何，都同意同一个市场组合。他们的不同点是选择不同的无风险资产与市场组合之间的比例。这是在有无风险资产时的二基金定理，通常把它称为货币市场基金分离定理（Money Market Fund Separation Theorem）。

一个组合的随机收益率 R 与无风险资产的收益率 R_f 的差被称为超额随机收益率（excess return）。一个资产或组合的预期超额收益率与它的标准方差的商就是单位风险报酬，也称夏普比率（Sharpe ratio）。资本市场线上的组合具有最大的夏普比率，一般记作 S_m 。

在存在无风险资产时，一般对超额随机收益率进行分解。得到的方程式就是著名的 CAPM 方程式，如下所示：

$$R - R_f = \beta (R_m - R_f) + \varepsilon. \quad (2.3)$$

这里 $\beta (R_m - R_f)$ 这部分是因为承担市场风险而引起的收益率， ε 是一个资产的特定风险，它与 R_m 零相关，并且期望值是 0。所以 ε 又被称为非系统性风险（non-systematic risk）。承担非系统性风险只增加方差，但不对预期收益率有任何的贡献。对上式求期望值，我们发现预期超额收益率与 β 成线性关系，这就是所谓的证券市场线（security market line）。

在 CAPM 方程式中有效组合 m 是由 R_f 和纯风险资产有效边界共同决定的。可以证明它的权重向量和 $V^{-1}(\bar{R} - R_f)$ 成正比。如果不考虑协方差矩阵的话，各个原始资产在市场组合里的比重和它们的预期超额收益率成正比，这个结果符合我们的直觉。

在结束 CAPM 的介绍前，我提一下在应用中很有用的几个延伸。在 CAPM 中 m 是一个有效组合。如果我们用一个不一定是有效组合的消极投资组合 p 来代替它会怎样呢？在这种情况下如果只考虑无风险资产和 p 之间的组合的话，我们只能得到一个较小的夏普比率 S_p 。Treynor 和 Black（1973）引入了积极管理组合的概念。这个积极管理组合 a 可以通过最大化信息比率（information ratio） I_a 来得到。Black 和 Treynor 进一步证明了一个勾股定理

$$S_m^2 = S_p^2 + I_a^2. \quad (2.4)$$

这个方程指出通过积极管理组合和消极组合两步走，我们也可以回到原来的资本市场线上去。损失的夏普比率刚好由积极管理组合的信息比率补回。MacKinlay（1995）则指出信息比率实际上也是一个组合的夏普比率。对上述方程式也可以理解为 m 确实是有效的，但基金管理者拥有私有信息，所以他可以得到比市场夏普比率更高的单位风险报酬。Treynor 和 Black 原文中采用后一种较狭义的理解。另外一个 CAPM 的延伸是 Black-Litterman 模型（Black 和 Litterman，1992）。这里基金管理者也拥有私有信息，但他利用贝叶斯（Bayesian）理论来更新预期收益率向量和协方差矩阵，然后再进行期望值-方差优化。最后，在 CAPM 中风险是用方差来模拟的，有相当一部分研究工作用其它各种风险的测度来代替方差，比如基尼系数（Gini coefficient），VaR，等等。这里不作详细介绍。

2.2 套利定价理论

单期的 CAPM 中只有一个因素，那就是市场的随机收益率。但早在 1966 年，King（1966）就在实证中发现除了市场因素外，工业界因素似乎也影响资产的预期收益率。这也许是套利定价理论的最早的一个出发点。

套利定价理论 (APT) 和 CAPM 不同, 可以有多个因素。它的假设也和 CAPM 不同, 一般可以认为 APT 的假设稍微弱一些, 但是代价是 APT 的结论也弱一些。在 APT 的发展过程中起重要作用的文献有 Ross (1976), Huberman (1982), Chamberlain 和 Rothschild (1983), Chamberlain (1983), Ingersoll (1984), 以及 Connor (1984)。最早的 APT 出现在 Ross, 他把理论严格地建立在微观经济的基础上, 但是读这篇原著时思路不容易理清。Huberman 把 APT 的推导作了简化。简化的要素是引进了渐进套利 (asymptotic arbitrage) 这个概念。Chamberlain 和 Rothschild, 以及 Chamberlain 详细地解释了 APT, 期望值-方差分析和因素分析之间的关系。Ingersoll 以及 Connor 又对 APT 的各个方面作了更细致的研究。其中 Ingersoll 从理论上严格分析了所需因素的个数, 是很有启发性的文章。

下面我简单介绍一下 Huberman (1982) 的主要研究结果。他考虑一连串的市场, 每后一个市场比它前一个多出一个不同的资产。在第 n 个市场中有 n 个带风险资产, 但是不管在哪个市场中, 所有资产的收益率仅仅由 k 个固定的因素产生。这是 APT 里最重要的模型假设, 用数学方程表示如下:

$$\mathbf{x} = \mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.5)$$

这里 \mathbf{x} 是 n 个资产的收益率向量, \mathbf{E} 是它们的平均收益率向量, $\boldsymbol{\delta}$ 是一个因素矩阵, 它的每一个列向量代表一个因素, $\boldsymbol{\beta}$ 被称为因素负荷矩阵, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是一个随机向量。Huberman 还假设 $\boldsymbol{\delta}$ 正交归一, 以及 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的关联矩阵是对角的, 并有一致的上限。这些假设都不是必需的, 而是可以弱化。APT 的目的是导出一个解释平均收益率 \mathbf{E} 的模型。为达到这个目的, Huberman 引进了一个渐进套利的概念。一个投资策略在这个模型里是一连串的向量, 每个向量是一个在第 n 个市场里的投资组合。如果一个投资策略 c 在所有市场里都不需要任何净投入, 但它在每个市场里的平均收益率趋向于正无穷, 同时它在每个市场里的随机收益率的方差趋向于零, 它就被称为一个 (渐进) 套利组合。Huberman 中没有提及, 但套利组合的两个关于随机收益率的期望值和方差的条件可以简化成一个条件: 如果存在一个净投入为零的投资策略, 并且它有一个子序列使得平均收益率与标准方差的商趋向于无穷, 那么市场上就存在渐进套利组合。

除去刚开始的市场结构的假设, APT 的理论建立在唯一的一个假设之上, 那就是市场里不存在渐进套利。APT 的结论是: 如果市场里不存在渐进套利, 那么预期收益率必须近似地满足一个线性关系, 也就是说, 平均收益率可以近似用常数向量和 $\boldsymbol{\delta}$ 中的向量来表示。如果使用以上的简化条件, APT 的推导其实相当的简单。一般使用反证法。假设平均收益率不近似地满足上述线性关系。如果我们把向量 \mathbf{E} 投影到由常数向量和 $\boldsymbol{\delta}$ 中的向量构成的子空间上, 那么可以证明回归残差向量就构成了一个渐进套利组合。

APT 和 CAPM 是建立在不同假设之上的两个不同的理论，严格上说不能过于简单地进行比较。但如果我们在 APT 中忽略“渐进”这个重要的假设，那么 CAPM 可以简单地看成是 APT 的一个特例。

2.3 消费资本资产定价模型以及跨期资本资产定价模型

消费资本资产定价模型 (CCAPM) 以及跨期资本资产定价模型 (ICAPM) 是在 CAPM 和 APT 之外两个比较有影响力的模型。它们可以被看成是 CAPM 的特例及推广。在 CCAPM 中，消费和投资组合被一起考虑。ICAPM 则是考虑多期的模型，这些模型可以是离散时间多期的，也可以是连续时间多期的。这两个模型并不是一个固定的孤立的模型，而是两个大框架。CCAPM 和 ICAPM 并不完全互相排斥。CCAPM 可以是跨期的，ICAPM 也可以包含消费这个因素。由于这两个模型经常是你中有我，我中有你，所以我们一并介绍。

早在 1928 年，Ramey (1928) 就考虑了一个跨期消费资本资产定价模型。尽管他研究了多期模型，但他只考虑单一固定收益率资产。直到几十年以后，Mossin (1968)，Samuelson (1969) 和 Merton (1969) 才能够解决带随机性的多期的消费和资产组合问题。稍后的模型经常是连续时间多期的，比如 Merton (1971) 以及 Merton (1973)。重要的文献还包括 Lucas (1978)，Breedon (1979)，Cox, Ingersoll 和 Ross (1985)，以及 Cox 和 Huang (1989)。一个比较普遍的结果是跨期消费资本资产定价模型一般会导出多因素随机收益率模型。其中市场组合会是一个因素，另外针对每一个随机状态变量一般都会会有一个对冲 (hedge) 因素。因此在形式上 ICAPM 和 APT 较类似。例外是对数效用函数 (log utility) 的特殊情况下，投资者经常会有忽略随机状态变量的短视 (myopic) 行为，因此单因素仍旧成立。

在 CCAPM 中，资产的平均收益率被整个经济中的总消费的成长率所决定，也就是可以认为，在 CCAPM 中，CAPM 中的市场收益率和将来消费的边缘效用函数是完全负相关的。在这一点上，可以认为 CCAPM 是 CAPM 的特例。但 CCAPM 可以是跨期的，这一点可以看成是 CAPM 的推广。另外，最简单的 CCAPM (Breedon, 1979) 可以看成是一个简化了的 ICAPM 模型，它把一个多因素的 ICAPM 模型用一个消费因素概括了。这种简化的根本原因是早期的模型一般使用时间上可分拆 (time-separable) 的效用函数。

解 ICAPM 模型通常有两种技巧，一种是动态规划 (dynamic programming)，一种是鞅过程 (martingale approach)。在动态规划中，解模型的过程是从最后到最前，即所谓的倒向归纳 (backward induction)。在离散时间模型中，每一步都成为了一个单期模型。在连续时间中，类似的推导可以得出有名的 Bellman 偏微分方程。Bellman 方程一般是非线性的并很少有解析解，但可以用数值解法。鞅过程早期文献主要是 Pliska (1986)，Karatzas, Lehoczky 和 Shreve (1987)，以及 Cox 和 Huang (1989)。这种方法一般需要假设市场是完整的，但 He 和 Pearson (1991) 把鞅过程方法推广到不完整市场情形。在鞅过程中，投资者的财产被视为一个优化

了的投资组合的价值，而消费就相当于这个投资组合的红利。利用随机折扣因子的概念，财产可以表示成未来红利流量的现时价值。使用这个预算约束（**budget constraint**）方程式，多期的投资消费问题被演化成一个关于最佳消费途径的变分问题（**variational problem**）。这个变分问题的解通常会引导至一个线性的偏微分方程。由于是线性的，这个方程可能会比 **Bellman** 方程更容易解。最佳投资组合的比例则一般在解出消费路径和财产后再单独解决。

3. 近期重要理论及技巧

3.1 随机折现因子（**Stochastic Discount Factor**）

随机折现因子是一个特殊的随机变量 m ，它可以给出市场上所有资产的价格。以单期模型为例，如果一个资产的随机收益是 x ，那么它的价格就由公式 $p = \mathbb{E}mx$ 给出。对任何随机收益率 R 而言，则有 $1 = \mathbb{E}mR$ 。所有资产定价理论可以通过随机折现因子来描述。事实上，**Cochrane**（2001）以及 **Shefrin**（2008）这两部论著通篇都使用随机折现因子这种语言。

随机折现因子的存在性，线性与否，唯一性，分量的正负性，单调性，方差结构，因素结构等都与市场的结构密切相关。比如说，在有限维单期资产市场中，单一价格法则决定随机折现因子是线性的；市场是完整的，当且仅当随机折现因子是唯一的；一个完整市场中没有套利，又当且仅当随机折现因子的各个分量都为严格正；当随机折现因子不唯一时，存在而且仅存在唯一一个被交易的随机折现因子。随机折现因子的重要性是不言而喻的。例如，在效用函数模型中，它与边缘效用直接相关。在 **CCAPM** 中它和消费的增长率直接相关。在某种意义上，不同的资产定价模型可以被认为是研究不同的随机折现因子。

3.2 **Hansen-Richard** 收益率分解

Chamberlain 和 **Rothschild**（1983）证明，零 β -**CAPM** 可以被看成希尔伯特空间的直和，但我们需要一种比较特殊的协方差内积（**inner product**）。在这种框架下，任何资产的随机收益率是希尔伯特空间中的一个向量，可以用投影（**projection**）来分解成常数向量部分，市场随机收益率部分，以及一个残差向量（**residual vector**）。这三个分量在希尔伯特空间中互相垂直。这种把 **CAPM** 认为是一种向量的垂直分解的观点在金融学中并不是传统的观点，一般的教科书都把 **CAPM** 描述成是一个线性回归，因此三个分量彼此是零协方差。这两种不同的观点都是很助于 **CAPM** 的理解的。其中第一种观点赋予了 **CAPM** 几何意义，因此使得很多概念变得直观。比如资产组合的有效边界在上述希尔伯特空间中是一条直线。

随机变量构成的希尔伯特空间的通常内积实际上并不是协方差内积，而是乘积内积： $\langle p, q \rangle = \mathbb{E}pq$ 。使用这种内积导致另一种不同的随机收益率的分解方式，这就是 **Hansen-Richard** 收益率分解。注意在 **Hansen** 和 **Richard**（1987）中作者们还考虑了条件信息（**conditional information**）。在 **Hansen-Richard** 收益率分解中，每

个资产的随机收益率被分解成三个部分。第一个部分是一个对所有资产都相同的随机收益率，它和随机折现因子成正比。第二个部分的基向量一般取常数向量在超额收益率空间上的投影。第三个部分是一个残差向量。这三个部分在以乘积为内积的空间中互相垂直。Hansen-Richard 收益率分解在解决某些问题中比 CAPM 分解更加方便，例如 Hansen 和 Richard 以及 Cochrane 和 Saa-Requejo (2000)。通常在使用 Hansen-Richard 收益率分解时，会同时使用 Hansen-Richard 随机折现因子分解。Hansen-Richard 随机折现因子分解和 Hansen-Richard 收益率分解极其类似，只不过在分解随机折现因子中，第二个部分的基一般取常数向量在超额随机折现因子空间上的投影。

3.3 Hansen-Jaganathan 边界

对一个市场结构，考虑任意两个不同的随机资产收益率 R_1 和 R_2 以及所有可行的随机折现因子 m ，可以证明

$$\max_{R_1 \neq R_2} \frac{\mathbb{E}(R_1 - R_2)}{\sigma(R_1 - R_2)} = \min_m \frac{\sigma(m)}{\mathbb{E}(m)}. \quad (3.1)$$

这就是著名的 Hansen-Jaganathan (1991) 边界。为了更清楚地理解上式，我们可以考虑一个完整的市场，因此市场上存在无风险资产，并且以及所有可行的随机折现因子 m 是唯一的。左式因此就是市场的 Sharpe 因子，也就是单位风险能得到的最大回报。Hansen-Jaganathan 边界用随机折现因子给出了 Sharpe 因子。在普遍情况下，不一定存在无风险资产，随机折现因子也不唯一。用 Hansen-Richard 收益率分解以及随机折现因子分解可以很方便地得到等式的两边什么时候取到极值，这里从略。另外，Hansen-Richard 收益率分解也让我们可以直观地在希尔伯特空间中体会 Hansen-Jaganathan 边界的几何意义。

Hansen-Jaganathan 边界的一个最直接的应用是用来评估不同的资产定价模型。参见 Hansen, Heaton 和 Luttmer (1995)，以及 Hansen 和 Jaganathan (1997)。不同的资产定价模型会给出一系列可行的随机折现因子。因此我们可以计算 Hansen-Jaganathan 边界，并且和市场的 Sharpe 因子进行比较。如果为了给出合理的 Sharpe 因子，模型中的参数就不符合期待的正常值，那么模型就不是足够的。关于评估资产定价模型的重要文献还包括 Snow (1990)，Bansal 和 Viswanathan (1993)，以及 Jaganathan 和 Wang (1996)。另外在此顺便指出，评估资产定价模型的另一个重要手段是检验 Euler 方程。

如果一个资产将来得收益完全不及另一个投资组合，那么它的价格应当低于这个组合的价格。这就是无套利边界 (no-arbitrage boundary)。Hansen-Jaganathan 边界可以说是关于无套利边界的一个结论。但在通常情况下，无套利边界经常太宽，以至于不太实用。Cochrane 和 Saa-Requejo (2000) 考虑单期，多期，以及连续时间的好交易 (good deal) 边界。在同一刊物中，Bernardo 和 Ledoit (2000) 考虑得失比率 (gain-loss ratio) 边界。这两个边界由于引进了其它约束条件，一般都

比无套利边界紧。最近，研究者也考虑了各种其它的非无套利边界。各种边界一般引入不同的约束条件，因此很难普遍地比较各种边界的优缺点。

3.5 风险中性定价 (Risk-neutral Pricing) 以及其它测度变换方法

风险中性定价理论并不是孤立地发展起来的。事实上，即使是单期的 CAPM 也可以用风险中性定价理论来描述。理论的建立中，主要文献有 Cox 和 Ross (1976), Harrison 和 Kreps (1979), 以及 Harrison 和 Pliska (1981)。另外, Cox, Ross 和 Rubinstein (1979) 考虑了二叉树 (binomial tree) 期权模型。这个简单的模型对理解风险中性定价理论极其有用。著名的 Black-Scholes (Black 和 Schole, 1973) 期权模型也可以用风险中性定价理论来描述。

在使用随机折现因子的模型中，资产的价格是由将来的收益和随机折现因子的内积给出的。这个内积是在物理测度，也就是实际生活中的测度之下的期望。分两步看，我们先在物理测度下计算未来收益的期望值，然后再用风险调整过的折扣率来计算现在的价格。模型的困难常常在计算风险调整过的折扣率，因为这个折扣率对不同的资产是不同的。在风险中性定价中，我们用无风险折扣率来折算任何资产的期望值。因为这个原因，任何资产都被视为不带任何风险，因此这种方法被称为风险中性定价。代价是我们不能用物理测度来计算期望值，而是得使用风险中性测度。可以认为，对每个资产而言，这个测度是用风险调整过的一个测度。但实际上市场上风险中性测度常常是唯一的，并且不随每个资产而变。这就使得风险中性定价具有很大的优越性。对任何一个资产，我们只需计算它在风险中性测度下的期望值，然后假装这个资产不带风险，而使用无风险利率进行折扣。从某种程度上说，风险中性定价就是错错得对，我们使用“错误的”测度，然后再使用“错误的”折扣率。这两个“错误”的同时使用给出正确的资产价格。用术语来说，所有资产的价格，如果用无风险债券来衡量的话，在风险中性测度中就是一个鞅 (martingale) 过程。

物理测度和风险中性测度显然是有联系的。它们的联系正是投资者对风险的态度。这两个测度的 Radon-Nikodym 商是由投资者的边缘效用函数决定的。如果建模者不关心边缘效用函数，他可以直接写下风险中性测度，然后在这个测度下计算资产的价格。这种方法被广泛使用，尤其是在金融衍生品定价方面。另外，如果研究者有基本资产以及建立在它之上的衍生品的价格，原则上他可以把投资者的边缘效用函数回算出来。比如，他可以研究跳跃是不是在定价中起作用。参见 Pan (2002)。

需要强调的是，测度变换 (measure change) 是一种很普遍的技巧。根据问题的需要，有时候使用风险中性测度之外的测度对计算会更加方便。例如在考虑随机利率结构模型时，所谓的远期测度 (forward measure) 经常会比较方便。可以说所有的测度变换基本上都是从某种计价单位变换 (change of numeraire) 而来。如果市场满足某些必要条件，可以证明对任何计价单位，都存在这么一个测度，在这个测度底下，以该计价单位衡量的所有资产的价格都是一个鞅 (Geman, Karoui 和

Rochet, 1995)。这个结论使得用测度的变换来定价非常地机械化，因此应用非常方便。具体地说，研究者首先确定计价单位，然后分析它所引起的测度变换，最后利用鞅过程来定价。困难主要在于寻找出一个方便的测度。在 Black-Schole 理论中，风险中性测度可以看成是使用了以无风险债券为计价单位而引起的测度变换。利率期权定价中的远期测度则是使用了以远期债券为计价单位而引起的测度变换（参见 Vasicek, 1977）。另外，在交换期权（exchange option）的计算中，经常会用某个股票的价格来作为计价单位（参见 Li, 2008）。

3.6 基于生产的定价理论及综合平衡（General Equilibrium）理论

早期的经典理论一般都是局部平衡（partial equilibrium）理论。这是因为一般它们都假设外生的（exogenous）资产收益率随机过程，然后在给定的投资机会的情况下去求解最优组合以及消费途径。但实际上，投资者本身的决策经常会反过来影响资产收益率的动态特性。因此，一个完整的模型需要同时考虑投资机会和投资决策相互之间的影响。这种模型一般称为综合平衡模型，或称一般均衡模型。我个人觉得前一种译法较为贴切。局部平衡理论中，资产经常被比喻成一棵果树，果树的收成是完全随机的，并不随投资者的行为而变。综合平衡模型一般会引入生产（production），比如说在果实价格高昂时，消费者可以通过除草，施肥，嫁接等办法来影响将来的收成。这个变化了的收成的分布又会反过来影响资产的价格，而这又会进而影响消费者的行为，等等。

在八十年代中期一个比较重要的理论突破是 Cox, Ingersoll 和 Ross (1985a, 1985b) 在两篇姐妹论文中提出的一个综合平衡理论。第一篇论文着重介绍一般理论，第二篇论文则讨论一个具体的例子。这个理论也可以看成是一个 ICAPM 理论。它的最大特点在于无风险收益率是内部决定的。Cox, Ingersoll 和 Ross 假设只有一种可以同时用来消费和投资的商品。如果选择投资，则有多种带风险的技术可供选择。投资者得决定消费多少比例的商品，以及如果投资节省下来的商品。另外，投资者也可以借钱，但他必须支付一个无风险利率。Cox, Ingersoll 和 Ross 注意到在市场平衡的情况下，借出和借入的量必须相等，也就是说，无风险债券的净供给量是零。无风险利率因此就是一个影子价格（shadow price）。通过这个约束条件，Cox, Ingersoll 和 Ross 推导出了无风险利率的表达式。通过同样的推理，这个模型也可以用来给任何一个净供给量为零的资产定价，比如说长期债券，期权，等等。它们的价格满足一个类似 Black-Scholes 理论的偏微分方程。在第二篇论文中，Cox, Ingersoll 和 Ross 考虑了一个具体的模型。在这个模型中，无风险利率的解满足一个 Ito 扩散过程，它的漂移函数（drift function）和 Vasicek 过程类似，但它的扩散函数（diffusion function）不是常数，而是平方根形式，数学上也称为 Feller 过程。具体形式如下：

$$dr = k(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dB, \quad (3.2)$$

其中 k , θ , σ 都是常数, B 是一个标准布朗运动 (Brownian motion)。值得一提的是, 尽管第二篇论文只是讨论上述具体的例子, 但事实上这个具体的例子应用极其广泛, 以至于人们经常用 CIR 模型来称呼这个具体的模型。例如, 在固定收益类产品定价, 信用产品定价, 期权定价等方面 CIR 模型都是极其常用的模型。CIR 模型受欢迎的一个重要的原因是尽管它比 Vasicek 模型更实际, 但同时这个模型和 Vasicek 模型一样有解析的转移密度, 债券价格, 债券期权价格, 等等。因此熟悉这个 CIR 模型是很有用的。

基于生产的定价理论及综合平衡理论现在仍旧是一个活跃的研究方向, 尤其是关于它们的实证表现。

3.7 其它的风险偏好函

在早期的资产定价理论中, 一般都使用经典的时间上可分拆 (time-separable) 的 CARA 风险偏好函数。Merton 的早期理论基本上都使用这个函数。它的好处是由于形式简单, 经常可以得到问题的解析解。但是它也有一个比较致命的弱点, 那就是同一个相对风险厌恶系数决定了两个不同的东西。一个是在同一个时期内对经济的不同状态之间的偏好, 另一个是在两个不同时期的消费之间的偏好。这种自由度的缺乏使得 CARA 风险偏好函数不能很好地解释很多实证上的结果, 因此产生了股权溢价之谜 (Mehra 和 Prescott, 1985), 无风险利率之谜 (Weil, 1989), 股票价格波动之谜等等资产定价理论中许多令人费解的结果。资产定价理论近二三十年的发展可以说是完全由这些悬案, 尤其是股权溢价之谜推动的。在八十年代初期, 研究界的普遍观点是资产定价理论已经完全成型, 所有的问题都可以原则上用现有框架解释和研究, 因此 Mehra 和 Prescott 花了整整六年的时间才发表他们的文章。比较有意思的是 Mehra 和 Prescott 文末指出了各种可能的解释股权溢价之谜的方法, 这些后来都被详细研究并发展起来。股权溢价之谜长期是资产定价理论的中心课题, 但这里从略。

在各种试图解释股权溢价之谜的方法中, 有一种方法是切断 CARA 风险偏好函数中不同状态之间的偏好和不同时期的消费之间的偏好的联系。研究者提出了多种推广 CARA 风险偏好函数的办法。这里简单介绍其中比较有影响的三种方式。

第一种是所谓的内在习惯 (internal habit) 模型, 代表文献是 Constantinides (1990)。在这种模型中, 投资者的风险偏好函数不仅与当前的消费有关, 而且也与过去所实现的消费路径有关。Ferson 和 Constantinides (1991) 发现内在习惯模型的实证表现并不是特别出色。

第二种推广是所谓的外在习惯 (external habit) 模型, 代表文献是 Campbell 和 Cochrane (1999, 2000)。在这类模型中, 投资者的风险偏好函数与一个外在的习惯水平相关, 形象地说就是投资者不仅关心自身的消费, 也关心邻居的消费, 通俗地称为“赶上琼斯家 (catching up with the Joneses)”。这个模型被广泛地用来比较新提出的模型。

第三种 CARA 的推广是递归的 (recursive) 风险偏好函数, 代表文献有 Kreps 和 Porteus (1978), Weil (1989, 1990), Epstein 和 Zin (1989, 1991), 以及 Duffie 和 Epstein (1992)。例如在 Epstein 和 Zin (1991) 中, 效用函数被假设成:

$$U_t = W(c_t, \mu[U_{t+1}]), \quad (3.3)$$

其中 c_t 是当前的消费, $\mu[U_{t+1}]$ 是后一时期效用函数 U_{t+1} 的 “ α -条件期望”:

$$\mu[U_{t+1}] = (\mathbb{E}U_{t+1}^\alpha)^{1/\alpha}, \quad (3.4)$$

W 是一个累积子 (aggregator), 形式如下:

$$W(c_t, z) = [(1 - \beta)c^\rho + \beta z^\rho]^{1/\rho}. \quad (3.5)$$

如果 $\alpha = \rho$, 我们就回到了通常的效用函数。一般情况下这两个参数是独立的。这种推广保留了 CARA 的好处, 因此模型经常仍旧有解析解。但它同时直接切断了 CARA 中不同状态之间的偏好和不同时期的消费之间的偏好的联系, 这两种不同的偏好现在被两个独立的参数来描述。在大量的文献中, 使用递归风险偏好函数已经几乎是缺省的选择了。Pennacchi (2008) 和 Skiadas (2009) 两本书都详细介绍了递归风险偏好函数, 其中后者更加理论化一些。

这三种风险偏好函数形式的假设是不同的, 它们对资产定价的结论也都不同。这里限于篇幅, 不再做更具体的介绍, 有兴趣的读者可以参考上述文献。

4. 最近十年的发展

自八十年代以来, 资产定价这个领域基本上是沿着上述经典理论的大框架而不断发展的。由于这个原因, 很多研究者认为这段时间中没有特别大的理论突破。Duffie (2001) 在他书中的序言里这样写道: “对一个在八十年代中期毕业出来的人来说, 七十年代是资产定价理论的黄金时代.... 从 1979 年以后, 除了个别的特例, 基本上就是拖拖地板而已。” 在 Campbell (2000) 年的综述中, Campbell 表示不完全赞同。他认为我们对这一领域的理解还远未达到完善, 而且有很多重要和有趣的课题还有待解决。

由于 Campbell (2000) 这篇综述详细介绍了从 1979 年到 1999 年的研究成果, 我在下面的介绍主要集中在千禧年之后的这十年。我基本上比较赞同 Campbell 的意见。可以说, 过去十年是一个成果非常丰硕的十年。但是我也同意 Duffie (1992) 关于大框架已经基本成型的观点。这就意味着在过去十年的理论发展中, 研究者经常集中注意力在一些比较具体的新课题上, 而且这些课题经常是由数据推动起来的。由于较难把所有的课题一一详细介绍, 接下来我选择一些我个人认为比较重要或有趣的课题来加以讨论。这些课题并不是孤立的, 而是有很深的内在联系。由于文献

数量极大，我一般只介绍一些最近的文章。对这些课题感兴趣而希望进一步了解的读者可以查找以下被讨论文献的文末的索引。

4.1 习惯模型

习惯模型在第三节中稍有叙述。内在习惯和外在习惯模型各有各的特点，目前还不能确定哪个更优，但可能可以说外在习惯模型应用得更广泛些。在内在习惯模型中，超额消费被定义成实际消费和一个内在习惯水平的差，效用函数被修改成为超额消费的函数。这个修改导致 Hansen-Jagannathan 边界和超额消费在实际消费中的比例负相关，从而试图来解释实际中的过大的股权溢价。外在习惯的结论和内在习惯模型类似，但超额消费在这里是实际消费和一个外在习惯水平的差。关于内在习惯和外在习惯的较新的研究有 Otrok, Ravikumar 和 Whiteman (2002)，以及 Grishchenko (2010)。

最基本的习惯模型经常被用来建立更复杂的模型，例如 Menzly, Santos 和 Veronesi (2004) 用它来建立了一个有多个资产的综合平衡 (general equilibrium) 模型。在该模型中，投资者的风险偏好和红利的预期增长率都是随时间而变化的。变化的风险偏好导致红利回报率和资产的预期收益率正相关这个标准结果，但是变化的红利预期增长率却导致这二者负相关。由于两个效应互相抵消，用红利回报率来预测预期收益率的能力被减弱了，这 and 实际数据相符。另外，其它涉及习惯模型的最新文献还有 Lynch 和 Randall (2009) 以及 Bansal, Kiku 和 Yaron (2009)。

4.2 风险的时间特性 (Temporal Pricing of Risk) 模型

在一个实际模型中，随机折现因子必须能够正确地对多种资产同时进行定价，包括单期无风险利率，长期无风险利率，以及各种风险利率。各种在实际市场上观察到的数据因此对随机折现因子的结构提出了很严格的要求。例如 Hansen-Jagannathan 边界可以看成是这些要求的结果。在实际观测的数据中，Sharpe 比率比较高，因此我们需要随机折现因子变动幅度比较大。在一般的研究中，尤其是实证性研究，甚至是关于长期性资产的研究中，研究者经常只着著于单期收益率，因此他们只回答在短期内收益率和风险之间有什么关系这么一个问题。显然，在长期内收益率和风险之间有什么关系也应当是一个很重要的问题。

为了能够同时估价不同的资产，Alvarez 和 Jermann (2005) 把随机折现因子分解成两个分量的乘积。第一个分量是一个永久性分量，是一个鞅。第二个分量是一个短暂性分量。不同分量在估价不同资产时起到不同的作用，例如永久性分量对估价类似股票等长期性资产上很重要。使用这个分解之后，一个比 Hansen-Jagannathan 边界更细致的问题就是，如果我们用更微观的数据，比如说，我们考虑长期无风险利率，我们对随机折现因子应当提出什么样的要求？这些要求的有用之处是可以用来评估资产定价模型。不满足这些要求的模型就不能用来描述实际数据。

Alvarez 和 Jermann (2005) 的最主要结果正是推导出了随机折现因子的永久性分量的变动性的下限。这个下限是基于长期无风险利率，短期无风险利率，以及其它带风险资产收益率之上的。他们也推导了对短暂性分量的结果。他们发现，永久性分量变动幅度很大，而且也远比短暂性分量重要。另外，Alvarez 和 Jermann (2005) 也研究了随机折现因子各分量变动率和消费的变动率之间的关系。

考虑风险的时间特性的比较新的研究很多。例如，Hansen, Heaton 和 Li (2008) 通过建立一个对数线性模型来研究在长期上收益率和风险之间的关系。Kojien, Nijman 和 Werker (2009) 研究一个生命周期投资者 (life cycle investor) 能不能从变动的债券超额收益率中获益。Hansen 和 Scheinkman (2009) 则用算符理论来解析地研究在非线性的连续时间 Markov 模型中在长期上收益率和风险之间的关系。Pastor 和 Stambaugh (2009) 则指出尽管在统计上长期股票收益率波动较小，但从投资者的风险偏好的角度出发，长期股票收益率的风险实际上更高。

4.3 长期风险 (Long-Run Risk) 模型

关于长期风险模型以及习惯模型之间的争论是一个比较有趣的课题。Bansal 和 Yaron (2004) 建立了一个长期风险模型。在这个模型中，消费和红利的增长率包含一个长期的可预测的部分，以及一个随机波动的不确定性。总消费的均值和方差的持久性波动引起股票价格的波动。使用 Epstein 和 Zin (1991) 的递归偏好函数，Bansal 和 Yaron 发现他们的模型在通常的风险偏好系数值的情况下就能够解释超额收益率，无风险利率，市场收益率的波动，以及价格和红利的比率。在 Bansal, Kiku 和 Yaron (2007) 中，作者们进一步评估长期风险模型。利用 Euler 方程，作者们发现长期风险模型能够解释 Fama 和 French (1996) 三因素模型中的市场收益率，股票大小排序的收益率，以及市净值排序的收益率。

但是，Beeler 和 Campbell (2009) 重新审视了 Bansal 和 Yaron (2004) 的长期风险模型，并发现模型有一些实证上的困难。首先，长期风险模型意味着长期消费和红利增长率应当是高度持久性的，并且可以用股票价格预测，这和事实相反。模型也不能解释为什么实利率的波动没有产生消费增长率的不可预测性。最后，长期风险模型会导出关于通货膨胀关联债券的过低的回报率。

可以说 Bansal 和 Yaron (2004) 是一个比较重要的理论发展。它同时对消费增长率以及波动率引入了持久性扰动，同时也对总消费和总红利作了一个符合实际的区分。但 Beeler 和 Campbell (2009) 指出的这些困难表明长期风险模型也许还有待改进和修正。

4.4 灾难风险 (Disaster Risk) 模型

在灾难风险模型中，研究者引入一个灾难因素。由于这个因素的存在，投资者要求更高的回报。比较有影响的文献有 Rietz (1988) 和 Barro (2006)。最近，Gabaix (2010) 又对理论作了进一步的发展。在 Gabaix 中，在有灾难时，资产的

基本价值下跌。这又引起超额收益率的时间波动，从而产生收益率的可预测性。**Gabaix** 使用了一个新颖的线性产生过程（linear generating process）技巧来建立模型，使得模型有解析解，因此很便于分析。作者发现这个模型能够解释十个宏观金融学中的谜，包括股权溢价之谜，无风险利率之谜，股票价格波动之谜，以及其它关于债券和期权的谜。

显然，如果这些结论都是正确的话，那么这个模型向建立一个对形形色色的实证中的不解之谜都可行的统一理论跨出了一个大步。但目前在 **Gabaix (2010)** 的研究中，对这些谜是逐个破解的，因此关于模型对各个资产的联合定价还需要做更多的研究。

关于灾难风险模型的最新研究还有 **Gourio (2010)**，**Wachter (2009)**，以及 **Farhi** 和 **Gabaix (2009)** 等。这里不再一一叙述。

4.5 非完美市场（Imperfect Market）资产定价模型

非完美市场是资产定价理论中的一个很大的研究方向。它包含了许许多多的子课题，包括不可分散劳动收入（non-diversifiable labor income）风险，信息不对称性（information asymmetry），异质的（heterogeneous）投资者，有限参与（limited participation），有限承诺（limited commitment），有限套利（limited arbitrage），有限注意力（limited attention），非零交易费用，流动性风险（liquidity risk），模型风险（model risk）等等。特定的非完美市场模型一般集中讨论一个子课题。由于非完美市场所涉面极广，这里只对不可分散劳动收入风险和有限参与两个子课题作一个简单的介绍。

Mankiw (1986) 考虑了一个非完美市场模型。在这个模型中，随机的扰动因素在事前影响所有的投资者，但事后只影响少数的人。这就使得研究者不能从合计的数据来推算风险厌恶系数。这个模型和它的各种改进可以用来研究不可分散劳动收入风险（Constantinides 和 Duffie, 1996）。比较新的研究是 **Storeletten, Telmer** 和 **Yaron (2004)** 以及 **Krueger** 和 **Lustig (2009)**。其中 **Krueger** 和 **Lustig (2009)** 研究什么场合下，非完美市场对资产定价有影响，什么场合下又没有影响，是一篇比较全面的研究论文。

Guvenen (2009) 是一篇值得一读的关于有限参与的研究文献。**Guvenen** 的出发点是习惯模型的假设比较难于捉摸，因此 **Guvenen** 希望保留简单的效用函数，但引入有限参与和异质的投资者。具体地说，在市场中有两类人，一类是股市参与者，一类则不参与。他们具有不同的跨期弹性系数。**Guvenen** 发现，即使是定风险系数为 2，他的模型也能解释所有习惯模型中所能解释的实证现象。文章进一步解释了为什么有限参与模型和习惯模型给出很类似的结果，并且指出有限参与模型给出更加合理的宏观经济结果。关于有限参与和有限承诺的比较新的研究包括 **Lustig** 和 **van Nieuwerburgh (2005)** 以及 **Chien, Cole** 和 **Lustig (2009)**。

5. 总结

本文首先介绍了资产定价及投资组合的经典理论。它们包括资本资产定价模型，套利定价理论，消费资本资产定价模型以及跨期资本资产定价模型。稍后我介绍了其他一些近期的重要概念及理论。最后，我阐述了近期十年来的研究动向及展望，包括习惯模型，灾难风险模型，长期风险模型，非完美市场模型等等。

在结束本文之前，我对资产定价这一领域提供一些个人的看法。首先，由于理论框架基本都已确立，这一领域相对比较成熟，因此较难有很大的突破。进入这个领域首先得对已有的理论有较深的理解度，并且需要研究者有比较扎实的数理功底。这些包括概率论，实分析，偏微分方程，测度论，随机过程，等等。其次，尽管理论框架已经确立，但我们并未找到一个能较完美地解释经验数据的黄金模型。类似股权溢价之类的很多谜还等着研究者去彻底解决。一个在很长时间内仍会比较活跃的分支将是联系理论和实证之间研究。另外，行为金融学也是一个活跃的方向。也许可以认为，找到一个能完美地解释所有经验数据的黄金模型是不可能的。因此，在较长的一段将来，研究者也许应当满足于能找到对不同情形下能够工作的不同模型。再次，随着市场的发展，新的资产被不断推出，例如方差期权（variance option），生命周期基金（life cycle fund），信用资产等等。金融数据也越来越多样化，国际化以及微观化。高频率的、高质量的国际数据也越来越普遍。这些都为研究者提供了新的研究对象。最后，最近的金融危机也促使人们重新审视资产存在的目的，以及资产定价中的投资者心理以及国家金融政策因素。把传统的资产定价理论和行为金融学、金融政策学、国际金融等其它相关领域的有机结合起来也是一个很有希望的研究方向。

参考文献：

- Alvarez, F., & Jermann, U. (2005). Using asset prices to measure the persistence in the marginal utility of wealth. *Econometrica*, 73 (6), 1977-2016.
- Bansal, R., & Viswanathan, S. (1993). No arbitrage and arbitrage pricing: A new approach. *Journal of Finance*, 48(4), 1231-1262.
- Bansal, R., Kiku, D., & Yaron, A. (2007). Risks for the long run: Estimation and inference. Working Paper, Duke University.
- Bansal, R., Kiku, D., & Yaron, A. (2009). An empirical evaluation of the long-run risks model for asset prices. Working Paper, Duke University and the Wharton School.
- Bansal, R., & Yaron, A. (2004). Risks for the long run: A potential resolution of asset pricing puzzles. *Journal of Finance*, 59, 1481-1509.

- Barro, R. (2006). Rare disasters and asset markets in the twentieth century. *Quarterly Journal of Economics*, 121, 823-866.
- Beeler, J., & Campbell, J. Y. (2009). The long-run risks model and aggregate asset prices: An empirical assessment. Working Paper, Harvard University.
- Bernardo A. E., & Ledoit, O. (2000). Gain, loss, and asset pricing. *Journal of Political Economy*, 108(1), 144-172.
- Björk, T. (2009). *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press.
- Black, F. (1972). Capital market equilibrium with restricted borrowing. *Journal of Business*, 45, 444-455.
- Black, F., & Litterman, R. (1992). Global portfolio optimization. *Financial Analysts Journal*, 48, 28-43.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 637-659.
- Breeden, D. T. (1979). An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities. *Journal of Financial Economics*, 7, 265-296.
- Campbell, J. Y. (2000). Asset pricing at the millennium. *Journal of Finance*, 55, 1515-1567.
- Campbell, J. Y., & Cochrane, J. H. (1999). By force of habit: A consumption based explanation of aggregate stock market behavior. *Journal of Political Economy*, 107(2), 205-251.
- Campbell, J. Y., & Cochrane, J. H. (2000). Explaining the poor performance of consumption-based asset pricing models. *Journal of Finance*, 55, 2863-2879.
- Chamberlain, G. (1983). Funds, factors and diversification in arbitrage pricing models. *Econometrica*, 51, 1305-1323.
- Chamberlain, G., & Rothschild, M. (1983). Arbitrage, factor structure, and mean-variance analysis on large asset markets. *Econometrica*, 51(5), 1281-1304.
- Chien, Y., Cole, H., & Lustig, H. (2009). Macro implications of household finance. Working Paper, UCLA.
- Cochrane, J. (2001). *Asset Pricing*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Cochrane, J. (2005). Financial markets and the real economy. *Foundations and Trends in Finance*, 1, 1-101.

- Cochrane, J. H., & Saa-Requejo, J. (2000). Beyond arbitrage: Good-deal asset price bounds in incomplete markets. *Journal of Political Economy*, 108(1), 79-119.
- Connor, G. (1984). A unified beta pricing theory. *Journal of Economic Theory*, 34, 13–31.
- Constantinides, G. M. (1990). Habit formation: A resolution of the equity premium puzzle. *Journal of Political Economy*, 98(3), 519-543.
- Constantinides, G. M., & Duffie, D. (1996). Asset pricing with heterogeneous consumers. *Journal of Political Economy*, 104, 219-240.
- Cox, J. C., & Huang, C.-F. (1989). Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process. *Journal of Economic Theory*, 49, 33-83.
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E., & Ross, S. A. (1985a). An intertemporal general equilibrium model of asset prices. *Econometrica*, 53, 363-384.
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E., & Ross, S. A. (1985b). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53, 385-408.
- Cox, J., & Ross, S. A. (1976). The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, 3, 145-166.
- Cox, J., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7, 229-263.
- Duffie, D. (2001). *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton University Press.
- Duffie, D., & Epstein, L. (1992). Asset Pricing with Stochastic Differential Utility. *Review of Financial Studies*, 5, 411-436.
- Epstein, L., & Zin, S. (1989). Substitution, risk aversion, and the temporal behavior of consumption and asset returns: A theoretical framework. *Econometrica*, 57, 937-969.
- Epstein, L., & Zin, S. (1991). Substitution, risk aversion, and the temporal behavior of consumption and asset returns: An empirical investigation. *Journal of Political Economy*, 99, 263-286.
- Fama, E. F., & French, K. R. (1996). Multifactor explanations of asset pricing anomalies. *Journal of Finance*, 51, 55-84.
- Farhi, E., & Gabaix, X. (2009). Rare disasters and exchange rates. Working Paper, Harvard University and New York University.

- Ferson, W. E., & Constantinides, G. M. (1991). Habit persistence and durability in aggregate consumption: Empirical tests. *Journal of Financial Economics*, 29, 199-240.
- Gabaix, X. (2010). Variable rare disasters: An exactly solved framework for ten puzzles in macro finance. Working Paper, NYU Stern.
- Geman, H., El Karoui, N., & Rochet, J.-C. (1995). Changes of numeraire, changes of probability measures and pricing of options. *Journal of Applied Probability*, 32, 443-458.
- Gourio, F. (2010). Disaster risk and business cycles. Working Paper, Boston University.
- Grishchenko, O. V. (2010). Internal vs. external habit formation: The relative importance for asset pricing. *Journal of Economics and Business*, 62(3), 176-194.
- Guvenen, M. F. (2009). A parsimonious macroeconomic model for asset pricing: Habit formation or cross-sectional heterogeneity? *Econometrica*, forthcoming.
- Hansen, L. P., Heaton, J., & Luttmer, E. (1995). Econometric evaluation of asset pricing models. *Review of Financial Studies*, 8, 237-274.
- Hansen, L. P., Heaton, J. C., & Li, N. (2008). Consumption strikes back? Measuring long-run risk. *Journal of Political Economy*, 116(2), 260-301.
- Hansen, L. P., & Jagannathan, R. (1991). Implications of security market data for models of dynamic economies. *Journal of Political Economy*, 99(2), 225-262.
- Hansen, L. P., & Jagannathan, R. (1997). Assessing specification errors in stochastic discount factor models. *Journal of Finance*, 52, 557-590.
- Hansen, L. P., & Richard, S. F. (1987). The role of conditioning information in deducing testable restrictions implied by dynamic asset pricing models. *Econometrica*, 55(3), 587-613.
- Hansen, L. P., & Scheinkman, J. (2009). Long-term risk: An operator approach. *Econometrica*, 77 (1), 177-234.
- Harrison, J. M., & Kreps, D. M. (1979). Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory*, 20, 381-408.
- Harrison, J. M., & Pliska, S. (1981). Martingales and stochastic integrals and in theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications*, 11, 215-260.
- Huang, C., & Litzenberger, R. (1988). Foundations for Financial Economics. Elsevier Science Publishers (North-Holland), New York.

- Huberman, G. (1982). A simple approach to arbitrage pricing theory. *Journal of Economic Theory*, 28, 183–191.
- He, H., & Pearson, N. D. (1991). Consumption and portfolio policies with incomplete markets and short-sale constraints: The infinite dimensional case. *Journal of Economic Theory*, 54, 259-304.
- Ingersoll, J. (1984). Some results in the theory of arbitrage pricing. *Journal of Finance*, 39, 1021–1039.
- Ingersoll, J. (1987). *Theory of Financial Decision Making*. Rowman & Littlefield, Totowa, NJ.
- Jaganathan, R., & Wang, Z. (1996). The conditional CAPM and the cross-section of expected returns. *Journal of Finance*, 51(1), 3-53.
- Karatzas, I., Lehoczky, J., & Shreve, S. E. (1987). Optimal portfolio and consumption decisions for a "small investor" on a finite horizon. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 25, 1557-1586.
- Koijen, R. S. J., Nijman, T. E., & Werker, B. J. M. (2009). When can life-cycle investors benefit from time-varying bond risk premia? Working Paper, Tilburg University.
- King, B. F. (1966). Market and industry factors in stock price behavior, *Journal of Business*, 39(1), 139–190.
- Kreps, D., & Porteus, E. (1978). Temporal resolution of uncertainty and dynamic choice theory. *Econometrica*, 46, 185-200.
- Krueger, D., & Lustig, H. (2009). When is market incompleteness irrelevant for the price of aggregate risk? *Journal of Economic Theory*, forthcoming.
- LeRoy, S. F., & Werner, J. (2001). *Principles of Financial Economics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Li, M. (2008). The impact of nonnormality on exchange options. *Journal of Futures Markets*, 28(9), 845-870.
- Lintner, J. (1965). The valuation of risky assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *Review of Economics and Statistics*, 47, 13-37.
- Lucas, Jr., R. E. (1978). Asset Prices in an Exchange Economy. *Econometrica*, 46, 1429-1445.

- Lustig, H., & van Nieuwerburgh, S. (2005). Housing collateral, consumption insurance and risk premia: An empirical perspective. *Journal of Finance*, 60(3), 1167-1219.
- Lynch, A. W., & Randall, O. (2009). Why habit may be less persistent than you think. Working Paper, NYU Stern School of Business.
- MacKinlay, A. C. (1995). Multifactor models do not explain deviations from the CAPM. *Journal of Financial Economics*, 38, 3-28.
- Mankiw, G. N. (1986). The equity premium and the concentration of aggregate shocks. *Journal of Financial Economics*, 17, 211-219.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7(1), 77-91.
- Mehra, R., & Prescott, E. (1985). The equity premium: A puzzle. *Journal of Monetary Economics*, 15, 145-161.
- Mehra, R., & Prescott, E. C. (2003). The equity premium in retrospect. In Constantinides, G. M., Harris, M., Stulz, R. (Ed.), *Handbook of the Economics of Finance* (pp. 888-936). Elsevier.
- Menzly, L., Santos, T., & Veronesi, P. (2004). Understanding predictability. *Journal of Political Economy*, 112(1), 1-47.
- Merton, R. C. (1969). Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case. *Review of Economics and Statistics*, 51(3), 247-257.
- Merton, R. C. (1971). Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory*, 3(4), 373-413.
- Merton, R. C. (1973). An intertemporal capital asset pricing model. *Econometrica*, 41(5), 867-887.
- Mossin, J. (1966). Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica*, 34, 768-783.
- Mossin, J. (1968). Optimal multiperiod portfolio policies. *Journal of Business*, 41(2), 215-229.
- Otrok, C., Ravikumar, B., & Whiteman, C. H. (2002). Habit formation: a resolution of the equity premium puzzle? *Journal of Monetary Economics*, 49(6), 1261-1288.
- Pan, J. (2002). The jump-risk premia implicit in options: Evidence from an integrated time-series study. *Journal of Financial Economics*, 63, 3-50.
- Pastor, L., & Stambaugh, R. F. (2009). Are stocks really less volatile in the long run? Working Paper, University of Chicago.

- Pennacchi, G. (2008). *Theory of Asset Pricing*. Pearson Education, Inc.
- Pliska, S. (1986). A stochastic calculus model of continuous trading: Optimal portfolios. *Mathematics of Operations Research*, 11, 371-382.
- Ramsey, F. P. (1928). A mathematical theory of saving. *The Economic Journal*, 38(4), 543-559.
- Rietz, T. (1988). The equity risk premium: A solution. *Journal of Monetary Economics*, 22, 117-131.
- Ross, S. A. (1976). The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory*, 13, 341-360.
- Samuelson, P. A. (1969). Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. *Review of Economics and Statistics*, 51(3), 239-246.
- Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, 19(3), 425-442.
- Shefrin, H. (2008). *A Behavioral Approach to Asset Pricing*. Academic Press.
- Shreve, S. E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer.
- Skidias, C. (2009). *Asset Pricing Theory*. Princeton University Press.
- Snow, K. N., (1990). Diagnosing asset pricing models using the distribution of asset returns. *Journal of Finance*, 46(3), 955-983.
- Storesletten, K., Telmer, C. & Yaron, A. (2004). Cyclical dynamics of idiosyncratic labor market risk. *Journal of Political Economy*, 112, 695-717.
- Treynor, J. L, & Black, F. (1973). How to use security analysis to improve portfolio selection. *Journal of Business*, 46(1), 66-86.
- Vasicek, O. A. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2), 177-188.
- Wachter, J. (2009). Can time-varying risk of rare disasters explain aggregate stock market volatility? Working Paper, University of Pennsylvania.
- Weil, P. (1989). The equity premium puzzle and the risk-free rate puzzle. *Journal of Monetary Economics*, 24, 401-421.

Weil, P. (1990). Nonexpected utility in Macroeconomics. *Quarterly Journal of Economics*, 105(1), 29-42.