Theorem of existence of ruptures in the probability scale. II.

Harin, Alexander

- ,

10 May 2010

Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей. II.

Александр Харин
Московский физико-технический институт
Современная Гуманитарная Академия

В статье доказаны теоремы о существовании разрывов у границ конечных интервалов и у границ шкалы вероятностей.

Содержание

Введение

В настоящей статье доказываются простые, но принципиальные теоремы о существовании разрывов у границ конечных интервалов и у границ шкалы вероятностей. По сравнению с Harin (2010), внесены некоторые изменения с учетом Харин (2010-1, -2, -3).

Общая упрощенная схема доказательства

Предварительное замечание

Максимально возможная величина конечного центрального момента $E(X\text{-}M)^n$ для конечного интервала $[A, B]$ не превышает соответствующей конечной степени n величины $(B\text{-}A)$ этого интервала, т.е. конечна

$$|E(X-M)^n| \equiv \left|\int_A^B (x-M)^n f(x)dx\right| \le (B-A)^n \int_A^B f(x)dx = (B-A)^n < \infty .$$

Общая лемма

Если математическое ожидание M стремится к границе A конечного интервала $[A, B]$, то конечные центральные моменты стремятся к 0, в т.ч.

$$|E(X-M)^n| \le (B-A)^n \times 2\frac{(M-A)}{(B-A)} \xrightarrow[M\to A]{} 0 .$$

Общая теорема

Если, на конечном интервале, какой-либо конечный центральный момент не может приближаться к нулю ближе, чем на ненулевую величину $r_{dispers}>0$, то математическое ожидание тоже не может приближаться к границе этого интервала ближе, чем на ненулевую величину $r_{expect}>0$, в т.ч.

$$0 < r_{dispers} \le |E(X-M)^n| \le (B-A)^n \times 2\frac{(M-A)}{(B-A)} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad 0 < r_{\exp ect} \equiv \frac{r_{dispers}}{2(B-A)^{n-1}} \le (M-A) .$$

Другими словами, если, для функции, заданной на конечном интервале, существует ненулевой разрыв (*rupture*) $r_{dispers}>0$ между ее конечным центральным моментом и нулем, то между ее математическим ожиданием и границами интервала тоже существуют ненулевые разрывы $r_{expect}>0$.

Теорема для оценки вероятности

Если на интервале $[0, 1]$ для оценки вероятности, частоты $F\equiv M$ существует ненулевой разрыв $r_{dispers}>0$ между ее дисперсией и нулем, то между F и границами интервала тоже существуют ненулевые разрывы $r_{expect}>0$, в т.ч.

$$0 < r_{\exp ect} \equiv \frac{r_{dispers}}{2} \le M = F .$$

Теорема для вероятности

Если вероятность P является пределом, к которому стремится оценка вероятности, частота F при стремлении количества испытаний K к бесконечности, и существуют ненулевые разрывы $r_{expect}>0$ между F и границами шкалы вероятностей, то между P и границами шкалы вероятностей существуют такие же ненулевые разрывы $r_{expect}>0$, в т.ч.

$$F \xrightarrow[K\to\infty]{} P \qquad \text{и} \qquad 0 < r_{\exp ect} \le F \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad 0 < r_{\exp ect} \le P .$$

1. Предварительные замечания

1.1. Общие условия, допущения и обозначения

Пусть далее, на интервале $X=[A, B]$: $0<(B-A)<\infty$, определены:

$f(x)$: для $x<A$ и $x>B$ справедливо $f(x)\equiv 0$, при этом, для $Y(x)=1$, $Y(x)=x$ и $Y(x)=(x-M)^n$: $A\le M\le B$ и $1<n<\infty$, справедливо

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(x) f(x) dx = \int_{A}^{B} Y(x) f(x) dx ,$$

а для $A\le x\le B$ справедливо $f(x)\ge 0$ и

$$\int_{A}^{B} f(x) dx = Const_f \ne 0 ;$$

начальный момент первого порядка, математическое ожидание

$$EX = \frac{1}{Const_f}\int_{A}^{B} xf(x)dx \equiv M ;$$

и, для n : $1<n<\infty$, не менее, чем один центральный момент n-го порядка

$$E(X-M)^n = \frac{1}{Const_f}\int_{A}^{B}(x-M)^n f(x)dx .$$

Без ограничения общности, $f(x)$ можно нормировать так, что $Const_f=1$. В основном тексте статьи и в приложениях записи выполняются в общей нормировке. В общей схеме доказательства, для простоты и наглядности, записи выполнены в нормировке на 1.

1.2. Максимально возможная величина центрального момента для ограниченного интервала

Максимально возможную величину модуля центрального момента можно оценить, исходя из определения

$$|E(X-M)^n| \equiv \left|\frac{1}{Const_f}\int_{A}^{B}(x-M)^n f(x)dx\right| \le \frac{1}{Const_f}\int_{A}^{B}|(x-M)^n| f(x)dx \le$$

$$\le \frac{1}{Const_f}(B-A)^n\int_{A}^{B} f(x)dx = (B-A)^n$$

Более точную оценку по модулю дает (см. П1) сумма модулей центральных моментов функций, сконцентрированных на краях интервала: $(B-M)/(B-A)\delta(x-A)$ и $(M-A)/(B-A)\delta(x-B)$

$$Max(E(X-M)^n) \le \left|(A-M)^n\frac{B-M}{B-A}\right| + \left|(B-M)^n\frac{M-A}{B-A}\right| .$$

Через нее получаем для $n=2$ очевидный максимум при $M_{max}=(B-A)/2$

$$Max(E(X-M)^2) = (\frac{B-A}{2})^2 ,$$

а для $n=2k>>1$ - максимумы при $M_{max}\approx A+(B-A)/2n$ и $M_{max}\approx B-(B-A)/2n$

$$Max(E(X-M)^n) \approx \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{(B-A)^n}{2n} .$$

2. Общая теорема о существовании разрывов

2.1. Общая лемма о стремлении к нулю центральных моментов

Если, для $f(x)$, определенной в разделе 1.1., $M \equiv E(X)$ стремится к A или к B, то, для $1 < n < \infty$, $E(X-M)^n$ стремится к нулю.

Доказательство (подробно см. П2): Для $M \to A$

$$
\begin{aligned}
&| E(X-M)^n | \le | (A-M)^n \frac{B-M}{B-A} | + | (B-M)^n \frac{M-A}{B-A} | \le \\
&\le ((B-A)^{n-1} + (B-A)^{n-1}) \frac{(M-A)(B-M)}{B-A} \le \\
&\le 2(B-A)^{n-1}(M-A) \xrightarrow[M \to A]{} 0
\end{aligned}
.
$$

Таким образом, если $(B\text{-}A)$ и n конечны и $M \to A$, т.е. $(M\text{-}A) \to 0$, то $E(X\text{-}M)^n \to 0$. Для $M \to B$ рассмотрение полностью аналогичное.

Лемма доказана.

Замечание. Можно (см. П2) получить более точную оценку сходимости к нулю центральных моментов, в т.ч. для $M \to A$

$$| E(X-M)^n | \le (B-A)^n \frac{M-A}{B-A} \xrightarrow[M \to A]{} 0$$

2.2. Общая теорема о существовании разрывов для математического ожидания

Если, для $f(x)$, определенной в 1.1., существуют $n : 1 < n < \infty$, и $r_{dispers} > 0$: $|E(X\text{-}M)^n| \ge r_{dispers} > 0$, то существует $r_{expect} > 0 : A < (A + r_{expect}) \le E(X) \le (B - r_{expect}) < B$.

Доказательство (подробно см. П3): Из леммы, для $M \to A$

$$0 < r_{dispers} \le | E(X-M)^n | \le (B-A)^n \times 2 \frac{(M-A)}{(B-A)} = 2(B-A)^{n-1}(M-A)$$

$$0 < \frac{r_{dispers}}{2(B-A)^{n-1}} \le (M-A)$$

$$r_{expect} \equiv \frac{r_{dispers}}{2(B-A)^{n-1}}$$

Для $M \to B$ рассмотрение полностью аналогичное.

Поскольку $(B\text{-}A)$ и n – конечны, а $r_{dispers} > 0$, то конечны и больше нуля - как $(M\text{-}A) \ge r_{expect} > 0$ так и $(B\text{-}M) \ge r_{expect} > 0$.

Теорема доказана.

Таким образом, если, на конечном интервале, конечный центральный момент не может приближаться к нулю ближе, чем на ненулевую величину $r_{dispers} > 0$, то математическое ожидание тоже не может приближаться к границе этого интервала ближе, чем на ненулевую величину $r_{expect} > 0$.

В более общем виде: Если для функции, определенной на конечном интервале, существует ненулевой разрыв (*rupture*) $r_{dispers} > 0$ между возможными значениями какого-либо из ее конечных центральных моментов и нулем, то между возможными значениями математического ожидания этой функции и любой из границ интервала тоже существуют ненулевые разрывы $r_{expect} > 0$ (о терминологии см. П3).

3. Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей

3.1. Общие замечания

Пусть, для серии испытаний с количеством испытаний K, в т.ч. при K, стремящемся к бесконечности $K \to \infty$, плотность $f(x)$ оценки вероятности, частоты F : $F \equiv M \equiv E(X)$, некоторого события имеет свойства, заданные в разделе 1.1., в частности, определена на $[0, 1]$ и $Const_f=1$.

3.2. Лемма о стремлении к нулю центральных моментов плотности оценки вероятности

Если для плотности $f(x)$, определенной в разделе 3.1., $E(X) \to 0$ или $E(X) \to 1$, то, для $1<n<\infty$, $E(X-M)^n \to 0$.

Доказательство: Поскольку условия данной леммы удовлетворяют условиям леммы раздела 2.1, то утверждение данной леммы так же справедливо, как и утверждение леммы раздела 2.1.

Лемма доказана.

3.3. Теорема о существовании разрывов для оценки вероятности

Если для плотности $f(x)$, определенной в разделе 3.1., существуют n : $1<n<\infty$, и $r_{dispers}>0$: $E(X-M)^n \geq r_{dispers}>0$, то для оценки вероятности, частоты $F \equiv M \equiv E(X)$ существует $r_{expect}>0$: $0<r_{expect} \leq F \equiv M \equiv E(X) \leq (1-r_{expect})<1$.

Доказательство: Поскольку условия данной теоремы удовлетворяют условиям теоремы раздела 2.2, то утверждение данной теоремы так же справедливо, как и утверждение теоремы раздела 2.2.

Теорема доказана.

3.4. Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей

Если на интервале $[0,1]$ определена P : при стремлении количества испытаний K к бесконечности, оценка вероятности, частота F стремится к P, т.е. $P=LimF$, между оценкой вероятности и любой из границ интервала существуют ненулевые разрывы $0<r_{expect} \leq F \leq (1-r_{expect})<1$, то такие же ненулевые разрывы $0<r_{expect} \leq P \leq (1-r_{expect})<1$ существуют между P и любой из границ интервала.

Доказательство (подробнее см. П4): Поскольку операция взятия предела сохраняет нестрогие неравенства, то, при $P=LimF$, из $r_{expect} \leq F \leq (1-r_{expect})$ следует $r_{expect} \leq P \leq (1-r_{expect})$.

Теорема доказана.

Поскольку вероятность удовлетворяет условиям, наложенным на P, то теорема справедлива и для вероятности.

Теорему можно сформулировать и для нужд практических приложений:

Если, для серии испытаний с количеством испытаний K : $K \to \infty$, и оценкой вероятности, частотой F, стремящейся при этом к вероятности P, существует разрыв $r_{dispers}>0$ между возможными значениями дисперсии D оценки вероятности F и нулем, то у границ шкалы вероятностей тоже существуют разрывы $r_{expect}>0$, как для возможных значений оценки вероятности F, так и для возможных значений вероятности P.

4. Пример разрывов в шкале вероятностей

Условия

Простейший пример подобных разрывов – стрельба в мишень в одномерном приближении (подробнее см. П5):

Пусть размер мишени равен $2L>0$, а разброс попаданий, при точном прицеливании, подчиняется нормальному закону с дисперсией σ^2. Тогда максимальная вероятность попадания в мишень P_{in_Max} и минимальная вероятность промаха $P_{out\_min}=1-P_{in\_Max}$ равны (см., напр., Прохоров 1988):

Результаты

При $\sigma=0$

$P_{in\_Max}=1$ и $P_{out\_min}=0$, то есть разрывов в шкале вероятностей для попаданий и промахов нет, то есть $r_{expect}=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}=0$, .

При $L=3\sigma$

$0\le P_{in}\le P_{in\_Max}=0{,}997<1$ и $0<0{,}003=P_{out\_min}\le P_{out}\le 1$. При этом, разрывы r_{expect} в шкале вероятностей для попаданий и промахов составляют $r_{expect}=0{,}003>0$.

При $L=2\sigma$

$0\le P_{in}\le P_{in\_Max}=0{,}95<1$ и $0<0{,}05=P_{out\_min}\le P_{out}\le 1$. При этом, разрывы r_{expect} в шкале вероятностей для попаданий и промахов составляют $r_{expect}=0{,}05>0$.

При $L=\sigma$

$0\le P_{in}\le P_{in\_Max}=0{,}68<1$ и $0<0{,}32=P_{out\_min}\le P_{out}\le 1$. При этом, разрывы r_{expect} в шкале вероятностей для попаданий и промахов составляют $r_{expect}=0{,}32>0$.

Вывод

Таким образом:

При нулевой $\sigma=0$ - разрывов нет ($r_{expect}=0$).

При ненулевой $\sigma>0$:

- появляется ненулевой разрыв $r_{expect}>0$ между возможными значениями вероятности попадания $0\le P_{in}\le P_{in\_Max}=1-r_{expect}<1$ и единицей;
- появляется такой же ненулевой разрыв $r_{expect}>0$ между возможными значениями вероятности промаха $0<r_{expect}=P_{out\_min}\le P_{out}\le 1$ и нулем.

5. Применения теоремы. Экономика. Прогнозирование

Возможность существования разрывов в шкале вероятностей должна проявляться и проявляется в реальности, в т.ч. в экономике и прогнозировании. Широко известен целый ряд парадоксов теории полезности, в т.ч. парадокс Алле, «премия за риск», преувеличение малых и преуменьшение больших вероятностей, «парадокс четырех областей». Как отметили Kahneman и Thaler (2006) эти парадоксы до сих пор не решены современной экономической теорией. Существуют проблемы точности прогнозов, наглядно проявившиеся в ходе текущего кризиса.

Использование теоремы о существовании разрывов в шкале вероятностей позволяет получить и обосновать решения этих парадоксов (см., напр., Харин 2007 и 2009), а также корректирующую формулу прогнозирования (см., напр., Харин 2008).

Заключение

В статье доказана общая возможность, при определенных условиях, существования разрывов в шкале возможных значений математических ожиданий величин, определенных на конечных интервалах. Доказана также возможность, при определенных условиях, существования разрывов в шкале вероятностей, как для оценок вероятности, так и для вероятности.

Следует заметить, что, несмотря на очевидность и элементарность теоремы, и на то, что некоторые из простых расчетов и оценок, приведенных в статье, могли публиковаться ранее, напр., в учебниках, теорема в целом является новой и полезной. Так, теорема позволяет получить и обосновать решения ряда известных парадоксов экономической теории (см., напр., Харин 2007 и 2009) и новые результаты в прогнозировании (см., напр., Харин 2008).

10 мая 2005 года была опубликована первая статья (Harin 2005), излагающая основы нового подхода к решению проблем теории полезности. В ней изложение велось в виде гипотез. Настоящая статья публикуется через 5 лет и позволяет строить этот подход на базе математического факта – доказанной теоремы.

Литература

Harin, A. (2005) “A new approach to solve old problems” Game Theory and Information from Economics Working Paper Archive at WUSTL, 0505005, 2005.

Harin, A. (2010) Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей. Munich Personal RePEc Archive, 20593., 2010.

Kahneman, D. and Thaler, R. (2006) “Anomalies: Utility Maximization and Experienced Utility” Journal of Economic Perspectives, 20, #1, 221-234.

Прохоров, Ю.В. ред. (1988) “Математический энциклопедический словарь” М., Советская энциклопедия, 1988.

Харин, А.А. (2010-3) “Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей, как математический базис принципа неопределенного будущего” Моделирование и Анализ Безопасности и Риска в Сложных Системах: 10-я Международная Научная Школа МА БР – 2010).

Харин, А.А. (2010-2) “О разрывах в шкале вероятностей и о некоторых проблемах моделирования” Третья Международная конференция Математическое моделирование социальной и экономической динамики (MMSED-2010).

Харин, А.А. (2010-1) “Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей” IX Международная конференция по финансово-актуарной математике и эвентоконвергенции технологий, Красноярск, 2010 (ФАМЭТ-2010).

Харин, А.А. (2009) “Учет краевых эффектов шумов – новый путь к решению проблем теории полезности?” Первый Российский экономический конгресс (РЭК-2009).

Харин, А.А. (2008) “К разработке общей формулы прогнозирования” 51-я научная конференция МФТИ – 2008 “Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук”.

Харин, А.А. (2007) “Принцип неопределенного будущего, примеры его применения в экономической теории, возможности его применения в теориях сложных систем, в теории множеств, теории вероятностей и логике” Моделирование и Анализ Безопасности и Риска в Сложных Системах: 7-я Международная Научная Школа МА БР – 2007.

Приложения П1-П5

Приложение П1. Подробный расчет максимально возможной величины центрального момента для ограниченного интервала

Две дельта-функции

Рассмотрим две дельта-функции, находящиеся на противоположных краях интервала $[A, B]$: $\delta(x\text{-}A)$ и $\delta(x\text{-}B)$ (для них обеих, очевидно, $Const_f=1$). Если взять сумму этих функций с коэффициентами C_A и C_B : $C_A+C_B=1$, т.е. $f_{Max}(x)=C_A\delta(x\text{-}A)+C_B\delta(x\text{-}B)$ (при этом, очевидно, $Const_f=1$), то центральный момент функции $f_{Max}(x)$ будет равен

$$E(X-M)^n = \frac{1}{Const_f}\int_A^B (x-M)^n f_{Max}(x)dx =$$

$$= \int_A^B (x-M)^n (C_A\delta(x-A) + C_B\delta(x-B))dx = .$$

$$= (A-M)^n C_A + (B-M)^n C_B$$

Рассмотрим сумму модулей центральных моментов функций $C_A\delta(x\text{-}A)$ и $C_B\delta(x\text{-}B)$

$$|(A-M)^n C_A| + |(B-M)^n C_B|.$$

Если принять за M математическое ожидание функции $f_{Max}(x)=C_A\delta(x\text{-}A)+C_B\delta(x\text{-}B)$, то коэффициенты C_A и C_B можно выразить через M как $C_A=(B\text{-}M)/(B\text{-}A)$ и $C_B=(M\text{-}A)/(B\text{-}A)$. Получаем сумму модулей центральных моментов функций $C_A\delta(x\text{-}A)$ и $C_B\delta(x\text{-}B)$

$$|(A-M)^n \frac{B-M}{B-A}| + |(B-M)^n \frac{M-A}{B-A}|.$$

Для удобства дальнейшей работы, преобразуем эту сумму к виду без модулей

$$|(A-M)^n \frac{B-M}{B-A}| + |(B-M)^n \frac{M-A}{B-A}| =$$

$$= (M-A)^n \frac{B-M}{B-A} + (B-M)^n \frac{M-A}{B-A} .$$

Введем параметр $m\equiv(M\text{-}A)/(B\text{-}A)=C_B$, при этом $1\text{-}m\equiv(B\text{-}M)/(B\text{-}A)=C_A$ (очевидно, что $0\leq m\leq 1$ и $0\leq 1\text{-}m\leq 1$). Получаем

$$(M-A)^n \frac{B-M}{B-A} + (B-M)^n \frac{M-A}{B-A} = .$$

$$= (m^n(1-m) + (1-m)^n m)\times(B-A)^n$$

Таким образом, сумма модулей центральных моментов рассматриваемых дельта-функций $(B\text{-}M)/(B\text{-}A)\delta(x\text{-}A)$ и $(M\text{-}A)/(B\text{-}A)\delta(x\text{-}B)$ равна

$$(m^n(1-m) + (1-m)^n m)\times(B-A)^n .$$

Полный анализ полученного выражения для рассматриваемой суммы модулей (в Harin (2010) ей соответствуют случаи $n=2k$ и оценки сверху) не является целью данной статьи. Поэтому далее будут выполняться только самые простые оценки и расчеты.

П1.0. Доказательство максимальности

Четные n
Нечетные n
Общий результат

Докажем, что сумма модулей центральных моментов дельта-функций $(B-M)/(B-A)\delta(x-A)$ и $(M-A)/(B-A)\delta(x-B)$, т. .е функций, полностью сосредоточенных на краях интервала $[A, B]$, больше либо равна максимально возможной по модулю величине центрального момента для функции, определенной в разделе 1.1.

Доказательство:

Предположим, что, существует функция $f_{fictitious}(x)$ определенная в разделе 1.1, (без ограничения общности, $f_{fictitious}(x)$ нормирована так, что $Const_f=1$), не равная $f_{Max}(x)$, а также, для некоторого $M : A<M<B$, и для некоторого $n : 2\leq n<\infty$, имеющая такую величину центрального момента $E(X-M)^n$, которая превышает рассматриваемую сумму модулей центральных моментов дельта-функций $(B-M)/(B-A)\delta(x-A)$ и $(M-A)/(B-A)\delta(x-B)$.

Для любой функции $f(x)$, определенной в разделе 1.1., из определений математического ожидания и центрального момента

$$E(X-M)^1 = \frac{1}{Const_f}\int_A^B (x-M)f(x)dx = 0 =$$
$$= \frac{1}{Const_f}\int_A^M (x-M)f(x)dx + \frac{1}{Const_f}\int_M^B (x-M)f(x)dx$$

следует, что для любого бесконечно малого элемента $f(a)\Delta x_a : A<a\leq M$ или бесконечно малого элемента $f(A)\Delta C_A$, существует бесконечно малый элемент $f(b)\Delta x_b : M\leq b<B$ или бесконечно малый элемент $f(B)\Delta C_B$, такой, что $(M-a)f(a)\Delta x_a=(b-M)f(b)\Delta x_b$ или $(M-a)f(a)\Delta x_a=(B-M)f(B)\Delta C_B$ и т.д.

Вычислим центральные моменты для пары элементов $f_{fictitious}(a)\Delta x_a$ (либо $f_{fictitious}(A)\Delta C_A$) и $f_{fictitious}(b)\Delta x_b$ (либо $f_{fictitious}(B)\Delta C_B$) и для соответствующей ей пары элементов $\Delta C_A\delta(x-A)$ и $\Delta C_B\delta(x-B)$, таких, что $f_{fictitious}(a)\Delta x_a+f_{fictitious}\Delta x_b=\Delta C_A+\Delta C_B$ и $\Delta C_A/\Delta C_B=C_A/C_B=(1-m)/m$, т.е. $\Delta C_B=m\Delta C$ и $\Delta C_A=(1-m)\Delta C$, где $\Delta C=f_{fictitious}(a)\Delta x_a+f_{fictitious}(b)\Delta x_b$.

Если невозможно существование хотя бы одного элемента $f_{fictitious}(a)\Delta x_a$ либо $f_{fictitious}(b)\Delta x_b$, такого, что центральный момент пары $f_{fictitious}$ будет больше суммы модулей центральных моментов дельта-функций $(B-M)/(B-A)\delta(x-A)$ и $(M-A)/(B-A)\delta(x-B)$, то сумма модулей центральных моментов дельта-функций $(B-M)/(B-A)\delta(x-A)$ и $(M-A)/(B-A)\delta(x-B)$, т.е. функций, полностью сосредоточенных на краях интервала $[A, B]$, больше либо равна максимально возможной по модулю величине центрального момента для функции, определенной в разделе 1.1.

Для бесконечно малой части центрального момента $f_{fictitious}(x)$ имеем

$$\int_{a-\Delta x_a/2}^{a+\Delta x_a/2}(x-M)^n f_{fictitious}(x)dx + \int_{b-\Delta x_b/2}^{b+\Delta x_b/2}(x-M)^n f_{fictitious}(x)dx =$$
$$= (a-M)^n f_{fictitious}(a)\Delta x_a + (b-M)^n f_{fictitious}(b)\Delta x_b \, .$$

Выразим $f_{fictitious}(b)\Delta x_b$ через $f_{fictitious}(a)\Delta x_a$. Получаем $f_{fictitious}(b)\Delta x_b=(M-a)f_{fictitious}(a)\Delta x_a/(b-M)$ или $f_{fictitious}(B)\Delta C_B=(M-a)f_{fictitious}(a)\Delta x_a/(B-M)$. Получаем

$$(a-M)^n f_{fictitious}(a)\Delta x_a+(b-M)^n f_{fictitious}(b)\Delta x_b =$$
$$=(a-M)^n f_{fictitious}(a)\Delta x_a+(b-M)^n f_{fictitious}(a)\Delta x_a \frac{(M-a)}{(b-M)}=.$$
$$=f_{fictitious}(a)\Delta x_a((a-M)^n+(b-M)^n\frac{(M-a)}{(b-M)})$$

Введем параметр $m_a\equiv(a-A)/(B-A)$ (очевидно, что $0<m_a<m$). Перепишем, не уменьшая общности, для B

$$f_{fictitious}(a)\Delta x_a((a-M)^n+(B-M)^n\frac{(M-a)}{(B-M)})=$$
$$=f_{fictitious}(a)\Delta x_a((m_a-m)^n+(1-m)^{n-1}(m-m_a))(B-A)^n= \quad .$$
$$=f_{fictitious}(a)\Delta x_a((-1)^n(m-m_a)^n+(1-m)^{n-1}(m-m_a))(B-A)^n$$

Для ΔC имеем

$$\Delta C=f_{fictitious}(a)\Delta x_a+f_{fictitious}(b)\Delta x_b=$$
$$=f_{fictitious}(a)\Delta x_a(1+\frac{m-m_a}{1-m})=$$
$$=f_{fictitious}(a)\Delta x_a\frac{1-m+m-m_a}{1-m}= \quad .$$
$$=f_{fictitious}(a)\Delta x_a\frac{1-m_a}{1-m}$$

Для бесконечно малой части суммы модулей центральных моментов дельта-функций $(B-M)/(B-A)\delta(x-A)$ и $(M-A)/(B-A)\delta(x-B)$ имеем

$$\Delta((m^n(1-m)+(1-m)^n m)\times(B-A)^n)=$$
$$=f_{fictitious}(a)\Delta x_a\frac{1-m_a}{1-m}(m^n(1-m)+(1-m)^n m)\times(B-A)^n=.$$
$$=f_{fictitious}(a)\Delta x_a(1-m_a)(m^n+(1-m)^{n-1}m)\times(B-A)^n$$

Сравнение по модулю соответствующих выражений сводится к сравнению

$$(1-m_a)(m^n+(1-m)^{n-1}m)-$$
$$-|(-1)^n(m-m_a)^n+(1-m)^{n-1}(m-m_a)|.$$

Видно, что:

При $m_a \to 0$:

Для четных n, второй член по величине стремится к первому и разность стремится к нулю.

Для нечетных n, второй член по величине стремится к первому минус $2m^n$ и разность стремится к $+2m^n$.

При $m_a \to m$ второй член стремится к нулю и разность положительна (и равна первому члену).

Четные n

Продифференцируем эту разность по m_a для четных n

$$((1-m_a)(m^n+(1-m)^{n-1}m)-$$
$$-\left|(m-m_a)^n+(1-m)^{n-1}(m-m_a)\right|)'_{m_a}=$$
$$=-m^n-(1-m)^{n-1}m+$$
$$+n(m-m_a)^{n-1}+(1-m)^{n-1}=$$
$$=n(m-m_a)^{n-1}+(1-m)^{n-1}-m^n-(1-m)^{n-1}m=$$
$$=n(m-m_a)^{n-1}+(1-m)^n-m^n$$

Из

$$n(m-m_a)^{n-1}+(1-m)^n-m^n=0$$

и

$$n(m-m_a)^{n-1}=m^n-(1-m)^n$$

получаем

$$m_{a0}=m-\sqrt[n-1]{\frac{m^n-(1-m)^n}{n}}\ .$$

При $m_a \to 0$ второй член стремится к первому и разность стремится к нулю. При этом, первая производная

$$n(m-m_a)^{n-1}+(1-m)^n-m^n \xrightarrow[m_a\to 0]{}$$
$$\xrightarrow[m_a\to 0]{} nm^{n-1}+(1-m)^n-m^n=$$
$$=m^{n-1}(n-m)+(1-m)^n>0$$

больше нуля.

Таким образом:

При увеличении m_a от $m_a \to 0$ до $m_a=m_{a0}$, разность увеличивается от 0 до некоторой положительной величины.

При увеличении m_a от $m_a=m_{a0}$ до $m_a \to m$, второй член стремится к нулю и разность уменьшается от некоторой положительной величины (от (положительного) максимума) до другой положительной величины, а именно до первого члена

$$f_{fictitious}(a)\Delta x_a((1-m_a)(m^n+(1-m)^n m)\times(B-A)^n\ .$$

Таким образом, для четных n изучаемая разность положительна.

Нечетные n

Для нечетных n изучаемая разность имеет вид

$$\begin{aligned}&(1-m_a)(m^n+(1-m)^{n-1}m)-\\&-\left|-(m-m_a)^n+(1-m)^{n-1}(m-m_a)\right|\end{aligned}.$$

Рассмотрим две области: первую, в которой

$$(m-m_a)^{n-1}\le(1-m)^{n-1}$$

и вторую, в которой

$$(m-m_a)^{n-1}\ge(1-m)^{n-1}.$$

Для первой области получаем

$$\begin{aligned}&(1-m_a)(m^n+(1-m)^{n-1}m)-\\&-\left|-(m-m_a)^n+(1-m)^{n-1}(m-m_a)\right|<\\&<(1-m_a)(1-m)^{n-1}m-\\&-(1-m)^{n-1}(m-m_a))=\\&=(1-m)^{n-1}(m-mm_a-m+m_a)=\\&=(1-m)^{n-1}m_a(1-m)>0\end{aligned}.$$

То есть для первой области разность положительна.

Для второй области получаем

$$\begin{aligned}&(1-m_a)(m^n+(1-m)^{n-1}m)-\\&-\left|(m-m_a)^n-(1-m)^{n-1}(m-m_a)\right|<\\&<(1-m_a)m^n-\\&-(m-m_a)^n=\\&=m^n(1-m_a)-m^n(1-\frac{m_a}{m})=\\&=m^n(\frac{m_a}{m}-m_a)=m^nm_a(\frac{1}{m}-1)>0\end{aligned}.$$

То есть для второй области разность положительна.

Таким образом, для нечетных n изучаемая разность положительна.

Общий результат

Для m_b рассмотрение полностью аналогичное. Для m_a и m_b одновременно, изучаемая разность – тем более положительна.

Таким образом, доказано утверждение о том, что сумма модулей центральных моментов дельта-функций $(B-M)/(B-A)\delta(x-A)$ и $(M-A)/(B-A)\delta(x-B)$, т. е функций, полностью сосредоточенных на краях интервала $[A, B]$, больше либо равна максимально возможной по модулю величине центрального момента для функции, определенной в разделе 1.1.

$$\begin{aligned}&Max(E(X-M)^n)\le(M-A)^n\frac{B-M}{B-A}+(B-M)^n\frac{M-A}{B-A}=\\&=(m^n(1-m)+(1-m)^nm)\times(B-A)^n\end{aligned}.$$

П1.1. Расчет для $n=2k$ и для оценки сверху

Расчет для середины интервала

Максимум при n=2

Локальные максимумы, ближайшие к краям интервала

Для $n=2k$ и для оценки сверху для $n=2k+1$

$$Max(E(X-M)^n) \le (m^n(1-m) + m(1-m)^n) \times (B-A)^n$$

и первая производная по m переменной части этого выражения

$$\begin{aligned}&(m^n(1-m) + m(1-m)^n)'_m = \\ &= nm^{n-1}(1-m) - m^n + (1-m)^n - nm(1-m)^{n-1}\end{aligned}.$$

Расчет для середины интервала

Видно, что, для $n=2k$ и для оценки сверху, $Max(E(X\text{-}M)^n)$ и первая производная по m симметричны по m и $1\text{-}m$. Полагая $1\text{-}m=m$, получаем

$$\begin{aligned}&nm^{n-1}(1-m) - m^n + (1-m)^n - nm(1-m)^{n-1} = \\ &= nm^{n-1}m - m^n + m^n - nmm^{n-1} = \\ &= nm^{n-1}m - nmm^{n-1} - m^n + m^n \equiv 0\end{aligned},$$

т.е., для $n=2k$ и для оценки сверху, посередине интервала, при $m=1\text{-}m=1/2$, всегда имеет место экстремум либо точка перегиба. Вычислим вторую производную

$$\begin{aligned}&(nm^{n-1}(1-m) - m^n + (1-m)^n - nm(1-m)^{n-1})'_m = \\ &= n(n-1)m^{n-2}(1-m) - nm^{n-1} - nm^{n-1} - \\ &- n(1-m)^{n-1} - n(1-m)^{n-1} + n(n-1)m(1-m)^{n-2} = \\ &= n(n-1)m^{n-2}(1-m) - 2nm^{n-1} - 2n(1-m)^{n-1} + n(n-1)m(1-m)^{n-2}\end{aligned}.$$

В точке $m=1\text{-}m$ вторая производная равна

$$\begin{aligned}&n(n-1)m^{n-2}(1-m) - 2nm^{n-1} - 2n(1-m)^{n-1} + n(n-1)m(1-m)^{n-2} = \\ &= n(n-1)m^{n-1} - 2nm^{n-1} - 2nm^{n-1} + n(n-1)m^{n-1} = \\ &= 2n(n-1)m^{n-1} - 4nm^{n-1} = 2nm^{n-1}(n-1-2) = \\ &= 2nm^{n-1}(n-3)\end{aligned},$$

т.е., при $n=2$ получаем максимум, а при $n\ge 4$ – минимум.

Максимум при $n=2$

В точке $m=1\text{-}m=1/2$ при $n=2$ для центрального момента (дисперсии) получаем известное выражение

$$\begin{aligned}&Max(E(X-M)^2) = (m^2(1-m) + m(1-m)^2)(B-A)^2 = \\ &= (m^2m + mm^2)(B-A)^2 = 2m^3(B-A)^2 = 2\frac{1}{2^3}(B-A)^2 = \\ &= (\frac{B-A}{2})^2\end{aligned}$$

Локальные максимумы, ближайшие к краям интервала

Найдем ближайшие к краям интервала локальные максимумы при $n>3$. Рассмотрим области, где $m<<1$ и $n>3$

$$\begin{aligned}&(m^n(1-m)+m(1-m)^n)'_m=\\&=nm^{n-1}(1-m)-m^n+(1-m)^n-nm(1-m)^{n-1}\approx\\&\approx(1-m)^n-nm(1-m)^{n-1}\approx 1-nm-nm=\\&=1-2nm\end{aligned}.$$

то есть, локальные экстремумы имеют место при

$$m\approx\frac{1}{2n}.$$

Заметим, что это подразумевает $n>>1$.

Аналогично, для $(1-m)<<1$, локальные экстремумы имеют место при

$$m\approx 1-\frac{1}{2n}.$$

В локальных экстремумах вторая производная

$$(1-2nm)'_m=-2n<0,$$

т.е. имеют место локальные максимумы. Аналогично, локальные максимумы имеют место и в точках $m=1-1/2n$. В обоих этих случаях значения центрального момента при $n>>1$ приближенно равны

$$\begin{aligned}&Max(E(X-M)^n)\le(m^n(1-m)+m(1-m)^n)(B-A)^n=\\&=((\frac{1}{2n})^n(1-\frac{1}{2n})+\frac{1}{2n}(1-\frac{1}{2n})^n)(B-A)^n\approx\\&\approx((\frac{1}{2n})^n+\frac{1}{2n}(1-\frac{1}{2n})^n)(B-A)^n\approx\\&\approx\frac{1}{2n}(1-\frac{1}{2n})^n(B-A)^n\end{aligned}.$$

Найдем $(1-1/2n)^n$. Обозначая $x\equiv-2n$, получаем $n=-x/2$ и, при $n>>1$, вычисление сводится к вычислению e

$$(1-\frac{1}{2n})^n=(1+\frac{1}{x})^{-\frac{x}{2}}\approx\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

В результате получаем для $m=1/2n$ и для $m=1-1/2n$, при $n>>1$

$$\begin{aligned}&Max(E(X-M)^n)\le(m^n(1-m)+m(1-m)^n)(B-A)^n\approx\\&\approx\frac{1}{2n}(1-\frac{1}{2n})^n(B-A)^n\approx\\&\approx\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{(B-A)^n}{2n}\end{aligned}.$$

Для проверки, сравним величины полученных локальных максимумов центральных моментов с величинами центральных моментов, для *M* в середине интервала. Для *m=1-m=1/2*

$$Max(E(X-\frac{A+B}{2})^n) \le (m^n(1-m)+m(1-m)^n)(B-A)^n =$$

$$=(m^n m+mm^n)(B-A)^n = 2m^{n+1}(B-A)^n = \frac{2}{2^{n+1}}(B-A)^n = (\frac{B-A}{2})^n =$$

$$=\frac{(B-A)^n}{2^n}$$

Для *m=1/2n* и *n>>1*

$$Max(E(X-(A+\frac{B-A}{2n}))^n) \approx \frac{1}{2\sqrt{e}}\frac{(B-A)^n}{n}$$

Видно, что в формулах различаются только коэффициенты знаменателя при $(B\text{-}A)^n$, т.е. $n2\sqrt{e}$ и 2^n. Степенная функция 2^n растет быстрее, чем натуральный ряд *n*. Оценим, начиная с какого *n*, коэффициент $1/n2\sqrt{e}$ станет больше, чем коэффициент $1/2^n$. Сравним

$$\frac{1}{2^n} \quad и \quad \frac{1}{2\sqrt{e}}\frac{1}{n} \approx \frac{1}{3}\frac{1}{n}.$$

При *n=3*

$$\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8} \quad > \quad \frac{1}{3}\frac{1}{3}=\frac{1}{9}.$$

При *n=4*

$$\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16} \quad < \quad \frac{1}{3}\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

Видно, что, начиная с *n=4*, величины полученных локальных максимумов центральных моментов при *m=1/2n* превышают величины центральных моментов при *m=1/2*.

Приложение П2. Подробное доказательство леммы о стремлении к нулю центральных моментов

Подробное доказательство

Если, для *f(x)*, определенной в разделе 1.1., *E(X)=M* стремится к *A* или к *B*, то $E(X\text{-}M)^n$ стремится к нулю.

Доказательство:

Для $M \to A$

$$Max(E(X-M)^n) \le ((M-A)^{n-1} + (B-M)^{n-1})\frac{(M-A)(B-M)}{B-A} <$$

$$< \frac{(M-A)(B-M)}{B-A}((B-A)^{n-1} + (B-A)^{n-1}) \le 2(M-A)(B-A)^{n-1} = ,$$

$$= 2\frac{(M-A)}{B-A}(B-A)^n \equiv 2m(B-A)^n$$

Если справедливо строгое неравенство, то тем более справедливо нестрогое неравенство

$$E(X-M)^n \le (B-A)^n \times 2\frac{M-A}{B-A} \equiv (B-A)^n \times 2m \xrightarrow[m\to 0]{} 0,$$

достаточное для целей настоящей статьи.

Таким образом, при конечных *(B-A)* и *n* и при $M \to A$, т.е. при *(M-A)* и *m*, стремящихся к нулю, центральные моменты $E(X\text{-}M)^n$ тоже стремятся к нулю. Для $M \to B$ рассмотрение полностью аналогичное.

Лемма доказана.

Более точная оценка сходимости центральных моментов

Сделаем более точную оценку сходимости к *0* центральных моментов. Снова рассмотрим, при $M \to A$, т.е. при $m \to 0$,

$$Max(E(X-M)^n) \le (m^n(1-m) + m(1-m)^n)(B-A)^n =$$

$$= m(1-m)(m^{n-1} + (1-m)^{n-1}) \times (B-A)^n \xrightarrow[m\to 0]{} .$$

$$\xrightarrow[m\to 0]{} m(1-m)^{n-1} \times (B-A)^n \xrightarrow[m\to 0]{} m(B-A)^n$$

Для проверки, сравним эту оценку с общей формулой

$$Max(E(X-M)^n) \le m(1-m)(m^{n-1} + (1-m)^{n-1})(B-A)^n .$$

Оценку отличает от общей формулы только сомножитель

$$(1-m)(m^{n-1} + (1-m)^{n-1}) .$$

Поскольку $m \le 1$, то $(1\text{-}m) \le 1$ и, для $n \ge 2$,

$$(m^{n-1} + (1-m)^{n-1}) \le (m + (1-m)) \equiv 1 .$$

Следовательно, для $n \ge 2$

$$m(1-m)(m^{n-1} + (1-m)^{n-1})(B-A)^n \le m(B-A)^n .$$

Для контроля, сравним эту оценку с максимумами в $m=1/2n$

$$m(B-A)^n = \frac{(B-A)^n}{2n} > \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{(B-A)^n}{2n} .$$

Итак, более точную оценку сходимости центральных моментов к *0* можно применять для всех требуемых диапазонов: $1<n<\infty$ и $0 \le m \le 1$.

Приложение П3. Подробное доказательство теоремы о существовании разрывов для математического ожидания

Подробное доказательство

Если, для $f(x)$, определенной в разделе 1.1., существуют n : $1<n<\infty$, и $r_{dispers}>0$: $|E(X-M)^n|\geq r_{dispers}>0$, то существует $r_{expect}>0$: $A<(A+r_{expect})\leq E(X)\leq(B-r_{expect})<B$.

Доказательство.

Из условий теоремы и из леммы, для $M\rightarrow A$,

$$0<r_{dispers}\leq|E(X-M)^n|\leq(B-A)^n\times 2\frac{(M-A)}{(B-A)}=2(B-A)^{n-1}(M-A)$$

$$0<r_{dispers}\leq 2(B-A)^{n-1}(M-A)$$

$$0<r_{expect}\equiv\frac{r_{dispers}}{2(B-A)^{n-1}}\leq(M-A)$$

$$r_{expect}\equiv\frac{r_{dispers}}{2(B-A)^{n-1}}.$$

Для $M\rightarrow B$ рассмотрение полностью аналогично вышеприведенному.

Поскольку $(B-A)$ и n – конечны, а $r_{dispers}>0$, то конечны и больше нуля - как $(M-A)\geq r_{expect}>0$ так и $(B-M)\geq r_{expect}>0$.

Теорема доказана.

Возможные формулировки

Если, на конечном интервале, конечный центральный момент не может приближаться к нулю ближе, чем на ненулевую величину $r_{dispers}>0$, то математическое ожидание не может приближаться к границе этого интервала ближе, чем на (другую) ненулевую величину $r_{expect}>0$.

Другими словами, если для функции, определенной на конечном интервале, существует ненулевой разрыв (*rupture*), запрещенная зона $r_{dispers}>0$ между каким-либо из ее центральных моментов и нулем, то между математическим ожиданием этой функции и любой из границ интервала тоже существуют ненулевые разрывы, запрещенные зоны $r_{expect}>0$.

В более общем виде, для возможных значений: Если для функции, определенной на конечном интервале, существует ненулевой разрыв, запрещенная зона $r_{dispers}>0$ между возможными значениями какого-либо из ее центральных моментов и нулем, то между возможными значениями математического ожидания этой функции и любой из границ интервала тоже существуют ненулевые разрывы, запрещенные зоны $r_{expect}>0$.

Замечание 1. Более точная оценка разрыва r_{expect}

Заметим, что, согласно П2, можно дать более точную оценку r_{expect}

$$0 < r_{dispers} \leq | E(X-M)^n | \leq (B-A)^n \frac{(M-A)}{(B-A)} = (B-A)^{n-1}(M-A)$$

$$0 < r_{dispers} \leq (B-A)^{n-1}(M-A)$$

$$0 < r_{\exp ect} \equiv \frac{r_{dispers}}{(B-A)^{n-1}} \leq (M-A),$$

то есть

$$r_{\exp ect} \equiv \frac{r_{dispers}}{(B-A)^{n-1}}$$

и, при *(B-A)=1*

$$r_{\exp ect} = r_{dispers}$$

Это же справедливо и для $M \rightarrow B$.

Замечание 2. Условия существования разрывов

Следует подчеркнуть, что разрывы для математического ожидания функции, о которых идет речь, существуют не всегда и не для всех случаев. Эти разрывы между границами интервала и математическим ожиданием функции существуют только тогда и только для тех случаев, когда и в которых существует ненулевой разрыв между возможными значениями какого-либо центрального момента функции и нулем.

О терминологии

Термин “*разрыв*” появился из исходной задачи о сравнении двух интервалов в “парадоксе четырех областей”. Первый интервал соответствовал гарантированному случаю и включал границы шкалы вероятностей. Второй интервал соответствовал случаю риска и, при наличии реального ненулевого разброса данных, не включал границ шкалы вероятностей. При этом, между границами первого и второго интервалов, при наличии реального ненулевого разброса данных, существовали ненулевые промежутки, разрывы. В исходной задаче необходимо было ясно показать различие между рассматриваемыми интервалами. Кроме того, слова “*разрыв*” и “*rupture*” начинаются со сходных звуков, что делает более удобным чтение статей, написанных на русском языке. Поэтому за основу был принят термин “*разрыв*”.

В физике, рассматриваемое явление в значительной мере аналогично запрещенным зонам в твердом теле.

По-видимому, рассматриваемое явление, без ущерба для его сути, может быть названо адекватно условиям конкретной решаемой задачи и адекватно терминологии, сложившейся в конкретной области использования. По-видимому, допустимы названия, термины: “*разрывы*”, “*промежутки*”, “*запрещенные зоны*”, “*недоступные области*”, “*ограничения*”, “*сжатия*”, “*смещения*” и т.д.

Приложение П4.
Подробное доказательство теоремы для вероятности

Подробное доказательство

Пусть, для серии испытаний с количеством испытаний K, в т.ч. при K, стремящемся к бесконечности, плотность $f(x)$ оценки вероятности, частоты F : $F\equiv M\equiv E(X)$, некоторого события имеет свойства, заданные в разделе 1.1., в частности, определена на $[0, 1]$ и $Const_1=1$.

Тогда, если на интервале $[0,1]$ определена P : при стремлении количества испытаний K к бесконечности $K\to\infty$, оценка вероятности F стремится к P, т.е.

$$\lim_{K\to\infty} F = P,$$

и между оценкой вероятности и любой из границ интервала существуют ненулевые разрывы $0<r_{expect}\leq F\leq(1-r_{expect})<1$, то такие же ненулевые разрывы $0<r_{expect}\leq P\leq(1-r_{expect})<1$ существуют между P и любой из границ интервала.

Доказательство.

Из

$$\lim_{K\to\infty} F = P$$

следует, что для любого $r>0$ существует K_r : для $K>K_r$ $|F-P|<r$.

Для случая $0<r_{expect}\leq P$ предположим, от противного, что существует $r_3>0$: $0\leq P=r_{expect}-r_3<r_{expect}$.

Для $K>K_r$ положим $r=(r_{expect}-P)/2=r_3/2$. Тогда $|F-P|<r_3/2$. При $F\geq P\geq 0$, $F-P=|F-P|<r_3/2$ и $F<P+r_3/2=r_{expect}-r_3+r_3/2=r_{expect}-r_3/2<r_{expect}$, то есть $F<r_{expect}-r_3/2<r_{expect}$, что противоречит исходному условию $F\geq r_{expect}$.

Доказательство для случая $P\leq(1-r_{expect})<1$ полностью аналогично вышеприведенному.

Поскольку вероятность удовлетворяет условиям, наложенным на P, то теорема справедлива и для вероятности.

Теорема доказана.

Возможные формулировки

Теорему можно сформулировать и для нужд практических приложений, как более конкретно, так и в более общем виде:

Если, для серии испытаний с количеством испытаний, стремящимся к бесконечности, оценка вероятности стремится к вероятности, а дисперсия оценки вероятности, из-за каких-либо причин (например, из-за шумов, из-за нестабильностей), не может приближаться к нулю ближе, чем на ненулевую величину $r_{dispers}>0$, то, как оценка вероятности так и вероятность, тоже не могут приближаться к границе этого интервала ближе, чем на (другую) ненулевую величину $r_{expect}>0$.

Другими словами, если, для серии испытаний с количеством испытаний, стремящимся к бесконечности, оценка вероятности стремится к вероятности, а между дисперсией оценки вероятности и нулем, из-за каких-либо причин (например, из-за шумов, из-за нестабильностей), существует ненулевой разрыв, то у границ шкалы вероятностей тоже существуют ненулевые разрывы, как для оценки вероятности, так и для вероятности.

В более общем виде, для возможных значений можно также сказать:

Если, для серии испытаний с количеством испытаний, стремящимся к бесконечности, оценка вероятности стремится к вероятности, а между возможными значениями дисперсии оценки вероятности и нулем, из-за каких-либо причин (например, из-за шумов, из-за нестабильностей), существует ненулевой разрыв, то у границ шкалы вероятностей тоже существуют ненулевые разрывы, как для возможных значений оценки вероятности, так и для возможных значений вероятности.

Замечание 1. Более точная оценка разрыва r_{expect}

Заметим, что, согласно П2, можно дать более точную оценку r_{expect}

$$r_{expect} \equiv \frac{r_{dispers}}{(B-A)^{n-1}}$$

и, при $(B\text{-}A)=1$, то есть для случаев оценки вероятности и вероятности

$$r_{expect} = r_{dispers} .$$

Замечание 2. Условия существования разрывов

Следует подчеркнуть, что разрывы, о которых идет речь, существуют не всегда и не для всех случаев. Эти разрывы в шкале вероятностей существуют и для оценки вероятности и для вероятности только тогда и только для тех случаев, когда и в которых существует ненулевой разрыв между возможными значениями дисперсии (или иного центрального момента) оценки вероятности и нулем.

Приложение П5. Подробный пример разрывов в шкале вероятностей

Условия

Результаты

Вывод

Замечание. Дисперсия σ^2 разброса попаданий и дисперсия D оценки вероятности попаданий и промахов

Условия

Самый простой пример разрывов в шкале вероятностей – стрельба в мишень (одномерный случай):

Пусть, при точном прицеливании, имеет место некоторый разброс попаданий, например:

А) из-за разброса в размере пуль (если диаметр пули меньше диаметра ствола, то пуля будет вылетать из ствола не по оптической оси ствола, а по некоторому пучку траекторий вокруг этой оси) и разброса в количестве и качестве заряда или

Б) при стрельбе дробью.

Пусть также размер мишени равен $2L$, а разброс попаданий подчиняется нормальному закону распределения с дисперсией σ^2 (и среднеквадратичным отклонением σ). Естественно, σ увеличивается, например, с уменьшением длины ствола, а также, в данном случае, с увеличением расстояния до мишени (то есть σ в данном случае измеряется в линейных, а не в угловых единицах).

Возможные значения вероятности попадания в мишень P_{in} могут, в зависимости от нахождения точки прицела, располагаться в диапазоне от минимального, нулевого значения $P_{in\_min}=0$, достигаемого, например, если точка прицела находится в направлении, противоположном мишени, до максимального значения P_{in_Max}, достигаемого, если точка прицела гарантированно находится в центре мишени.

Возможные значения вероятности промаха $P_{out}=1-P_{in}$ могут, в зависимости от нахождения точки прицела, располагаться в диапазоне от максимального значения $P_{out\_Max}=1$, достигаемого, например, если точка прицела находится в направлении, противоположном мишени, до минимального значения P_{out_min}, достигаемого, если точка прицела гарантированно находится в центре мишени.

Если точка прицела перемещается от направления, противоположного мишени, до точки, находящейся в центре мишени, то вероятность попадания в мишень P_{in} увеличивается от 0 до P_{in_Max}, а вероятность промаха P_{out} соответственно уменьшается от 1 до P_{out_min}. При этом Если $\sigma=0$, то переходы вероятности попадания от 0 к P_{in_Max} и вероятности промаха от 1 к P_{out_min} происходят скачком. Если $\sigma>0$, то оба перехода происходят плавно и P_{in} принимает все значения между 0 и P_{in_Max}, а P_{out} принимает все значения между 1 и P_{out_min}.

Если точка прицела гарантированно находится в центре мишени, то максимальная вероятность попадания в мишень P_{in_Max} и минимальная вероятность промаха P_{out_min}, в зависимости от соотношения σ и L, равны (см., напр., Прохоров 1988):

Результаты

Для простоты рассмотрим только 4 классических точки: $\sigma=0$ (или $\sigma\approx 0$ или $L>3\sigma>0$), $L=3\sigma$, $L=2\sigma$ и $L=\sigma$.

При $L>\sigma=0$, максимальная вероятность попадания в мишень составляет $P_{in\_Max}=1$, а минимальная вероятность промаха составляет соответственно $P_{out\_min}=0$. Следовательно, возможные значения вероятности попадания в мишень, в зависимости от точки прицела, могут быть равны $P_{in\_min}=0$ или $P_{in\_Max}=1$, а возможные значения вероятности промаха могут быть равны соответственно $P_{out\_Max}=1$ или $P_{out\_min}=0$. Таким образом, при $L>\sigma=0$, разрывов в шкале вероятностей нет $r_{expect}=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}=0$.

При $\sigma\approx 0$ и при $L>3\sigma>0$, когда, по «правилу трех сигм», можно полагать $\sigma\approx 0$, максимальная вероятность попадания в мишень составляет $P_{in\_Max}\approx 1$, и минимальная вероятность промаха составляет соответственно $P_{out\_min}\approx 0$. Следовательно возможные значения вероятности попадания в мишень, в зависимости от точки прицела, могут находиться в диапазоне $0\leq P_{in}\leq P_{in\_Max}\approx 1$, а возможные значения вероятности промаха могут находиться соответственно в диапазоне $0\approx P_{out\_min}\leq P_{out}\leq 1$. Таким образом, при $\sigma\approx 0$ и при $L>3\sigma>0$, разрывов в шкале вероятностей тоже нет, точнее говоря, разрывы в шкале вероятностей можно считать равными нулю $r_{expect}=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}\approx 0$.

При $L=3\sigma>0$, максимальная вероятность попадания в мишень составляет $P_{in\_Max}\approx 0,997$, а минимальная вероятность промаха составляет $P_{out\_min}\approx 0,003$. Следовательно возможные значения вероятности попадания в мишень, в зависимости от точки прицела, могут находиться в диапазоне $0\leq P_{in}\leq P_{in\_Max}=0,997<1$, а возможные значения вероятности промаха могут находиться соответственно в диапазоне $0<0,003=P_{out\_min}\leq P_{out}\leq 1$. Таким образом, при $L=3\sigma>0$, в шкале вероятностей появляются ненулевые разрывы $r_{expect}=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}=0,003>0$.

При $L=2\sigma>0$, максимальная вероятность попадания в мишень составляет $P_{in\_Max}=0,95$, а минимальная вероятность промаха составляет $P_{out\_min}=0,05$. Следовательно возможные значения вероятности попадания в мишень, в зависимости от точки прицела, могут находиться в диапазоне $0\leq P_{in}\leq P_{in\_Max}=0,95<1$, а возможные значения вероятности промаха могут находиться соответственно в диапазоне $0<0,05=P_{out\_min}\leq P_{out}\leq 1$. Таким образом, при $L=2\sigma>0$, в шкале вероятностей существуют ненулевые разрывы $r_{expect}=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}=0,05>0$.

При $L=\sigma>0$, максимальная вероятность попадания в мишень составляет $P_{in\_Max}=0,68$, а минимальная вероятность промаха составляет $P_{out\_min}=0,32$. Следовательно возможные значения вероятности попадания в мишень, в зависимости от точки прицела, могут находиться в диапазоне $0\leq P_{in}\leq P_{in\_Max}=0,68<1$, а возможные значения вероятности промаха могут находиться соответственно в диапазоне $0<0,32=P_{out\_min}\leq P_{out}\leq 1$. Таким образом, при $L=\sigma>0$, в шкале вероятностей существуют ненулевые разрывы $r_{expect}=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}=0,32>0$.

Результаты. Краткий список

При $L>\sigma=0$ получаем $P_{in}=P_{in\_min}=0$ или $P_{in}=P_{in\_Max}=1$,
$P_{out}=P_{out\_Max}=1$ или $P_{out}=P_{out\_min}=0$ и
$r_{expect}=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}=0$.

При $L>3\sigma>0$, для многих практических применений, по «правилу трех сигм», можно полагать $\sigma\approx0$ и $0\le P_{in}\le P_{in\_Max}\approx1$,
$0\approx P_{out\_min}\le P_{out}\le 1$ и
$r_{expect}=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}\approx0$.

При $L=3\sigma>0$ получаем $0\le P_{in}\le P_{in\_Max}=0{,}997<1$,
$0<0{,}003=P_{out\_min}\le P_{out}\le 1$ и
$r_{expect}=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}=0{,}003>0$.

При $L=2\sigma>0$ получаем $0\le P_{in}\le P_{in\_Max}=0{,}95<1$,
$0<0{,}05=P_{out\_min}\le P_{out}\le 1$ и
$r_{expect}=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}=0{,}05>0$.

При $L=\sigma>0$ получаем $0\le P_{in}\le P_{in\_Max}=0{,}68<1$,
$0<0{,}32=P_{out\_min}\le P_{out}\le 1$ и
$r_{expect}=1-P_{in\_Max}=P_{out\_min}=0{,}32>0$.

Вывод

Таким образом, при нулевой дисперсии (и в тех случаях, когда дисперсию можно считать нулевой), т.е. при $\sigma^2=0$ (и при $\sigma\approx0$ или $L>3\sigma$) - разрывов в шкале вероятностей нет (практически нет).

При ненулевой дисперсии $\sigma^2>0$ - в шкале вероятностей появляются ненулевые разрывы $r_{expect}>0$:

- между областью возможных (в зависимости от нахождения точки прицела) значений вероятности P_{in} : $0\le P_{in}\le P_{in\_Max}=1-r_{expect}<1$, попадания в мишень и единицей, то есть верхней границей шкалы вероятностей, и

- между областью возможных (в зависимости от нахождения точки прицела) значений вероятности P_{out} : $0<r_{expect}=P_{out\_min}\le P_{out}\le 1$, промаха и нулем, то есть нижней границей шкалы вероятностей.

Замечание. Дисперсия σ^2 разброса попаданий
и дисперсия D оценки вероятности попаданий и промахов

Заметим, что дисперсия разброса попаданий σ^2 может определять дисперсию D оценки вероятности попаданий и промахов, но не является ею.

Если дисперсия разброса попаданий $\sigma^2=0$ (или если $\sigma^2\approx 0$ или если $L>3\sigma$), то область возможных значений дисперсии D доходит (при $\sigma^2\approx 0$ и $L>3\sigma>0$ - приблизительно доходит) до нуля. Поэтому, в данном случае, нет (практически нет) разрыва, запрещенной зоны между возможными значениями дисперсии D оценки вероятности и нулем, то есть $r_{dispers}=0$ (или $r_{dispers}\approx 0$).

Если $3\sigma>L>0$, то область возможных значений дисперсии D не доходит до нуля, то есть существует разрыв $r_{dispers}>0$:

Для оценки вероятности попадания в мишень – только в области вблизи 1

(Если точка прицела находится в направлении, противоположном мишени, то есть если оценка вероятности попадания в мишень находится в области вблизи 0, то увеличение, изменение σ от $\sigma=0$ до $\sigma>0$ не влияет на D. Следовательно, вблизи оценки вероятности попаданий, равной 0, дисперсия D оценки вероятности попадания в мишень может быть равна 0).

Для оценки вероятности промаха – только в области вблизи 0

(Если точка прицела находится в направлении, противоположном мишени, то есть если оценка вероятности промаха находится в области вблизи 1, то увеличение, изменение σ от $\sigma=0$ до $\sigma>0$ также не влияет на D. Следовательно, вблизи оценки вероятности промаха, равной 1, дисперсия D оценки вероятности промаха может быть равна 0).

Вследствие этого, данный простой пример может иллюстрировать теорему о существовании разрывов в шкале вероятностей наглядно, но лишь частично, в отдельных областях, а именно:

Для оценки вероятности и вероятности попадания в мишень – только в области вблизи 1.

Для оценки вероятности и вероятности промаха – только в области вблизи 0.