



Munich Personal RePEc Archive

## **Introduction to the study of matching models of unemployment**

Lisi, Gaetano

University of Cassino

16 May 2010

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/22735/>

MPRA Paper No. 22735, posted 17 May 2010 08:38 UTC

# Introduzione allo studio dei modelli di *matching* del mercato del lavoro

Gaetano Lisi  
*Università di Cassino*  
[gaetano.lisi@unicas.it](mailto:gaetano.lisi@unicas.it)

Copyright © Maggio 2010

|   |    |
|---|----|
| 1. Concetti preliminari e basilari  | 1  |
| 2. Il modello base à la Pissarides (2000)                                   | 8  |
| 3. Il tasso endogeno di distruzione di un posto di lavoro                   | 14 |
| 4. L'analisi della dinamica del modello                                     | 16 |
| 5. Il problema dell'efficienza nei modelli di <i>matching</i>               | 18 |
| 6. I modelli di <i>matching</i> e la scelta lavoratore-imprenditore         | 21 |
| 7. I modelli di <i>matching</i> e l'economia sommersa                       | 24 |
| 8. L'attività di ricerca "nel posto di lavoro" ( <i>on-the-job search</i> ) | 27 |
| Appendice matematica  | 32 |
| Bibliografia  | 40 |

*“The modern approach to labour market analysis,  
which emphasizes the gross flows of workers across various labour market states  
and interprets the phenomenon of unemployment as an equilibrium outcome”*  
David Andolfatto (2005)

## 1. Concetti preliminari e basilari

I modelli di *matching* sono oggi uno dei principali e più diffusi strumenti teorico-analitici usati per analizzare l'importante problema della disoccupazione, tanto da essere considerati i modelli macroeconomici di riferimento del mercato del lavoro (Garibaldi, 2006). Il modello di *matching* è il “cavallo da lavoro” (*workhorse*) usato dagli economisti, sia accademici che con funzioni di governo, per valutare l'impatto (gli effetti) delle diverse politiche economiche sul mercato del lavoro e studiare la disoccupazione causata dal ciclo economico (Hagedorn e Manovskii, 2008). Dal lato empirico, inoltre, tali modelli sembrano spiegare bene ciò che accade nella realtà, infatti, «*nelle calibrazioni empiriche, i modelli di matching sono solitamente confrontati con il modello del ciclo economico reale di Hansen mostrando di avere, almeno, un simile buon andamento*» (Pissarides, 2000, p. 36).

La consapevolezza del fatto che i moderni mercati del lavoro sono caratterizzati da ampi flussi, sia di lavoratori *in* e *out* l'occupazione che di posti di lavoro creati e distrutti dalle imprese, ha condotto a questo nuovo approccio teorico, il cui scopo principale è quello di derivare una teoria della disoccupazione di equilibrio (in cui, appunto, la disoccupazione persiste in equilibrio) che sia empiricamente realistica.

La ricca dinamica di flussi di lavoratori tra occupazione, disoccupazione e inattività è una caratteristica comune sia al mercato del lavoro americano (cfr. Blanchard e Diamond, 1990a) che a quello europeo (cfr. Burda e Wyplosz, 1994) e sebbene tali flussi siano in teoria compatibili con una rotazione dei lavoratori all'interno di un numero fisso di posti di lavoro, la riallocazione dei lavoratori è associata a sostanziali flussi annuali di creazione e distruzione di posti di lavoro a livello di singole imprese (cfr. Davis e Haltiwanger, 1992).

Non fa eccezione il mercato del lavoro italiano, caratterizzato anch'esso da flussi rilevanti comparabili con quelli dei Paesi anglosassoni e maggiori di quelli degli altri paesi dell'Europa continentale (cfr. Contini e Trivellato, 2006).

La creazione e distruzione simultanea di posti di lavoro è particolarmente intensa anche in assenza di importanti variazioni nette dell'occupazione (Bagliano e Bertola, 1999). Stesso discorso per la dinamica dei flussi di lavoratori tra occupazione e (non)occupazione (Andolfatto, 2008). La figura 1 ne è un chiaro esempio: un piccolo cambiamento netto dell'occupazione, pari a 15.000 persone, infatti, è consistente con circa un milione di persone che transitano "in" e "out" l'occupazione.

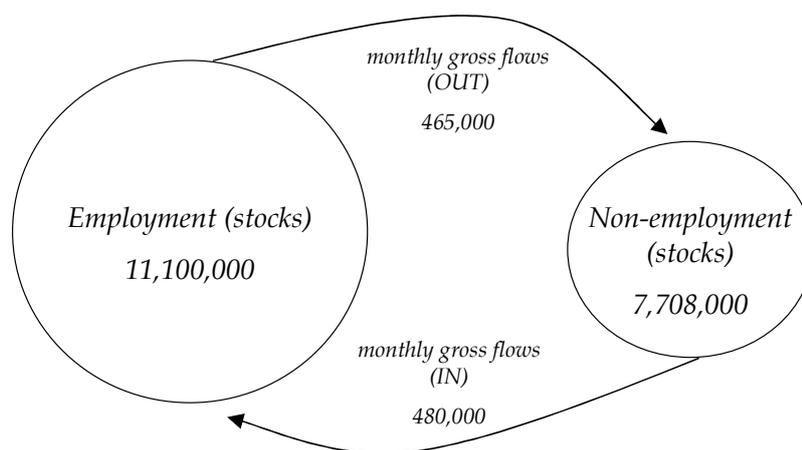


Figura 1. Stocks e flussi del mercato del lavoro canadese (1976 - 1991)  
Fonte: Jones (1993), riportata in: Andolfatto, D. (2008).

Il riconoscimento dell'importanza dei flussi nel persistere della disoccupazione anche in equilibrio, giustifica il meccanismo economico fondamentale alla base dei modelli di *matching*: il processo di incontro (*matching*) tra lavoratori ed imprese. Precisamente, la dinamica occupazionale è il risultato dell'attività di apertura e copertura di nuovi posti di lavoro (*vacancies*) da parte delle imprese, e dell'attività di ricerca di occupazione (*search*) da parte dei lavoratori, in particolare di quelli disoccupati.<sup>1</sup> Il risultato dell'incontro impresa-lavoratore è un posto di lavoro "coperto" (*job*) e, quindi, operativo, cioè in grado di produrre reddito e pagare salari (Bagliano e Bertola, 1999). Tuttavia, essendo il processo di incontro caratterizzato da una decentralizzata, non coordinata e costosa (sia in termini di tempo che di denaro) attività di ricerca posta in essere da lavoratori e imprese, esso richiede del tempo affinché si realizzi (Bagliano e Bertola, 1999).<sup>2</sup> Il processo di incontro è un'attività economica non banale, nel senso che non si realizza istantaneamente a causa dell'esistenza di frizioni (i.e. esternalità di ricerca, eterogeneità degli individui e dei posti di lavoro, informazione imperfetta,

<sup>1</sup> In tali modelli, la definizione di disoccupazione è coerente con quella usata nelle indagini nazionali sulla forza lavoro: sono disoccupati coloro i quali non hanno una occupazione ma attivamente la cercano.

<sup>2</sup> A differenza di ciò che accade nel modello neoclassico tradizionale in cui il processo di incontro è centralizzato e coordinato, e la domanda e l'offerta di lavoro sono istantaneamente equilibrate dalle variazioni del salario.

ecc.). In considerazione delle peculiarità dei modelli di *matching*,<sup>3</sup> particolarmente importanti sono le c.d. esternalità di ricerca, anche dette esternalità di congestione. Ogni impresa che crea nuovi posti di lavoro, infatti, produce esternalità positive per coloro che cercano lavoro (*job-seekers*), poiché sarà più facile trovare lavoro, e negative per le altre imprese, poiché sarà più difficile coprire i posti vacanti; viceversa, un aumento del numero di coloro che cercano lavoro produce esternalità positive per le imprese e negative per gli altri *job-seekers* per motivazioni esattamente opposte.

Occorre precisare, inoltre, che l'idea dell'importanza e dell'esistenza delle frizioni nel mercato del lavoro non è una novità dei modelli di *matching*, essendo già presente in Hutt (1939) e Hicks (1963). Quest'ultimo affermava che il disequilibrio di breve periodo nel mercato del lavoro dipendeva dal fatto che i salari si aggiustavano lentamente in risposta a *shocks* economici a causa appunto delle frizioni esistenti. Visione questa sostanzialmente confermata anche da studi più recenti (cfr. Petrongolo e Pissarides, 2001).

Keynes (1936), invece, che ha sostanzialmente coniato il termine "disoccupazione frizionale", cioè la disoccupazione compatibile con la piena occupazione, riteneva poco importante tale tipo di disoccupazione e, in coerenza con questa convinzione, non era d'accordo sul fatto che le frizioni costituissero la causa principale del lento aggiustamento dei salari.

Successivamente, i lavori degli anni '60 e '70 (in particolare, Alchian, 1969; Phelps, 1968, 1970, 1972; Mortensen, 1970), oltre a imprimere nuova attenzione all'importanza delle frizioni, hanno permesso di accertare che ci sono ampi flussi di lavoratori e di posti di lavoro nei moderni mercati del lavoro.

L'intuizione che una teoria della disoccupazione possa essere basata sull'assunzione che l'attività di ricerca nel mercato del lavoro sia una (costosa) attività economica ha condotto a quella che oggi è conosciuta come *search theory*.<sup>4</sup> Due sono le proprietà chiave di un *search equilibrium*: i) le frizioni di ricerca, appunto, che introducono rendite di monopolio, suddivise tra impresa e lavoratore una volta realizzato l'incontro attraverso la determinazione del salario; ii) il disinteresse per le c.d. esternalità di congestione nei problemi di ottimizzazione individuali. Gli individui, in sostanza,

---

<sup>3</sup> Nel *matching framework*, imprese e lavoratori sono lungimiranti (guardano al futuro oltre che al presente) e hanno aspettative pienamente razionali, i.e. hanno piena conoscenza del processo di incontro e di separazione. Ciononostante, essi agiscono in modo autonomo senza alcun tentativo di coordinare le proprie azioni (Pissarides, 2000).

<sup>4</sup> Sostanzialmente, nei modelli in cui l'individuo deve scegliere come allocare ottimamente il proprio tempo tra lavoro e tempo libero, esiste una terza opzione rappresentata dall'attività di ricerca di un nuovo e/o migliore posto di lavoro.

trascurano gli effetti che le loro azioni hanno sugli altri agenti economici impegnati nell'attività di ricerca.

Infine, a partire dalla fine degli anni '70 - inizi anni '80, si arriva a quelli che oggi vengono comunemente definiti modelli di *matching*. Tra i principali contributi, distinguiamo quelli che si focalizzano sul funzionamento dell'intera economia e in particolare sulla presenza di equilibri multipli (Diamond, 1982a, 1982b, 1984), da quelli il cui focus è volutamente concentrato nel mercato del lavoro (Pissarides, 1979, 1984, 1985a, 1985b, 1986, 2000; Mortensen, 1986; Mortensen e Pissarides, 1994, 1998 e 1999; e Pissarides, 2000).

I primi contributi in cui la funzione di *matching* non solo è presente ma assume il ruolo di principale meccanismo economico alla base della disoccupazione, sostituendosi di fatto al salario di riserva,<sup>5</sup> sono quelli di Hall (1979), Pissarides (1979), Diamond and Maskin (1979), Bowden (1980).

La funzione di *matching* è concettualmente analoga alla funzione di produzione: il risultato del "processo produttivo" è la creazione di occupazione e i "fattori produttivi" sono i *job-seekers*/disoccupati e i posti di lavoro vacanti (Bagliano e Bertola, 1999).<sup>6</sup> Di conseguenza, l'uso di una funzione aggregata è giustificato dalla sua rilevanza empirica e dalla capacità di catturare le principali caratteristiche del processo d'incontro (Pissarides, 2000). In tal senso, la funzione di *matching* è un utile strumento di modellazione, capace di descrivere il processo di formazione dell'occupazione senza dover esplicitare i motivi che rendono tale processo difficile e costoso. La funzione di *matching*, inoltre, riflette (dunque, è in grado di cogliere) variazioni sia nel comportamento ottimale di imprese e lavoratori,<sup>7</sup> che nel grado di *mismatch* presente nel mercato del lavoro.<sup>8</sup>

Dal lato empirico, in letteratura si ricorre spesso all'ipotesi di rendimenti di scala costanti e ad una funzione di tipo *Cobb-Douglas* per descrivere il processo di *matching*. Entrambe le assunzioni sono supportate empiricamente (cfr. Blanchard e Diamond,

---

<sup>5</sup> Il salario di riserva è quel salario che rende un individuo indifferente tra lavorare o meno. Esso è ricavato dall'uguaglianza tra l'utilità derivante dall'essere occupato e il costo opportunità di essere occupato. Economie con un più basso salario di riserva hanno un più alto livello occupazionale. Questo, però, non implica un maggior benessere sociale. Infatti, non c'è a priori ragione di credere che a più alti livelli di occupazione corrispondano necessariamente più alti livelli di benessere sociale (cfr. Andolfatto, p. 84, 2008).

<sup>6</sup> Nel caso in cui si esclude la possibilità che possa cercare lavoro anche chi è già occupato (*on-the-job-search*), i *job-seekers* sono i soli disoccupati.

<sup>7</sup> Si pensi ad una variazione dell'intensità di ricerca dei lavoratori e/o alla minore o maggiore pubblicizzazione delle *vacancies* da parte delle imprese.

<sup>8</sup> Il grado di *mismatch* è sostanzialmente un concetto empirico. Un suo aumento (riduzione) indica che il processo di incontro, a parità di *vacancies* e disoccupazione, è diventato più difficile (semplice).

1989, 1990b; Pissarides, 2000; Petrongolo and Pissarides, 2001; Stevens, 2004). Tuttavia, sebbene la scelta di una forma funzionale di tipo *Cobb-Douglas* sia usuale in letteratura, tale specificazione manca di una convincente spiegazione teorica. Il suo uso, infatti, è dovuto principalmente all'evidenza empirica e non ad un consenso sul piano teorico. Nonostante la sua importanza, infatti, pochi sono stati i tentativi di microfondare la funzione di *matching* e, soprattutto, nessuna microfondazione è superiore alle altre (Pissarides, 2000). La funzione di *matching* di tipo aggregata è descritta solitamente come una "scatola nera" (*black-box*) (Petrongolo e Pissarides, 2001).

Una specificazione alternativa alla *Cobb-Douglas*, che ha ricevuto importanti e recenti consensi, è quella denominata *stock-flow matching* (Coles e Smith, 1998; Coles e Muthoo, 1998; Lagos, 2000; Gregg e Petrongolo, 2005; Shimer, 2007; Ebrahimi e Shimer, 2009). L'idea alla base di tale approccio è la seguente: quando un *job-seeker* entra nel mercato alla ricerca di un posto di lavoro, egli passa in rassegna tutte le *vacancies* disponibili, facendo domanda per quella che ritiene più adeguata. Se la risposta è positiva, cioè viene assunto, egli diviene occupato e smette di cercare, nel caso contrario, invece, rimane nel mercato in attesa di altre *vacancies* disponibili avendo già passato in rassegna quelle esistenti. Di conseguenza, nel primo periodo, i *job-seekers* sono flussi e le *vacancies* sono stock, nel periodo successivo, invece, i *job-seekers* sono stock e le *vacancies* sono flussi.<sup>9</sup>

### 1.1 La relazione negativa posti vacanti – disoccupazione (la "Beveridge Curve")

Molto tempo prima dell'apparizione della funzione di *matching* in letteratura, un altro importante strumento, ancora oggi usato per analizzare la disoccupazione, era già presente: la *Beveridge Curve*.

La *Beveridge Curve* descrive la relazione negativa tra disoccupati e posti di lavoro vacanti. Tale relazione, oltre ad essere empiricamente dimostrata (un esempio è presentato in figura 2), è assolutamente intuitiva, visto che all'aumentare dei posti vacanti corrisponderà un ridotto numero dei disoccupati, e viceversa.

La *Beveridge Curve* fu scoperta dall'economista sociale inglese William Beveridge (1944), da cui deriva appunto il nome della relazione.

Lavori pionieristici sulla *Beveridge Curve*, non collegati all'esistenza di una funzione di *matching*, erano quelli di Dow e Dicks-Mireaux (1958), Holt e David (1966), Hansen (1970).

---

<sup>9</sup> Per maggiori dettagli su questo nuovo (e parzialmente alternativo) approccio, si consulti la bibliografia riportata.



Figura 2. Tassi di disoccupazione e posti vacanti canadesi (1966 - 1988).  
Fonte: Jones (1993), riportata in: Andolfatto, D. (2008).

A differenza di ciò che accadeva nei primi lavori, in cui lo studio delle interazioni tra *vacancies* e disoccupazione era motivato dal desiderio di derivare una più robusta teoria della disoccupazione di equilibrio, nell'ambito del rinnovato interesse per la curva di Phillips e la teoria del tasso naturale di disoccupazione (Phelps, 1967; Friedman, 1968); successivamente, gli obiettivi di tale studio sono diventati principalmente due: *a)* la comprensione delle dinamiche occupazionali dei moderni mercati del lavoro; *b)* la costruzione di modelli macroeconomici con frizioni in grado di spiegare adeguatamente tali dinamiche (cfr. Pissarides, 2000).

Per quanto riguarda la stima empirica della *Beveridge Curve*, c'è un consenso ampio circa il suo spostamento verso l'esterno per la maggior parte dei paesi Europei, che corrisponde ad un aumento della disoccupazione registrata negli ultimi trent'anni. Sono le spiegazioni a questo mutamento ad essere diverse: la crescita nella proporzione dei disoccupati di lungo periodo (Budd et al., 1988), la generosità dei sistemi di protezione dell'occupazione e di assicurazione della disoccupazione (Jackman et al., 1989), la mancanza di adeguate politiche attive del mercato del lavoro (Jackman et al., 1990).

Infine, c'è un fenomeno riguardante la *Beveridge Curve* sufficientemente regolare da avere acquisito lo "status" di fatto base (*basic fact*) del ciclo economico: durante i periodi di espansione e recessione, *vacancies* e disoccupazione "tracciano" delle curve in senso antiorario attorno la *Beveridge Curve* (cfr. figura 3). Come mostrato in figura 3, questo fenomeno produce degli effetti assolutamente intuitivi. Nel caso di espansione

(recessione), infatti, il nuovo equilibrio sarà caratterizzato da più *vacancies* e meno disoccupazione. Nel caso di recessione, invece, il nuovo equilibrio sarà caratterizzato da meno *vacancies* e più disoccupazione.

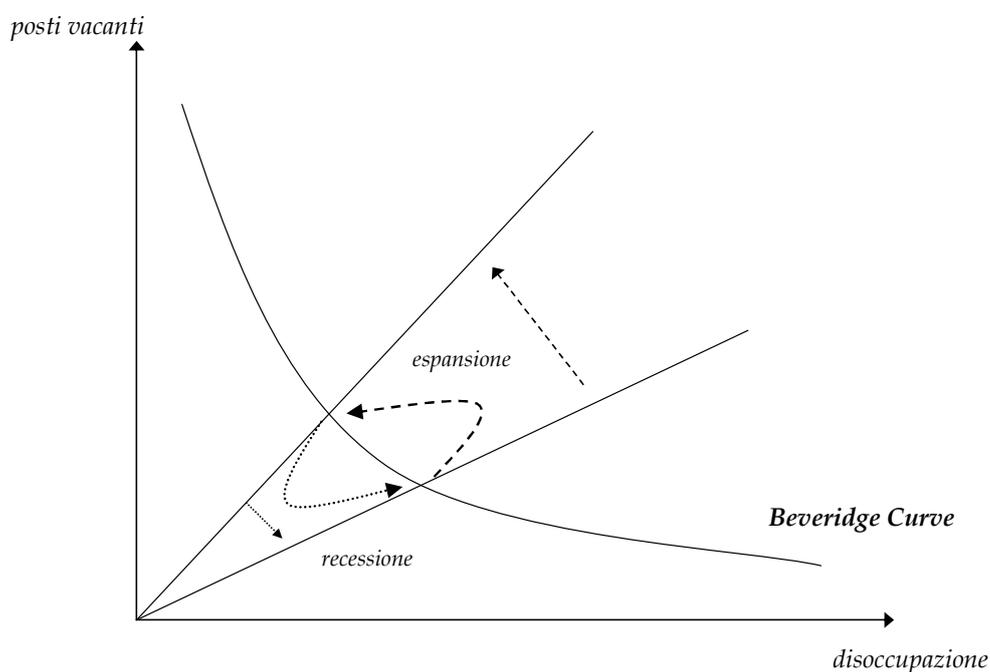


Figura 3. Beveridge curve e ciclo economico

Tale fenomeno, evidenziato sin dai primi lavori empirici sulla *Beveridge Curve* (i.e. Dow e Dicks-Mireaux, 1958; Holt e David, 1966), è catturato dal modello base di *matching*. Precisamente, tracciando nel grafico di figura 3 una retta uscente dall'origine con pendenza pari al rapporto tra posti vacanti e disoccupazione (la c.d. *Job Creation Condition curve*), *vacancies* e disoccupazione “disegnano” delle curve in senso antiorario attorno la *Beveridge Curve* in seguito a shock che colpiscono la produttività (cfr. Pissarides, p. 32, 2000).<sup>10</sup> Intuitivamente, infatti, in seguito ad un aumento della produttività, si avrà uno spostamento verso l'alto della *Job Creation curve*, poiché con l'aumentare della produttività aumenta la convenienza delle imprese ad aprire nuove *vacancies*. Un ragionamento analogo, ma ovviamente di segno opposto, si avrà in caso di riduzione della produttività.

La spiegazione microeconomica di tale fenomeno è la seguente: quando le imprese si attendono una riduzione della disoccupazione, vorranno detenere meno posti di lavoro aperti nel futuro poiché sarà più difficile coprirli. Tuttavia, per avere meno *vacancies* nel futuro, occorre aprire più *vacancies* nel presente. Tale dinamica è descritta appunto dalla curva antioraria che *vacancies* e disoccupazione tracciano nei periodi di

<sup>10</sup> Per maggiori dettagli sulla *Job Creation condition* si veda il paragrafo successivo.

espansione).<sup>11</sup> In sostanza, ciò fa sì che la variazione dei posti vacanti è maggiore all'inizio del processo di aggiustamento che al raggiungimento dell'equilibrio.

Secondo Phelps (1968), Hansen (1970) e Bowden (1980), l'intuizione alla base di tale fenomeno è che la domanda di lavoro è più flessibile dell'occupazione.

## 2. Il modello base à la Pissarides (2000)

Nei modelli di *matching* è prassi equiparare un incontro posto di lavoro-lavoratore ad un'impresa, cioè assumere che ogni impresa impieghi un solo lavoratore. L'approccio seguito, in sostanza, prende come elemento centrale dell'analisi l'incontro (*match*) piuttosto che l'impresa.

Come in precedenza accennato, l'elemento principale di questi modelli è la funzione di *matching*, che esprime il numero di posti di lavoro formati in ogni momento nel tempo ( $M = m \cdot L$ ), funzione del numero complessivo di disoccupati ( $U = u \cdot L$ ) e di posti vacanti ( $V = v \cdot L$ ):<sup>12</sup>

$$M = m(U, V) \Rightarrow m \cdot L = m(u \cdot L, v \cdot L)$$

dove  $u$  e  $v$  sono, rispettivamente, il tasso di disoccupazione e il tasso di *vacancy*, mentre  $L$  è la forza lavoro (solitamente normalizzata a 1 e ipotizzata costante nel tempo). La funzione di *matching* descrive, in sostanza, l'efficienza del processo di incontro e l'importanza dei due input (*vacancies* e *job-seekers*) nella formazione dei posti di lavoro (Petrongolo e Pissarides, 2001).

Se non ci fossero frizioni nel processo di incontro, cioè se un posto di lavoro fosse immediatamente coperto, il numero di posti creati sarebbe dato dal minimo tra il numero di disoccupati e il numero di posti disponibili:

$$m \cdot L = \min(u \cdot L, v \cdot L)$$

Tuttavia, la presenza di frizioni determina un numero minore di posti di lavoro dato lo stesso numero di *vacancies*, i.e.  $\min(u \cdot L, v \cdot L) \geq m(u \cdot L, v \cdot L)$ .

Assumendo (come da prassi in letteratura) che la funzione di *matching* sia crescente e concava in entrambi gli argomenti e omogenea di grado 1 (i.e. caratterizzata da rendimenti di scala costanti), si può riscrivere la stessa funzione in termini di tassi:

$$m \cdot L = L \cdot m(u, v) \Rightarrow m = m(u, v)$$

---

<sup>11</sup> Un ragionamento analogo, ma di segno inverso ovviamente, può essere fatto nel caso in cui le imprese prevedano un aumento della disoccupazione.

<sup>12</sup> Per il momento verrà trascurata l'ipotesi di *on-the-job search*.

Facendo ricorso alla forma funzionale comunemente usata, cioè la *Cobb-Douglas*, la funzione di *matching* diventa: <sup>13</sup>

$$m = u^\alpha \cdot v^{1-\alpha}$$

dove  $0 < \alpha < 1$  è l'elasticità della funzione di *matching* rispetto al tasso di disoccupazione; infatti: <sup>14</sup>

$$\frac{\partial m}{\partial u} \cdot \frac{u}{m} \Rightarrow \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot v^{1-\alpha} \cdot \frac{u}{u^\alpha \cdot v^{1-\alpha}} = \alpha$$

Dalla funzione di *matching* è possibile calcolare sia il tasso al quale un disoccupato trova un posto di lavoro:

$$\frac{u^\alpha \cdot v^{1-\alpha}}{u} \Rightarrow \left(\frac{v}{u}\right)^{1-\alpha} = \theta^{1-\alpha}$$

che il tasso al quale un posto vacante è coperto:

$$\frac{u^\alpha \cdot v^{1-\alpha}}{v} \Rightarrow \left(\frac{v}{u}\right)^{-\alpha} = \theta^{-\alpha}$$

Il processo di incontro è formalizzato come un processo di *Poisson*, in cui la probabilità di trovare lavoro in un intervallo di tempo  $dt$  è pari a  $1 - e^{-\theta^{1-\alpha} dt}$  (quindi,  $e^{-\theta^{1-\alpha} dt}$  è la probabilità che in quello stesso intervallo di tempo un disoccupato non trovi lavoro).  $\theta^{1-\alpha}$  e  $\theta^{-\alpha}$  sono i due tassi che caratterizzano il processo di incontro ed esprimono, rispettivamente, la probabilità istantanea di trovare lavoro e di coprire una *vacancy*.<sup>15</sup>

È immediato dimostrare che la probabilità istantanea di trovare lavoro è crescente-concava, mentre quella di coprire una *vacancy* è decrescente-convessa.<sup>16</sup>

Poiché l'evoluzione nel tempo dell'occupazione ( $n$ ), i.e.  $\dot{n} \equiv dn / dt$ , può essere espressa sia in funzione del tasso di transizione dell'impresa, ( $\theta^{-\alpha}$ ), sia in funzione del tasso di transizione del lavoratore, ( $\theta^{1-\alpha}$ ), deve essere vero che:

$$\theta^{-\alpha} \cdot v - \lambda \cdot n = \theta^{1-\alpha} \cdot u - \lambda \cdot n$$

<sup>13</sup> Per semplicità espositiva e maggiore chiarezza si userà la stessa notazione, i.e. la *Cobb-Douglas*, all'interno di tutto il lavoro.

<sup>14</sup> Nelle calibrazioni empiriche si è soliti introdurre un parametro moltiplicativo alla funzione di *matching*, i.e.  $m = \mu u^\alpha v^{1-\alpha}$ , al fine di tener conto del grado di *mismatch* che rende più o meno difficile il processo di incontro a parità di *vacancies* e disoccupazione. In sostanza, tale parametro consente alla funzione di *matching* di replicare i dati, i.e. di generare tassi di incontro consistenti con l'evidenza empirica (cfr. e.g. Uren, 2007). Sotto l'ipotesi di rendimenti di scala costanti, il parametro  $\mu$  può rappresentare sia l'intensità di ricerca dei lavoratori che il livello di pubblicizzazione delle *vacancies* da parte delle imprese, a patto ovviamente che i due parametri siano assunti uguali, i.e.  $m = (\mu u)^\alpha (\mu v)^{1-\alpha}$ . Come affermato da Pissarides (pag. 124, 2000): «L'intensità di ricerca e la pubblicizzazione delle *vacancies* possono essere viste come parametri di "cambiamento tecnologico" nella funzione di *matching*».

<sup>15</sup> L'elasticità rispetto a  $\theta$  della probabilità istantanea di coprire una *vacancy* è pari all'elasticità rispetto a  $\theta$  della probabilità istantanea di trovare lavoro meno 1. Dall'ipotesi di rendimenti di scala costanti, l'elasticità rispetto a  $\theta$  della probabilità istantanea di trovare lavoro è un numero compreso tra 0 e 1.

<sup>16</sup> Occorre sottolineare che queste proprietà valgono a prescindere dall'uso di una *Cobb-Douglas*.

dove  $\lambda$  è il tasso di distruzione del posto di lavoro (*job destruction rate*), spesso supposto per semplicità costante.<sup>17</sup> Dalla precedente espressione è immediato ricavare la variabile chiave di questi modelli:

$$v/u = \theta$$

il rapporto tra il tasso di *vacancy* e il tasso di disoccupazione rappresenta una misura del grado di tensione/rigidità presente nel mercato del lavoro (*labour market tightness*), da cui, come visto, dipendono le probabilità di trovare un lavoro e di coprire una *vacancy*.

Al fine di comprendere in che modo tale variabile descrive le tensioni (frizioni) presenti nel mercato del lavoro, fondamentale è il punto di vista preso come riferimento: per l'impresa, infatti, un aumento di  $\theta$  rende più difficile coprire una *vacancy*, per via delle c.d. esternalità di congestione; viceversa, per il lavoratore migliora la situazione poiché diventa più semplice trovare un posto di lavoro, per via delle c.d. esternalità positive derivanti da un mercato più "spesso". Nei modelli di *matching* è prassi prendere come riferimento il punto di vista dell'impresa, cioè un aumento delle tensioni nel mercato del lavoro è associato ad un aumento di  $\theta$ .

In tali modelli, la relazione inversa tra tasso di disoccupazione e tasso di *vacancy* (la curva di *Beveridge*) può essere ricavata in modo molto semplice partendo dall'espressione che descrive l'evoluzione nel tempo del tasso di disoccupazione:

$$\dot{u} = (1-u) \cdot \lambda - u \cdot \theta^{1-\alpha}$$

Il termine  $(1-u) \cdot \lambda$  indica i flussi in entrata, i.e. i posti di lavoro distrutti (dove  $1 = n + u$  è la forza lavoro), mentre il termine  $u \cdot \theta^{1-\alpha}$  descrive i flussi in uscita dalla disoccupazione, i.e. i disoccupati che trovano lavoro. In equilibrio di stato stazionario, in cui la disoccupazione è costante nel tempo, si ha che:

$$\dot{u} = 0 \Rightarrow u = \frac{\lambda}{\lambda + \theta^{1-\alpha}}$$

---

<sup>17</sup> La distruzione del posto di lavoro si realizza a seguito di shocks specifici dell'impresa, quali, ad esempio, i cambiamenti tecnologici-organizzativi. Anche il processo di separazione segue un processo di *Poisson*, indipendente da quello di incontro e caratterizzato dal tasso istantaneo  $\lambda$ . Nel modello, il tasso di *job destruction* è l'unica determinante dei flussi in entrata nella disoccupazione. Se la distruzione del posto di lavoro è l'unico motivo di rottura dell'incontro, il tasso di rotazione dei lavoratori è pari al tasso di riallocazione dei posti di lavoro. Tale assunzione non è molto realistica dal punto di vista empirico: il tasso di turnover dei lavoratori, infatti, risulta essere molto più alto del tasso di turnover dei posti di lavoro (cfr. Pissarides, 2000). Questo perché esistono diversi motivi, oltre gli shocks negativi che colpiscono la produttività delle imprese, che inducono variazioni nella disoccupazione (il pensionamento, le dimissioni del lavoratore finalizzate alla ricerca di un nuovo lavoro, la crescita della forza lavoro, ecc.). Tuttavia, l'inclusione di ulteriori flussi dal lato dell'offerta di lavoro non modifica qualitativamente la teoria della disoccupazione ottenuta sotto l'ipotesi che il tasso di distruzione del lavoro sia l'unica determinante dei flussi in entrata nella disoccupazione.

La stessa equazione poteva essere ottenuta dai flussi dei posti di lavoro, piuttosto che dai flussi *in* e *out* dalla disoccupazione, ponendo (in equilibrio) il tasso di distruzione uguale al tasso di creazione del lavoro. Il tasso di creazione è ottenuto rapportando i flussi in uscita dalla disoccupazione al numero dei lavoratori occupati, i.e.  $(1 - u)$ :

$$\lambda = \frac{u \cdot \theta^{1-\alpha}}{(1-u)} \Rightarrow u = \frac{\lambda}{\lambda + \theta^{1-\alpha}}$$

È immediato dimostrare che la precedente espressione esprime una relazione inversa tra il tasso di disoccupazione e la misura delle tensioni nel mercato del lavoro  $\theta$  (quindi, tra  $u$  e  $v$ ).<sup>18</sup>

La convergenza al valore di equilibrio di  $u$ , dato un qualsiasi livello iniziale  $u_0$ , è assicurata dal segno negativo di  $\partial \dot{u} / \partial u$ , i.e.  $\partial \dot{u} / \partial u = -(\lambda + \theta^{1-\alpha})$ , dove  $(\lambda + \theta^{1-\alpha})$  è la velocità di convergenza (per un chiarimento grafico si rimanda alla figura 7).

Al fine di calcolare il valore di equilibrio di  $\theta$ , è necessario introdurre le c.d. equazioni di *Bellman*, dal nome del matematico Richard Bellman che per primo le ha introdotte negli anni '50. Le equazioni di *Bellman* descrivono i valori marginali presenti (scontati al tasso  $r$ ) associati alle diverse condizioni dei partecipanti al mercato del lavoro, equiparandoli sostanzialmente a dei titoli finanziari.<sup>19</sup> Formalmente, e in modo molto generale, le equazioni di *Bellman* associate al valore di essere occupato ( $W$ ), al valore di essere disoccupato ( $U$ ), al valore di un posto vacante ( $V$ ) e al valore di un posto coperto ( $J$ ), sono le seguenti:

$$r \cdot W = w + \lambda \cdot (U - W) + \dot{W}$$

$$r \cdot U = b + \theta^{1-\alpha} \cdot (W - U) + \dot{U}$$

$$r \cdot V = -c + \theta^{-\alpha} \cdot (J - V) + \dot{V}$$

$$r \cdot J = y - w + \lambda \cdot (V - J) + \dot{J}$$

i termini a destra del segno di uguaglianza indicano, rispettivamente, i “dividendi” associati alle diverse condizioni (salario  $w$ , costo opportunità di essere occupato  $b$ , costo di apertura di una *vacancy*  $c$ , e output al netto del salario  $y - w$ ), e i “guadagni o perdite in conto capitale”, cioè il passaggio da una condizione all'altra, che dipende

<sup>18</sup> La *Beveridge Curve* oltre ad essere decrescente e anche convessa:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\lambda \cdot (1-\alpha) \cdot \theta^{-\alpha}}{(\lambda + \theta^{1-\alpha})^2} < 0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -\frac{(-\alpha) \cdot \lambda \cdot (1-\alpha) \cdot \theta^{-\alpha-1} \cdot (\lambda + \theta^{1-\alpha}) - \lambda \cdot (1-\alpha) \cdot \theta^{-\alpha} \cdot 2 \cdot (1-\alpha) \cdot \theta^{-\alpha}}{(\lambda + \theta^{1-\alpha})^3} > 0.$$

<sup>19</sup> È prassi in letteratura far uso di funzioni di utilità lineari. L'assunzione di neutralità al rischio degli individui, oltre a semplificare l'analisi, permette di focalizzare l'attenzione sulle conseguenze del processo di *search* e *matching* piuttosto che sulla non completezza dei mercati di assicurazione.

dalle probabilità di trovare lavoro e di coprire una *vacancy* e dal tasso di distruzione di un posto di lavoro).<sup>20</sup> Infine,  $\dot{X} \equiv dX / dt$  (dove  $X = J, V, W, U$ ) indica la variazione nel tempo del valore considerato.

L'equilibrio che viene caratterizzato solitamente in questi modelli è quello "ideale" di stato stazionario (*steady state*), in cui i valori raggiunti dalle variabili non sono soggetti a ulteriori variazioni nel tempo. Seguendo tale approccio si pone  $\dot{X} = 0$  in tutte le precedenti espressioni.

La condizione che permette di determinare il valore di equilibrio di  $\theta$  è conosciuta come condizione di zero-profitti o condizione di *free-entry*: l'impresa aprirà nuove *vacancies* fino a quando il valore di un ulteriore posto vacante sarà pari a zero. In equilibrio, infatti, tutte le opportunità di profitto derivanti dall'apertura di nuove *vacancies* sono state sfruttate, per cui il valore di un'ulteriore *vacancy* sarà pari a zero.<sup>21</sup> Utilizzando la condizione  $V = 0$  nelle equazioni di *Bellman* relative al valore di un posto coperto e di una *vacancy*, si ottiene:

$$\begin{cases} (r + \lambda) \cdot J = y - w \\ \frac{c}{\theta^{-\alpha}} = J \end{cases} \Rightarrow \frac{c}{(\theta^*)^{-\alpha}} = \frac{y - w}{r + \lambda}$$

il valore di equilibrio di  $\theta$ ,  $\theta^*$ , soddisfa la precedente espressione, conosciuta come *Job Creation Condition* (JCC). In sostanza, il guadagno netto scontato dell'impresa deve coprire i costi attesi associati all'apertura di una *vacancy* (l'inversa della probabilità di coprire una *vacancy*  $1/\theta^{-\alpha}$  è, infatti, la durata media di copertura di un posto vacante).<sup>22</sup>

Per quanto riguarda  $w$ , il modo di determinare il salario può essere diverso.<sup>23</sup> Tuttavia, in letteratura, è prassi usare la regola della contrattazione di *Nash*. Sulla base di tale regola, il salario è determinato attraverso la divisione, tra impresa e lavoratore, del surplus generato dal loro incontro. Il problema di ottimo che occorre risolvere è il seguente:

<sup>20</sup> Intuitivamente, il passaggio da disoccupato (*vacancy*) a occupato (posto di lavoro coperto) è un guadagno per il lavoratore (l'impresa). Infatti, condizioni necessarie per ottenere equilibri non banali sono  $W \geq U$  e  $J \geq V$ .

<sup>21</sup> Per la precisione, «in ogni istante, in equilibrio stazionario come durante l'aggiustamento, le imprese sfruttano tutte le opportunità di profitto rese possibili dall'apertura di un posto vacante:  $V(t) = 0, \forall t$ . Abbiamo, quindi, anche fuori dall'equilibrio stazionario,  $\dot{V}(t) = 0, \forall t$ » (Bagliano e Bertola, p. 274, 1999). L'applicazione della condizione di zero-profitti, che assicura una soluzione in forma chiusa al modello, fu discussa per la prima volta da Pissarides (1979).

<sup>22</sup> Analogamente, l'inversa della probabilità di trovare lavoro è la durata media della disoccupazione.

<sup>23</sup> Si veda la rassegna di Mortensen e Pissarides (1999).

$$w = \arg \max \chi (J - V)^{1-\beta} \cdot (W - U)^\beta$$

dove  $\beta \in (0, 1)$  è una misura del potere di contrattazione dei lavoratori, cioè la quota di surplus che spetta al fattore lavoro. La relativa condizione del primo ordine per la suddivisione ottimale del surplus è data da:

$$(W - U) = \frac{\beta}{1 - \beta} \cdot (J - V)$$

da cui si ottiene, usando sempre le equazioni di *Bellman*, l'espressione finale, la c.d. *Wage Setting (WS)* (si veda l'Appendice A per i relativi calcoli):

$$w = (1 - \beta) \cdot b + \beta \cdot y + \beta \cdot c \cdot \theta$$

con  $\partial w / \partial \theta > 0$ , poiché all'aumentare di  $\theta$ , aumenta la probabilità che un disoccupato trovi lavoro, dunque migliorano le sue opportunità esterne.

A questo punto si dispone delle tre equazioni chiave (*JCC*, *BC* e *WS*) per mostrare, anche graficamente, l'equilibrio che si realizza nel mercato del lavoro, caratterizzato dalle quattro variabili endogene di interesse,  $\theta$ ,  $w$ ,  $u$  e  $v$ :

$$JCC \Rightarrow \frac{c}{\theta^{-\alpha}} = \frac{y - w}{r + \lambda}$$

$$WS \Rightarrow w = (1 - \beta) \cdot b + \beta \cdot y + \beta \cdot c \cdot \theta$$

$$BC \Rightarrow u = \frac{\lambda}{\lambda + \theta^{1-\alpha}}$$

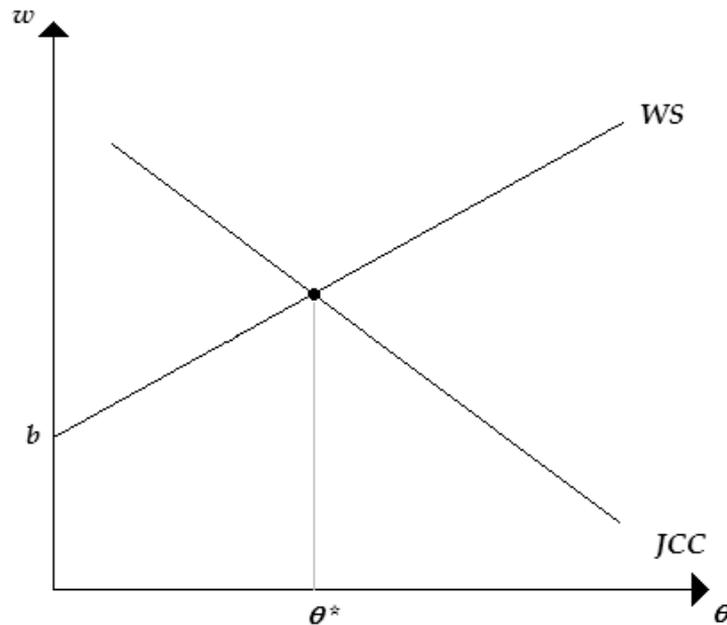


Figura 4. Valori di equilibrio di  $\theta$  e  $w$

È immediato notare che all'aumentare del salario si riduce la convenienza dell'impresa a creare nuovi posti di lavoro: la *JCC*, infatti, può essere vista come una "particolare"

curva di domanda di lavoro. Il valore di equilibrio delle tensioni nel mercato del lavoro è determinato dall'intersezione della *Job Creation Condition* con la *Wage Setting* (cfr. figura 4), cioè risolvendo il risultante sistema di due equazioni in due incognite.

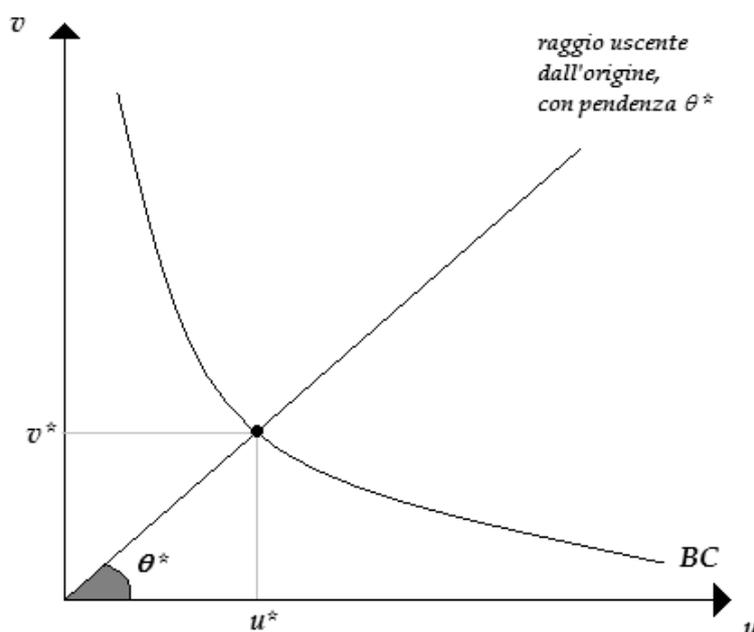


Figura 5. Valori di equilibrio di  $u$  e  $v$

Infine, l'intersezione della *Beveridge Curve* con il raggio uscente dall'origine con pendenza  $\theta^*$  consente di ottenere i valori di equilibrio di  $u^*$  e  $v^*$  (cfr. figura 5).

### 3. Il tasso endogeno di distruzione di un posto di lavoro

Spesso l'assunzione di esogeneità del tasso di distruzione di un posto di lavoro non è del tutto realistica. In alcuni casi, infatti, il tasso di *job destruction* è più sensibile del tasso di *job creation* agli *shocks* economici (Pissarides, 2000).<sup>24</sup>

Quando uno *shock* colpisce la produttività del lavoro, l'impresa può scegliere se continuare ad utilizzare il fattore lavoro alla nuova produttività oppure "distruggerlo".<sup>25</sup> La scelta è effettuata dall'impresa in base alla c.d. *produttività di riserva*,  $R$ : se lo *shock* riduce la produttività al di sotto di tale soglia l'impresa rinuncerà al fattore lavoro, viceversa continuerà ad utilizzarlo.

<sup>24</sup> Occorre sottolineare, però, che questa è, principalmente, un'evidenza empirica relativa all'economia statunitense e non europea (Boeri, 1996). È probabile che ciò dipenda dalle restrizioni presenti nel contesto europeo che rendono difficile chiudere un posto di lavoro (Garibaldi, 1998). Tuttavia, vi è unanimità di consensi nel ritenere che vi sia asimmetria nei flussi di creazione e distruzione dei posti di lavoro e una negativa correlazione tra i relativi tassi.

<sup>25</sup> In presenza di un tasso di *job destruction* esogeno si ipotizzava l'immediata "distruzione" del posto di lavoro una volta che uno *shock* negativo arrivava.

A tale scopo, si indica con  $y \cdot x$  la produttività del fattore lavoro, dove  $y$  è un parametro generale di produttività, mentre  $x$  è la parte idiosincratICA (o specifica) che descrive il mutamento della produttività una volta intervenuto lo *shock*. Si ipotizza, inoltre, che  $x$  è estratto da una conosciuta funzione di ripartizione continua  $G(x)$  e il suo valore è compreso tra 0 e 1.

$J(x)$  rappresenta ora il valore di un posto coperto con produttività idiosincratICA  $x$ , con  $R$  che soddisfa la condizione  $J(R)=0$ . Quando uno shock arriva, la scelta ottima per l'impresa sarà quella di continuare a produrre se e solo se  $J(x) \geq J(R)$ .<sup>26</sup>

La *Beveridge Curve* (BC) del modello dovrà in questo caso tener conto del fatto che non tutti gli *shocks* negativi distruggono posti di lavoro. Formalmente:

$$u = \frac{\lambda \cdot G(R)}{\lambda \cdot G(R) + \theta^{1-\alpha}}$$

dove  $G(R)$ , con  $G(R) = 1 - \int_R^1 x dG(x)$ , è la probabilità che uno *shock* conduca la produttività al di sotto di  $R$  e "distrugga" il posto di lavoro.

$R$ , inoltre, deve soddisfare anche la condizione  $W \geq U$ . In sostanza, la regola di determinazione del salario (i.e. di suddivisione del surplus) esclude separazioni volontarie unilaterali, ragion per cui quando il lavoro è "distrutto" occorre non solo che le imprese preferiscono rinunciare al lavoro, i.e.  $J(x) < J(R)$ , ma anche che i lavoratori preferiscono essere disoccupati (quindi, appunto,  $W < U$ ).

I valori di un posto coperto (con produttività idiosincratICA  $x$ ) e vacante sono sostanzialmente simili a quelli descritti in precedenza:

$$r \cdot J(x) = y \cdot x - w(x) - \lambda \cdot J(x) + \lambda \cdot \int_R^1 J(s) dG(s)$$

$$r \cdot V = -c + \theta^{-\alpha} \cdot [J(1) - V]$$

l'unica importante differenza è questa: una volta che lo *shock* arriva, l'impresa deve rinunciare al valore  $J(x)$  per un altro valore  $J(s)$ , a patto che  $J(s) \geq J(R)$ . Si assume, inoltre, per semplicità, che tutti i nuovi posti di lavoro creati abbiano produttività massima, cioè  $x = 1$ .

Le due precedenti equazioni consentono di ricavare la "nuova" *JCC* e la *Job Destruction Curve* (*JD*), la cui intersezione determinerà i valori di equilibrio di  $\theta$  e  $R$  (si veda la figura 6 e l'*Appendice B* per i relativi calcoli):

---

<sup>26</sup> Una variante realistica all'ipotesi formulata in Pissarides (2000) potrebbe essere quella che prevede la chiusura del posto di lavoro anche nel caso in cui  $J(x) = J(R) = 0$ .

$$JCC \Rightarrow \frac{c}{\theta^{-\alpha}} = \frac{(1-\beta) \cdot y}{(r+\lambda)} \cdot (1-R)$$

$$JD \Rightarrow 0 = R - \frac{b}{y} - \frac{\beta \cdot c \cdot \theta}{(1-\beta) \cdot y} + \frac{\lambda}{(r+\lambda)} \cdot \int_R^1 (s-R) dG(s)$$

I risultati sono totalmente intuitivi: la  $JCC$ , anche nello spazio  $(\theta, R)$ , continua ad avere una pendenza negativa: se aumenta  $R$ , infatti, la durata attesa di vita di un posto di lavoro è più breve, ragion per cui l'impresa apre meno *vacancies* e, di conseguenza, si riduce  $\theta$ ; la  $JD$  è, ovviamente, crescente in  $R$  e ha, quindi, pendenza verso l'alto nello spazio  $(\theta, R)$ . Il ragionamento è, ovviamente, speculare a quello fatto per la  $JCC$ .

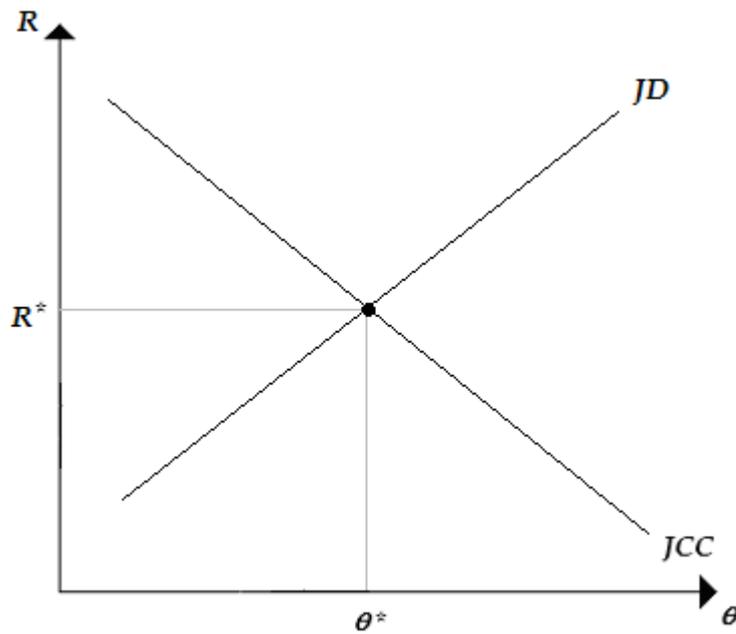


Figura 6. Valori di equilibrio di  $\theta$  e  $R$

#### 4. L'analisi della dinamica del modello

In questo paragrafo si studia il comportamento delle due variabili chiave del modello (disoccupazione e tensioni nel mercato del lavoro) fuori dallo stato stazionario (*out-of-steady-state*), lungo il percorso di aggiustamento che conduce all'equilibrio.<sup>27</sup>

Una delle due principali equazioni differenziali necessarie per lo studio della dinamica del modello è già stata introdotta, i.e.:

$$\dot{u}(t) = (1 - u(t)) \cdot \lambda - u(t) \cdot \theta(t)^{1-\alpha}$$

dall'equazione dinamica che conduce alla *Beveridge Curve* è immediato ricavare che la "reazione" (i.e. la variazione nel tempo) di  $\dot{u}$  rispetto a  $u$  è negativa,  $-(\lambda + \theta^{1-\alpha})$ : un aumento di  $u$ , infatti, riduce i flussi in entrata e aumenta quelli in uscita. Ciò significa

<sup>27</sup> Il tasso di *job destruction* è, per semplicità di analisi, ipotizzato di nuovo esogeno e costante.

(cfr. figura 7) che nei punti a destra e a sinistra della curva  $\dot{u} = 0$ , il valore di  $u$  tende ad avvicinarsi sempre di più al suo valore di equilibrio di stato stazionario (i.e., per un qualsiasi valore iniziale  $u_0$ , la disoccupazione converge al suo valore di equilibrio).

Ovviamente, date le proprietà della funzione  $\theta^{1-\alpha}$  (crescente in  $\theta$ ), anche la reazione di  $\dot{u}$  rispetto a  $\theta$  è negativa,  $-u \cdot (1-\alpha) \cdot \theta^{-\alpha}$ . Intuitivamente, se aumenta la probabilità di trovare lavoro, si riduce la disoccupazione.

Può essere mostrato formalmente (cfr. l'Appendice C per i dettagli analitici) che la variazione nel tempo di  $\theta$  non dipende (in modo diretto) dal tasso di disoccupazione, ma solo dal livello di  $\theta$ , oltre che dai parametri del modello, i.e.:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{(r + \lambda)}{\alpha} \cdot \theta(t) - \frac{\theta(t)^{1-\alpha} \cdot (1-\beta) \cdot (y-b)}{c \cdot \alpha} + \frac{\beta \cdot \theta(t)^{2-\alpha}}{\alpha}$$

$$\text{con: } \frac{d\dot{\theta}(t)}{d\theta(t)} = \frac{r + \lambda}{\alpha} - \frac{(1-\alpha) \cdot (1-\beta) \cdot (y-b)}{c \cdot \alpha} \cdot \theta(t)^{-\alpha} + (2-\alpha) \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot \theta(t)^{1-\alpha} > 0.$$

Questo significa che nei punti al di sopra e al di sotto della curva  $\dot{\theta} = 0$ , il valore di  $\theta$  tende ad allontanarsi sempre di più dal suo valore di equilibrio stazionario (cfr. sempre figura 7).

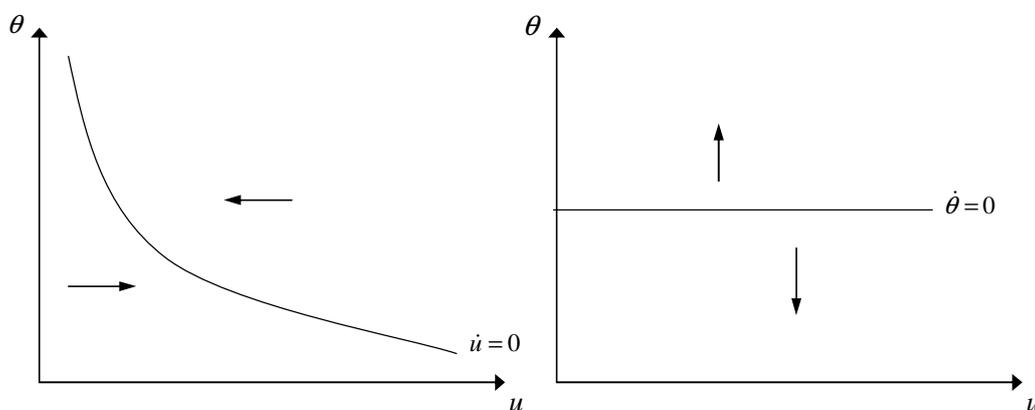


Figura 7. Dinamica di  $u$  e  $\theta$

Il comportamento apparentemente instabile di  $\theta$  è dovuto al fatto che le imprese, basando la decisione di aprire *vacancies* sul valore futuro atteso di  $\theta$ , aprono immediatamente più *vacancies* se prevedono un aumento futuro dei posti vacanti, al fine di evitare di aprirle quando il costo di apertura sarà più alto (infatti, se  $\theta$  è più alto, la probabilità di coprire una *vacancy* è più bassa, mentre è più alta la durata media di copertura).

Il comportamento "forward looking" delle imprese nel decidere le *vacancies* fa sì che le variabili  $v$  e  $\theta$  abbiano natura di variabili "jump", i.e. variabili che rispondono in modo immediato a cambiamenti dei parametri. Per questo motivo, il grado di tensione

nel mercato del lavoro si pone immediatamente al livello di lungo periodo, rimanendovi per tutto il percorso di aggiustamento. La presenza di una variabile “backward looking”, i.e. predeterminata (il tasso di disoccupazione),<sup>28</sup> e di una variabile “forward looking” (il tasso di *vacancy*), infatti, implica una dinamica di aggiustamento molto semplice che implica l’esistenza di un solo percorso dinamico (“percorso di sella” o *saddlepath*) convergente all’equilibrio stazionario (“punto di sella” o *saddlepoint*) indicato nel punto *E* in figura 8.

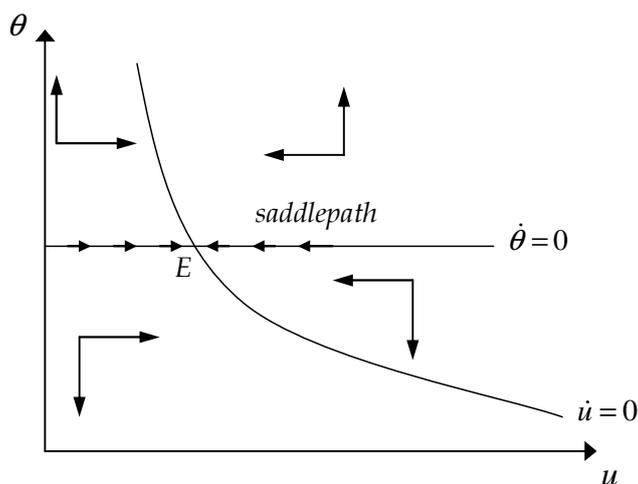


Figura 8. Dinamica di aggiustamento verso l’equilibrio stazionario

Formalmente, è possibile verificare la natura di punto di sella dell’equilibrio linearizzando le equazioni dinamiche intorno ad un generico punto di equilibrio stazionario  $(\bar{u}, \bar{\theta})$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & - \\ 0 & + \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u - \bar{u} \\ \theta - \bar{\theta} \end{pmatrix}$$

Il segno negativo del determinante della matrice dei coefficienti conferma la natura di punto di sella (*saddlepoint*) dell’equilibrio stazionario.<sup>29</sup>

## 5. Il problema dell’efficienza nei modelli di *matching*

L’esistenza di esternalità ed il fatto che tali esternalità non siano prese in considerazione nei problemi di ottimizzazione individuali, solleva immediatamente il problema dell’efficienza dell’equilibrio decentralizzato. In sostanza, ci si chiede se l’equilibrio decentralizzato sia socialmente efficiente o meno.

<sup>28</sup> La variazione di *u*, infatti, è mediata dal processo di incontro. Infatti, al variare di *v* (e, dunque, di  $\theta$ ), la disoccupazione varia in seguito alla variazione della probabilità di trovare lavoro.

<sup>29</sup> La condizione di stabilità dell’equilibrio richiede, invece, che la traccia della matrice sia negativa. Infatti, «La natura dell’equilibrio è quella di un “nodo”, che può essere stabile o instabile a seconda che la traccia della matrice sia, rispettivamente, minore o maggiore di zero» (cfr. Bagliano e Bertola, p. 259, 1999).

Come mostrato in Pissarides (capitolo 8, 2000) e in Bagliano-Bertola (paragrafo 5.4, 1999), l'equilibrio decentralizzato di mercato che si realizza nei modelli di *matching* è efficiente, cioè coincide con la soluzione di equilibrio socialmente efficiente, solo quando la quota di surplus che spetta al fattore lavoro è pari all'elasticità rispetto a  $\theta$  della durata media di una *vacancy* (nello specifico, quindi,  $\beta = \alpha$ ).<sup>30</sup>

Formalmente, tale condizione può essere derivata partendo dal confronto tra la soluzione decentralizzata, posta in essere da un'impresa rappresentativa, e quella socialmente efficiente posta in essere da un pianificatore sociale. Le soluzioni ricavate dai rispettivi problemi di ottimo sono le seguenti (cfr. l'Appendice D per i dettagli analitici):

| <i>Soluzione decentralizzata</i>                         | <i>Soluzione socialmente efficiente</i>  |
|--|--|
| $\frac{y - w}{r + \lambda} = \frac{c}{\theta^{-\alpha}}$ | $\frac{y - b}{r + \lambda + \alpha \cdot \theta^{-\alpha-1} \cdot \theta^2} = \frac{c}{(1 - \alpha) \cdot \theta^{-\alpha}}$ |

Dal confronto tra le due *Job Creation Condition* si deduce che:

- a) Il tasso di sconto "sociale" è maggiore di quello "individuale",  $(r + \lambda + \alpha \cdot \theta^{-\alpha-1} \cdot \theta^2) > (r + \lambda)$ . Nella soluzione socialmente efficiente, infatti, si tiene conto delle esternalità di congestione create da un aumento delle *vacancies* e, quindi, di  $\theta$ . Il valore marginale di un posto coperto nella soluzione socialmente efficiente è scontato, quindi, ad un tasso più alto.
- b) La produttività netta di un posto coperto, valutata nella soluzione decentralizzata, è inferiore a quella risultante nella soluzione socialmente efficiente, poiché  $w \geq b$ .<sup>31</sup>
- c) Il costo atteso di una *vacancy* valutato nella soluzione socialmente efficiente è maggiore di quello valutato nella soluzione decentralizzata,  $c \cdot \theta^\alpha / (1 - \alpha) > c \cdot \theta^\alpha$ ; questo significa che il pianificatore sociale aprirà un numero inferiore di *vacancies*, rispetto alla soluzione decentralizzata, al fine di non aumentare ulteriormente la durata media e, quindi, il costo atteso di una *vacancy*.

In sostanza, ciò che differenzia le due soluzioni è l'interesse per le esternalità di congestione nella soluzione centralizzata e la presenza del salario in quella decentralizzata. Proprio per questo motivo, l'equilibrio decentralizzato sarà molto

---

<sup>30</sup> La durata media di una *vacancy* è l'inversa della probabilità di coprire una *vacancy*, i.e.  $\theta^\alpha$ . L'ipotesi di rendimenti di scala costanti implica che l'elasticità rispetto a  $\theta$  della durata media di una *vacancy* è uguale all'elasticità della funzione di *matching* rispetto al tasso di disoccupazione. Nello specifico della *Cobb-Douglas* tale elasticità è costante e pari ad  $\alpha$ .

<sup>31</sup> La soluzione socialmente efficiente trascura il salario (in quanto esso costituisce solo un trasferimento di reddito tra imprese e lavoratori) e prende in considerazione i flussi di utilità ottenuti dai lavoratori disoccupati.

probabilmente inefficiente, poiché la regola di determinazione del salario, nel suddividere il surplus tra lavoratori ed imprese che s'incontrano, trascura coloro i quali (*vacancies* e disoccupati) sono ancora impegnati nell'attività di ricerca. L'equilibrio decentralizzato di mercato coincide con la soluzione socialmente efficiente, quando il salario determinato attraverso la regola di *Nash* "internalizza" le esternalità di ricerca:

$$\frac{c}{(1-\alpha) \cdot \theta^{-\alpha}} = J + W - U$$

la condizione di efficienza richiede che il valore marginale di un posto di lavoro coperto valutato nella soluzione socialmente efficiente sia pari al surplus creato da un incontro (in equilibrio il valore di un posto vacante è pari a zero). Dalla precedente espressione, e facendo uso della condizione di ottimo  $W - U = \beta / (1 - \beta) \cdot J$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{c}{(1-\alpha) \cdot \theta^{-\alpha}} &= \frac{1}{1-\beta} \cdot J \\ \Rightarrow \frac{c}{(1-\alpha) \cdot \theta^{-\alpha}} &= \frac{1}{1-\beta} \cdot \frac{c}{\theta^{-\alpha}} \end{aligned}$$

dove  $J$  è sostituito dal valore marginale di un posto coperto ricavato dalla condizione di ottimo nell'equilibrio decentralizzato. La condizione di efficienza è dunque la seguente:

$$\beta = \alpha$$

Occorre sottolineare che  $\beta = \alpha$  è la condizione di efficienza solo nel caso in cui la funzione di *matching* esibisca rendimenti di scala costanti. Inoltre, poiché  $\beta$  è per assunzione costante, solo nel caso di una forma funzionale di tipo *Cobb-Douglas* (in cui  $\alpha$  è anch'esso costante) la condizione di efficienza può essere realisticamente rispettata. Occorre stressare, infine, che ciò che conta per l'efficienza sociale è l'allocazione delle risorse, e se quella che si realizza nell'equilibrio decentralizzato è efficiente o meno. La disoccupazione, infatti, è probabilmente il risultato più importante del meccanismo scelto per l'allocazione delle risorse, ma non è la causa di un'allocazione non efficiente. Quando  $\beta \neq \alpha$  l'allocazione delle risorse non è efficiente, poiché:

- se  $\beta > \alpha$ , le imprese creano meno posti di lavoro e i lavoratori cercano con minore intensità poiché eccessivamente alto è il salario di riserva (risultato: disoccupazione elevata);
- se  $\beta < \alpha$ , il salario di riserva è troppo basso, di conseguenza i lavoratori accettano con troppa facilità un posto di lavoro (risultato: sottoccupazione).

In modo molto generale, quindi, la disoccupazione di equilibrio è sopra il tasso socialmente efficiente se  $\beta > \alpha$ , il viceversa può valere per  $\beta < \alpha$ .

## 6. I modelli di *matching* e la scelta lavoratore - imprenditore

Trattandosi di modelli il cui focus è volutamente concentrato nel mercato del lavoro, non poteva mancare nella letteratura di *matching* la formalizzazione della fondamentale scelta economica individuale: la scelta fra entrare nel mercato del lavoro come imprenditore o come lavoratore dipendente.

Tuttavia, la formalizzazione di tale scelta, nell'ambito di un *matching framework*, è relativamente recente (cfr. Fonseca et al., 2001; Pissarides, 2002; Uren, 2007).

Nei modelli tradizionali, la scelta economica individuale tra diventare imprenditore o lavoratore dipendente si basa sul confronto tra le remunerazioni percepite nelle due differenti attività. In particolare, si assume che l'individuo marginale sia indifferente tra la remunerazione percepita come imprenditore (il profitto) è quella percepita come lavoratore (il salario).

Intuitivamente, nei modelli di *matching* tale scelta non può che scaturire dal confronto tra i due diversi valori presenti scontati di ingresso nel mercato del lavoro, i.e. il valore di essere disoccupato e il valore di apertura di una *vacancy*. In Uren (2007), infatti, la condizione di uguaglianza:

$$rV(\theta) = rU(\theta)$$

permette di determinare il valore di equilibrio delle tensioni nel mercato lavoro:<sup>32</sup>

$$\theta^{1-\alpha} \cdot \beta \cdot (y - 2b + 2c) - \theta^{-\alpha} \cdot (1 - \beta) \cdot (y - 2b) + c(r + \lambda) = 0$$

dove l'esistenza e l'unicità di  $\theta$  è garantita dalla condizione  $y - 2b > 0$  (si veda l'Appendice E per i dettagli analitici).

Il numero totale di imprenditori ( $1 - l$ ) e di lavoratori dipendenti ( $l$ ) è ricavato, invece, partendo dalle equazioni che descrivono l'evoluzione nel tempo di *vacancies* e disoccupazione:

$$\dot{v} = \lambda \cdot (1 - l - v) - \theta^{-\alpha} \cdot v$$

$$\dot{u} = \lambda \cdot (l - u) - \theta^{1-\alpha} \cdot u$$

dove  $(1 - l - v)$  sono i posti coperti, mentre  $(l - u)$  rappresentano i lavoratori occupati. È interessante notare che, a differenza di ciò che accadeva nel modello base analizzato

---

<sup>32</sup> Uren (2007) fa uso della notazione  $b$  per individuare il valore del tempo libero. L'imprenditore che colloca una *vacancy* sottrae al valore del tempo libero il costo di apertura di un posto vacante. Nel calcolo del surplus, quindi, il dividendo associato al valore di una *vacancy* in Uren (2007) è  $b - c$ .

in precedenza (in cui dati  $u$  e  $\theta$ , il livello di equilibrio dei posti vacanti è univocamente determinato dalla relazione  $v = u \cdot \theta$ ), in questo modello si usa un'equazione dinamica anche per le *vacancies*. Questo perché nella nuova formulazione c'è un esplicito riferimento anche alla quota di imprenditori/imprese sul totale della popolazione.<sup>33</sup> Intuitivamente, inoltre, in un modello in cui il numero totale dei posti di lavoro è fisso (sebbene non in modo esatto poiché ciò dipende dal valore di equilibrio di  $l$ ), non c'è più bisogno di imporre una condizione di zero profitti nella creazione delle *vacancies*, come accade invece nel modello standard in cui il numero delle imprese non è fissato.

I valori di  $u$  e  $v$  che vengono ricavati facendo uso della condizione di stato stazionario  $\dot{v} = \dot{u} = 0$ , vengono a loro volta usati per ottenere il valore di equilibrio di  $l$  attraverso la formula che definisce le tensioni nel mercato del lavoro (si veda sempre l'*Appendice E* per i dettagli analitici):

$$\theta = \frac{v}{u} \Rightarrow \theta = \frac{\lambda \cdot (1-l)}{\lambda + \theta^{-\alpha}} \cdot \frac{\lambda + \theta^{1-\alpha}}{\lambda \cdot l} \Rightarrow l$$

Una distinzione più chiara, dal punto di vista economico, tra imprenditori e lavoratori è contenuta in Fonseca et al. (2001). Gli autori, infatti, introducono un'abilità imprenditoriale  $\vartheta$ , la cui distribuzione nella popolazione segue una conosciuta funzione di ripartizione  $F(\vartheta)$ . Tale abilità è compresa tra un valore minimo positivo  $\vartheta = \vartheta_{min} > 0$  ed uno massimo  $\vartheta = \vartheta_{max}$ .

La soluzione del modello è simile a quella proposta da Uren, visto che il valore soglia di abilità imprenditoriale ( $S$ ) è ricavato dalla seguente disuguaglianza:

$$\vartheta \cdot rV(\theta) - K \geq rU(\theta)$$

dove  $K$  è un costo fisso (il costo di *start-up*). Dal momento che  $V(\theta)$  e  $U(\theta)$  sono entrambi indipendenti da  $\vartheta$  per assunzione, la disuguaglianza soddisfa la c.d. proprietà di riserva dell'abilità imprenditoriale: i.e. esiste un'abilità imprenditoriale di riserva,  $S$ , tale per cui un individuo diventa imprenditore se  $\vartheta \geq S$ ; viceversa, per  $\vartheta < S$ , entra nel mercato come lavoratore dipendente. Quindi,  $F(S)$  è la quota di individui che diventano lavoratori, mentre  $1 - F(S)$  sono imprenditori. Formalmente, il valore soglia è dato da:

---

<sup>33</sup> Nel modello in questione è l'intera popolazione ad essere normalizzata ad uno. In particolare, si ha che:  $1 = (1 - l) + l = u + n + n + v$ , dove  $n$  indica sia i lavoratori occupati che i posti coperti. Nel modello standard di *matching*, infatti, ogni impresa ha un solo lavoro/lavoratore (*one-job firm*), dunque, un posto coperto rappresenta sia un imprenditore che un lavoratore; quindi,  $n + v$  rappresenta la quota complessiva di imprenditori sul totale della popolazione, mentre  $n + u$  è quella dei lavoratori.

$$S = \frac{rU(\theta) + K}{rV(\theta)}$$

con  $\partial S / \partial \theta > 0$ , poiché  $V'(\theta) < 0$  e  $U'(\theta) > 0$ ; tali proprietà possono essere mostrate in modo molto semplice facendo uso delle equazioni di Bellman in precedenza introdotte (si veda l'Appendice F per i relativi calcoli).

Intuitivamente, invece, si ha che la JCC è decrescente in  $S$ , i.e.  $\partial \theta / \partial S < 0$ , poiché se il valore soglia è più alto, meno individui diventano imprenditori e, di conseguenza, meno *vacancies* sono aperte (anche in questo caso si veda l'Appendice F).

Come mostrato graficamente (cfr. figura 9), la funzione  $S(\theta)$  assume un valore basso ma positivo ( $S = \vartheta_{\min}$ ) per  $\theta = 0$ , e tende ad infinito per valori sufficientemente alti di  $\theta$  tali per cui  $V(\theta) = 0$ .<sup>34</sup> Viceversa, la funzione  $\theta(S)$ , i.e. la JCC, tende a zero per  $S = \vartheta_{\max}$  (l'intera popolazione sceglie di diventare lavoratore), mentre per  $S = \vartheta_{\min}$  tende al suo valore massimo ( $\bar{\theta} < \infty$ ). Il  $\bar{\theta}$  mostrato in figura 9 è il valore di  $\theta$  che soddisfa la condizione  $V(\bar{\theta}) = 0$ , i.e. è il valore di equilibrio di  $\theta$  che si ottiene nel modello standard di *matching* in assenza della scelta imprenditore - lavoratore.

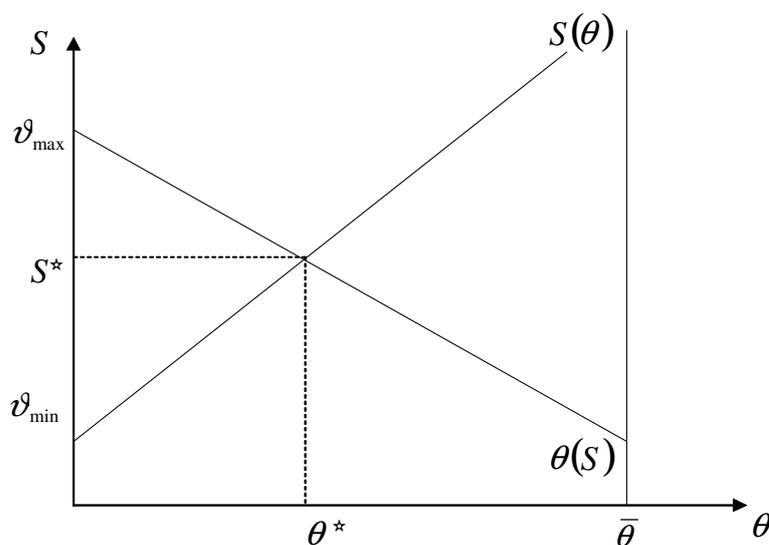


Figura 9. Valori di equilibrio di  $S$  e  $\theta$

Come nel precedente modello, anche in questo caso il numero degli imprenditori sul totale della popolazione è fisso; dunque, il ruolo chiave della condizione di zero-profitto nella creazione delle *vacancies* scompare. Precisamente, nel modello in questione è la condizione di *cut-off* (da cui deriva il valore soglia di abilità

<sup>34</sup> In sostanza, Fonseca et al. (2001) escludono il valore  $\theta = \infty$ , poiché in quel caso una *vacancy* non è mai coperta ed il suo valore è negativo.

imprenditoriale) che determina il numero totali dei posti di lavoro (*vacancies* e posti di lavoro già operativi), i.e.  $1 - F(S) = v + n = \int_S^{\vartheta_{max}} \vartheta dF(\vartheta)$ .

Infine, Pissarides (2002) sostanzialmente arricchisce il precedente modello. Ora, infatti, la scelta è più dettagliata visto che il potenziale nuovo imprenditore decide anche il numero di posti da creare ( $j$ ) sulla base della seguente massimizzazione:

$$\max_j \{j \cdot rV(\theta) - \vartheta \cdot g(j)\} \geq rU(\theta)$$

dove  $g(j)$  è il costo di gestione dei posti creati, ovviamente crescente in  $j$ . Il valore soglia che determina la scelta imprenditore - lavoratore è il seguente:

$$S = \frac{j \cdot rV(\theta) - rU(\theta)}{g(j)}$$

a differenza del precedente modello, però, ora per  $\vartheta \leq S$  si diventa imprenditori, poiché grazie alla maggiore abilità minori sono i costi di gestione. In sostanza, i più abili imprenditori hanno un più basso  $\vartheta$ , dunque, un più basso costo  $g(j)$ .

## 7. I modelli di *matching* e l'economia sommersa

L'uso dei modelli di *matching* può essere facilmente esteso all'analisi di altri importanti fenomeni relativi al mercato del lavoro, e non solo.<sup>35</sup> Primo fra tutti l'economia sommersa, che in alcuni Paesi come l'Italia rappresenta un problema estremamente importante e strettamente legato alla disoccupazione (cfr. Boeri e Garibaldi, 2002, 2006).

Come affermato da Bouev (2005), la sostanziale debolezza nella letteratura teorica che si occupa di economia sommersa deriva dalla mancanza di un'adeguata attenzione al mercato del lavoro, ignorando così il fatto che la decisione di operare nel sommerso sia sostanzialmente il risultato di scelte fatte da lavoratori ed imprese che interagiscono nel mercato del lavoro. In tal senso, i modelli di *matching* consentono di superare questo problema, focalizzando l'attenzione sul processo di incontro tra singoli lavoratori e singole imprese.<sup>36</sup>

Tra i principali lavori, che hanno fatto uso del *matching framework* per analizzare l'economia sommersa, si segnalano quelli di Kolm e Larsen (2003), Fugazza e Jacques (2004), Bouev (2002, 2005), Boeri e Garibaldi (2002, 2006), Albrecht et al. (2009).

<sup>35</sup> Wasmer e Weil (2004), infatti, mostrano che tale *framework* può essere impiegato anche per descrivere le difficoltà di incontro tra finanziatori (banche) ed imprese.

<sup>36</sup> L'esplicita differenziazione tra lavoratore ed impresa, infatti, esonera dalla necessità di usare la fittizia integrazione produttore-consumatore, permettendo una più completa comprensione del ruolo giocato dai partecipanti su entrambi i lati del mercato del lavoro (Laing, Palivos e Wang, 1995).

Senza entrare nel merito dei modelli citati, a cui si rimanda per un'analisi dettagliata dei risultati conseguiti, ciò su cui è più importante soffermarsi in questa sede sono le due diverse ipotesi utilizzate per il processo d'incontro. Kolm e Larsen (2003), Fugazza e Jacques (2004), Bouev (2002, 2005), Albrecht et al. (2009), fanno uso dell'ipotesi di *random/undirected search* (ricerca casuale o indiretta), mentre Boeri e Garibaldi (2006) usano l'ipotesi di *directed search* (ricerca diretta o orientata).

In presenza di *ricerca orientata* o *diretta* ci sono due funzioni di *matching*, una per ogni settore. Di conseguenza, quindi, ogni settore avrà la sua variabile chiave,  $\theta_i$ , e il suo tasso di disoccupazione,  $u_i$  (dove il pedice  $i$  serve a distinguere i due settori).<sup>37</sup>

Ipotizzando una *ricerca casuale*, invece, i posti di lavoro vacanti hanno la stessa probabilità di incontrare i lavoratori in cerca di occupazione, i.e. la probabilità di coprire una *vacancy* è uguale in entrambi i settori ed esiste un unico *pool* di disoccupati. Di conseguenza, è il numero totale delle *vacancies* ad essere preso in considerazione nell'unica funzione di *matching* esistente. Nello specifico, quindi, si avrà una variabile chiave di misura delle tensioni totali del mercato.

In tutti i lavori citati, tuttavia, è sempre la condizione di zero-profitti a determinare il valore di equilibrio delle tensioni del mercato del lavoro.

Le equazioni di *Bellman* possono essere facilmente manipolate per consentire la loro estensione anche al valore di un posto coperto e vacante nel settore irregolare. Per semplicità si farà riferimento all'ipotesi di ricerca orientata, cioè  $\theta_i$ , con  $i \in \{r, s\}$  dove  $r$  = regolare e  $s$  = sommerso. Utilizzando la condizione di zero-profitti (*free-entry*) anche per il settore sommerso, è immediato ottenere: <sup>38</sup>

$$\begin{cases} (r + \lambda + \rho) \cdot J_s = y_s - w_s \\ \frac{c_s}{\theta_s^{-\alpha}} = J_s \end{cases} \Rightarrow \frac{c_s}{(\theta_s)^{-\alpha}} = \frac{y_s - w_s}{r + \lambda + \rho}$$

La "regola" vista in precedenza vale anche per il settore sommerso: in equilibrio, il guadagno netto scontato dell'impresa deve essere pari al costo atteso. Per definizione, le attività irregolari sono soggette ad un controllo da parte delle autorità fiscali e di governo (controllo che nello specifico viene colto dalla probabilità istantanea di

---

<sup>37</sup> Nelle loro calibrizioni, Boeri e Garibaldi (2006) riportano un valore nettamente più alto per le tensioni nel settore regolare. Ciò in considerazione del fatto che il settore regolare è più ampio di quello sommerso e, quindi, i disoccupati hanno più possibilità di trovare lavoro in quel settore. Tuttavia, poiché la probabilità di trovare lavoro è crescente in  $\theta$ , ipotizzando che sia più semplice trovare lavoro nel sommerso per via del fatto che vi sono meno frizioni (in particolare, meno problemi di *skill-mismatch*), non è irrealistico supporre che il valore di  $\theta$  possa essere, invece, maggiore nel settore sommerso.

<sup>38</sup> L'elasticità della funzione di *matching* rispetto al tasso di disoccupazione è ipotizzata per semplicità identica in entrambi i settori.

scoprire l'irregolarità  $\rho$ ), e se scoperte danno luogo alla distruzione del posto di lavoro. Il parametro  $\rho$  rappresenta, quindi, un'ulteriore tasso di sconto del valore presente scontato delle imprese irregolari  $J_s$ .

Tra i lavori in precedenza citati, gli unici che introducono l'ipotesi di eterogeneità (i.e. Fugazza e Jacques, 2004; Boeri e Garibaldi, 2006; Albrecht et al., 2009), prendono in considerazione solo quella presente dal lato dell'offerta. Precisamente, l'eterogeneità presente in Fugazza and Jacques (2004) riguarda le considerazioni di carattere morale poste in essere dai lavoratori nel momento in cui decidono in quale settore lavorare, mentre quella introdotta da Boeri e Garibaldi (2006) e Albrecht et al. (2009) si riferisce alla diversa produttività dei lavoratori. In particolare, due sono i principali risultati che scaturiscono dall'introduzione dell'ipotesi di eterogeneità dei lavoratori:

- i) solo i lavoratori con bassi principi morali sono disposti a lavorare nel sommerso (Fugazza e Jacques, 2004);
- ii) i lavoratori maggiormente produttivi entrano nel settore regolare (Boeri e Garibaldi, 2006; Albrecht et al., 2009).

### 7.1 I costi di ingresso nel settore sommerso

Un'assunzione molto realistica ed intuitiva, utilizzata non solo nei modelli di *matching*, prevede che l'ingresso nel settore regolare richieda costi più elevati rispetto al sommerso. Questa ipotesi, infatti, è spesso usata come uno dei criteri chiave per distinguere il settore sommerso da quello regolare (cfr. Gërxhani, 2004).

L'ipotesi che il costo di apertura di una *vacancy* coincida con il costo di *start-up*, e che quest'ultimo sia nullo per un'impresa irregolare, i.e.  $c_s = 0$ , conduce ad un interessante risultato. Infatti, poiché le equazioni di Bellman esprimono il valore "marginale" presente scontato, dalla condizione di equilibrio nel settore irregolare (in precedenza introdotta) si ricava che:

$$y_s - w_s = 0 \Rightarrow y_s = w_s$$

dove viene rappresentata la condizione standard di ottimalità, da cui deriva la domanda di lavoro dell'impresa  $n_s^D$ , scelta in modo da eguagliare il salario alla produttività marginale del lavoro.

Nello specifico, al fine di caratterizzare tale scelta in un *matching framework*, seguendo Bertola e Caballero (1994), si assume che la produttività marginale del lavoro sia una funzione lineare decrescente (anziché costante) dell'occupazione:

$$y_s = \xi - \zeta \cdot n_s^D$$

dove  $\xi$  e  $\zeta$  sono parametri positivi. Dalla precedente espressione si ricava che:

$$\xi - \zeta \cdot n_s^D = w_s \Rightarrow n_s^D = \frac{\xi - w_s}{\zeta}$$

in modo standard, all'aumentare del salario si riduce il numero di lavoratori richiesti dall'impresa e, di conseguenza, anche il numero di *vacancies* da aprire. L'uso di un costo di apertura di una *vacancy* pari a zero, quindi, "trasforma" la JCC in una domanda di lavoro standard (Pissarides, 2000).

Tale specificazione per il mercato del lavoro sommerso non è assente in letteratura. Infatti, un modello con due mercati del lavoro (uno irregolare perfettamente concorrenziale senza disoccupazione e l'altro regolare caratterizzato da contrattazione salariale), è usato da Valentini (2007). L'autore, però, fa uso di un modello "misto", in cui la logica di *job search* caratterizza il lato dell'offerta di lavoro, mentre una microfondazione standard, i.e. la massimizzazione del profitto, è usata per descrivere il comportamento delle aziende.

## 8. Attività di ricerca "nel posto di lavoro" (*on-the-job search*)

La possibilità che anche chi è già occupato possa partecipare all'attività di ricerca è una realistica ipotesi, in considerazione del fatto che la ricerca spesso non si conclude con l'occupazione, ma è finalizzata a trovare il miglior "partner" di lavoro possibile.

Avendo passato in rassegna il modello base di *matching* e la sua estensione all'economia sommersa, il modo più semplice e intuitivo per introdurre l'ipotesi di *on-the-job search*, è quello di far riferimento al modello di Boeri e Garibaldi del 2002.<sup>39</sup>

Le ipotesi chiave del modello sono tre:

1. I posti di lavoro del settore regolare sono considerati *good jobs*, mentre quelli irregolari sono *bad jobs*, per via del differenziale di produttività, i.e. i posti di lavoro irregolari sono considerati a bassa produttività (ipotesi supportata dall'evidenza empirica);
2. Tutti i posti di lavoro nascono, però, come regolari, i.e. le *vacancies* sono tutte *good*. Di conseguenza, ci sarà un unico  $\theta$  che esprimerà le tensioni nel solo settore regolare;

---

<sup>39</sup> In realtà, quella presentata in questo paragrafo è una versione leggermente modificata del modello originale.

3. In considerazione dell'ipotesi 1., i *job-seekers* del modello sono, non solo i disoccupati, ma anche gli occupati nel settore irregolare. Entrambi cercano lavoro nel settore regolare.

Date le ipotesi del modello, le tensioni nel mercato del lavoro sono ora date da:

$$\theta = \frac{v}{u + n_{bad}}$$

dove la somma di disoccupati ( $u$ ) e occupati nel sommerso ( $n_{bad}$ ), individua la quota complessiva di *job-seekers*.<sup>40</sup>

Inoltre, poiché i disoccupati e gli occupati nel sommerso cercano con la stessa intensità, e sono ugualmente bravi nella ricerca di un posto di lavoro, la probabilità di trovare lavoro è la medesima, i.e.  $\theta^{1-\alpha}$ . Formalmente, ciò è espresso dalle seguenti equazioni di Bellman:

$$\begin{aligned} rU &= b + \theta^{1-\alpha} \cdot (W_{good} - U) \\ rW_{bad} &= w_{bad} - \kappa + (\lambda + \rho) \cdot (U - W_{bad}) + \theta^{1-\alpha} \cdot (W_{good} - W_{bad}) \end{aligned}$$

$\kappa \geq 0$  è il costo per i lavoratori irregolari di cercare *on-the-job*. Sebbene tale costo non sia presente in Boeri e Garibaldi (2002), Pissarides (2000) lo considera sufficientemente piccolo da rendere in alcune situazioni ottimale la ricerca *on-the-job*.<sup>41</sup>

Dal punto di vista dell'impresa irregolare, la probabilità di trovare lavoro  $\theta^{1-\alpha}$  rappresenta un ulteriore tasso di sconto, poiché riduce la durata media dell'occupazione irregolare:

$$J_{bad} = \frac{y_{bad} - w_{bad}}{r + \lambda + \rho + \theta^{1-\alpha}}$$

Dal punto di vista dell'impresa regolare, invece, sebbene tutti i lavori nascano come regolari, essi possono diventare *bad jobs* in seguito a shock negativi che avvengono al tasso  $\delta$ :

$$V_{good} = 0 \Rightarrow J_{good} = \frac{y_{good} - w_{good} - \tau}{r + \lambda + \delta}$$

dove  $\tau$  è una generica tassa sulla produzione.<sup>42</sup> Di conseguenza, al tasso  $\delta$  anche il lavoratore regolare diventa un lavoratore irregolare:

<sup>40</sup> Se l'ipotesi di *on-the-job search* è estesa all'intera forza lavoro e la forza lavoro è normalizzata ad uno, si avrà che  $\theta = v$ .

<sup>41</sup> Il modello di *on-the-job search* discusso in Pissarides (capitolo 4, 2000) prevede un valore soglia di produttività dei posti di lavoro al di sotto del quale è sempre ottimale cercare un lavoro con produttività superiore.

<sup>42</sup> L'eccessiva tassazione è tra le cause principali che spingono un'impresa ad operare irregolarmente.

$$rW_{good} = \frac{w_{good} + \lambda \cdot U}{r + \lambda + \delta}$$

Dalle equazioni appena introdotte, e facendo uso della ormai ben nota regola di suddivisione del surplus, si ottiene:

$$\frac{w_{good} + \lambda \cdot U}{r + \lambda + \delta} - U = \frac{\beta}{1 - \beta} \cdot \frac{y_{good} - w_{good} - \tau}{r + \lambda + \delta}$$

$$\frac{w_{bad} - \kappa + (\lambda + \rho) \cdot U + \theta^{1-\alpha} \cdot W_{good}}{r + \lambda + \rho + \theta^{1-\alpha}} - U = \frac{\beta}{1 - \beta} \cdot \frac{y_{bad} - w_{bad}}{r + \lambda + \rho + \theta^{1-\alpha}}$$

da cui è possibile ricavare i salari negoziati nei due settori:<sup>43</sup>

$$w_{good} = (1 - \beta) \cdot rU + \beta \cdot (y_{good} - \tau) \Rightarrow w_{good} = (1 - \beta) \cdot b + \beta \cdot (y_{good} - \tau + c \cdot \theta)$$

$$w_{bad} = (1 - \beta) \cdot (b + \kappa) + \beta \cdot y_{bad}$$

Come evidenziato da Pissarides (2000), e confermato da Boeri e Garibaldi (2002), il salario di coloro i quali cercano di modificare il proprio stato occupazionale (la propria condizione di partenza) non dipende dalle tensioni nel mercato del lavoro. Coerentemente con l'ipotesi di perfetta conoscenza del processo di incontro e di separazione da parte di entrambi i lati del mercato, infatti, l'impresa irregolare sa che il lavoratore cercherà un'occupazione regolare una volta occupato, riducendo così il valore marginale di un posto coperto irregolare. Tuttavia, la regola di *Nash* divide i costi e i benefici della ricerca *on-the-job*, di conseguenza, il lavoratore riceve una parte del costo sostenuto,  $(1 - \beta) \cdot \kappa$  ma compensa l'impresa rinunciando alla quota  $\beta \cdot c \cdot \theta$  del salario. Intuitivamente, quindi, il salario dei *job-seekers* deve essere inferiore a quello di coloro i quali non cercano *on-the-job*:

$$w_{good} - w_{bad} = \beta \cdot [y_{good} - y_{bad} - \tau \cdot (1 - \rho\phi) + c \cdot \theta] - (1 - \beta) \cdot \kappa > 0$$

La differenza appena ricavata può essere usata nella condizione di ottimalità della ricerca *on-the-job*: il lavoratore irregolare cerca un'occupazione regolare se e solo se,<sup>44</sup>

$$\theta^{1-\alpha} \cdot [W_{good} - W_{bad}] \geq w_{good} - w_{bad} + \kappa$$

Al fine di semplificare l'analisi si trascura sia il differenziale di produttività che la tassazione (i.e.  $y_{good} = y_{bad}$  e  $\tau = 0$ ). La precedente espressione diventa:

$$\theta^{1-\alpha} \cdot [W_{good} - W_{bad}] \geq \beta \cdot c \cdot \theta + \beta \cdot \kappa$$

<sup>43</sup> In Boeri e Garibaldi (2002), il potere di contrattazione dei lavoratori è identico in entrambi i settori.

<sup>44</sup> Formalmente, si è adattata l'analisi fatta in Pissarides (capitolo 4, 2000) al modello presentato nel paragrafo. Nel modello di Boeri e Garibaldi (2002), infatti, non è presente tale dettaglio analitico.

Dopo alcuni semplici passaggi algebrici e ricordando che  $J_{good} = c \cdot \theta^\alpha$  e

$W_i - U = \frac{\beta}{1-\beta} \cdot J_i$  (con  $i = good, bad$ ), si ottiene la condizione di ottimalità della ricerca

*on-the-job* in termini del valore di un posto coperto in entrambi i settori:

$$\begin{aligned} W_{good} - U - \frac{\beta \cdot c \cdot \theta}{\theta^{1-\alpha}} &\geq W_{bad} - U + \frac{\beta \cdot \kappa}{\theta^{1-\alpha}} \\ \frac{\beta}{1-\beta} \cdot J_{good} - \beta \cdot J_{good} &\geq \frac{\beta}{1-\beta} \cdot J_{bad} + \frac{\beta \cdot \kappa}{\theta^{1-\alpha}} \\ \Rightarrow \beta \cdot J_{good} &\geq J_{bad} + (1-\beta) \cdot \frac{\kappa}{\theta^{1-\alpha}} \end{aligned}$$

Come mostrato in Pissarides (capitolo 4, 2000), a prescindere dall'entità del costo di ricerca *on-the-job*, affinché la ricerca sia intrapresa, il costo per l'impresa derivante dall'abbandono del posto di lavoro, i.e.  $J_{bad}$ , deve essere inferiore o uguale alla frazione  $\beta$  del profitto per il lavoratore derivante dal nuovo lavoro, i.e.  $\beta \cdot J_{good}$ . In sostanza, il lavoratore compensa l'impresa irregolare del costo procuratogli rinunciando ad una quota del salario, ma allo stesso tempo anche il lavoratore deve essere compensato al fine di intraprendere l'attività di ricerca *on-the-job*.

### 8.1 *On-the-job search, disoccupazione ed efficienza*

In questo sottoparagrafo si derivano gli effetti che l'introduzione dell'ipotesi di *on-the-job search* ha sulla teoria della disoccupazione di equilibrio e sul problema dell'efficienza.

Normalizzando la forza lavoro a 1 ed essendo tre i possibili stati del lavoratore (disoccupato, occupato nel settore sommerso e occupato nel settore regolare), si ha che:

$$1 = u + n_{good} + n_{bad}$$

Nel modello in questione, i flussi "in ingresso" e "in uscita" caratterizzanti i tre possibili stati del lavoratore sono i seguenti:

$$\begin{aligned} \dot{n}_{good} = 0 &\Rightarrow \underbrace{\theta^{1-\alpha} \cdot (u + n_{bad})}_{in} = \underbrace{(\delta + \lambda) \cdot n_{good}}_{out} \\ \dot{n}_{bad} = 0 &\Rightarrow \underbrace{\delta \cdot n_{good}}_{in} = \underbrace{(\lambda + \rho) \cdot n_{bad} + \theta^{1-\alpha} \cdot n_{bad}}_{out} \\ \dot{u} = 0 &\Rightarrow \underbrace{\lambda \cdot n_{good} + (\lambda + \rho) \cdot n_{bad}}_{in} = \underbrace{\theta^{1-\alpha} \cdot u}_{out} \end{aligned}$$

Dall'equazione di *summing up* ( $1 = u + n_{good} + n_{bad}$ ) è possibile ricavare  $n_{good}$  che, sostituito nelle equazioni di stato stazionario per  $n_{bad}$  e  $u$ , permette di ottenere il tasso di disoccupazione di equilibrio stazionario in presenza di *on-the-job search*:

$$u = \frac{\rho \cdot (\lambda + \delta) + \lambda \cdot [\lambda + \delta + \theta^{1-\alpha}]}{[\lambda + \delta + \theta^{1-\alpha}] \cdot [\rho + \theta^{1-\alpha} + \lambda]}$$

L'esistenza di *on-the-job search* influenza la disoccupazione solo nella misura in cui influenza il valore di equilibrio delle tensioni nel mercato del lavoro. La teoria della disoccupazione ottenuta sotto l'ipotesi di *on-the-job search*, quindi, non è significativamente diversa da quella ottenuta in assenza di tale ipotesi (Pissarides, 2000). Questo spiega perché, in molti modelli di *matching*, tale realistica ipotesi sia spesso omessa.

Infine, una considerazione estremamente interessante ed importante relativa al problema dell'efficienza discusso nel paragrafo 5. Seguendo Boeri e Garibaldi (2002), si riformula il problema del pianificatore sociale in considerazione del fatto che ora la transizione in ingresso nell'occupazione (regolare) non riguarda più solo i disoccupati ma anche una parte dei lavoratori (quelli irregolari). Il problema di ottimizzazione è ora il seguente:

$$\max_{\theta} \int_0^{\infty} [y_{good} \cdot n_{good} + y_{bad} \cdot n_{bad} + b \cdot u - c \cdot \theta \cdot u]$$

soggetto al vincolo dato dall'evoluzione nel tempo dell'occupazione (regolare):

$$\dot{n}_{good} = \theta^{1-\alpha} \cdot (u + n_{bad}) - (\delta + \lambda) \cdot n_{good}$$

La relativa condizione del primo ordine per  $\theta$  è la seguente:

$$\frac{c \cdot u}{(1 - \alpha) \cdot \theta^{-\alpha}} = \Lambda \cdot (u + n_{bad})$$

dove  $\Lambda$  è il moltiplicatore di *Lagrange* associato al valore marginale di un posto coperto "good". In sostanza, l'equilibrio decentralizzato di mercato non coincide con quello centralizzato anche quando la condizione di efficienza è soddisfatta (i.e. anche quando  $\beta = \alpha$ ). Tale risultato è tipico dei modelli con *on-the-job search* e non dipende dall'esistenza di un settore sommerso (cfr. Boeri e Garibaldi, 2002). Infatti, se non ci fosse *on-the-job search*, i.e. se ci fosse solo  $u$  nel vincolo dinamico, si avrebbe la stessa condizione socialmente ottima trovata in precedenza (cfr. paragrafo 5).

## Appendice Matematica

### Appendice A: Surplus e determinazione del salario

Il surplus di un posto di lavoro creato è definito come la somma del valore dell'impresa e del lavoratore di essere "on-the-job", meno le rispettive opzioni esterne. Formalmente, esso è dato da:

$$S = J + W - V - U$$

dopo semplici passaggi algebrici e facendo uso delle equazioni di *Bellman*, si ricava:

$$rS = y + \lambda \cdot (V - J + U - W) - [b + \theta^{1-\alpha} \cdot (W - U)] - [-c + \theta^{-\alpha} \cdot (J - V)]$$

infine, sapendo che  $(W - U) = \beta \cdot S$  e  $(J - V) = (1 - \beta) \cdot S$ ,<sup>45</sup> si ottiene l'espressione finale:

$$S = \frac{y - b + c}{r + \lambda + \beta \cdot \theta^{1-\alpha} + (1 - \beta) \cdot \theta^{-\alpha}}$$

Per determinare il salario, invece, si parte dalla condizione del primo ordine per la suddivisione ottimale del surplus:

$$(W - U) = \frac{\beta}{1 - \beta} \cdot (J - V) \Rightarrow \frac{w + \lambda \cdot U}{r + \lambda} - U = \frac{\beta}{1 - \beta} \cdot \frac{y - w + \lambda \cdot V}{r + \lambda} - V$$

da cui si ottiene immediatamente:

$$\Rightarrow w - rU = \frac{\beta}{1 - \beta} \cdot (y - w - rV)$$

$$\Rightarrow w = (1 - \beta) \cdot rU + \beta \cdot (y - rV)$$

poiché vale la condizione di *free-entry* ( $V = 0 \Rightarrow J = c \cdot \theta^\alpha$ ), è possibile ricavare che

$rU = b + \frac{\beta}{1 - \beta} \cdot c \cdot \theta$ , da cui è semplice ottenere l'espressione finale:

$$\boxed{w = (1 - \beta) \cdot b + \beta \cdot y + \beta \cdot c \cdot \theta}$$

### Appendice B: Job Creation Condition

Si sostituisce l'equazione del salario nell'espressione per  $r \cdot J(x)$ :

$$r \cdot J(x) = y \cdot x - \left[ \underbrace{(1 - \beta) \cdot b + \beta \cdot y \cdot x + \beta \cdot c \cdot \theta}_{\text{}} \right] - \lambda \cdot J(x) + \lambda \cdot \int_R^1 J(s) dG(s)$$

$$(r + \lambda) \cdot J(x) = (1 - \beta) \cdot (y \cdot x - b) - \beta \cdot c \cdot \theta + \lambda \cdot \int_R^1 J(s) dG(s) \quad [1]$$

<sup>45</sup> Tali quote possono essere ottenute in modo molto semplice dalla condizione del primo ordine per la determinazione del salario, i.e.  $(W - U) = \beta / (1 - \beta) (J - V)$ .

Si trova il valore dell'equazione [1] per  $x = R$ , con  $J(R) = 0$ :

$$0 = (1 - \beta) \cdot (y \cdot R - b) - \beta \cdot c \cdot \theta + \lambda \cdot \int_R^1 J(s) dG(s) \quad [2]$$

Si sottrae l'equazione [2] dall'equazione [1]:

$$(r + \lambda) \cdot J(x) = (1 - \beta) \cdot (y \cdot x - y \cdot R) \\ \Rightarrow J(x) = \frac{(1 - \beta) \cdot (y \cdot x - y \cdot R)}{(r + \lambda)} \quad [3]$$

valutando l'equazione [3] per  $x = 1$ , visto che l'impresa crea nuovi posti di lavoro con produttività massima, e facendo uso dell'espressione per  $J(1)$  ricavata attraverso la condizione di zero-profitto, i.e.:

$$r \cdot V = -c + \theta^{-\alpha} \cdot [J(1) - V] \Rightarrow J(1) = \frac{c}{\theta^{-\alpha}}$$

si ottiene la "nuova" *Job Creation Condition* (JCC):

$$\boxed{JCC \Rightarrow c \cdot \theta^\alpha = \frac{(1 - \beta) \cdot y}{(r + \lambda)} \cdot (1 - R)}$$

da cui è immediato ricavare che  $\frac{d\theta}{dR} < 0$ .

### Appendice B: Job Destruction Curve

Partendo dall'equazione [1]:

$$(r + \lambda) \cdot J(x) = (1 - \beta) \cdot (y \cdot x - b) - \beta \cdot c \cdot \theta + \lambda \cdot \int_R^1 J(s) dG(s)$$

si sostituisce  $J(s)$  con la [3], dove, ovviamente,  $x = s$ :

$$(r + \lambda) \cdot J(x) = (1 - \beta) \cdot (y \cdot x - b) - \beta \cdot c \cdot \theta + \lambda \cdot \int_R^1 \frac{(1 - \beta) \cdot y}{(r + \lambda)} \cdot (s - R) dG(s) \quad [4]$$

si valuta la [4] per  $x = R$ , che è il valore soglia della produttività di un posto di lavoro al di sotto del quale il lavoro stesso viene distrutto:

$$0 = (1 - \beta) \cdot y \cdot R - (1 - \beta) \cdot b - \beta \cdot c \cdot \theta + \lambda \cdot \frac{(1 - \beta) \cdot y}{(r + \lambda)} \cdot \int_R^1 (s - R) dG(s) \quad [5]$$

al fine di ottenere un'espressione più chiara, si dividono tutti i membri della [5] per  $(1 - \beta) \cdot y$ , ottenendo così la *Job Destruction Curve* (JD):

$$\boxed{JD \Rightarrow 0 = R - \frac{b}{y} - \frac{\beta \cdot c \cdot \theta}{(1 - \beta) \cdot y} + \frac{\lambda}{(r + \lambda)} \cdot \int_R^1 (s - R) dG(s)}$$

differenziandola totalmente, si ottiene:

$\frac{\beta \cdot c}{(1-\beta) \cdot y} \cdot d\theta = dR \cdot \left\{ 1 - \left( \frac{\lambda}{(r+\lambda)} \right) \cdot [1 - G(R)] \right\}$ , con  $\frac{d\theta}{dR} > 0$ , poiché l'ultimo termine in parentesi graffa è un prodotto di due numeri minori di uno.

### Appendice C : L'equazione dinamica per $\theta$

Anche fuori dallo stato stazionario vale la condizione di equilibrio di *free-entry*:

$$V(t) = 0 \Rightarrow J(t) = \frac{c}{\theta(t)^{-\alpha}} \quad \forall t$$

Stesso discorso per la regola di suddivisione del surplus: il salario è, quindi, determinato allo stesso modo sia in equilibrio stazionario che durante l'aggiustamento:

$$w(t) = (1-\beta) \cdot b + \beta \cdot y + \beta \cdot c \cdot \theta(t)$$

La dinamica di  $J(t)$  fuori dall'equilibrio stazionario è, invece, data da:

$$\begin{aligned} r \cdot J(t) &= (y - w(t)) + \lambda \cdot [V(t) - J(t)] + \dot{J}(t) \\ \Rightarrow \dot{J}(t) &= (r + \lambda) \cdot J(t) - (y - w(t)) \end{aligned} \quad [6]$$

Differenziando  $J(t) = c \cdot \theta(t)^\alpha$  rispetto al tempo si ottiene:

$$\dot{J}(t) = c \cdot \alpha \cdot \theta(t)^{\alpha-1} \cdot \dot{\theta}(t) \quad [7]$$

Sostituendo la [7] nella [6], si ricava:

$$\begin{aligned} c \cdot \alpha \cdot \theta(t)^{\alpha-1} \cdot \dot{\theta}(t) &= (r + \lambda) \cdot J(t) - (y - w(t)) \\ c \cdot \alpha \cdot \theta(t)^{\alpha-1} \cdot \dot{\theta}(t) &= (r + \lambda) \cdot c \cdot \theta(t)^\alpha - y + w(t) \\ \frac{c \cdot \alpha}{\theta(t)^{1-\alpha}} \cdot \dot{\theta}(t) &= (r + \lambda) \cdot c \cdot \theta(t)^\alpha - y + \underbrace{(1-\beta) \cdot b + \beta \cdot y + \beta \cdot c \cdot \theta(t)}_{w(t)} \end{aligned}$$

Infine ottenendo l'equazione differenziale per  $\theta$ :

$$\dot{\theta}(t) = \frac{(r + \lambda)}{\alpha} \cdot \theta(t) - \frac{\theta(t)^{1-\alpha} \cdot (1-\beta) \cdot (y-b)}{c \cdot \alpha} + \frac{\beta \cdot \theta(t)^{2-\alpha}}{\alpha}$$

$$\text{con: } \frac{d\dot{\theta}(t)}{d\theta(t)} = \frac{r + \lambda}{\alpha} - \frac{(1-\alpha) \cdot (1-\beta) \cdot (y-b)}{c \cdot \alpha} \cdot \theta(t)^{-\alpha} + (2-\alpha) \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot \theta(t)^{1-\alpha} > 0 \quad .^{46}$$

### Appendice D : Equilibrio decentralizzato e soluzione socialmente efficiente

L'impresa rappresentativa  $i$  risolve il seguente problema di ottimo: <sup>47</sup>

$$\max_{v_i} \int_0^{\infty} [y \cdot n_i - w \cdot n_i - c \cdot v_i] \cdot e^{-r \cdot t} dt$$

<sup>46</sup> Si noti che il  $\lim_{\theta \rightarrow 0}$  dell'espressione tende a  $-\infty$ , mentre il  $\lim_{\theta \rightarrow \infty}$  dell'espressione tende a  $+\infty$ .

<sup>47</sup> Per semplicità, come da prassi nei modelli di *matching*, si assume che la produttività marginale del lavoro sia una funzione lineare costante dell'occupazione.

soggetto al vincolo dato dall'evoluzione nel tempo dell'occupazione:

$$\dot{n}_i = \theta^{-\alpha} \cdot v_i - \lambda \cdot n_i$$

L'impresa rappresentativa  $i$ , che può aprire più di una *vacancy* alla volta, prende come dato il valore delle tensioni nel mercato del lavoro, trascurando gli effetti che le proprie decisioni avranno sulle condizioni aggregate di tensione nel mercato.

Impostando l'*Hamiltoniano*:

$$H(t) = \{y \cdot n_i - w \cdot n_i - c \cdot v_i + \Lambda(t) \cdot [\theta^{-\alpha} \cdot v_i - \lambda \cdot n_i]\} \cdot e^{-rt}$$

si ricavano le soluzioni di ottimo del problema in cui  $v_i$  è la variabile di controllo e  $n_i$  quella di stato.  $\Lambda(t)$  è il cosiddetto "valore ombra" (*shadow value*) che nello specifico esprime per l'impresa il valore marginale di un posto coperto: <sup>48</sup>

$$\frac{\partial H(t)}{\partial v_i} = 0 \Rightarrow [-c + \Lambda(t) \cdot \theta^{-\alpha}] \cdot e^{-rt} = 0$$

$$\Rightarrow \Lambda(t) = \frac{c}{\theta^{-\alpha}}$$

La precedente espressione è una condizione standard di ottimalità: in equilibrio, il valore marginale di un posto coperto è pari al costo atteso di una *vacancy*.

$$\frac{\partial H(t)}{\partial n_i} = -\frac{d(\Lambda(t) \cdot e^{-rt})}{dt} \Rightarrow [y - w - \Lambda(t) \cdot \lambda] \cdot e^{-rt} = -[\dot{\Lambda}(t) - r \cdot \Lambda(t)] \cdot e^{-rt}$$

dove  $-\frac{d(\Lambda(t) \cdot e^{-rt})}{dt} = -[\dot{\Lambda}(t) \cdot e^{-rt} + \Lambda(t) \cdot (-r) \cdot e^{-rt}]$ ,

$$\Rightarrow (y - w) = (r + \lambda) \cdot \Lambda(t) - \dot{\Lambda}(t)$$

La precedente soluzione esprime l'evoluzione nel tempo del valore marginale di un posto coperto. In stato stazionario, con  $\dot{\Lambda}(t) = 0$ , combinando le due soluzioni, si ricava la condizione standard di equilibrio dal lato della domanda di lavoro, i.e. la *Job Creation Condition*:

$$\Rightarrow \frac{y - w}{r + \lambda} = \frac{c}{\theta^{-\alpha}}$$

che insieme al vincolo,  $n_i = \frac{\theta^{-\alpha} \cdot v_i}{\lambda}$ , consente di ottenere il valore ottimo di  $v_i$ .

Per quanto riguarda, invece, la soluzione socialmente efficiente, il problema di massimizzazione è il seguente:

<sup>48</sup> Infatti,  $\partial H(t) / \partial n_i = \Lambda(t)$ . Le soluzioni di ottimo comprendono anche la necessaria condizione di trasversalità:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda(t) \cdot e^{-rt} \cdot n_i = 0$ .

$$\max_v \int_0^{\infty} [y \cdot n + b \cdot (1-n) - c \cdot v] \cdot e^{-rt} dt$$

$$\dot{n} = v \cdot \left( \frac{v}{1-n} \right)^{-\alpha} - \lambda \cdot n$$

In questo caso, invece, è endogeno il valore delle tensioni nel mercato del lavoro. Inoltre, la soluzione socialmente efficiente trascura il salario e prende in considerazione i flussi di utilità ottenuti dai lavoratori disoccupati, i.e.  $b \cdot (1-n)$ , dove la forza lavoro è, per semplicità, sempre normalizzata a 1.

Come in precedenza, le soluzioni di ottimo si trovano impostando l'*Hamiltoniano*:

$$H(t) = \left[ y \cdot n + b \cdot (1-n) - c \cdot v + \Lambda(t) \cdot \left[ v \cdot \left( \frac{v}{1-n} \right)^{-\alpha} - \lambda \cdot n \right] \right] \cdot e^{-rt}$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial v} = 0 \Rightarrow \left\{ -c + \Lambda(t) \cdot \left[ \left( \frac{v}{1-n} \right)^{-\alpha} + v \cdot (-\alpha) \cdot \left( \frac{v}{1-n} \right)^{-\alpha-1} \cdot \frac{1}{1-n} \right] \right\} \cdot e^{-rt} = 0$$

$$\Rightarrow \Lambda(t) = \frac{c}{\theta^{-\alpha} - \alpha \cdot \theta^{-\alpha}} = \frac{c}{(1-\alpha) \cdot \theta^{-\alpha}}$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial n_i} = - \frac{d(\Lambda(t) \cdot e^{-rt})}{dt}$$

$$\Rightarrow \left\{ y - b - \Lambda(t) \cdot \lambda + \Lambda(t) \cdot \left[ v \cdot (-\alpha) \cdot \theta^{-\alpha-1} \cdot (-1) \cdot (1-n)^{-2} \cdot v \cdot (-1) \right] \right\} \cdot e^{-rt} = \dots$$

$$\dots = -[\dot{\Lambda}(t) - r \cdot \Lambda(t)] \cdot e^{-rt}$$

$$\Rightarrow (y - b) = (r + \lambda + \alpha \cdot \theta^{-\alpha-1} \cdot \theta^2) \cdot \Lambda(t) - \dot{\Lambda}(t)$$

Da cui, infine, si ricava il valore marginale di un posto coperto in stato stazionario (i.e. la *Job Creation Condition* dell'equilibrio centralizzato):

$$\Rightarrow \frac{y - b}{(r + \lambda + \alpha \cdot \theta^{-\alpha-1} \cdot \theta^2)} = \frac{c}{(1-\alpha) \cdot \theta^{-\alpha}}$$

### Appendice E: Esistenza ed unicità del valore di $\theta$

Facendo uso delle equazioni Bellman e del surplus, si ottiene che:

$$rV(\theta) = rU(\theta) \Rightarrow b - c + \theta^{-\alpha} \cdot [J - V] = b + \theta^{1-\alpha} \cdot [W - U]$$

$$-c + \theta^{-\alpha} \cdot (1-\beta) \cdot S = \theta^{1-\alpha} \cdot \beta \cdot S, \text{ con } S = \frac{y - 2b + c}{r + \lambda + (1-\beta) \cdot \theta^{-\alpha} + \beta \cdot \theta^{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow \theta^{1-\alpha} \cdot \beta \cdot (y - 2b + 2c) - \theta^{-\alpha} \cdot (1-\beta) \cdot (y - 2b) + c(r + \lambda)$$

Nel modello di Uren (2007), così come in altri modelli di *matching* (cfr. Pissarides, 2002; Bouev, 2002, 2005), si fa uso delle c.d. condizioni di *Inada*:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \theta^{1-\alpha} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \theta^{-\alpha} = 0$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \theta^{1-\alpha} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta^{-\alpha} = \infty$$

Definendo:

$$C(\theta) = \theta^{1-\alpha} \cdot \beta \cdot (y - 2b + 2c) - \theta^{-\alpha} \cdot (1 - \beta) \cdot (y - 2b) + c(r + \lambda)$$

con  $y - 2b > 0$  si ha che:

$$C'(\theta) = (1 - \alpha) \cdot \theta^{-\alpha} \cdot \beta \cdot (y - 2b + 2c) - (-\alpha) \theta^{-\alpha-1} \cdot (1 - \beta) \cdot (y - 2b) > 0$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} C(\theta) = -\infty$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} C(\theta) = \infty$$

di conseguenza, il teorema del *valore intermedio* implica l'esistenza di una soluzione e la natura monotona di  $C(\theta)$  garantisce l'unicità.

### Appendice E: *Allocazione di equilibrio imprenditori - lavoratori*

Una volta garantita l'unicità del valore di equilibrio del rapporto *vacancy-disoccupazione*, è possibile descrivere l'allocazione degli individui tra imprenditorialità e forza lavoro. In stato stazionario si ha che:

$$v = \frac{\lambda \cdot (1-l)}{\lambda + \theta^{-\alpha}}$$

$$u = \frac{\lambda \cdot l}{\lambda + \theta^{1-\alpha}}$$

affinché il livello di stato stazionario di *vacancies* e disoccupazione sia consistente con il valore di equilibrio delle tensioni nel mercato del lavoro, è necessario che la seguente relazione tenga:

$$\theta = \frac{v(l)}{u(l)}$$

risolvendo la precedente espressione per  $l$ , è possibile ricavare il valore di equilibrio dei lavoratori e, di conseguenza, degli imprenditori  $(1-l)$ :

$$\Rightarrow \theta = \frac{\lambda(1-l)}{\lambda + \theta^{-\alpha}} \cdot \frac{\lambda + \theta^{1-\alpha}}{\lambda \cdot l} \Rightarrow \theta = \frac{(1-l)}{l} \cdot \frac{\lambda + \theta^{1-\alpha}}{\lambda + \theta^{-\alpha}}$$

$$\Rightarrow \theta \cdot l \cdot \lambda + \theta^{-\alpha} = (1-l) \cdot (\lambda + \theta^{1-\alpha})$$

$$\Rightarrow l = \frac{\lambda + \theta^{1-\alpha}}{\lambda \cdot (1 + \theta) + 2 \cdot \theta^{-\alpha}}$$

### Appendice F: *Funzioni valore V e U*

Date le equazioni di *Bellman* di stato stazionario:

$$r \cdot W = w + \lambda \cdot (U - W)$$

$$r \cdot U = b + \theta^{1-\alpha} \cdot (W - U)$$

$$r \cdot V = -c + \theta^{-\alpha} \cdot (J - V)$$

$$r \cdot J = y - w + \lambda \cdot (V - J)$$

e data la regola di suddivisione del surplus:

$$(1 - \beta) \cdot (W - U) = \beta \cdot (J - V)$$

è immediato ricavare che:

$$(W - U) = \beta \cdot S$$

$$(J - V) = (1 - \beta) \cdot S$$

$$S = \frac{y - b + c}{r + \lambda + (1 - \beta) \cdot \theta^{-\alpha} + \beta \cdot \theta^{1-\alpha}}$$

Usando le precedenti espressioni nell'equazione per  $rV$  si ottiene:

$$rV = \frac{(1 - \beta) \cdot \theta^{-\alpha} \cdot (y - b) - c \cdot [r + \lambda + \beta \cdot \theta^{1-\alpha}]}{r + \lambda + (1 - \beta) \cdot \theta^{-\alpha} + \beta \cdot \theta^{1-\alpha}}$$

con  $\partial V / \partial \theta < 0$ .

Ripetendo lo stesso procedimento per  $rU$ , si ricava:

$$rU = b + \frac{\beta \cdot \theta^{1-\alpha} \cdot (y - b + c)}{r + \lambda + (1 - \beta) \cdot \theta^{-\alpha} + \beta \cdot \theta^{1-\alpha}}$$

con  $\partial U / \partial \theta > 0$ .

### ***Appendice F : Il valore delle tensioni nel mercato del lavoro funzione del valore soglia di abilità imprenditoriale***

L'evoluzione dell'occupazione può essere espressa, indifferentemente, in termini sia del tasso di transizione dell'impresa ( $\theta^{-\alpha}$ ) che di quello dei lavoratori ( $\theta^{1-\alpha}$ ), i.e.:

$$\dot{n} = \left( \int_S^{\vartheta_{max}} \vartheta dF(\vartheta) - n \right) \cdot \theta^{-\alpha} - \lambda \cdot n$$

$$\dot{n} = [F(S) - n] \cdot \theta^{1-\alpha} - \lambda \cdot n$$

In stato stazionario si ha, quindi, che:

$$n = \frac{\left( \int_S^{\vartheta_{max}} \vartheta dF(\vartheta) \right) \cdot \theta^{-\alpha}}{\theta^{-\alpha} + \lambda}$$

$$n = \frac{F(S) \cdot \theta^{1-\alpha}}{\theta^{1-\alpha} + \lambda}$$

di conseguenza, deve essere vero che:

$$\frac{\left( \int_S^{\vartheta_{\max}} \vartheta dF(\vartheta) \right) \cdot \theta^{-\alpha}}{\theta^{-\alpha} + \lambda} = \frac{F(S) \cdot \theta^{1-\alpha}}{\theta^{1-\alpha} + \lambda}$$

da cui è possibile ricavare immediatamente la seguente espressione:

$$\Rightarrow \frac{\int_S^{\vartheta_{\max}} \vartheta dF(\vartheta)}{F(S)} = \frac{\theta^{1-\alpha} + \lambda \cdot \theta}{\theta^{1-\alpha} + \lambda}$$

con  $\frac{d\theta}{dS} < 0$ , poiché il lato sinistro dell'espressione è decrescente in  $S$ , mentre il lato destro è crescente in  $\theta$ .

## Bibliografia

- Alchian, A. A. (1969). Information Costs, Pricing and Resource Unemployment. *Western Economic Journal*, 7: 109-128;
- Andolfatto, D. (2008). *Macroeconomic Theory and Policy*. MPRA Paper, University Library of Munich;
- Andrews, M., Bradley, S., Stott, D., e Upward, R. (2009). *Estimating the Stock-flow Matching Model Using Micro Data*. mimeo;
- Bagliano, F., e Bertola, G. (1999). *Metodi Dinamici e Fenomeni Macroeconomici*. Il Mulino, Bologna;
- Bellman, R.E. (1957). *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, NJ;
- Bertola, G., e Caballero, R. J. (1994). Cross-Sectional Efficiency and Labour Hoarding in a Matching Model of Unemployment. *Review of Economic Studies*, 61, 435-457;
- Beveridge, W. H. (1944). *Full Employment in a Free Society*. George Allen & Unwin, London;
- Blanchard, O. J., e Diamond, P. A. (1989). The Beveridge Curve. *Brookings Papers on Economic Activity*, 1: 1-60;
- Blanchard, O. J., e Diamond, P. A. (1990a). The Cyclical Behavior of the Gross Flows of U.S. Workers. *Brookings Papers on Economic Activity*, 2: 85-155;
- Blanchard, O. J., e Diamond, P. (1990b). The Aggregate Matching Function. In Diamond, P. (a cura di), *Growth, Productivity, Unemployment*, MIT Press, 159-201;
- Boeri, T. (1996). Is Job Turnover Countercyclical? *Journal of Labour Economics*, 14: 603-625;
- Boeri, T., e Garibaldi, P. (2002). Shadow Activity and Unemployment in a Depressed Labour Market. *CEPR Discussion Paper*, 3433;
- Boeri, T., e Garibaldi, P. (2006). Shadow Sorting. *Fondazione Collegio Carlo Alberto Working Paper Series*, 10;
- Bouev, M. (2002). Official Regulations and the Shadow Economy: A Labour Market Approach. *William Davidson Institute Working Papers Series*, 524;
- Bouev, M. (2005). State Regulations, Job Search and Wage Bargaining: A Study in the Economics of the Informal Sector. *William Davidson Institute Working Papers Series*, 764;
- Bowden, R. (1980). On the Existence of Secular Stability of the u-v Loci. *Economica*, 47: 35-50;
- Budd, A., Levine, P., e Smith, P. (1988). Unemployment, Vacancies and the Long-term Unemployed. *Economic Journal*, 98: 1071-1091;
- Burda, M., e Wyplosz, C. (1994). Gross Worker and Job Flows in Europe. *European Economic Review*, 38: 1287-1315;
- Coles, M. G., e Smith, E. (1998). Marketplaces and Matching. *International Economic Review*, 39(1), 239-254;
- Coles, M. G., e Muthoo, A. (1998). Strategic Bargaining and Competitive Bidding in a Dynamic Market Equilibrium. *Review of Economic Studies*, 65(2), 235-260;
- Coles, M. G., e Petrongolo, B. (2008). A Test Between Stock-Flow Matching and the Random Matching Function Approach. *International Economic Review*, 49, 1113-41;
- Contini, B., e Trivellato, U. (a cura di) (2006). *Eppur si muove. Dinamiche e persistenze nel mercato del lavoro italiano*. Il Mulino, Bologna;
- Davis, S. J., e Haltiwanger, J. C. (1992). Gross Job Creation, Gross Job Destruction and Employment Reallocation. *Quarterly Journal of Economics*, 107: 819-863;
- Diamond, P. A. (1982a). Aggregate Demand Management in Search Equilibrium. *Journal of Political Economy*, 90: 881-894;

- Diamond, P. A. (1982*b*). Wage Determination and Efficiency in Search Equilibrium. *Review of Economic Studies*, 49: 217-227;
- Diamond, P. A. (1984). *A Search Equilibrium Approach to the Microfoundations of Macroeconomics*. Cambridge, MIT Press;
- Diamond, P. A., e Maskin, E. (1979). An Equilibrium Analysis of Search and Breach of Contract. *Bell Journal of Economics*, 10: 282-316;
- Dow, J. C. R., e Dicks-Mireaux, L. A. (1958). The Excess Demand for Labour: A Study of Conditions in Great Britain 1946-1956. *Oxford Economic Papers*, 10: 1-33;
- Ebrahimi, E., e Shimer, R. (2009). *Stock-Flow Matching*. mimeo;
- Friedman, M. (1968). The Role of Monetary Policy. *American Economic Review*, 58: 1-17;
- Fugazza, M., e Jacques, J. F. (2004). Labour Market Institutions, Taxation and the Underground Economy. *Journal of Public Economics*, 88(1-2), 395-418;
- Garibaldi, P. (1998). Job Flow Dynamics and Firing Restrictions. *European Economic Review*, 42: 245-275;
- Garibaldi, P. (2006). Hiring Freeze and Bankruptcy in Unemployment Dynamics. *IZA Discussion Paper Series*, 2263;
- Gërçhani, K. (2004) The Informal Sector in Developed and Less Developed Countries: A Literature Survey. *Public Choice*, vol. 120(3-4), 267-300;
- Gregg, P., e Petrongolo, B. (2005). Non-random Matching and the Performance of the Labour Market. *European Economic Review*, 49 (8), 1987-2011;
- Hall, R. E. (1979). A Theory of the Natural Unemployment Rate and the Duration of Employment. *Journal of Monetary Economics*, 5: 153-169;
- Hansen, B. (1970). Excess Demand, Unemployment, Vacancies and Wages. *Quarterly Journal of Economics*, 84: 1-23;
- Hagedorn, M., and Manovskii, I. (2008). The cyclical behaviour of equilibrium unemployment and vacancies revisited. *European Central Bank Working Paper Series*, n. 853;
- Hicks, J. (1963). *The Theory of Wages*. Macmillan;
- Holt, C. C., e David, M. H. (1966). The Concept of Job Vacancies in a Dynamic Theory of the Labour Market. In *The Measurement and Interpretation of Job Vacancies*. New York, Columbia University Press.
- Hutt, W. (1939). *The Theory of Idle Resources*. Jonathan Cape;
- Jackman, R., Layard, R., e Pissarides, C. A. (1989). On Vacancies. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 51: 377-394;
- Jackman, R., Pissarides, C. A., e Savouri, S. (1990). Labour Market Policies and Unemployment in the OECD. *Economic Policy*, 11: 449-490;
- Keynes, J. (1936). *The General Theory of Employment, Interest and Money*. Macmillan, London;
- Kolm, A., e Larsen, B. (2003). Wages, Unemployment, and the Underground Economy. *CESifo Working Paper*, 1086;
- Lagos, R. (2000). An Alternative Approach to Search Frictions. *The Journal of Political Economy*, 108 (5): 851-873;
- Laing, D., Palivos, T., e Wang, P. (1995). Learning, Matching and Growth. *Review of Economics Studies*, 62, 115-129;
- Mortensen, D. T. (1970). A Theory of Wage and Employment Dynamics. In Phelps, E., et al., editor, *The Microeconomic Foundations of Employment and Inflation Theory*. Norton, New York;
- Mortenson, D. T. (1986). Job Search and Labour Market Analysis. *Handbook of Labor Economics*, vol. 2, Ashenfelter, O., e Layard, R., editor. Amsterdam, North Holland;
- Mortensen, D. T., e Pissarides, C. A. (1994). Job Creation and Job Destruction in the Theory of Unemployment. *Review of Economic Studies*, 61: 397-415;

- Mortensen, D. T., e Pissarides, C. A. (1998). Technological Progress, Job Creation and Job Destruction. *Review of Economic Dynamic*, 1: 733-753;
- Mortensen, D. T., e Pissarides, C. A. (1999). New Developments in Models of Search in the Labor Market. In *Handbook of Labour Economics*. Ashenfelter, O., e Card, D., editor. Amsterdam, North-Holland;
- Petrongolo, B., e Pissarides, C. A. (2001). Looking into the Black Box, a Survey of the Matching Function. *Journal of Economic Literature*, 39: 390-431;
- Phelps, E. (1967). Phillips Curves, Expectations of Inflation and Optimal Unemployment. *Economica*, 34: 254-281;
- Phelps, E. (1968). Money-wage Dynamics and Labor Market Equilibrium. *Journal of Political Economy*, 76: 678-711;
- Phelps, E. S. (1972). *Inflation Policy and Unemployment Theory: The Cost-Benefit Approach to Monetary Planning*. New York: Norton;
- Phelps, E. S., Alchian, A. A., Holt, C. C. et al. (1970). *Microeconomic Foundations of Employment and Inflation Theory*. New York: Norton;
- Pissarides, C. A. (1979). Job Matching with State Employment Agencies and Random Search. *Economic Journal*, 89: 818-833;
- Pissarides, C. A. (1984). Efficient Job Rejection. *Economic Journal*, 94: 97-108;
- Pissarides, C. A. (1985a). Short-run Equilibrium Dynamics of Unemployment, Vacancies and Real Wages. *American Economic Review*, 75: 676-690;
- Pissarides, C. A. (1985b). Taxes, Subsidies and Equilibrium Unemployment. *Review of Economic Studies*, 52: 121-134;
- Pissarides, C. A. (1986). Unemployment and Vacancies in Britain. *Economic Policy*, 3: 499-559;
- Pissarides, C. A. (2000). *Equilibrium Unemployment Theory*. MIT Press;
- Pissarides, C. A. (2002). Company Start-Up Costs and Employment. *CEP Discussion Papers*, dp0520;
- Shimer, R. (2007). Mismatch. *American Economic Review*, 27, 1074-1101;
- Stevens, M. (2004). *New Microfoundations for the Aggregate Matching Function*. University of Oxford, Department of Economics Series;
- Uren, L. (2007). Entrepreneurship and Labour Market Fluctuations. *Economics Bulletin*, vol. 10, n. 13: 1-11;
- Valentini, E. (2007). Sussidio di disoccupazione, tassazione ed economia sommersa. *Rivista di Politica Economica* III -IV: 227-259, marzo-aprile;
- Wasmer, E., e Weil, P. (2004). The Macroeconomic of Labour and Credit Market Imperfections. *American Economic Review*, vol. 94 (4), 944-963.