Fees versus royalties in a two dimensional square city with quadratic transport costs

Bouguezzi, Fehmi

LEGI and FSEGT

June 2010

Transfert de technologie dans une ville carrée à deux dimensions avec cout de transport quadratique

Fehmi Bouguezzi [1]

LEGI et Faculté des Sciences Economiques et de Gestion de Tunis

---

Abstract

Cet article étudie et compare les modalités de licence de brevet dans un modèle d'une ville à deux dimension et ayant la forme d'un carré où deux firmes concurrentes sont situées à la bordure et symétriquement par rapport au centre de la ville. Chaque consommateur situé à l'intérieur ou sur la bordure de la ville paie un cout de transport quadratique. L'apport de cet article par rapport à ce qui a été fait est qu'ici, une licence par des royalties s'avère toujours meilleure par rapport à une licence par un prix fixe indépendamment de l'intensité de l'innovation. Ceci contredit notamment les résultats trouvés pour le cas d'une ville linéaire à la *Hotelling* ou ceux d'une ville circulaire à la *Salop*. Cependant, on montre que les stratégies optimales restent les mêmes: en cas d'innovation non intense, la firme innovatrice a intérêt à accorder une licence sous forme de royalties et en cas d'innovation intense, elle n'accorde pas de licence et devient un monopole.

Key words: Transfert de technologie, Licence de brevet, Ville carrée
Classification JEL : C21, L24, O31, O32

---

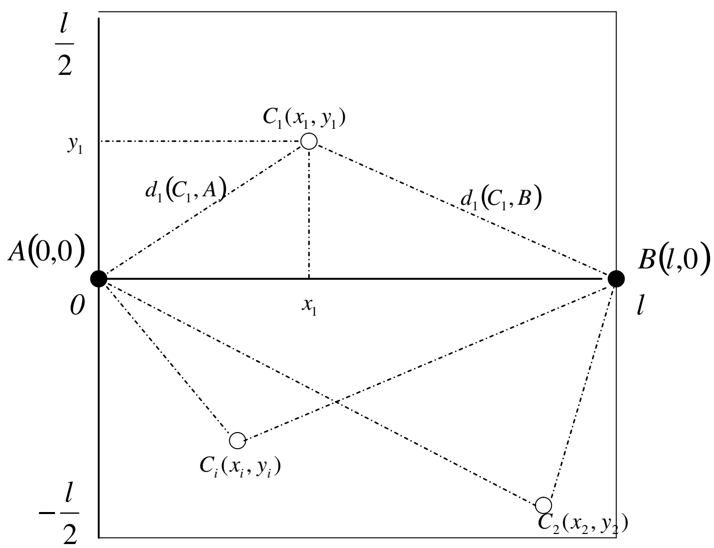
[1] *Email : fehmi_ bouguezzi@yahoo.fr*
Laboratoire d'Economie et de Gestion Industrielle (LEGI) et Faculté des Sciences Economiques et de Gestion de Tunis

1 Introduction

La revue de littérature a longuement traité des articles dan lesquels comparent les modalités de licence de brevet et notamment les prix fixes et les royalties. Une comparaison qui dépendait la plupart du temps de l'intensité de l'innovation. Cette notion, introduite par *Arrow (1962)* s'avère très utile pour le choix de licence ou de non licence pour une firme qui détient un brevet. Il a trouvé qu'une innovation intense, permet à la firme qui la détient de devenir un monopole quand elle n'accorde pas de licence. *Wang (1998)* a utilisé cette notion pour comparer les royalties et les prix fixes et a trouvé que des royalties sont meilleures qu'un prix fixe quand l'innovation est non intense. *Wang (2002)* fait ensuite une extension au cas où les produits sont différenciés et trouve le même résultat et qu'un prix fixe est toujours meilleur pour les consommateurs. D'autres études se sont intéressées à la forme du marché et notamment *Poddar et Sinha (2004)* qui ont trouvé, pour une ville linéaire à la *Hotelling* où les firmes sont localisées aux extrémités, que le régime de licence par des royalties est préféré pour la firme innovatrice quand l'innovation est non intense. Un résultat qui a été confirmé par *Bouguezzi (2010)* pour le même modèle mais avec des firmes situées symétriquement par rapport au centre de la ville. L'étude d'une ville circulaire à la *Salop* par *Bouguezzi (2010)* a montré un résultat différent de celui trouvé à la *Hotelling* et dans lequel un prix fixe s'avère meilleur pour la firme qui détient le brevet en cas d'innovation non intense. Cet article essaie de trouver des résultats pour un modèle sous forme d'une ville rectangulaire à cotés égaux, ce qui représente le plus souvent la forme géographique que peut prendre une ville et qui a été modélisée dans *Maldonado et al (2005)* par une ville circulaire à deux dimensions. Cet article trouve des résultats qui contredisent ceux des modèles de la ville linéaire à la *Hotelling* et de la ville circulaire à la *Salop* avec des royalties qui s'avèrent toujours meilleures qu'un prix fixe pour la firme qui détient le brevet indépendamment de la taille de l'innovation.

2 Modèle

Soit une ville sous la forme de carré de côté égal à l et soient deux firmes A et B produisant un bien homogène et situées symétriquement sur la bordure de la ville. On suppose que la firme A est située à l'abscisse 0 et que la firme B est située à l'abscisse l et que les deux se situent sur la droite qui passe par le centre de la ville en la divisant en deux partie égales. On suppose que la firme A détient un brevet permettant de réduire le cout unitaire de production et qu'elle peut vendre sous forme d'un contrat de licence à prix fixe ou avec des royalties. On suppose aussi que les consommateurs sont répartis uniformément sur la bordure et l'intérieur de la ville et que pour se déplacer vers l'une des firmes, ils doivent débourser un cout de transport quadratique égal à td^2 avec t le cout de transport unitaire et d la distance le séparant de la firme. Le consommateur i se trouve en (x_i, y_i) tel que $0 \leq x_i \leq l$ et $-\frac{l}{2} \leq y_i \leq \frac{l}{2}$.



Le jeu se fait en deux étapes. A la première étape, la firme A décide d'accorder une licence ou non ainsi que du montant de prix fixe et du taux de royalties et à la deuxième étape, les deux firmes fixent leurs prix de vente.

L'utilité du consommateur situé en (x, y) et achetant le produit de la firme A est:

$U_A = -p_1 - t\left(x^2 + y^2\right)$

L'utilité du consommateur situé en (x, y) et achetant le produit de la firme B est:

$U_B = -p_2 - t\left((l-x)^2 + y^2\right)$

L'emplacement des consommateurs indifférents entre les deux firmes A et B se situent en $\tilde{x}$ tel que

$U_A = U_B \Leftrightarrow \tilde{x} = \frac{l}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2tl}$

La fonction de demande adressée à la firme A est :

$D_A = l\tilde{x} = \frac{l^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t}$

La fonction de demande adressée à la firme B est :

$D_B = (l - \tilde{x})\, l = \frac{l^2}{2} - \frac{p_2 - p_1}{2t}$

Les fonctions de profit sont :

$\pi_A = (p_1 - c_1)\, D_A = (p_1 - c_1) \left(\frac{l^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t}\right)$

$\pi_B = (p_2 - c_2)\, D_B = (p_2 - c_2) \left(\frac{l^2}{2} - \frac{p_2 - p_1}{2t}\right)$

La maximisation des profits des deux firmes par rapport aux prix donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_A}{\partial p_1} = \frac{1}{2t}\left(p_2 - 2p_1 + tl^2 + c_1\right) \\ \frac{\partial^2 \pi_A}{\partial p_1^2} = -\frac{1}{t} < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial \pi_B}{\partial p_2} = \frac{1}{2t}\left(p_1 - 2p_2 + tl^2 + c_2\right) \\ \frac{\partial^2 \pi_B}{\partial p_2^2} = -\frac{1}{t} < 0 \end{cases}$$

ce qui donne les prix d'équilibre suivants:

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_A}{\partial p_1} = 0 \\ \frac{\partial \pi_B}{\partial p_2} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{1}{2}\left(p_2 + tl^2 + c_1\right) \\ p_2 = \frac{1}{2}\left(p_1 + tl^2 + c_2\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} p_1^* = tl^2 + \frac{1}{3}\left(2c_1 + c_2\right) \\ p_2^* = tl^2 + \frac{1}{3}\left(c_1 + 2c_2\right) \end{cases}$$

En remplaçant dans les fonctions de profits des firmes A et B on trouve:

$\pi_A^* = \frac{1}{18t}\left(3tl^2 + c_2 - c_1\right)^2$ et $\pi_B^* = \frac{1}{18t}\left(3tl^2 + c_1 - c_2\right)^2$

L'emplacement des consommateurs indifférents est:

$\tilde{x} = \frac{l}{2} + \frac{1}{6tl}\left(c_2 - c_1\right)$

Les demandes d'équilibres adressées aux deux firmes sont :

$D_A = \frac{l^2}{2} + \frac{1}{6t}\left(c_2 - c_1\right)$

$D_B = \frac{l^2}{2} - \frac{1}{6t}\left(c_2 - c_1\right)$

3 Modalité d'absence de licence

Dans ce cas, la firme innovatrice profite seule de sa propre innovation tandis que sa concurrente utilise l'ancienne technologie. En notant par c_1 et c_2 les couts de productions unitaires respectifs de la firme A et de la firme B on peut écrire $c_1 = c - \varepsilon$ et $c_2 = c$.

Le prix d'équilibre de la firme B est $p_2^* = tl^2 + c - \frac{1}{3}\varepsilon$. La firme B qui utilise l'ancienne technologie réalise un profit positif si le prix d'équilibre du produit qu'elle vend est supérieur strictement à son cout de production unitaire. $p_2^* > c \Leftrightarrow \epsilon < 3tl^2$ ceci veut dire que la firme non innovatrice réalise un profit positif, en cas de non licence, si l'innovation est non intense. Par contre si $\epsilon \geqslant 3tl^2$, elle quitte le marché et la firme A devient un monopole.

En cas d'innovation non intense, les profits d'équilibre des deux firmes sont:

$\pi_A^{PL} = \frac{1}{18t}\left(3tl^2 + \epsilon\right)^2$ et $\pi_B^* = \frac{1}{18t}\left(3tl^2 - \epsilon\right)^2$

En cas d'innovation intense, les profits d'équilibre sont:

$\pi_A^{PL} = \left(p_1 - c + \epsilon\right) l^2$ et $\pi_B^* = 0$ avec $p_1 > c - \epsilon$

4 Modalité de licence par prix fixe

Dans ce cas, la firme B bénéficie de la nouvelle technologie en contre partie du paiement d'une prix fixe F. On supposera que F est égal au montant maximum que la firme B peut payer en contre parte de la licence et qui est égal à l'augmentation de son profit avec l'utilisation de la nouvelle technologie: $F = \pi_B^F - \pi_B^{PL}$. Les couts unitaires de production des firmes A et B sont $c_1 = c_2 = c - \varepsilon$.En remplaçant dans les expressions de profit on trouve : $\pi_A^F = \frac{1}{2}tl^4$ et $\pi_B^F = \frac{1}{2}tl^4$

En cas d'innovation non intense ($\epsilon < 3tl^2$), le montant de prix fixe à payer par la firme B est : $F = \frac{\varepsilon}{18t}\left(6tl^2 - \varepsilon\right)$

Le revenu total de la firme A dans ce cas est: $\Pi_A^F = \pi_A^F + F = \frac{1}{18t}\left(9t^2l^4 + \epsilon\left(6tl^2 - \varepsilon\right)\right)$

En cas d'innovation intense ($\epsilon \geqslant 3tl^2$), le montant de prix fixe est: $F = \frac{1}{2}tl^4$

Le revenu total de la firme A dans ce cas est: $\Pi_A^F = \pi_A^F + F = tl^4$

Proposition 1 *L'absence de licence est meilleure pour la firme qui détient le brevet que la licence par un prix fixe indépendamment de la taille de l'innovation*

PROOF. [Preuve] En cas d'innovation non intense: $\epsilon < 3tl^2$

$\Pi_A^F - \pi_A^{PL} = -\frac{\varepsilon^2}{9t} < 0$

En cas d'innovation intense: $\epsilon \geqslant 3tl^2$

$\Pi_A^F - \pi_A^{PL} = l^2\left(tl^2 - p_1^{PL} + c - \epsilon\right) > 0$ si $p_1^{PL} > tl^2 + c - \epsilon$. Or en cas d'absence de licence pour une innovation intense, la firme A devient un monopole et a intérêt, pour augmenter son profit, de vendre à son prix le plus haut que possible.

5 Modalité de licence par des royalties

Dans le cadre de ce régime de licence, la firme B profite de l'utilisation de la nouvelle technologie en contre partie du payement de royalties proportionnelles à la quantité de biens vendues et égales à $r\,(l-\tilde{x})\,l$ à la firme A. Le taux de royalties r doit être compris dans l'intervalle $]0,\varepsilon]$ car sinon la firme non innovatrice ne sera plus intéressée à acheter la licence. Les couts de productions unitaires des firmes A et B sont respectivement $c_1 = c-\varepsilon$ et $c_2 = c-\varepsilon+r$

En remplaçant dans les expressions de profit d'équilibre on trouve :

$\pi_A^r = \frac{1}{18t}\left(3tl^2+r\right)^2$ et $\pi_B^r = \frac{1}{18t}\left(3tl^2-r\right)^2$

Le revenu total de la firme innovatrice s'écrit:

$\Pi_A^r = \pi_A^r + r\,(l-\tilde{x})\,l = \frac{1}{18t}\left(3tl^2+r\right)^2 + r\left(\frac{l^2}{2}-\frac{r}{6t}\right)$

Maximisant le revenu total de la firme innovatrice par rapport à r on trouve:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_A^r}{\partial r} = -\frac{1}{18t}\left(4r-15tl^2\right) \\ \frac{\partial^2 \Pi_A^r}{\partial r^2} = -\frac{2}{9t} < 0 \end{cases} \frac{\partial \Pi_A^r}{\partial r} = 0 \Longrightarrow \; r^* = \frac{15}{4}tl^2$$

le taux de royalties doit vérifier $0 < r^* < \epsilon \Longrightarrow \epsilon > \frac{15}{4}tl^2$. Donc on aura deux valeurs optimales du taux de royalties:

$$\begin{cases} r^* = \epsilon & si \quad \epsilon < \frac{15}{4}tl^2 \\ r^* = \frac{15}{4}tl^2 & si \quad \epsilon > \frac{15}{4}tl^2 \end{cases}$$

Le revenu total de la firme innovatrice en cas de licence par des royalties devient égal à :

$$\Pi_A^r = \begin{cases} \frac{1}{9t}\left(-\epsilon^2 + \frac{15}{2}tl^2\epsilon + \frac{9}{2}t^2l^4\right) & si \quad \epsilon < \frac{15}{4}tl^2 \\ \frac{33}{16}tl^4 & si \quad \epsilon > \frac{15}{4}tl^2 \end{cases}$$

Proposition 2 *Le régime de licence par des royalties est meilleur que le régime d'absence de licence si l'innovation est non intense ($\varepsilon < 3tl^2$) et l'inverse pour une innovation intense ($\varepsilon \geq 3tl^2$).*

PROOF. Si $\varepsilon < 3tl^2$ (innovation non intense)

$\Pi_A^r - \pi_A^{PL} = \frac{1}{18t}\left(-\epsilon^2 + 21tl^2\epsilon + 18t^2l^4\right) > 0$ car les racines sont $\epsilon' = -\frac{3}{2}tl^2\left(\sqrt{57} - 7\right)$ et $\epsilon'' = \frac{3}{2}tl^2\left(\sqrt{57} + 7\right)$ et on a $\epsilon' < 0 < \epsilon < 3tl^2 < \epsilon''$

Si $3tl^2 < \varepsilon < \frac{15}{4}tl^2$ (innovation intense)

$\Pi_A^r - \pi_A^{PL} = -\frac{1}{9t}\epsilon^2 - \frac{1}{6}l^2\epsilon - l^2\left(p_1^{PL} - c - \frac{1}{2}tl^2\right) < 0$ si $p_1^{PL} > c + \frac{1}{2}tl^2$. Or la firme A pratique un prix de monopole en cas d'innovation intense quand elle n'accorde pas de licence et donc son prix est le plus élevé ce qui correspond à ce cas et donc $\Pi_A^r < \pi_A^{PL}$

Si $\varepsilon > \frac{15}{4}tl^2$ (innovation intense)

$\Pi_A^r - \pi_A^{PL} = l^2\left(c - \epsilon - p_1^{PL} + \frac{33}{16}tl^2\right) < 0$ si $p_1^{PL} > c - \epsilon + \frac{33}{16}tl^2$. de même que ci dessus, le prix de monopole est le plus élevé possible pour la firme A ce qui fait que $\Pi_A^r < \pi_A^{PL}$.

6 Comparaison royalties et prix fixe

D'après les deux sections précédentes, les revenus totaux de la firme A après licence sous forme de prix fixe ou de royalties sont:

$$\Pi_A^F = \begin{cases} \frac{1}{18t}\left(9t^2l^4 + \epsilon\left(6tl^2 - \varepsilon\right)\right) & si \quad \epsilon < 3tl^2 \\ tl^4 & si \quad \epsilon \geq 3tl^2 \end{cases}$$

$$\Pi_A^r = \begin{cases} \frac{1}{9t}\left(-\epsilon^2 + \frac{15}{2}tl^2\epsilon + \frac{9}{2}t^2l^4\right) & si \quad \epsilon < \frac{15}{4}tl^2 \\ \frac{33}{16}tl^4 & si \quad \epsilon > \frac{15}{4}tl^2 \end{cases}$$

Ces revenus peuvent être rassemblés dans le tableau suivant:

ϵ	$\epsilon < 3tl^2$	$3tl^2 < \epsilon < \frac{15}{4}tl^2$	$\epsilon > \frac{15}{4}tl^2$
Π_A^F	$\frac{1}{18t}\left(9t^2l^4 + \epsilon\left(6tl^2 - \varepsilon\right)\right)$	tl^4	tl^4
Π_A^r	$\frac{1}{9t}\left(-\epsilon^2 + \frac{15}{2}tl^2\epsilon + \frac{9}{2}t^2l^4\right)$	$\frac{1}{9t}\left(-\epsilon^2 + \frac{15}{2}tl^2\epsilon + \frac{9}{2}t^2l^4\right)$	$\frac{33}{16}tl^4$
$\Pi_A^r - \Pi_A^F$	$\frac{\epsilon}{18t}\left(9tl^2 - \epsilon\right)$	$-\frac{1}{9t}\epsilon^2 + \frac{5}{6}l^2\epsilon + \frac{1}{2}t^2l^4$	$\frac{17}{16}tl^4$

Proposition 3 *Le régime de licence par la modalité de royalties est toujours meilleur que le régime de licence par un prix fixe indépendamment de la taille de l'innovation (intense ou non intense). Ceci contredit les résultats trouvés*

dans une ville linéaire à la Hotelling et dans une ville circulaire à la Salop.

PROOF. *Si* $\epsilon < 3tl^2$, $\Pi_A^r - \Pi_A^F = \frac{\epsilon}{18t}\left(9tl^2 - \epsilon\right) > 0$

Si $3tl^2 < \epsilon < \frac{15}{4}tl^2$, $\Pi_A^r - \Pi_A^F = -\frac{1}{9t}\epsilon^2 + \frac{5}{6}l^2\epsilon + \frac{1}{2}t^2l^4 > 0$ *car les racines sont*

tels que $\epsilon' = \frac{9}{2}tl^2\left(\frac{5}{6} - \sqrt{\frac{17}{36}}\right) < 3tl^2 < \epsilon < 3\frac{15}{4}tl^2 < \epsilon'' = \frac{9}{2}tl^2\left(\frac{5}{6} + \sqrt{\frac{17}{36}}\right)$

Si $\epsilon > \frac{15}{4}tl^2$, $\Pi_A^r - \Pi_A^F = \frac{17}{16}tl^4 > 0$

Les régimes optimaux de la firme A se résument ainsi :

$$\begin{cases} r \succ PL \succ F & \text{si } \epsilon < 3tl^2 \\ PL \succ r \succ F & \text{si } 3tl^2 < \epsilon < \frac{15}{4}tl^2 \\ Pl \succ r \succ F & \text{si } \epsilon > \frac{15}{4}tl^2 \end{cases}$$

7 Conclusion

Cet article a étudié et comparer les modalités de licence de brevet dans une ville carrée à deux dimensions où les consommateurs se situent à l'intérieur et à la frontière de la ville. Il a principalement montré que les régimes de licence par des royalties est toujours meilleur que le régime de licence par un prix fixe ce qui contredit le résultat trouvé dans les modèles de ville linéaire à la Hotelling dans Poddar et Sinha (2004) où les firmes sont situées aux extrémités de la ville ou dans Bouguezzi (2010) où les firmes sont symétriques.

References

[1] Arrow, K., (1962). Economic welfare and the allocation of resources for inventions. In: Nelson, R. (Ed.), The Rate and Direction of Inventive Activity. *Princeton University Press*, Princeton.

[2] Bouguezzi, F., 2010. Technology transfer in a linear city with symmetric locations, MPRA Paper 21055, *University Library of Munich*, Germany

[3] Bouguezzi, F., 2010. Technology transfer in a circular model. MPRA Paper No. 22417, *University Library of Munich*, Germany.

[4] Maldonado, M., Valverde, S., Escalona, M., 2005. Cournot Competition in a Two-Dimensional Circular City, *Manchester School*, Vol. 73, No. 1, pp. 40-49

[5] Poddar, S. and Sinha, U.B., 2004. On patent licensing in spatial competition. *Economic Record* 80, 208–218.

[6] Wang, X.H., 1998. Fee versus royalty licensing in a Cournot duopoly model. *Economics Letters* 60, 55–62.

[7] Wang, X.H., 2002. Fee versus royalty licensing in a differentiated Cournot duopoly. Journal of Economics and Business 54, 253–266