



Munich Personal RePEc Archive

Theorem of existence of ruptures in probability scale. Discrete case

Alexander Harin

Moscow Institute of Physics and Technology, Modern University for
the Humanities

14 July 2010

Online at <https://mpa.ub.uni-muenchen.de/23902/>
MPRA Paper No. 23902, posted 14 July 2010 19:47 UTC

Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей. Дискретный случай

Александр Харин
Московский физико-технический институт
Современная Гуманитарная Академия

В статье доказаны теоремы о существовании разрывов у границ конечных интервалов и у границ шкалы вероятностей для дискретного случая.

Содержание

Введение	1
Общая схема доказательства	2
1. Предварительные замечания	3
1.1. Общие условия, допущения и обозначения	
1.2. Максимально возможные значения центрального момента для ограниченного интервала	
2. Общая теорема о существовании разрывов	4
2.1. Общая лемма о стремлении к нулю центральных моментов	
2.2. Общая теорема о существовании разрывов для математического ожидания	
3. Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей	5
3.1. Общие замечания	
3.2. Лемма о стремлении к нулю центральных моментов плотности оценки вероятности	
3.3. Теорема о существовании разрывов для оценки вероятности	
3.4. Теорема о существовании разрывов для вероятности	
4. Пример разрывов в шкале вероятностей	6
4.1. Условия	
4.2. Результаты	
4.3. Вывод	
5. Применения теоремы. Экономика. Прогнозирование	7
Заключение	7
Литература	8
Приложения П1-П5	9

Введение

В настоящей статье, на базе (Харин 2010-1, -2, -3), доказываются простые, но принципиальные теоремы о существовании разрывов у границ конечных интервалов и у границ шкалы вероятностей для дискретного случая.

Общая упрощенная схема доказательства

Предварительное замечание

Максимально возможное значение конечного центрального момента $E(X-M)^n$ для конечного интервала $[A, B]$ не превышает соответствующей конечной степени n размера $(B-A)$ этого интервала, т.е. конечно

$$|E(X-M)^n| \equiv \left| \sum_{k=1}^K (x_k - M)^n f_K(x_k) \right| \leq (B-A)^n \sum_{k=1}^K f_K(x_k) = (B-A)^n < \infty.$$

Общая лемма

Если математическое ожидание M стремится к границе A конечного интервала $[A, B]$, то конечные центральные моменты стремятся к 0, в т.ч.

$$|E(X-M)^n| \leq (B-A)^n \times 2 \frac{(M-A)}{(B-A)} \xrightarrow{M \rightarrow A} 0.$$

Общая теорема

Если, на конечном интервале, какой-либо конечный центральный момент не может приближаться к нулю ближе, чем на $r_{dispers} > 0$, то математическое ожидание тоже не может приближаться к границе этого интервала ближе, чем на $r_{expect} > 0$, в т.ч.

$$0 < r_{dispers} \leq |E(X-M)^n| \leq (B-A)^n \times 2 \frac{(M-A)}{(B-A)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 0 < r_{expect} \equiv \frac{r_{dispers}}{2(B-A)^{n-1}} \leq (M-A).$$

Другими словами, если, для величины, заданной на конечном интервале, существует ненулевой разрыв (*rupture*) $r_{dispers} > 0$ между ее конечным центральным моментом и нулем, то между ее математическим ожиданием и границами интервала тоже существуют ненулевые разрывы $r_{expect} > 0$.

Теорема для оценки вероятности

Если на интервале $[0, 1]$ для оценки вероятности, частоты $F \equiv M$ существует ненулевой разрыв $r_{dispers} > 0$ между дисперсией ее плотности и нулем, то между F и границами интервала тоже существуют ненулевые разрывы $r_{expect} > 0$, в т.ч.

$$0 < r_{expect} \equiv \frac{r_{dispers}}{2} \leq M = F.$$

Теорема для вероятности

Если вероятность P является пределом, к которому стремится оценка вероятности, частота F при стремлении количества испытаний K к бесконечности, и существуют ненулевые разрывы $r_{expect} > 0$ между F и границами шкалы вероятностей, то между P и границами шкалы вероятностей существуют такие же ненулевые разрывы $r_{expect} > 0$, в т.ч.

$$F \xrightarrow{K \rightarrow \infty} P \quad \text{и} \quad 0 < r_{expect} \leq F \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 0 < r_{expect} \leq P.$$

1. Предварительные замечания

1.1. Общие условия, допущения и обозначения

Пусть далее, на интервале $X=[A, B] : 0 < (B-A) < \infty$, определена величина $f_K(x_k)$, $k=1, 2, 3, \dots, K$ (включая, как возможный случай, $K=\infty$): для $x_k < A$ и $x_k > B$ справедливо $f_K(x_k) \equiv 0$, для $A \leq x_k \leq B$ справедливо $f_K(x_k) \geq 0$, и

$$\sum_{k=1}^K f_K(x_k) = C_{f,K}, \quad \text{где} \quad 0 < C_{f,K} < \infty.$$

Запишем начальный момент первого порядка, математическое ожидание

$$EX = \frac{1}{C_{f,K}} \sum_{k=1}^K x_k f_K(x_k) \equiv M$$

и, для $n : 1 < n < \infty$, центральный момент n -го порядка

$$E(X - M)^n = \frac{1}{C_{f,K}} \sum_{k=1}^K (x_k - M)^n f_K(x_k).$$

Без ограничения общности, $f_K(x_k)$ можно нормировать так, что $C_{f,K} = 1$. В основном тексте статьи и, частично, в приложениях записи выполняются в общей нормировке. В общей схеме доказательства, для простоты и наглядности, записи выполнены в нормировке на 1.

1.2. Максимально возможные значения центрального момента для ограниченного интервала

Максимально возможное значение модуля центрального момента можно оценить, исходя из определения

$$\begin{aligned} |E(X - M)^n| &= \left| \frac{1}{C_{f,K}} \sum_{k=1}^K (x_k - M)^n f_K(x_k) \right| \leq \frac{1}{C_{f,K}} \sum_{k=1}^K |(x_k - M)^n| f_K(x_k) \leq \\ &\leq \frac{1}{C_{f,K}} (B - A)^n \sum_{k=1}^K f_K(x_k) = (B - A)^n \end{aligned}$$

Более точную оценку по модулю дает (см. П1) сумма модулей центральных моментов функций, сконцентрированных на краях интервала: $\delta(x_k - A) \times (B - M) / (B - A)$ и $\delta(x_k - B) \times (M - A) / (B - A)$

$$\text{Max}(E(X - M)^n) \leq \left| (A - M)^n \frac{B - M}{B - A} \right| + \left| (B - M)^n \frac{M - A}{B - A} \right|.$$

Через нее получаем для $n=2$ очевидный максимум при $M_{\text{max}} = (B - A) / 2$

$$\text{Max}(E(X - M)^2) = \left(\frac{B - A}{2} \right)^2,$$

а для $n=2k \gg 1$ - максимумы при $M_{\text{max}} \approx A + (B - A) / 2n$ и $M_{\text{max}} \approx B - (B - A) / 2n$

$$\text{Max}(E(X - M)^n) \approx \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{(B - A)^n}{2n}.$$

2. Общая теорема о существовании разрывов

2.1. Общая лемма о стремлении к нулю центральных моментов

Если, для $f_k(x_k)$, определенной в разделе 1.1., $M \equiv E(X)$ стремится к A или к B , то, для $1 < n < \infty$, $E(X-M)^n$ стремится к нулю.

Доказательство (подробно см. П2): Для $M \rightarrow A$

$$\begin{aligned} |E(X-M)^n| &\leq |(A-M)^n \frac{B-M}{B-A}| + |(B-M)^n \frac{M-A}{B-A}| \leq \\ &\leq ((B-A)^{n-1} + (B-A)^{n-1}) \frac{(M-A)(B-M)}{B-A} \leq \\ &\leq 2(B-A)^{n-1}(M-A) \xrightarrow{M \rightarrow A} 0 \end{aligned}$$

Таким образом, если $(B-A)$ и n конечны и $M \rightarrow A$, т.е. $(M-A) \rightarrow 0$, то $E(X-M)^n \rightarrow 0$. Для $M \rightarrow B$ рассмотрение полностью аналогичное.

Лемма доказана.

Замечание. Можно (см. П2) получить более точную оценку сходимости к нулю центральных моментов, в т.ч. для $M \rightarrow A$

$$|E(X-M)^n| \leq (B-A)^{n-1}(M-A) \xrightarrow{M \rightarrow A} 0$$

2.2. Общая теорема о существовании разрывов

для математического ожидания

Если, для $f_k(x_k)$, определенной в 1.1., существуют $n : 1 < n < \infty$, и $r_{dispers} > 0 : |E(X-M)^n| \geq r_{dispers} > 0$, то существует $r_{expect} > 0 : A < (A+r_{expect}) \leq E(X) \leq (B-r_{expect}) < B$.

Доказательство (подробно см. П3): Из леммы, для $M \rightarrow A$,

$$0 < r_{dispers} \leq |E(X-M)^n| \leq 2(B-A)^{n-1}(M-A)$$

$$0 < \frac{r_{dispers}}{2(B-A)^{n-1}} \leq (M-A)$$

$$r_{expect} \equiv \frac{r_{dispers}}{2(B-A)^{n-1}}$$

Для $M \rightarrow B$ рассмотрение полностью аналогичное.

Поскольку $(B-A)$, n и $r_{dispers}$ – конечны, а $r_{dispers} > 0$, то $r_{expect} > 0$ и, как $(M-A) \geq r_{expect} > 0$, так и $(B-M) \geq r_{expect} > 0$.

Теорема доказана.

Таким образом, если конечный ($n < \infty$) центральный момент величины, определенной на конечном интервале, не может приближаться к нулю ближе, чем на $r_{dispers} > 0$, то математическое ожидание этой величины тоже не может приближаться к границе этого интервала ближе, чем на $r_{expect} > 0$.

В более общем виде: Если для величины, определенной на конечном интервале, существует ненулевой разрыв (*rupture*) $r_{dispers} > 0$ между областью возможных значений какого-либо из ее конечных центральных моментов и нулем, то между областью возможных значений математического ожидания этой величины и любой из границ интервала тоже существуют ненулевые разрывы $r_{expect} > 0$ (о терминологии см. П3).

3. Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей

3.1. Общие замечания

Пусть, для серии испытаний с количеством испытаний K , в т.ч. при K , стремящемся к бесконечности $K \rightarrow \infty$, плотность $f_K(x_k)$ оценки вероятности, частоты $F : F \equiv M \equiv E(X)$, некоторого события имеет свойства, заданные в разделе 1.1., в частности, определена на $[0, 1]$ и $C_{f,K} = 1$.

3.2. Лемма о стремлении к нулю центральных моментов плотности оценки вероятности

Если для плотности $f_K(x_k)$, определенной в разделе 3.1., $E(X) \rightarrow 0$ или $E(X) \rightarrow 1$, то, для $1 < n < \infty$, $E(X-M)^n \rightarrow 0$.

Доказательство: Поскольку условия данной леммы удовлетворяют условиям леммы раздела 2.1, то утверждение данной леммы так же справедливо, как и утверждение леммы раздела 2.1.

Лемма доказана.

3.3. Теорема о существовании разрывов для оценки вероятности

Если для плотности $f_K(x_k)$, определенной в разделе 3.1., существуют $n : 1 < n < \infty$, и $r_{dispers} > 0 : E(X-M)^n \geq r_{dispers} > 0$, то для оценки вероятности, частоты $F \equiv M \equiv E(X)$ существует $r_{expect} > 0 : 0 < r_{expect} \leq F \equiv M \equiv E(X) \leq (1 - r_{expect}) < 1$.

Доказательство: Поскольку условия данной теоремы удовлетворяют условиям теоремы раздела 2.2, то утверждение данной теоремы так же справедливо, как и утверждение теоремы раздела 2.2.

Теорема доказана.

3.4. Теорема о существовании разрывов для вероятности

Если на интервале $[0, 1]$ определена P : при стремлении количества испытаний K к бесконечности, оценка вероятности, частота F стремится к P , т.е. $P = \text{Lim} F$, между оценкой вероятности и любой из границ интервала существуют ненулевые разрывы $0 < r_{expect} \leq F \leq (1 - r_{expect}) < 1$, то такие же ненулевые разрывы $0 < r_{expect} \leq P \leq (1 - r_{expect}) < 1$ существуют между P и любой из границ интервала.

Доказательство (подробнее см. П4): Поскольку операция взятия предела сохраняет нестрогие неравенства, то, при $P = \text{Lim} F$, из $r_{expect} \leq F \leq (1 - r_{expect})$ следует $r_{expect} \leq P \leq (1 - r_{expect})$.

Теорема доказана.

Поскольку вероятность удовлетворяет условиям, наложенным на P , то теорема справедлива и для вероятности.

Теорему можно сформулировать и для нужд практических приложений:

Если, для серии испытаний с количеством испытаний $K : K \rightarrow \infty$, и оценкой вероятности, частотой F , стремящейся при этом к вероятности P , существует разрыв $r_{dispers} > 0$ между возможными значениями дисперсии D оценки вероятности F и нулем, то у границ шкалы вероятностей тоже существуют разрывы $r_{expect} > 0$, как для возможных значений оценки вероятности F , так и для возможных значений вероятности P .

4. Пример разрывов в шкале вероятностей

Условия

Простейший пример подобных разрывов – стрельба в мишень в одномерном приближении (подробнее см. П5):

Пусть размер мишени равен $2L > 0$, а разброс попаданий, при точном прицеливании, подчиняется нормальному закону с дисперсией σ^2 . Тогда максимальная вероятность попадания в мишень P_{in_Max} и минимальная вероятность промаха $P_{out_min} = 1 - P_{in_Max}$ равны (см., напр., Прохоров 1988):

Результаты

При $\sigma=0$

$P_{in_Max}=1$ и $P_{out_min}=0$, то есть разрывов в шкале вероятностей для попаданий и промахов нет, то есть $r_{expect} = 1 - P_{in_Max} = P_{out_min} = 0$.

При $L=3\sigma$

$0 \leq P_{in} \leq P_{in_Max} = 0,997 < 1$ и $0 < 0,003 = P_{out_min} \leq P_{out} \leq 1$. При этом, разрывы r_{expect} в шкале вероятностей для попаданий и промахов составляют $r_{expect} = 0,003 > 0$.

При $L=2\sigma$

$0 \leq P_{in} \leq P_{in_Max} = 0,95 < 1$ и $0 < 0,05 = P_{out_min} \leq P_{out} \leq 1$. При этом, разрывы r_{expect} в шкале вероятностей для попаданий и промахов составляют $r_{expect} = 0,05 > 0$.

При $L=\sigma$

$0 \leq P_{in} \leq P_{in_Max} = 0,68 < 1$ и $0 < 0,32 = P_{out_min} \leq P_{out} \leq 1$. При этом, разрывы r_{expect} в шкале вероятностей для попаданий и промахов составляют $r_{expect} = 0,32 > 0$.

Вывод

Таким образом:

При нулевой $\sigma=0$ - разрывов нет ($r_{expect}=0$).

При ненулевой $\sigma>0$:

- появляется ненулевой разрыв $r_{expect}>0$ между возможными значениями вероятности попадания $0 \leq P_{in} \leq P_{in_Max} = 1 - r_{expect} < 1$ и единицей;

- появляется такой же ненулевой разрыв $r_{expect}>0$ между возможными значениями вероятности промаха $0 < r_{expect} = P_{out_min} \leq P_{out} \leq 1$ и нулем.

5. Применения теоремы. Экономика. Прогнозирование

Возможность существования разрывов в шкале вероятностей должна проявляться и проявляется в реальности, в т.ч. в экономике и прогнозировании. Широко известен целый ряд парадоксов теории полезности, в т.ч. парадокс Алле, "премия за риск", преувеличение малых и преуменьшение больших вероятностей, "парадокс четырех областей". Как отметили Kahneman и Thaler (2006) эти парадоксы до сих пор не решены современной экономической теорией. Существуют проблемы точности прогнозов, наглядно проявившиеся в ходе текущего кризиса.

Использование теоремы о существовании разрывов в шкале вероятностей позволяет получить и обосновать решения этих парадоксов (см., напр., Харин 2007 и 2009), а также корректирующую формулу прогнозирования (см., напр., Харин 2008).

Заключение

В статье, для дискретного случая, доказана теорема об общей возможности существования разрывов в шкале возможных значений математических ожиданий величин, определенных на конечных интервалах. Доказана также теорема о возможности существования разрывов в шкале вероятностей, как для оценок вероятности, так и для вероятности.

Следует заметить, что, несмотря на очевидность и элементарность теоремы, и на то, что некоторые из простых расчетов и оценок, приведенных в статье, могли публиковаться ранее, напр., в учебниках, теорема в целом является новой и полезной. Так, теорема позволяет получить и обосновать для дискретного случая решения ряда известных парадоксов экономической теории (см., напр., Харин 2007 и 2009) и новые результаты в прогнозировании (см., напр., Харин 2008).

Литература

- Narin, A. (2005) "A new approach to solve old problems" Game Theory and Information from Economics Working Paper Archive at WUSTL, 0505005, 2005.
- Kahneman, D. and Thaler, R. (2006) "Anomalies: Utility Maximization and Experienced Utility" Journal of Economic Perspectives, 20, #1, 221-234.
- Прохоров, Ю.В. ред. (1988) "Математический энциклопедический словарь" М., Советская энциклопедия, 1988.
- Харин, А.А. (2010-3) "Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей, как математический базис принципа неопределенного будущего" Моделирование и Анализ Безопасности и Риска в Сложных Системах: 10-я Международная Научная Школа МА БР – 2010).
- Харин, А.А. (2010-2) "О разрывах в шкале вероятностей и о некоторых проблемах моделирования" Третья Международная конференция Математическое моделирование социальной и экономической динамики (MMSED-2010).
- Харин, А.А. (2010-1) "Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей" IX Международная конференция по финансово-актуарной математике и эвентоконвергенции технологий, Красноярск, 2010 (ФАМЭТ-2010).
- Харин, А.А. (2009) "Учет краевых эффектов шумов – новый путь к решению проблем теории полезности?" Первый Российский экономический конгресс (РЭК-2009).
- Харин, А.А. (2008) "К разработке общей формулы прогнозирования" 51-я научная конференция МФТИ – 2008 "Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук".
- Харин, А.А. (2007) "Принцип неопределенного будущего, примеры его применения в экономической теории, возможности его применения в теориях сложных систем, в теории множеств, теории вероятностей и логике" Моделирование и Анализ Безопасности и Риска в Сложных Системах: 7-я Международная Научная Школа МА БР – 2007.

Приложения П1-П5

П1. Подробный расчет максимально возможного значения центрального момента для ограниченного интервала	10
Две дельта-функции	
Сумма модулей	
П1.0. Доказательство максимальности	
Предварительное замечание	
Доказательство	
Сравнение приращений	
Первая часть, соответствующая A	
Вторая часть, соответствующая B	
Вывод	
П1.1. Расчет для $n=2k$ и для оценки сверху	
Расчет для середины интервала	
Максимум при $n=2$	
Локальные максимумы, ближайшие к краям интервала	
П2. Подробное доказательство леммы о стремлении к нулю центральных моментов	19
Подробное доказательство	
Более точная оценка сходимости центральных моментов	
П3. Подробное доказательство теоремы о существовании разрывов для математического ожидания	20
Подробное доказательство	
Возможные формулировки	
Замечание 1. Более точная оценка разрыва r_{expect}	
Замечание 2. Условия существования разрывов	
О терминологии	
П4. Подробное доказательство теоремы для вероятности ...	22
Подробное доказательство	
Возможные формулировки	
Замечание 1. Более точная оценка разрыва r_{expect}	
Замечание 2. Условия существования разрывов	
П5. Подробный пример разрывов в шкале вероятностей	24
Условия	
Результаты	
Вывод	
Замечание. Дисперсия σ^2 разброса попаданий и дисперсия D оценки вероятности попаданий и промахов	

Приложение П1. Подробный расчет максимально возможного значения центрального момента для ограниченного интервала

Две дельта-функции

П1.0. Доказательство максимальности

П1.1. Расчет для $n=2k$ и для оценки сверху

Две дельта-функции

Рассмотрим две дельта-функции: $\delta(x_k-A)$ и $\delta(x_k-B)$. Возьмем сумму этих функций с коэффициентами $C_{A,K}$ и $C_{B,K}$:

$$\sum_{k=1}^K C_{A,K} \delta(x_k - A) = C_A,$$

$$\sum_{k=1}^K C_{B,K} \delta(x_k - B) = C_B,$$

$$C_A + C_B = C_{f,K},$$

т.е. функцию $f_{Max}(x_k) = C_{A,K} \delta(x_k-A) + C_{B,K} \delta(x_k-B)$.

Для упрощения выражений, без ограничения общности, можно принять

$$C_{f,K} = 1, \quad \text{т.е.} \quad C_A + C_B = 1.$$

Центральный момент функции $f_{Max}(x_k)$ равен

$$\begin{aligned} E(X - M)^n &= \frac{1}{C_{f,K}} \sum_{k=1}^K (x_k - M)^n f_{Max}(x_k) = \\ &= \sum_{k=1}^K (x_k - M)^n C_{A,K} \delta(x_k - A) + \sum_{k=1}^K (x_k - M)^n C_{B,K} \delta(x_k - B) = \\ &= \sum_{k=1}^K (A - M)^n C_{A,K} \delta(x_k - A) + \sum_{k=1}^K (B - M)^n C_{B,K} \delta(x_k - B) = , \\ &= (A - M)^n \sum_{k=1}^K C_{A,K} \delta(x_k - A) + (B - M)^n \sum_{k=1}^K C_{B,K} \delta(x_k - B) = \\ &= (A - M)^n C_A + (B - M)^n C_B \end{aligned}$$

а математическое ожидание равно

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{C_{f,K}} \sum_{k=1}^K x_k f_{Max}(x_k) = \\ &= \sum_{k=1}^K x_k C_{A,K} \delta(x_k - A) + \sum_{k=1}^K x_k C_{B,K} \delta(x_k - B) = \\ &= \sum_{k=1}^K A C_{A,K} \delta(x_k - A) + \sum_{k=1}^K B C_{B,K} \delta(x_k - B) = . \\ &= A \sum_{k=1}^K C_{A,K} \delta(x_k - A) + B \sum_{k=1}^K C_{B,K} \delta(x_k - B) = \\ &= A C_A + B C_B \equiv M \end{aligned}$$

Из

$$C_A + C_B = 1.$$

и

$$AC_A + BC_B \equiv M$$

можно выразить коэффициенты C_A и C_B через M :

$$C_B = 1 - C_A$$

$$AC_A + B(1 - C_A) = M$$

$$B - M = C_A(B - A)$$

$$C_A = \frac{B - M}{B - A}$$

$$C_B = \frac{M - A}{B - A}.$$

Сумма модулей

Рассмотрим сумму модулей центральных моментов функций $C_{A,K}\delta(x_k-A)$ и $C_{B,K}\delta(x_k-B)$

$$\begin{aligned} & |(A - M)^n C_A| + |(B - M)^n C_B| = \\ & = |(A - M)^n \frac{B - M}{B - A}| + |(B - M)^n \frac{M - A}{B - A}|. \end{aligned}$$

Для удобства дальнейшей работы, преобразуем эту сумму к виду без модулей

$$\begin{aligned} & |(A - M)^n \frac{B - M}{B - A}| + |(B - M)^n \frac{M - A}{B - A}| = \\ & = (M - A)^n \frac{B - M}{B - A} + (B - M)^n \frac{M - A}{B - A}. \end{aligned}$$

Введем параметр $m \equiv (M - A)/(B - A) = C_B$, при этом $1 - m \equiv (B - M)/(B - A) = C_A$ (очевидно, что $0 \leq m \leq 1$ и $0 \leq 1 - m \leq 1$). Получаем

$$\begin{aligned} & (M - A)^n \frac{B - M}{B - A} + (B - M)^n \frac{M - A}{B - A} = \\ & = (m^n (1 - m) + (1 - m)^n m) \times (B - A)^n \end{aligned}$$

Таким образом, сумма модулей центральных моментов рассматриваемых дельта-функций $(B - M)/(B - A)\delta(x_k - A)$ и $(M - A)/(B - A)\delta(x_k - B)$ равна

$$\begin{aligned} & [m^n (1 - m) + (1 - m)^n m] \times (B - A)^n = \\ & = (1 - m)m[m^{n-1} + (1 - m)^{n-1}] \times (B - A)^n \\ & = (1 - m)[m^n + (1 - m)^{n-1} m] \times (B - A)^n = \\ & = m[m^{n-1}(1 - m) + (1 - m)^n] \times (B - A)^n \end{aligned}$$

Полный анализ полученного выражения для рассматриваемой суммы модулей не является целью данной статьи. Поэтому далее будут выполняться только самые простые оценки и расчеты.

П1.0. Доказательство максимальности

Докажем, что сумма модулей центральных моментов дельта-функций $C_{A,K}\delta(x_k-A)$ и $C_{B,K}\delta(x_k-B)$, т.е. функций, полностью сосредоточенных на краях интервала $[A, B]$, больше либо равна максимально возможному значению модуля центрального момента для величины $f_K(x_k)$, определенной в разделе 1.1.

Предварительное замечание

Предположим, что, существует функция $f_{fictitious}(x_k)$ определенная в разделе 1.1, (без ограничения общности, $f_{fictitious}(x_k)$ нормирована так, что $C_{f,K}=1$), имеющая, для некоторого $M : A < M < B$, и некоторого $n : 1 < n < \infty$, такое значение центрального момента $E(X-M)^n$, которое превышает по модулю рассматриваемую сумму модулей центральных моментов дельта-функций $C_{A,K}\delta(x_k-A)$ и $C_{B,K}\delta(x_k-B)$ для тех же M и n .

Из определений математического ожидания и центрального момента

$$\begin{aligned} E(X-M)^1 &= \frac{1}{C_{f,K}} \sum_{k=1}^K (x_k - M) f_K(x_k) = 0 = \\ &= \frac{1}{C_{f,K}} \left[\sum_{x_k=M} (M-M) f_K(x_k) + \sum_{x_k < M} (x_k - M) f_K(x_k) + \sum_{x_k > M} (x_k - M) f_K(x_k) \right] = \\ &= \frac{1}{C_{f,K}} \left[\sum_{x_k < M} (x_k - M) f_K(x_k) + \sum_{x_k > M} (x_k - M) f_K(x_k) \right] = 0 \end{aligned}$$

следует, что для любого бесконечно малого элемента $\Delta f(a) : A \leq a < M$, существует бесконечно малый элемент $\Delta f(b) : M < b \leq B$, такой, что справедливо $(M-a)\Delta f(a) = (b-M)\Delta f(b)$.

Сравним центральные моменты пары бесконечно малых элементов $\Delta f_{fictitious}(a)$ и $\Delta f_{fictitious}(b) : A \leq a < M$ и $M < b \leq B$, и соответствующей ей пары бесконечно малых элементов ΔC_A и ΔC_B , таких, что $\Delta f_{fictitious}(a) + \Delta f_{fictitious}(b) = \Delta C_A + \Delta C_B = \Delta C$ и $\Delta C_A / \Delta C_B = C_A / C_B = (1-m)/m$, т.е. $\Delta C_B = m \Delta C$ и $\Delta C_A = (1-m) \Delta C$, где $\Delta C = \Delta f_{fictitious}(a) + \Delta f_{fictitious}(b)$.

Если невозможно существование хотя бы одной пары бесконечно малых элементов $\Delta f_{fictitious}(a)$ и $\Delta f_{fictitious}(b)$, такой, что центральный момент этой пары функции $f_{fictitious}$ будет больше суммы модулей центральных моментов соответствующей ей пары бесконечно малых элементов ΔC_A и ΔC_B функций $C_{A,K}\delta(x_k-A)$ и $C_{B,K}\delta(x_k-B)$, то этого будет достаточно для доказательства.

Доказательство

Выразим $\Delta f_{fictitious}(b)$ через $\Delta f_{fictitious}(a)$. Из

$$(M - a)\Delta f_{fictitious}(a) = (b - M)\Delta f_{fictitious}(b)$$

получаем

$$\Delta f_{fictitious}(b) = \Delta f_{fictitious}(a) \frac{(M - a)}{(b - M)}.$$

Для $f_{fictitious}$ бесконечно малый элемент центрального момента равен

$$\begin{aligned} (a - M)^n \Delta f_{fictitious}(a) + (b - M)^n \Delta f_{fictitious}(b) &= \\ = (a - M)^n \Delta f_{fictitious}(a) + (b - M)^n \Delta f_{fictitious}(a) \frac{(M - a)}{(b - M)} &= \\ = \Delta f_{fictitious}(a) [(a - M)^n + (b - M)^{n-1} (M - a)] & \end{aligned}$$

Введем два параметра: $m_a \equiv (a - A)/(B - A)$ (очевидно, что $0 \leq m_a < m < 1$) и $m_b \equiv (B - b)/(B - A)$ (очевидно, что $0 < m < m_b \leq 1$). Перепишем

$$\begin{aligned} \Delta f_{fictitious}(a) [(a - M)^n + (b - M)^{n-1} (M - a)] &= \\ = \Delta f_{fictitious}(a) [(m_a - m)^n + (m_b - m)^{n-1} (m - m_a)] (B - A)^n &= \\ = \Delta f_{fictitious}(a) [(-1)^n (m - m_a)^n + (m_b - m)^{n-1} (m - m_a)] (B - A)^n & \end{aligned}$$

Это выражение ограничено сверху суммой модулей

$$\begin{aligned} \Delta f_{fictitious}(a) [(-1)^n (m - m_a)^n + (1 - m)^{n-1} (m - m_a)] (B - A)^n &\leq \\ \leq \Delta f_{fictitious}(a) [| (m - m_a)^n | + | (1 - m)^{n-1} (m - m_a) |] (B - A)^n &= \\ = \Delta f_{fictitious}(a) [(m - m_a)^n + (m_b - m)^{n-1} (m - m_a)] (B - A)^n & \end{aligned}$$

Бесконечно малый элемент ΔC равен

$$\begin{aligned} \Delta C &= \Delta f_{fictitious}(a) + \Delta f_{fictitious}(b) = \\ &= \Delta f_{fictitious}(a) \left(1 + \frac{m - m_a}{m_b - m}\right) = \Delta f_{fictitious}(a) \frac{m_b - m + m - m_a}{m_b - m} = \\ &= \Delta f_{fictitious}(a) \frac{m_b - m_a}{m_b - m} \end{aligned}$$

Для суммы модулей центральных моментов дельта-функций $C_{A,K} \delta(x_k - A)$ и $C_{B,K} \delta(x_k - B)$

$$(1 - m)[m^n + (1 - m)^{n-1} m] \times (B - A)^n$$

их бесконечно малый элемент равен

$$\Delta f_{fictitious}(a) \frac{(m_b - m_a)(1 - m)}{m_b - m} (m^n + (1 - m)^{n-1} m) \times (B - A)^n.$$

Сравнение приращений

Сравним бесконечно малые элементы суммы модулей центральных моментов для $C_{A,K}\delta(x_k-A)$ и $C_{B,K}\delta(x_k-B)$ и модуля центрального момента для $f_{fictitious}(x_k)$. Это сравнение сводится к сравнению разности

$$\frac{(m_b - m_a)(1-m)}{m_b - m} (m^n + (1-m)^n m) - \\ - (m - m_a)^n - (m_b - m)^{n-1} (m - m_a)$$

Поскольку $-m_a > -m$ и $m_b \leq 1$, то

$$\frac{m_b - m_a}{m_b - m} \geq \frac{1 - m_a}{1 - m}$$

и

$$\frac{(m_b - m_a)(1-m)}{m_b - m} \geq \frac{(1 - m_a)(1-m)}{1 - m} = 1 - m_a.$$

Таким образом,

$$\frac{m_b - m_a}{m_b - m} (m^n (1-m) + (1-m)^n m) = \\ = \frac{(m_b - m_a)(1-m)}{m_b - m} [m^n + (1-m)^{n-1} m] \geq \\ \geq (1 - m_a)(m^n + (1-m)^{n-1} m)$$

То есть сравниваемая разность

$$\frac{(m_b - m_a)(1-m)}{m_b - m} (m^n + (1-m)^n m) - \\ - (m - m_a)^n - (m_b - m)^{n-1} (m - m_a)$$

сводится к разности

$$(1 - m_a)(m^n + (1-m)^{n-1} m) - \\ - (m - m_a)^n - (m_b - m)^{n-1} (m - m_a)$$

Разделим это выражение на две части, соответствующие A и B . Получаем первую часть, соответствующую A ,

$$(1 - m_a)m^n - (m - m_a)^n$$

и вторую часть, соответствующую B ,

$$(1 - m_a)(1-m)^{n-1} m - (m_b - m)^{n-1} (m - m_a).$$

Первая часть, соответствующая A
 Рассмотрим первую часть, соответствующую A ,

$$\begin{aligned}
 & (1 - m_a)m^n - (m - m_a)^n = \\
 & = m^n(1 - m_a - (1 - \frac{m_a}{m})^n) \geq \\
 & \geq m^n(1 - m_a - (1 - \frac{m_a}{m})) = . \\
 & = m^n(-m_a + \frac{m_a}{m}) = \\
 & = m^{n-1}m_a(1 - m) \geq 0
 \end{aligned}$$

Первая часть, соответствующая A , неотрицательна.

Вторая часть, соответствующая B
 Рассмотрим вторую часть, соответствующую B ,

$$\begin{aligned}
 & (1 - m_a)(1 - m)^{n-1}m - (m_b - m)^{n-1}(m - m_a) = \\
 & = (1 - m)^{n-1}m[1 - m_a - (\frac{m_b - m}{1 - m})^{n-1}(1 - \frac{m_a}{m})] \geq \\
 & \geq (1 - m)^{n-1}m[1 - m_a - (1 - \frac{m_a}{m})] = . \\
 & = (1 - m)^{n-1}m(-m_a + \frac{m_a}{m}) = \\
 & = (1 - m)^{n-1}m_a(1 - m) \geq 0
 \end{aligned}$$

Вторая часть, соответствующая B , также неотрицательна.

Вывод

Таким образом, и первая и вторая части и рассматриваемая разность в целом – неотрицательны.

Тем самым доказано утверждение о том, что сумма модулей центральных моментов дельта-функций $C_{A,K}\delta(x_k-A)$ и $C_{B,K}\delta(x_k-B)$, т.е. функций, полностью сосредоточенных на краях интервала $[A, B]$, больше либо равна максимально возможному значению модуля центрального момента для величины, определенной в разделе 1.1, т.е.

$$\begin{aligned}
 & \text{Max}(E(X - M)^n) \leq (M - A)^n \frac{B - M}{B - A} + (B - M)^n \frac{M - A}{B - A} = . \\
 & = [m^n(1 - m) + (1 - m)^n m] \times (B - A)^n
 \end{aligned}$$

П1.1. Расчет для $n=2k$ и для оценки сверху
 Расчет для середины интервала
 Максимум при $n=2$
 Локальные максимумы, ближайшие к краям интервала

Для $n=2k$ и для оценки сверху для $n=2k+1$

$$\text{Max}(E(X - M)^n) \leq (m^n(1 - m) + m(1 - m)^n) \times (B - A)^n$$

и первая производная по m переменной части этого выражения

$$\begin{aligned} & (m^n(1 - m) + m(1 - m)^n)'_m = \\ & = nm^{n-1}(1 - m) - m^n + (1 - m)^n - nm(1 - m)^{n-1} \end{aligned}$$

Расчет для середины интервала

Видно, что, для $n=2k$ и для оценки сверху, $\text{Max}(E(X-M)^n)$ и первая производная по m симметричны по m и $1-m$. Полагая $1-m=m$, получаем

$$\begin{aligned} & nm^{n-1}(1 - m) - m^n + (1 - m)^n - nm(1 - m)^{n-1} = \\ & = nm^{n-1}m - m^n + m^n - nmm^{n-1} = \\ & = nm^{n-1}m - nmm^{n-1} - m^n + m^n \equiv 0 \end{aligned}$$

т.е., для $n=2k$ и для оценки сверху, посередине интервала, при $m=1-m=1/2$, всегда имеет место экстремум либо точка перегиба. Вычислим вторую производную

$$\begin{aligned} & (nm^{n-1}(1 - m) - m^n + (1 - m)^n - nm(1 - m)^{n-1})'_m = \\ & = n(n-1)m^{n-2}(1 - m) - nm^{n-1} - nm^{n-1} - \\ & - n(1 - m)^{n-1} - n(1 - m)^{n-1} + n(n-1)m(1 - m)^{n-2} = \\ & = n(n-1)m^{n-2}(1 - m) - 2nm^{n-1} - 2n(1 - m)^{n-1} + n(n-1)m(1 - m)^{n-2} \end{aligned}$$

В точке $m=1-m$ вторая производная равна

$$\begin{aligned} & n(n-1)m^{n-2}(1 - m) - 2nm^{n-1} - 2n(1 - m)^{n-1} + n(n-1)m(1 - m)^{n-2} = \\ & = n(n-1)m^{n-1} - 2nm^{n-1} - 2nm^{n-1} + n(n-1)m^{n-1} = \\ & = 2n(n-1)m^{n-1} - 4nm^{n-1} = 2nm^{n-1}(n-1-2) = \\ & = 2nm^{n-1}(n-3) \end{aligned}$$

т.е., при $n=2$ получаем максимум, а при $n \geq 4$ – минимум.

Максимум при $n=2$

В точке $m=1-m=1/2$ при $n=2$ для центрального момента (дисперсии) получаем известное выражение

$$\begin{aligned} & \text{Max}(E(X - M)^2) = (m^2(1 - m) + m(1 - m)^2)(B - A)^2 = \\ & = (m^2m + mm^2)(B - A)^2 = 2m^3(B - A)^2 = 2 \frac{1}{2^3} (B - A)^2 = \\ & = \left(\frac{B - A}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Локальные максимумы,
ближайшие к краям интервала

Найдем ближайшие к краям интервала локальные максимумы при $n > 3$.
Рассмотрим области, где $m \ll 1$ и $n > 3$

$$\begin{aligned} & (m^n(1-m) + m(1-m)^n)'_m = \\ & = nm^{n-1}(1-m) - m^n + (1-m)^n - nm(1-m)^{n-1} \approx \\ & \approx (1-m)^n - nm(1-m)^{n-1} \approx 1 - nm - nm = \\ & = 1 - 2nm \end{aligned}$$

то есть, локальные экстремумы имеют место при

$$m \approx \frac{1}{2n}.$$

Заметим, что это подразумевает $n \gg 1$.

Аналогично, для $(1-m) \ll 1$, локальные экстремумы имеют место при

$$m \approx 1 - \frac{1}{2n}.$$

В локальных экстремумах вторая производная

$$(1 - 2nm)'_m = -2n < 0,$$

т.е. имеют место локальные максимумы. Аналогично, локальные максимумы имеют место и в точках $m = 1 - 1/2n$. В обоих этих случаях значения центрального момента при $n \gg 1$ приближенно равны

$$\begin{aligned} \text{Max}(E(X - M)^n) & \leq (m^n(1-m) + m(1-m)^n)(B - A)^n = \\ & = \left(\left(\frac{1}{2n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n\right)(B - A)^n \approx \\ & \approx \left(\left(\frac{1}{2n}\right)^n + \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n\right)(B - A)^n \approx \\ & \approx \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n (B - A)^n \end{aligned}$$

Найдем $(1 - 1/2n)^n$. Обозначая $x_k = -2n$, получаем $n = -x_k/2$ и, при $n \gg 1$, вычисление сводится к вычислению e

$$\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-\frac{x}{2}} \approx \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

В результате получаем для $m = 1/2n$ и для $m = 1 - 1/2n$, при $n \gg 1$

$$\begin{aligned} \text{Max}(E(X - M)^n) & \leq (m^n(1-m) + m(1-m)^n)(B - A)^n \approx \\ & \approx \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n (B - A)^n \approx \\ & \approx \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{(B - A)^n}{2n} \end{aligned}$$

Для проверки, сравним значения полученных локальных максимумов центральных моментов со значениями центральных моментов для M в середине интервала. Для $m=1-m=1/2$

$$\begin{aligned} \text{Max}(E(X - \frac{A+B}{2})^n) &\leq (m^n(1-m) + m(1-m)^n)(B-A)^n = \\ &= (m^n m + m m^n)(B-A)^n = 2m^{n+1}(B-A)^n = \frac{2}{2^{n+1}}(B-A)^n = (\frac{B-A}{2})^n = \\ &= \frac{(B-A)^n}{2^n} \end{aligned}$$

Для $m=1/2n$ и $n \gg 1$

$$\text{Max}(E(X - (A + \frac{B-A}{2n}))^n) \approx \frac{1}{2\sqrt{e}} \frac{(B-A)^n}{n}$$

Видно, что в формулах различаются только коэффициенты знаменателя при $(B-A)^n$, т.е. $n2\sqrt{e}$ и 2^n . Степенная функция 2^n растет быстрее, чем натуральный ряд n . Оценим, начиная с какого n , коэффициент $1/n2\sqrt{e}$ станет больше, чем коэффициент $1/2^n$. Сравним

$$\frac{1}{2^n} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\sqrt{e}} \frac{1}{n} \approx \frac{1}{3} \frac{1}{n}.$$

При $n=3$

$$\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} > \frac{1}{3} \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

При $n=4$

$$\frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} < \frac{1}{3} \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Видно, что, начиная с $n=4$, значения полученных локальных максимумов центральных моментов при $m=1/2n$ превышают значения центральных моментов при $m=1/2$.

**Приложение П2. Подробное доказательство леммы
о стремлении к нулю центральных моментов**

Подробное доказательство

Если, для $f_k(x_k)$, определенной в разделе 1.1., $E(X)=M$ стремится к A или к B , то $E(X-M)^n$ стремится к нулю.

Доказательство:

Для $M \rightarrow A$

$$\begin{aligned} \text{Max}(E(X - M)^n) &\leq ((M - A)^{n-1} + (B - M)^{n-1}) \frac{(M - A)(B - M)}{B - A} < \\ &< \frac{(M - A)(B - M)}{B - A} ((B - A)^{n-1} + (B - A)^{n-1}) \leq 2(M - A)(B - A)^{n-1} =, \\ &= 2 \frac{(M - A)}{B - A} (B - A)^n \equiv 2m(B - A)^n \end{aligned}$$

Если справедливо строгое неравенство, то тем более справедливо нестрогое неравенство

$$E(X - M)^n \leq (B - A)^n \times 2 \frac{M - A}{B - A} \equiv (B - A)^n \times 2m \xrightarrow{m \rightarrow 0} 0,$$

достаточное для целей настоящей статьи.

Таким образом, при конечных $(B-A)$ и n и при $M \rightarrow A$, т.е. при $(M-A)$ и m , стремящихся к нулю, центральные моменты $E(X-M)^n$ тоже стремятся к нулю. Для $M \rightarrow B$ рассмотрение полностью аналогичное.

Лемма доказана.

Более точная оценка сходимости центральных моментов

Сделаем более точную оценку сходимости к 0 центральных моментов. Снова рассмотрим, при $M \rightarrow A$, т.е. при $m \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \text{Max}(E(X - M)^n) &\leq (m^n(1 - m) + m(1 - m)^n)(B - A)^n = \\ &= m(1 - m)(m^{n-1} + (1 - m)^{n-1}) \times (B - A)^n \xrightarrow{m \rightarrow 0} \dots \\ &\xrightarrow{m \rightarrow 0} m(1 - m)^{n-1} \times (B - A)^n \xrightarrow{m \rightarrow 0} m(B - A)^n \end{aligned}$$

Для проверки, сравним эту оценку с общей формулой

$$\text{Max}(E(X - M)^n) \leq m(1 - m)(m^{n-1} + (1 - m)^{n-1})(B - A)^n.$$

Оценку отличает от общей формулы только множитель

$$(1 - m)(m^{n-1} + (1 - m)^{n-1}).$$

Поскольку $0 \leq m \leq 1$, то $(1 - m) \leq 1$ и, для $n \geq 2$,

$$(m^{n-1} + (1 - m)^{n-1}) \leq (m + (1 - m)) \equiv 1.$$

Следовательно, для $n \geq 2$

$$m(1 - m)(m^{n-1} + (1 - m)^{n-1})(B - A)^n \leq m(B - A)^n.$$

Для контроля, сравним эту оценку с максимумами в $m = 1/2n$

$$m(B - A)^n = \frac{(B - A)^n}{2n} > \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{(B - A)^n}{2n}.$$

Итак, более точную оценку сходимости центральных моментов к 0 можно применять для всех требуемых диапазонов: $1 < n < \infty$ и $0 \leq m \leq 1$.

**Приложение ПЗ. Подробное доказательство теоремы
о существовании разрывов для математического ожидания**

Подробное доказательство

Возможные формулировки

Замечание 1. Более точная оценка разрыва r_{expect}

Замечание 2. Условия существования разрывов

О терминологии

Подробное доказательство

Если, для $f_K(x_k)$, определенной в разделе 1.1., существуют $n : 1 < n < \infty$,
и $r_{dispers} > 0 : |E(X-M)^n| \geq r_{dispers} > 0$, то существует $r_{expect} > 0 : A < (A+r_{expect}) \leq E(X) \leq (B-r_{expect}) < B$.

Доказательство.

Из условий теоремы и из леммы, для $M \rightarrow A$,

$$0 < r_{dispers} \leq |E(X - M)^n| \leq (B - A)^n \times 2 \frac{(M - A)}{(B - A)} = 2(B - A)^{n-1}(M - A)$$

$$0 < r_{dispers} \leq 2(B - A)^{n-1}(M - A)$$

$$0 < r_{expect} \equiv \frac{r_{dispers}}{2(B - A)^{n-1}} \leq (M - A)$$

$$r_{expect} \equiv \frac{r_{dispers}}{2(B - A)^{n-1}}.$$

Для $M \rightarrow B$ рассмотрение полностью аналогично вышеприведенному.

Поскольку $(B-A)$ и n – конечны, а $r_{dispers} > 0$, то конечны и больше нуля
- как $(M-A) \geq r_{expect} > 0$ так и $(B-M) \geq r_{expect} > 0$.

Теорема доказана.

Возможные формулировки

Если, на конечном интервале, конечный центральный момент не может приближаться к нулю ближе, чем на $r_{dispers} > 0$, то математическое ожидание не может приближаться к границе этого интервала ближе, чем на $r_{expect} > 0$.

Другими словами, если для величины, определенной на конечном интервале, существует ненулевой разрыв (*rupture*), запрещенная зона $r_{dispers} > 0$ между каким-либо из ее центральных моментов и нулем, то между математическим ожиданием этой величины и любой из границ интервала тоже существуют ненулевые разрывы, запрещенные зоны $r_{expect} > 0$.

В более общем виде, для возможных значений: Если для величины, определенной на конечном интервале, существует ненулевой разрыв, запрещенная зона $r_{dispers} > 0$ между областью возможных значений какого-либо из ее центральных моментов и нулем, то между областью возможных значений математического ожидания этой величины и любой из границ интервала тоже существуют ненулевые разрывы, запрещенные зоны $r_{expect} > 0$.

Замечание 1. Более точная оценка разрыва r_{expect}

Заметим, что, согласно П2, можно дать более точную оценку r_{expect}

$$0 < r_{dispers} \leq |E(X - M)^n| \leq (B - A)^n \frac{(M - A)}{(B - A)} = (B - A)^{n-1} (M - A)$$

$$0 < r_{dispers} \leq (B - A)^{n-1} (M - A)$$

$$0 < r_{expect} \equiv \frac{r_{dispers}}{(B - A)^{n-1}} \leq (M - A),$$

то есть

$$r_{expect} \equiv \frac{r_{dispers}}{(B - A)^{n-1}}$$

и, при $(B - A) = 1$

$$r_{expect} = r_{dispers}$$

Это же справедливо и для $M \rightarrow B$.

Замечание 2. Условия существования разрывов

Следует подчеркнуть, что разрывы для математического ожидания величины, о которых идет речь, существуют не всегда и не для всех случаев. Эти разрывы между границами интервала и математическим ожиданием величины существуют только тогда и только для тех случаев, когда и в которых существует ненулевой разрыв между возможными значениями какого-либо центрального момента величины и нулем.

О терминологии

Термин "разрыв" появился из исходной задачи о сравнении двух интервалов в "парадоксе четырех областей". Первый интервал соответствовал гарантированному случаю и включал границы шкалы вероятностей. Второй интервал соответствовал случаю риска и, при наличии реального ненулевого разброса данных, не включал границ шкалы вероятностей. При этом, между границами первого и второго интервалов, при наличии реального ненулевого разброса данных, существовали ненулевые промежутки, разрывы. В исходной задаче необходимо было ясно показать различие между рассматриваемыми интервалами. Кроме того, слова "разрыв" и "rupture" начинаются со сходных звуков, что делает более удобным чтение статей, написанных на русском языке. Поэтому за основу был принят термин "разрыв".

В физике, рассматриваемое явление в значительной мере аналогично запрещенным зонам в твердом теле.

По-видимому, рассматриваемое явление, без ущерба для его сути, может быть названо адекватно условиям конкретной решаемой задачи и адекватно терминологии, сложившейся в конкретной области использования. По-видимому, допустимы названия, термины: "разрывы", "промежутки", "запрещенные зоны", "недоступные области", "ограничения", "сжатия", "смещения" и т.д.

Приложение П4.

Подробное доказательство теоремы для вероятности

Подробное доказательство

Возможные формулировки

Замечание 1. Более точная оценка разрыва r_{expect}

Замечание 2. Условия существования разрывов

Подробное доказательство

Пусть, для серии испытаний с количеством испытаний K , в т.ч. при K , стремящемся к бесконечности, плотность $f_K(x_k)$ оценки вероятности, частоты $F : F \equiv M \equiv E(X)$, некоторого события имеет свойства, заданные в разделе 1.1., в частности, определена на $[0, 1]$ и $Const_1 = 1$.

Тогда, если на интервале $[0, 1]$ определена P : при стремлении количества испытаний K к бесконечности $K \rightarrow \infty$, оценка вероятности F стремится к P , т.е.

$$\lim_{K \rightarrow \infty} F = P,$$

и между оценкой вероятности и любой из границ интервала существуют ненулевые разрывы $0 < r_{expect} \leq F \leq (1 - r_{expect}) < 1$, то такие же ненулевые разрывы $0 < r_{expect} \leq P \leq (1 - r_{expect}) < 1$ существуют между P и любой из границ интервала.

Доказательство.

Из

$$\lim_{K \rightarrow \infty} F = P$$

следует, что для любого $r > 0$ существует K_r : для $K > K_r$ $|F - P| < r$.

Для случая $0 < r_{expect} \leq P$ предположим, от противного, что существует $r_3 > 0$: $0 \leq P = r_{expect} - r_3 < r_{expect}$.

Для $K > K_r$ положим $r = (r_{expect} - P) / 2 = r_3 / 2$. Тогда $|F - P| < r_3 / 2$. При $F \geq P \geq 0$, $F - P = |F - P| < r_3 / 2$ и $F < P + r_3 / 2 = r_{expect} - r_3 + r_3 / 2 = r_{expect} - r_3 / 2 < r_{expect}$, то есть $F < r_{expect} - r_3 / 2 < r_{expect}$, что противоречит исходному условию $F \geq r_{expect}$.

Доказательство для случая $P \leq (1 - r_{expect}) < 1$ полностью аналогично вышеприведенному.

В той мере, в какой вероятность удовлетворяет условиям, наложенным на P , в той же мере теорема справедлива и для вероятности.

Теорема доказана.

Возможные формулировки

Теорему можно сформулировать и для нужд практических приложений, как более конкретно, так и в более общем виде:

Если, для серии испытаний с количеством испытаний, стремящимся к бесконечности, оценка вероятности стремится к вероятности, а дисперсия оценки вероятности, из-за каких-либо причин (например, из-за шумов, из-за нестабильностей), не может приближаться к нулю ближе, чем на $r_{dispers} > 0$, то, как оценка вероятности так и вероятность, тоже не могут приближаться к границе этого интервала ближе, чем на $r_{expect} > 0$.

Другими словами, если, для серии испытаний с количеством испытаний, стремящимся к бесконечности, оценка вероятности стремится к вероятности, а между дисперсией оценки вероятности и нулем, из-за каких-либо причин (например, из-за шумов, из-за нестабильностей), существует ненулевой разрыв, то у границ шкалы вероятностей тоже существуют ненулевые разрывы, как для оценки вероятности, так и для вероятности.

В более общем виде, для возможных значений можно также сказать:

Если, для серии испытаний с количеством испытаний, стремящимся к бесконечности, оценка вероятности стремится к вероятности, а между возможными значениями дисперсии оценки вероятности и нулем, из-за каких-либо причин (например, из-за шумов, из-за нестабильностей), существует ненулевой разрыв, то у границ шкалы вероятностей тоже существуют ненулевые разрывы, как для возможных значений оценки вероятности, так и для возможных значений вероятности.

Замечание 1. Более точная оценка разрыва r_{expect}

Заметим, что, согласно П2, можно дать более точную оценку r_{expect}

$$r_{expect} \equiv \frac{r_{dispers}}{(B-A)^{n-1}}$$

и, при $(B-A)=1$, то есть для случаев оценки вероятности и вероятности

$$r_{expect} = r_{dispers} \cdot$$

Замечание 2. Условия существования разрывов

Следует подчеркнуть, что разрывы, о которых идет речь, существуют не всегда и не для всех случаев. Эти разрывы в шкале вероятностей существуют и для оценки вероятности и для вероятности только тогда и только для тех случаев, когда и в которых существует ненулевой разрыв между возможными значениями дисперсии (или иного центрального момента) оценки вероятности и нулем.

Приложение П5. Подробный пример разрывов в шкале вероятностей

Условия

Результаты

Вывод

Замечание. Дисперсия σ^2 разброса попаданий и дисперсия D оценки вероятности попаданий и промахов

Условия

Самый простой пример разрывов в шкале вероятностей – стрельба в мишень (одномерный случай):

Пусть, при точном прицеливании, имеет место некоторый разброс попаданий, например:

А) из-за разброса в размере пули (если диаметр пули меньше диаметра ствола, то пуля будет вылетать из ствола не по оптической оси ствола, а по некоторому пучку траекторий вокруг этой оси) и разброса в количестве и качестве заряда или

Б) при стрельбе дробью.

Пусть также размер мишени равен $2L$, а разброс попаданий подчиняется нормальному закону распределения с дисперсией σ^2 (и среднеквадратичным отклонением σ). Естественно, σ увеличивается, например, с уменьшением длины ствола, а также, в данном случае, с увеличением расстояния до мишени (то есть σ в данном случае измеряется в линейных, а не в угловых единицах).

Возможные значения вероятности попадания в мишень P_{in} могут, в зависимости от нахождения точки прицела, располагаться в диапазоне от минимального, нулевого значения $P_{in_min}=0$, достигаемого, например, если точка прицела находится в направлении, противоположном мишени, до максимального значения P_{in_Max} , достигаемого, если точка прицела гарантированно находится в центре мишени.

Возможные значения вероятности промаха $P_{out}=1-P_{in}$ могут, в зависимости от нахождения точки прицела, располагаться в диапазоне от максимального значения $P_{out_Max}=1$, достигаемого, например, если точка прицела находится в направлении, противоположном мишени, до минимального значения P_{out_min} , достигаемого, если точка прицела гарантированно находится в центре мишени.

Если точка прицела перемещается от направления, противоположного мишени, до точки, находящейся в центре мишени, то вероятность попадания в мишень P_{in} увеличивается от 0 до P_{in_Max} , а вероятность промаха P_{out} соответственно уменьшается от 1 до P_{out_min} . При этом Если $\sigma=0$, то переходы вероятности попадания от 0 к P_{in_Max} и вероятности промаха от 1 к P_{out_min} происходят скачком. Если $\sigma>0$, то оба перехода происходят плавно и P_{in} принимает все значения между 0 и P_{in_Max} , а P_{out} принимает все значения между 1 и P_{out_min} .

Если точка прицела гарантированно находится в центре мишени, то максимальная вероятность попадания в мишень P_{in_Max} и минимальная вероятность промаха P_{out_min} , в зависимости от соотношения σ и L , равны (см., напр., Прохоров 1988):

Результаты

Для простоты рассмотрим только 4 классических точки: $\sigma=0$ (или $\sigma\approx 0$ или $L>3\sigma>0$), $L=3\sigma$, $L=2\sigma$ и $L=\sigma$.

При $L>\sigma=0$, максимальная вероятность попадания в мишень составляет $P_{in_Max}=1$, а минимальная вероятность промаха составляет соответственно $P_{out_min}=0$. Следовательно, возможные значения вероятности попадания в мишень, в зависимости от точки прицела, могут быть равны $P_{in_min}=0$ или $P_{in_Max}=1$, а возможные значения вероятности промаха могут быть равны соответственно $P_{out_Max}=1$ или $P_{out_min}=0$. Таким образом, при $L>\sigma=0$, разрывов в шкале вероятностей нет $r_{expect}=1-P_{in_Max}=P_{out_min}=0$.

При $\sigma\approx 0$ и при $L>3\sigma>0$, когда, по "правилу трех сигм", можно полагать $\sigma\approx 0$, максимальная вероятность попадания в мишень составляет $P_{in_Max}\approx 1$, и минимальная вероятность промаха составляет соответственно $P_{out_min}\approx 0$. Следовательно возможные значения вероятности попадания в мишень, в зависимости от точки прицела, могут находиться в диапазоне $0\leq P_{in}\leq P_{in_Max}\approx 1$, а возможные значения вероятности промаха могут находиться соответственно в диапазоне $0\approx P_{out_min}\leq P_{out}\leq 1$. Таким образом, при $\sigma\approx 0$ и при $L>3\sigma>0$, разрывов в шкале вероятностей тоже нет, точнее говоря, разрывы в шкале вероятностей можно считать равными нулю $r_{expect}=1-P_{in_Max}=P_{out_min}\approx 0$.

При $L=3\sigma>0$, максимальная вероятность попадания в мишень составляет $P_{in_Max}\approx 0,997$, а минимальная вероятность промаха составляет $P_{out_min}\approx 0,003$. Следовательно возможные значения вероятности попадания в мишень, в зависимости от точки прицела, могут находиться в диапазоне $0\leq P_{in}\leq P_{in_Max}=0,997<1$, а возможные значения вероятности промаха могут находиться соответственно в диапазоне $0<0,003=P_{out_min}\leq P_{out}\leq 1$. Таким образом, при $L=3\sigma>0$, в шкале вероятностей появляются ненулевые разрывы $r_{expect}=1-P_{in_Max}=P_{out_min}=0,003>0$.

При $L=2\sigma>0$, максимальная вероятность попадания в мишень составляет $P_{in_Max}=0,95$, а минимальная вероятность промаха составляет $P_{out_min}=0,05$. Следовательно возможные значения вероятности попадания в мишень, в зависимости от точки прицела, могут находиться в диапазоне $0\leq P_{in}\leq P_{in_Max}=0,95<1$, а возможные значения вероятности промаха могут находиться соответственно в диапазоне $0<0,05=P_{out_min}\leq P_{out}\leq 1$. Таким образом, при $L=2\sigma>0$, в шкале вероятностей существуют ненулевые разрывы $r_{expect}=1-P_{in_Max}=P_{out_min}=0,05>0$.

При $L=\sigma>0$, максимальная вероятность попадания в мишень составляет $P_{in_Max}=0,68$, а минимальная вероятность промаха составляет $P_{out_min}=0,32$. Следовательно возможные значения вероятности попадания в мишень, в зависимости от точки прицела, могут находиться в диапазоне $0\leq P_{in}\leq P_{in_Max}=0,68<1$, а возможные значения вероятности промаха могут находиться соответственно в диапазоне $0<0,32=P_{out_min}\leq P_{out}\leq 1$. Таким образом, при $L=\sigma>0$, в шкале вероятностей существуют ненулевые разрывы $r_{expect}=1-P_{in_Max}=P_{out_min}=0,32>0$.

Результаты. Краткий список

При $L > \sigma = 0$ получаем $P_{in} = P_{in_min} = 0$ или $P_{in} = P_{in_Max} = 1$,
 $P_{out} = P_{out_Max} = 1$ или $P_{out} = P_{out_min} = 0$ и
 $r_{expect} = 1 - P_{in_Max} = P_{out_min} = 0$.

При $L > 3\sigma > 0$, для многих практических применений, по "правилу трех сигм",
 можно полагать $\sigma \approx 0$ и $0 \leq P_{in} \leq P_{in_Max} \approx 1$,
 $0 \approx P_{out_min} \leq P_{out} \leq 1$ и
 $r_{expect} = 1 - P_{in_Max} = P_{out_min} \approx 0$.

При $L = 3\sigma > 0$ получаем $0 \leq P_{in} \leq P_{in_Max} = 0,997 < 1$,
 $0 < 0,003 = P_{out_min} \leq P_{out} \leq 1$ и
 $r_{expect} = 1 - P_{in_Max} = P_{out_min} = 0,003 > 0$.

При $L = 2\sigma > 0$ получаем $0 \leq P_{in} \leq P_{in_Max} = 0,95 < 1$,
 $0 < 0,05 = P_{out_min} \leq P_{out} \leq 1$ и
 $r_{expect} = 1 - P_{in_Max} = P_{out_min} = 0,05 > 0$.

При $L = \sigma > 0$ получаем $0 \leq P_{in} \leq P_{in_Max} = 0,68 < 1$,
 $0 < 0,32 = P_{out_min} \leq P_{out} \leq 1$ и
 $r_{expect} = 1 - P_{in_Max} = P_{out_min} = 0,32 > 0$.

Вывод

Таким образом, при нулевой дисперсии (и в тех случаях, когда дисперсию можно считать нулевой), т.е. при $\sigma^2 = 0$ (и при $\sigma \approx 0$ или $L > 3\sigma$) - разрывов в шкале вероятностей нет (практически нет).

При ненулевой дисперсии $\sigma^2 > 0$ - в шкале вероятностей появляются ненулевые разрывы $r_{expect} > 0$:

- между областью возможных (в зависимости от нахождения точки прицела) значений вероятности P_{in} : $0 \leq P_{in} \leq P_{in_Max} = 1 - r_{expect} < 1$, попадания в мишень и единицей, то есть верхней границей шкалы вероятностей, и

- между областью возможных (в зависимости от нахождения точки прицела) значений вероятности P_{out} : $0 < r_{expect} = P_{out_min} \leq P_{out} \leq 1$, промаха и нулем, то есть нижней границей шкалы вероятностей.

Замечание. Дисперсия σ^2 разброса попаданий

и дисперсия D оценки вероятности попаданий и промахов

Заметим, что дисперсия разброса попаданий σ^2 может определять дисперсию D оценки вероятности попаданий и промахов, но не является ею.

Если дисперсия разброса попаданий $\sigma^2=0$ (или если $\sigma^2\approx 0$ или если $L>3\sigma$), то область возможных значений дисперсии D доходит (при $\sigma^2\approx 0$ и $L>3\sigma>0$ - приблизительно доходит) до нуля. Поэтому, в данном случае, нет (практически нет) разрыва, запрещенной зоны между возможными значениями дисперсии D оценки вероятности и нулем, то есть $r_{dispers}=0$ (или $r_{dispers}\approx 0$).

Если $3\sigma>L>0$, то область возможных значений дисперсии D не доходит до нуля, то есть существует разрыв $r_{dispers}>0$:

Для оценки вероятности попадания в мишень – только в области вблизи I

(Если точка прицела находится в направлении, противоположном мишени, то есть если оценка вероятности попадания в мишень находится в области вблизи 0 , то увеличение, изменение σ от $\sigma=0$ до $\sigma>0$ не влияет на D . Следовательно, вблизи оценки вероятности попаданий, равной 0 , дисперсия D оценки вероятности попадания в мишень может быть равна 0).

Для оценки вероятности промаха – только в области вблизи 0

(Если точка прицела находится в направлении, противоположном мишени, то есть если оценка вероятности промаха находится в области вблизи I , то увеличение, изменение σ от $\sigma=0$ до $\sigma>0$ также не влияет на D . Следовательно, вблизи оценки вероятности промаха, равной I , дисперсия D оценки вероятности промаха может быть равна 0).

Вследствие этого, данный простой пример может иллюстрировать теорему о существовании разрывов в шкале вероятностей наглядно, но лишь частично, в отдельных областях, а именно:

Для оценки вероятности и вероятности попадания в мишень – только в области вблизи I .

Для оценки вероятности и вероятности промаха – только в области вблизи 0 .