



Munich Personal RePEc Archive

## **The coherency problem when forecasting with nonlinear econometric models**

Calzolari, Giorgio and Panattoni, Lorenzo

IBM Scientific Center, Pisa, Italy

1988

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/23904/>

MPRA Paper No. 23904, posted 15 Jul 2010 19:21 UTC

# **Il problema della coerenza delle previsioni nei modelli econometrici non lineari**

*(The Coherency Problem when Forecasting with Nonlinear Econometric Models).*

**Giorgio Calzolari e Lorenzo Panattoni**  
*Centro Scientifico IBM, Pisa*

## **1. Introduzione**

Le previsioni del comportamento futuro di un sistema economico si basano spesso sulla soluzione deterministica di un modello econometrico, ottenuta assegnando ai disturbi casuali il loro valore atteso.

Gli inconvenienti di un simile modo di affrontare il problema sono stati largamente discussi nella letteratura e sembra si sia sostanzialmente raggiunto un consenso generale sull'opportunità di sostituire alla soluzione deterministica una stima della media condizionata delle variabili endogene nel periodo di previsione. Tra gli altri, Howrey e Kelejian (1971) fanno notare che, essendo in generale la soluzione deterministica di un modello non lineare diversa dalla media condizionata, la convalida di un modello non dovrebbe essere basata sul confronto tra i valori storici delle variabili e la soluzione deterministica. Mariano e Brown (1983) osservano che la soluzione deterministica di un modello non lineare con parametri stimati produce stime inefficienti ed asintoticamente distorte delle medie condizionate. L'ottenimento della correttezza asintotica, e fino ad un certo punto anche della efficienza, è garantito, sotto certe condizioni, dall'uso della media campionaria di simulazioni stocastiche parametriche. Wallis (1982) presenta infine degli esempi in cui l'uso di previsori basati sulla simulazione deterministica di un modello econometrico non lineare può essere meno efficiente della previsione derivante da una estrapolazione delle serie storiche, in contrasto con un ben noto risultato sulla efficienza relativa dei due metodi nel caso di sistemi lineari.

Si può poi citare tutta una serie di studi empirici fatti su modelli macroeconomici abitualmente usati a scopi previsivi (si vedano, per esempio, Bianchi et al., 1976, 1980 e 1984, Calzolari, 1979, Fair, 1980, Hall, 1985, 1986, e Fisher e Salmon, 1986), che mirano ad appurare se l'uso della media condizionata delle variabili endogene comporti o meno dei vantaggi significativi in previsione rispetto alla soluzione deterministica. Le

conclusioni raggiunte dai vari autori dipendono tuttavia dai vari modelli e non si prestano ad una semplice generalizzazione.

Sebbene i previsori ottenuti dalla media condizionata delle variabili endogene possano essere considerati ottimali con riferimento ad una funzione di perdita di tipo quadratico, essi non sono tuttavia immuni da critiche, in particolare per due loro caratteristiche fortemente indesiderabili.

La prima si riferisce al fatto che le medie non soddisfano necessariamente le equazioni del modello. Se infatti quest'ultimo contiene delle identità non lineari, dati i valori delle variabili predeterminate e dei parametri, è generalmente impossibile trovare dei disturbi casuali che diano come soluzione del sistema di equazioni i valori medi delle variabili endogene. Infatti, se le medie sono calcolate mediante repliche di simulazioni stocastiche, sebbene tutte le identità siano verificate per replicazione, esse non lo sono più (almeno le non lineari) in termini di valori medi. In altre parole, la media condizionata non fornisce una previsione coerente, il che può avere serie conseguenze nella interpretazione dei risultati.

Si supponga per esempio di usare un modello per prevedere il tasso di cambio in lire per dollaro ( $ER_1$ ). In tal caso, per calcolare il tasso di cambio in dollari per lire, tra le equazioni del modello comparirà l'identità  $ER_2 = 1/ER_1$ ; ma essendo la media di  $ER_2$  diversa dal reciproco della media di  $ER_1$ , l'uso in previsione di questi valori può portare un analista sprovvisto a credere che esista una possibilità di intermediazione nel mercato dei cambi, cosa chiaramente non prevista dal modello.

Se mettiamo poi in relazione la media di ogni variabile endogena con la sua mediana e la sua moda, l'analisi delle distribuzioni univariate rivela una seconda proprietà non desiderabile: la media è generalmente meno probabile del previsore deterministico. Più precisamente, la media di una variabile endogena è spostata, rispetto al valore deterministico, verso la direzione in cui la densità di probabilità diminuisce. Infatti in una distribuzione univariata, unimodale e di moderata asimmetria, tra la media, la mediana (che, nel caso univariato, corrisponde alla soluzione deterministica del modello), e la moda esiste una relazione empirica (vedi Kendall e Stuart, 1969, sezione 2.11) secondo la quale le tre quantità si dispongono secondo l'ordine con cui esse sono state citate (oppure in ordine inverso, a seconda del segno della asimmetria), il che chiaramente implica la proprietà sopra riportata.

Nel presente lavoro la *moda della distribuzione congiunta* viene proposta come un previsore ottimale che conserva le identità. Sebbene essa non coincida con la moda delle distribuzioni univariate delle variabili endogene considerate separatamente (cioè le loro distribuzioni marginali), ha tuttavia la attraente proprietà di poter essere considerata come la stima del valore congiunto più probabile di tutte le variabili endogene. Nello stesso tempo, essendo ottenuta dalla soluzione del sistema per un dato vettore di disturbi casuali, essa fornisce chiaramente una previsione coerente.

## 2. L'uso in previsione della media condizionata

Sia dato un modello econometrico ad equazioni simultanee, rappresentabile come

$$f(y_t, x_t, a) = u_t \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (1)$$

dove  $y_t$  è il vettore  $M \times 1$  delle variabili endogene al tempo  $t$ ,  $x_t$  è il vettore delle variabili predeterminate ed  $a$  è il vettore di tutti i coefficienti strutturali incogniti (da stimare) del modello. Si suppone di avere  $m \leq M$  equazioni stocastiche e  $M - m$  identità. Il vettore  $M \times 1$  dei disturbi casuali al tempo  $t$ ,  $u_t = (u_{t1}, u_{t2}, \dots, u_{tm}, 0, \dots, 0)'$ , è assunto distribuito indipendentemente ed identicamente come

$$N \left\{ 0, \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (2)$$

con la matrice di covarianza  $\Sigma$ , di dimensioni  $m \times m$ , del tutto incognita, tranne per il fatto di essere simmetrica e definita positiva.

Normalmente si fa l'ipotesi che, da un sistema di equazioni simultanee del tipo (1), sia possibile definire univocamente i valori degli elementi di  $y_t$ , una volta dati i valori dei coefficienti, delle variabili predeterminate e dei disturbi casuali. Ciò sta a significare che le equazioni (1) definiscono implicitamente un sistema di equazioni di forma ridotta

$$y_t = y(x_t, a, u_t). \quad (3)$$

Nelle ipotesi che il vettore di operatori funzionali  $y$  sia rappresentabile in forma esplicita, che sia possibile calcolare analiticamente la media condizionata come

$$g(x_t, a, \Sigma) = E(y_t | x_t, a, \Sigma) \quad (4)$$

e che infine siano disponibili delle stime  $\hat{a}$  e  $\hat{\Sigma}$  dei parametri della forma strutturale, allora la media condizionata stimata per il periodo di previsione  $h$ ,  $g(x_h, \hat{a}, \hat{\Sigma})$ , può essere usata come previsore. La non linearità di solito implica che questo previsore è diverso da quello deterministico, generalmente usato nelle applicazioni pratiche, che è dato da  $y(x_h, \hat{a}, 0)$ .

In generale, però, l'operatore funzionale  $y$  non è rappresentabile in forma esplicita per modelli non lineari, per cui il calcolo analitico della media condizionata risulta impossibile e si devono usare delle tecniche di approssimazione.

A questo proposito la procedura più largamente usata nella letteratura va sotto il nome di *simulazione stocastica* e si articola nei seguenti punti.

- 1) Viene generato un vettore di numeri pseudo-casuali  $\tilde{u}_h$  con distribuzione normale multivariata, a media zero e matrice di covarianza  $\hat{\Sigma}$ . Per questo scopo può essere usato il metodo suggerito da Nagar (1969) se la matrice  $\hat{\Sigma}$  è definita positiva, oppure, se quest'ultima non ha rango pieno, il metodo di McCarthy (1972).
- 2) Il vettore  $\tilde{u}_h$  viene inserito nel modello, in cui i parametri strutturali sono tenuti fissi ed uguali ai loro valori stimati in origine, ed il modello è risolto nel periodo di previsione,  $h$ , ottenendo così il vettore di variabili endogene  $\tilde{y}_h$ .

I due passi precedenti sono ripetuti numerose volte ed alla fine vengono calcolate le medie campionarie degli elementi dei vettori  $\tilde{y}_h$  calcolati nelle varie replicazioni.

Se esistono momenti finiti, un numero molto alto di replicazioni garantisce in pratica il raggiungimento degli stessi valori delle medie ottenibili, almeno teoricamente, per via analitica, dato che la varianza sperimentale delle medie campionarie decresce in maniera proporzionalmente inversa al numero di replicazioni. Anche un numero di replicazioni molto alto, però, è spesso insufficiente a permettere di apprezzare differenze significative tra la media e la soluzione deterministica (Bianchi et al., 1976, 1980).

Fisher e Salmon, 1986). Un enorme guadagno nella efficienza computazionale si ottiene spesso mediante l'uso delle variabili antitetiche nella procedura di simulazione stocastica (Calzolari, 1979, Brown e Mariano, 1985). Le replicazioni in questo caso sono eseguite a coppie: una volta con il vettore di numeri pseudo-casuali  $\tilde{u}_h$  generato come detto sopra, ed una volta con lo stesso vettore preso con il segno opposto,  $-\tilde{u}_h$ .

I risultati presentati in questo lavoro sono stati ottenuti con 5000 coppie di replicazioni antitetiche, che hanno garantito, per quasi tutte le variabili riportate nelle tabelle, una stima della differenza tra soluzione deterministica e media condizionata almeno 40 volte più grande del suo errore standard sperimentale.

### 3. L'uso in previsione della moda della distribuzione congiunta.

Il logaritmo della funzione di densità congiunta delle variabili endogene al tempo  $t$  può essere espresso come

$$L_t = -\frac{1}{2} \log |\Sigma| + \log \left| \frac{\partial f_t}{\partial y_t'} \right| - \frac{1}{2} f_t' \Sigma^{-1} f_t \quad (5)$$

in cui il determinante Jacobiano  $|\partial f_t / \partial y_t'|$  è preso in valore assoluto.

Dato che il sistema di equazioni contiene delle identità, nel calcolo della (5) si devono tenere presenti alcuni accorgimenti (si veda per esempio Oberhofer, 1971, che estende al caso non lineare il trattamento delle identità nella stima di massima verosimiglianza di Rothenberg e Leenders, 1964, ed anche Anderson, 1958, appendice 1.3). In particolare:

- 1)  $\Sigma$  viene calcolata dai residui delle  $m$  equazioni stocastiche del sistema, escludendo le identità;
- 2)  $\partial f_h / \partial y_h'$  è la matrice Jacobiana  $m \times m$  delle derivate prime delle forme strutturali rispetto alle variabili endogene, *dopo che tutte le identità sono state sostituite nelle equazioni stocastiche*. Se la matrice Jacobiana  $M \times M$ , corrispondente a tutte le equazioni, viene partizionata come

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (6)$$

in cui il blocco 1,1 si riferisce alle equazioni stocastiche, allora il determinante Jacobiano che si deve usare per la (5) è il valore assoluto di  $|J|/|J_{22}|$ , cioè del rapporto tra il determinante della matrice Jacobiana  $M \times M$  del sistema completo ed il determinante della sottomatrice  $(M-m) \times (M-m)$  corrispondente alle identità del modello.

La stima della moda della distribuzione congiunta delle variabili endogene nel periodo di previsione  $h$ , condizionata ai parametri della forma strutturale (coefficienti e matrice di covarianza dei disturbi casuali, posti uguali ai loro valori stimati  $\hat{a}$  e  $\hat{\Sigma}$ ), è ottenuta dalla soluzione del modello con il vettore  $u_h$  che massimizza la (5) (in cui, peraltro, il primo termine è costante).

La massimizzazione della funzione di densità è stata ottenuta usando la nota formula di Broyden, Fletcher, Goldfarb e Shanno (BFGS, si veda per esempio Dennis

e Moré, 1977). Questo algoritmo rientra nella classe dei metodi *quasi newtoniani*, in cui la direzione di ricerca del massimo si ottiene premoltiplicando il gradiente della funzione da massimizzare per una matrice opportuna (nel caso del metodo di Newton puro, viene usata l'inversa della matrice Hessiana). Questa matrice si ottiene aggiornando iterativamente, con una correzione di rango due, una matrice iniziale  $(m \times m)$  positiva definita. Dato che l'efficienza del metodo aumenta notevolmente se la matrice iniziale approssima l'inversa della matrice Hessiana della funzione da massimizzare, cioè  $(\partial^2 L_h / \partial u_k \partial u_k)^{-1}$ , nel caso in esame si è usata  $\hat{\Sigma}$ .

Come già detto, l'algoritmo richiede anche la valutazione del gradiente, ad ogni passo del processo iterativo. Questo problema per il momento è stato risolto mediante il calcolo numerico delle derivate prime. Sebbene questo faccia notevolmente aumentare il tempo di calcolo, si è tuttavia trovato sperimentalmente che il metodo BFGS rimane ancora decisamente più efficiente, da questo punto di vista, di altri metodi che richiedono solo il calcolo dei valori della funzione da massimizzare.

Infine il problema della accuratezza del calcolo delle derivate è stato affrontato confrontando tra loro i risultati ottenuti con diverse approssimazioni numeriche per le derivate: formule a due, tre e cinque punti con differenti valori del passo incrementale. I risultati hanno dimostrato una notevole robustezza verso la scelta della formula e dell'ampiezza del passo, a patto che sia usata una formula centrata nel punto in cui si vuol calcolare la derivata.

#### 4. Applicazione ad un modello dell'economia italiana

Allo scopo di avere un'idea quantitativa delle differenze che derivano dall'uso dell'uno o dell'altro metodo sopra descritti, essi sono stati impiegati in un esercizio di previsione con un modello dell'economia italiana, sviluppato all'Istituto di Studi per la Programmazione Economica (ISPE, Roma; per una descrizione dettagliata si veda Sartori, 1978). La versione del modello, utilizzata per questi esperimenti, è sostanzialmente quella presentata in Bianchi et al. (1982). Il modello è stimato su dati annuali e consiste di 49 equazioni: 19 stocastiche, 15 definizionali e 15 equazioni definizionali "tecniche" (identità non lineari introdotte per rendere tutte le equazioni stocastiche lineari nei coefficienti) e può essere suddiviso nei seguenti settori: domanda, offerta, occupazione, costo del lavoro, prezzi impliciti e pubblica amministrazione.

Le stime dei 75 coefficienti strutturali incogniti del modello (vettore  $\hat{\alpha}$ ), e della matrice di covarianza dei disturbi strutturali ( $\hat{\Sigma}$ , la cui sottomatrice diversa da zero ha dimensioni  $19 \times 19$ ) sono state ottenute applicando al periodo 1955-1976 il metodo di stima delle variabili strumentali ad informazione limitata, in versione iterativa (Dutta e Lyttkens, 1974).

La previsione, ex-post, si riferisce al primo anno fuori del campione, cioè al 1977. La tabella 1 contiene una lista di alcune delle variabili endogene più importanti; i risultati relativi sono contenuti in tabella 2. Per ognuna delle variabili, accanto al valore storico per il 1977, vengono riportate, in punti per mille rispetto al valore osservato, le differenze tra la previsione deterministica e la media condizionata

$$d_{media} = \frac{y_{determ} - y_{media}}{y_{obs}} \cdot 1000 \quad (7)$$

e le differenze tra la previsione deterministica e la moda della distribuzione congiunta

$$d_{moda} = \frac{y_{determ} - y_{moda}}{y_{obs}} \cdot 1000 \quad (8)$$

I risultati ottenuti, relativi al confronto tra le stime della media condizionata delle variabili e la moda della loro distribuzione congiunta, si prestano ad alcune interessanti considerazioni.

La prima osservazione si riferisce alle dimensioni delle differenze tra medie e mode e valori deterministici: per tutte le variabili, tranne forse che per due (DIS e SPA), esse risultano estremamente piccole, trascurabili da un punto di vista pratico. Questo fatto però deve essere considerato con la dovuta cautela ed un sua generalizzazione al caso di altri modelli econometrici potrebbe risultare azzardata, essendo ovvio che l'ampiezza delle differenze riportate nella tabella 2 è strettamente legata al grado di non linearità del modello considerato. Queste differenze potrebbero inoltre crescere all'allungarsi dell'intervallo di previsione, che nel nostro caso è limitato ad un solo periodo.

Su di un piano essenzialmente teorico si può poi osservare che il considerare la moda della distribuzione congiunta, anziché le mode delle singole distribuzioni marginali, fa in modo che la relazione empirica tra media, mediana e moda precedentemente citata venga spesso capovolta; la media, cioè, risulta in molti casi spostata, rispetto alla soluzione deterministica, nella direzione in cui la densità di probabilità è crescente. Si deve però notare che nei due casi in cui queste differenze risultano un po' più significative le posizioni relative di media, mediana e moda sono quelle previste per il caso di distribuzioni univariate.

### Tabella 1

Modello ISPE: elenco delle principali variabili endogene

<i>CPNCF</i>	- Consumi Privati al Netto delle Imposte Indirette
<i>DIS</i>	- Disoccupazione
<i>DXML</i>	- Prezzi Impliciti nelle Esportazioni di Prodotti
<i>IAB</i>	- Investimenti in Abitazioni
<i>IF</i>	- Investimenti Fissi Totali
<i>IFIT</i>	- Investimenti Fissi Privati Non-Residenziali nell'Industria e nel Settore Terziario Privato
<i>KOCC</i>	- Indice di Utilizzazione della Capacità Produttiva nell'Industria.
<i>LDI</i>	- Occupati Dipendenti nell'Industria
<i>LDT</i>	- Occupati Dipendenti nel Settore Terziario Privato
<i>LI</i>	- Occupati nell'Industria
<i>LTAT</i>	- Occupati nel Settore Terziario Privato
<i>MT</i>	- Importazioni di Merci e Servizi
<i>PCL</i>	- Prezzi Impliciti nei Consumi Privati al Lordo delle Imposte Indirette
<i>PIAB</i>	- Prezzi Impliciti negli Investimenti in Abitazioni
<i>PIFIT</i>	- Prezzi Impliciti negli Investimenti Privati nell'Industria e nel Settore Terziario Privato
<i>PILL</i>	- Prodotto Interno Lordo
<i>PING</i>	- Indice dei Prezzi all'Ingrosso
<i>PVAP</i>	- Prezzi Impliciti nel Prodotto Lordo del Settore Privato
<i>RDP</i>	- Reddito Lordo Disponibile del Settore Privato



- SPA - Risparmio Lordo del Settore Pubblico  
 SUDT - Salari e Stipendi per Dipendente nel Settore Privato dei Servizi  
 SUINE - Salari e Stipendi per Dipendente nell'Industria al netto dei Contributi Sociali  
 TD - Imposte Dirette  
 TIL - Imposte Indirette  
 VAI - Prodotto Lordo nell'Industria  
 VAP - Prodotto Lordo nel Settore Privato  
 VAT - Prodotto Lordo nel Settore Privato dei Servizi, escluso il Valore Aggiunto dei Fabbricati  
 XT - Esportazioni di Merci e Servizi

Tabella 2

Modello ISPE dell'economia italiana 1955-1976. Previsione al 1977.

	Valore storico	$d_{media}$	$d_{moda}$		Valore storico	$d_{media}$	$d_{moda}$
CPNCF	36647.0	0.03	0.09	DIS	211.000	7.43	-4.55
DXML	2.92850	-0.22	-0.11	IAB	3192.00	-0.01	0.08
IF	11938.0	-0.08	-0.05	IFIT	6807.00	-0.13	-0.12
KOCC	.887492	-0.15	0.15	LDI	6534.50	-0.24	0.05
LDT	4268.00	-0.03	-0.05	LI	7544.00	-0.19	0.09
LTAT	7180.40	-0.02	0.04	MT	13806.0	-0.56	-0.14
PCL	3.01539	0.15	0.10	PIAB	2.96616	-0.08	-0.07
PIFIT	2.84340	-0.04	-0.04	PILL	172988.	0.17	0.12
PING	275.640	-0.05	-0.00	PVAP	2.49301	0.28	0.04
RDP	157349.	0.33	0.03	SPA	-8389.00	2.71	-1.87
SUDT	7.28351	0.05	-0.03	SUINE	4.69293	0.11	0.04
TD	15923.0	-0.59	0.17	TIL	20152.0	0.22	0.20
VAI	24351.0	-0.15	0.15	VAP	55818.0	-0.14	0.08
VAT	24084.0	-0.17	0.02	XT	16971.0	-0.92	-0.04

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Anderson, T.W. (1958), An Introduction to Multivariate Statistical Analysis, New York, John Wiley.  
 Bianchi, C., J.L.Brillet e G.Calzolari (1984), "Analyse et Mesure de l'Incertainitude en Prévision d'un Modèle Econométrique. Application au Modèle Mini-DMS", Annales de l'INSEE, 54, pp.31-62.  
 Bianchi, C., e G.Calzolari (1980), "The One-Period Forecast Errors in Nonlinear Econometric Models", International Economic Review, 21, pp. 201-208.  
 Bianchi, C., G.Calzolari e P.Corsi (1976), "Divergences in the Results of Stochastic and Deterministic Simulation of an Italian Non-Linear Econometric Model", in L.Dekker (ed.), Simulation of Systems, Amsterdam, North Holland, pp. 653-661.  
 Bianchi, C., G.Calzolari e F.Sartori (1982), "Stime 2SLS con Componenti Principali di un Modello Non Lineare dell'Economia Italiana", Note Economiche, 2, pp. 114-137.



- Brown, B.W. e R.S. Mariano (1985), "Reduced Variance Prediction in Nonlinear Simultaneous Systems", Rice University, discussion paper presentato al World Congress of the Econometric Society, M.I.T, Cambridge MA.
- Calzolari, G. (1979), "Antithetic Variates to Estimate the Simulation Bias in Non-Linear Models", Economics Letters, 4, pp. 323-328.
- Dennis, J.E. e J.J. Moré (1977), "Quasi-Newton Methods, Motivation and Theory", SIAM Review, 19, pp. 46-89.
- Dutta, M. e E. Lyttkens (1974), "Iterative Instrumental Variables Method and Estimation of a Large Symultaneous System", Journal of American Statistical Association, 69, pp. 977-986.
- Fair, R.C. (1980), "Estimating the Expected Predictive Accuracy of Econometric Models", International Economic Review, 21, pp. 355-378.
- Fisher, P. e M. Salmon (1986), "On Evaluating the Importance of Nonlinearity in Large Macroeconometric Models", International Economic Review, 27, pp. 625-646.
- Hall, S.G. (1985), "The Application of Stochastic Simulation Techniques to the National Institute's Model 7", Manchester School.
- Hall, S.G. (1986), "The Importance of Non-Linearities in Large Forecasting Models with Stochastic Error Processes", Journal of Forecasting, 5, pp. 205-215.
- Howrey, E.P. e H.H. Kelejian (1971), "Simulation versus Analytical Solutions: the Case of Econometric Models", in T.H. Naylor (ed.), Computer Simulation Experiments with Models of Economic Systems, New York, John Wiley, pp. 299-319.
- Kendall, M.G. e A. Stuart (1969), The Advanced Theory of Statistics, Vol. I, London, Charles Griffin.
- Mariano, R.S. e B.W. Brown (1983), "Asymptotic Behavior of Predictors in a Nonlinear Simultaneous System", International Economic Review, 24, pp. 523-536.
- McCarthy, M.D. (1972), "Some Notes on the Generation of Pseudo-Structural Errors for Use in Stochastic Simulation Studies", in B.G. Hickman (ed.), Econometric Models of Cyclical Behavior, New York, NBER, Studies in Income and Wealth No. 36, pp. 185-191.
- Nagar, A.L. (1969), "Stochastic Simulation of the Brookings Econometric Model", in J.S. Duesenberry, G. Fromm, L.R. Klein e E. Kuh (ed.), The Brookings Model: Some Further Results, Amsterdam: North Holland, pp. 425-456.
- Oberhofer, W. (1971), "On the Treatment of Definition Equations in Likelihood Functions", Universität Bonn, Institut für Gesellschafts- und Wirtschaftswissenschaften, Wirtschaftstheoretische Abteilung, discussion paper No. 14.
- Rothenberg, T.J. e C.T. Leenders (1964), "Efficient Estimation of Simultaneous Equation Systems", Econometrica, 32, pp. 57-76.
- Sartori, F. (1978), "Caratteristiche e Struttura del Modello", in Un Modello Econometrico dell'Economia Italiana: Caratteristiche e Impiego, Roma, Ispequaderni, 1, pp. 9-36.
- Wallis, K.F. (1982), "Time Series versus Econometric Forecasts: A Non-Linear Regression Counter-Example", Economics Letters, 10, pp. 309-315.