Estimation of nonlinear simultaneous equations: a survey

Calzolari, Giorgio

IBM Scientific Center, Pisa, Italy

1992

Stima delle equazioni simultanee non-lineari: una rassegna

Estimation of nonlinear simultaneous equations: a survey

Giorgio Calzolari
Dipartimento statistico
Università di Firenze

1 Introduzione

Sebbene quasi tutti i modelli econometrici impiegati in applicazioni pratiche contengano forme piu' o meno complesse di non-linearita', pochi libri di testo affrontano con un certo grado di dettaglio l'argomento delle equazioni simultanee non-lineari. Ad esempio, Klein (1983), Artus, Deleau e Malgrange (1986, cap. 6 e 7), Faliva (1987, cap. 4) discutono alcuni problemi connessi con la simulazione di tali modelli, Bowden e Turkington (1984, cap. 5), Amemiya (1985, cap. 8) discutono i problemi di stima; ma e' indubbio che la quasi totalita' dei testi di econometria, occupandosi di equazioni simultanee, limitano la trattazione al caso lineare.

Pretendere di colmare questa lacuna, condensando in poche pagine un ventennio di letteratura econometrica sulla stima delle equazioni simultanee non-lineari, sarebbe pura presunzione. Questo lavoro, allora, si prefigge uno scopo molto piu' limitato e modesto, qual'e' quello di fornire al lettore una bibliografia ragionata sull'argomento. Nei limiti del possibile, si cerchera' di mantenere la tradizionale distinzione tra metodi di stima a informazione limitata e metodi a informazione completa, e per entrambe queste classi di metodi verranno brevemente citati i principali contributi della letteratura relativamente ai problemi della consistenza, robustezza, efficienza, semplicita' di calcolo, generalita' o specificita' delle ipotesi. Su ognuno di questi problemi, si cerchera' di evidenziare la peculiarita' delle stime dei modelli non-lineari, sottolineando le differenze nei confronti dei metodi di stima per equazioni simultanee lineari, molto piu' diffusamente trattati nella letteratura.

La notazione sara' limitata allo stretto indispensabile. In particolare con

$$f_t = f(y_t, x_t, a) = u_t \qquad (t = 1,2,\dots,T) \tag{1}$$

si rappresenta il generico modello econometrico non-lineare nella forma strutturale, dove y_t e u_t sono vettori di variabili endogene e di errori casuali al tempo t, x_t e' un vettore di variabili esogene (ed eventualmente endogene ritardate), a e' il vettore dei coefficienti strutturali incogniti del modello, T e' la lunghezza del periodo campionario, e f e' un vettore di operatori funzionali che rappresentano le equazioni strutturali. Se f_i e' il generico elemento di quest'ultimo vettore e a_i e' il sottovettore di a contenente i coefficienti incogniti dell'i-esima equazione, tale equazione sara' rappresentata come $f_{i,t} = f_i(y_t, x_t, a_i) = u_{i,t}$.

$$L_T = -\frac{T}{2}\log|\Sigma| + \sum_{t=1}^{T}\log\left|\left|\frac{\partial f_t}{\partial y_t'}\right|\right| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} f_t'\,\Sigma^{-1} f_t \qquad (2)$$

rappresenta la funzione di verosimiglianza sotto l'ipotesi di normalita' dei termini di errore: $u_t \sim N(0, \Sigma)$.

2. Metodi a informazione limitata

Nel modello simultaneo lineare, si considerano "a informazione limitata" quei metodi di stima che tengono conto delle restrizioni di (sovra)identificazione nell'equazione strutturale in esame, ma ignorano le restrizioni presenti nel resto del sistema. In altre parole, anziche' affrontare il sistema di equazioni strutturali dato, stimano una serie di sottosistemi, ognuno dei quali e' costituito da una equazione strutturale e dalle equazioni di forma ridotta relative ai regressori endogeni. Il metodo dei minimi quadrati a due stadi (2SLS) e il metodo di massima verosimiglianza a informazione limitata (LIML) rientrano ovviamente in questa classe di metodi di stima. Come e' noto, esistono poi altri metodi, quali il metodo delle variabili strumentali efficienti (LIVE, Brundy e Jorgenson, 1971), o il metodo delle variabili strumentali iterative (IIV, Dutta e Lyttkens, 1974), che sfruttano le restrizioni presenti in tutte le equazioni del sistema, ma non sfruttano l'informazione contenuta nelle covarianze o correlazioni tra gli errori delle diverse equazioni. E poiche' sono asintoticamente equivalenti al 2SLS e al LIML, sono anch'essi, sia pure impropriamente, classificati come metodi a informazione limitata.

In un sistema di equazioni simultanee non-lineari, di regola la forma ridotta non e' esplicitabile analiticamente. Sappiamo che le variabili endogene sono funzioni delle esogene, e sappiamo risolvere numericamente il sistema, ossia siamo in grado di calcolare il valore delle endogene (presumibilmente unico) date le esogene, i coefficienti e i termini di disturbo. Ammettiamo quindi implicitamente l'esistenza di una forma ridotta, ma non siamo in grado di esplicitarne la forma funzionale; non siamo quindi in grado di eseguirne la stima diretta, senza passare attraverso la forma strutturale (si veda, ad esempio, Faliva, 1987, cap. 4, o Pagan, 1990, cap. 5).

In un breve articolo, Kelejian (1971) suggerisce di approssimare la forma ridotta mediante uno sviluppo in serie. Si ipotizza cioe' che la dipendenza tra i regressori endogeni dell'equazione strutturale in esame e le variabili esogene del sistema sia bene approssimata da un polinomio. Se il grado del polinomio aumenta all'aumentare del numero di osservazioni disponibili, l'approssimazione diventa asintoticamente esatta. I coefficienti del polinomio possono essere stimati con i minimi quadrati ordinari e i valori calcolati delle endogene possono essere impiegati come strumenti nel secondo stadio di stima. Si tratta quindi di un metodo di minimi quadrati a due stadi per modelli non-lineari (NL2S o NL2SLS).

Amemiya (1974) introduce il NL2S o NL2SLS come una vera e propria classe di metodi di stima. Indicando con X una matrice di variabili esogene soddisfacente alcune ipotesi abbastanza generali, la stima NL2S dei coefficienti dell'equazione strutturale i-esima, $\hat{a}_i$, si ottiene minimizzando la forma quadratica $f_i' X(X'X)^{-1}X' f_i$.

Il metodo di Kelejian rientra in questa classe di stimatori; si ottiene infatti impiegando in X un polinomio nelle esogene del sistema. Il metodo 2SLS, se il modello e' lineare, si ottiene come caso particolare impiegando in X le esogene del sistema. Ed e' questa la scelta efficiente di X anche nel caso di una equazione appartenente ad un sistema in cui la non-linearita' sia limitata ai soli coefficienti, e non ci siano non-linearita' nelle variabili.

Osserviamo ora che in un sistema simultaneo non-lineare gli elementi della matrice $G_i = \partial f_i / \partial a_i'$ (in pratica, la matrice dei regressori) sono funzioni delle variabili esogene, dei coefficienti strutturali di tutto il sistema (vettore a), e dei termini di errore nelle equazioni strutturali. Supponiamo poi di utilizzare una matrice X in cui il numero di colonne sia pari al numero di coefficienti da stimare nell'equazione in esame, per cui $T^{-1}X'G_i$ risulta essere una matrice quadrata, che supporremo non-singolare per ogni T (e' il tradizionale requisito di correlazione e correlazione asintotica tra regressori e strumenti). Una scelta semplice per la matrice X consiste nel calcolare gli elementi della matrice $\partial f_i / \partial a_i'$ in corrispondenza delle esogene storiche, di una stima precedente del vettore a e di termini di errore posti uguali a zero: in pratica, i regressori funzione di sole variabili esogene restano al loro valore storico, mentre nei regressori in cui compaiono variabili endogene i valori storici vengono sostituiti dai valori calcolati in una soluzione o simulazione deterministica del modello sul periodo campionario. Si tratta, in pratica, del modo piu' immediato per estendere a sistemi non-lineari i metodi delle variabili strumentali efficienti a informazione limitata, originariamente proposti per modelli lineari (LIVE, IIV). Il metodo risultante, che secondo la classificazione di Amemiya rientra nella classe degli stimatori NL2S, e' talvolta denominato metodo delle variabili strumentali simulate (SIV, e.g. Toedter, 1990).

2.1. Efficienza

Questa ultima scelta della matrice degli strumenti non porta pero' ad una stima efficiente. L'efficienza nella classe degli stimatori NL2S si ottiene scegliendo $X = E(\partial f_i / \partial a_i')$ (Amemiya, 1975). Lo stimatore che si ottiene con questa scelta degli strumenti e' detto metodo a due stadi non-lineare ottimale (best: BNL2S). Presenta pero' alcune difficolta' concettuali e tecniche. Si osservi, infatti, che questa scelta di X non e' praticabile, perche' il valore atteso dei regressori ($\partial f_i / \partial a_i'$) e' funzione dei "veri" coefficienti a (incogniti) e perche' il valore atteso di funzioni non-lineari di notevole complessita' generalmente non e' calcolabile analiticamente: si parla pertanto di un "infeasible BNL2S". La prima difficolta' si supera agevolmente osservando che se la matrice degli strumenti viene calcolata in corrispondenza di una stima consistente di a, l'efficienza asintotica dello stimatore non viene compromessa (risultato analogo al caso, ben noto, dei modelli lineari). Il secondo problema e' invece molto piu' complesso, e solo recentemente ha trovato soluzioni soddisfacenti (Brown, 1990, Robinson, 1991), di cui si trattera' nel paragrafo 3.3.

Sotto l'ipotesi di normalita' degli errori e per una particolare categoria di modelli per i quali si puo' parlare di una stima autenticamente a informazione limitata, l'efficienza dello stimatore BNL2S non costituisce un limite invalicabile. E' infatti ancora Amemiya (1975) che introduce un metodo di minimi quadrati non-lineari a due stadi modificato (MNL2S) e un metodo di massima verosimiglianza non-lineare a informazione limitata (NLLI, o NLLIML).

Supponiamo che in una equazione strutturale non-lineare le variabili endogene esplicative ammettano una forma ridotta lineare. Possiamo allora stimare con in minimi quadrati le equazioni di forma ridotta, considerare i vettori dei residui di queste equazioni, proiettare i regressori dell'equazione strutturale ortogonalmente a questi vettori di residui e utilizzare i vettori ottenuti dalla proiezione come strumenti nel secondo stadio della stima. Lo stimatore risultante (MNL2S) e' efficiente rispetto al BNL2S. In termini intuitivi, la proiezione ortogonale ai vettori dei residui di forma ridotta produce, per i regressori endogeni, degli strumenti ripuliti dalla correlazione con il termine di errore nell'equazione strutturale, ma piu' correlati con i regressori originari di quanto non lo siano gli strumenti del BNL2S: maggiore e' questa correlazione, maggiore e' l'efficienza (Amemiya, 1983, p.371). Si noti che, nel caso di un modello lineare, tutti questi metodi di minimi quadrati a due stadi vengono a coincidere con il tradizionale 2SLS.

Si puo' fare un ulteriore passo avanti sulla strada dell'efficienza. Per il sistema costituito dalla equazione strutturale non-lineare in esame e dalle equazioni lineari di forma ridotta si puo' ricavare agevolmente la funzione di verosimiglianza. La massimizzazione di questa funzione puo' essere eseguita con qualche metodo iterativo standard (Newton-Raphson, Gauss-Newton, o qualche altro metodo del gradiente). Puo' anche essere eseguita con un semplice algoritmo (Amemiya, 1975) che alterna iterativamente la stima dell'equazione strutturale in esame alla stima delle equazioni di forma ridotta, fino a convergenza. Nello stimare l'equazione strutturale gli strumenti si ottengono proiettando i regressori ortogonalmente ai residui di forma ridotta (esattamente come per il MNL2S). Nello stimare le equazioni di forma ridotta gli strumenti si ottengono proiettando i regressori (esogeni) ortogonalmente al vettore dei residui dell'equazione strutturale. A convergenza raggiunta lo stimatore cosi' ottenuto (massima verosimiglianza non-lineare a informazione limitata: NLLI o NLLIML) e' efficiente rispetto al MNL2S.

Abbiamo allora, sul problema della efficienza, un comportamento decisamente diverso degli stimatori applicabili a modelli non-lineari rispetto agli stimatori per sistemi simultanei lineari. Nei sistemi simultanei lineari, sotto le ipotesi di omoschedasticita', incorrelazione e normalita' degli errori strutturali, nonche' di assenza di vincoli sulla matrice di covarianze, i tradizionali metodi di stima a informazione limitata sono tutti asintoticamente efficienti: minimi quadrati a due stadi (2SLS), variabili strumentali efficienti (LIVE), variabili strumentali iterative (IIV), massima verosimiglianza (LIML), stimatori di classe k. Solo considerando il problema dell'efficienza asintotica di ordine superiore o le proprieta' delle stime nei campioni finiti, verrebbe meno questa equivalenza dei metodi; si vedano, ad esempio, Anderson, Kunitomo e Sawa (1982), Mariano (1982), o Robinson (1988b). Questa sostanziale equivalenza dei metodi di stima viene meno nel caso delle equazioni simultanee non-lineari. Tra gli stimatori a informazione limitata, hanno un grado di efficienza crescente i metodi della classe NL2S, il metodo dei minimi quadrati a due stadi ottimale (BNL2S), il metodo dei minimi quadrati a due stadi modificato (MNL2S) e il metodo di massima verosimiglianza (NLLI o NLLIML, Amemiya, 1975, 1983).

2.2. Applicabilita'

I due metodi a informazione limitata piu' efficienti (MNL2S e NLLI o NLLIML) sono applicabili solo ad un tipo di modelli scarsamente impiegati nella pratica. L'esistenza di una forma ridotta lineare per le variabili esplicative endogene di una equazione non-lineare, pur essendo una ipotesi fedele al concetto di informazione limitata, risulta certamente poco credibile nel contesto di un sistema simultaneo autenticamente non-lineare.

Chi costruisce o impiega modelli econometrici di una certa complessita' si rende subito conto della scarsa applicabilita' del metodo di minimi quadrati a due stadi non-lineari proposto da Kelejian (1971; per una discussione sull'applicabilita' dei metodi di stima all'aumentare delle dimensioni del modello, si veda Maddala, 1981). Solo con un numero di variabili esogene presenti nel sistema di gran lunga inferiore al numero di osservazioni campionarie e' possibile effettuare il primo stadio della stima con un grado del polinomio superiore a uno. Cio' non compromette ovviamente le proprieta' asintotiche dello stimatore, ove si ipotizzi che il grado del polinomio possa aumentare all'aumentare della numerosita' campionaria, ma influisce negativamente sul comportamento dello stimatore sui campioni finiti.

Sono stati allora i metodi della classe NL2S, dove gli strumenti sono ottenuti mediante simulazione deterministica del sistema (SIV), a produrre risultati applicativi su modelli di una certa complessita'. Non richiedendo una stima diretta della forma ridotta, questi metodi (che possono essere a due stadi, analogamente al LIVE di Brundy e Jorgenson, 1971, oppure iterativi, analogamente al metodo IIV di Dutta e Lyttkens, 1974) non soffrono delle limitazioni gia' riscontrate per il metodo a due stadi di Kelejian e l'applicazione a sistemi non-lineari anche di notevoli dimensioni e complessita' risulta si' estremamente impegnativa e onerosa, ma non presenta ostacoli concettuali o tecnici insormontabili (si vedano, ad esempio, i lavori di Bianchi, Brillet e Calzolari, 1987, Toedter, 1990, Angeloni, et al., 1991).

3. Metodi a informazione completa

Parallelamente a questi metodi a informazione limitata prendono forma analoghi metodi di stima a informazione completa. Jorgenson e Laffont (1974) sviluppano una teoria sugli stimatori CUAN per sistemi di equazioni simultanee non-lineari. Propongono un metodo di variabili strumentali che minimizza $f'\{\hat{\Sigma}^{-1}\otimes[X(X'X)^{-1}X']\}f$, dove $\hat{\Sigma}$ e' una stima consistente di Σ. Sebbene la definizione di minimi quadrati a tre stadi non-lineare non venga adottata esplicitamente, la letteratura successiva indica generalmente tale metodo con la sigla NL3S o NL3SLS per l'ovvia analogia con il NL2S di Amemiya (1974). Jorgenson e Laffont dimostrano l'equivalenza asintotica di questo metodo con il metodo della minima distanza, e l'inefficienza di entrambi rispetto al metodo di massima verosimiglianza.

Gallant (1977) definisce un metodo di minimi quadrati a tre stadi che tiene conto di possibili restrizioni non-lineari tra i parametri delle diverse equazioni. Inizia poi un'analisi approfondita delle ipotesi (che trovera' una sistematizzazione piu' completa in Burguete, Gallant e Souza, 1982) e affronta alcuni problemi relativi alla identificazione dei parametri del modello non-lineare (argomento in seguito approfondito da Gallant e Holly, 1980, e soprattutto da Brown, 1983).

Amemiya (1977, p.963) adotta una definizione piu' generale per la classe di stimatori NL3S. Si tratta di minimizzare $f'Af$ con una possibilita' di scelta piuttosto ampia per la matrice A tra cui, ovviamente, la scelta di Jorgenson e Laffont (1974): $A = \hat{\Sigma}^{-1}\otimes[X(X'X)^{-1}X']$. Con altre scelte della matrice A si ottengono stime con le variabili strumentali simulate, analoghe alle stime a informazione completa proposte da Brundy e Jorgenson (1971), Dhrymes (1971), Lyttkens (1974) per i modelli lineari. Con le scelte consentite per A, la matrice di varianze e covarianze dei coefficienti dell'intero sistema risulta essere $[plim\, T^{-1}(\partial f'/\partial a)A(\partial f/\partial a')]^{-1}$. Il limite inferiore per questa matrice di varianze e covarianze risulta essere $[\lim T^{-1}E(\partial f'/\partial a)(\Sigma^{-1}\otimes I)E(\partial f/\partial a')]^{-1}$. Tale limite verrebbe raggiunto impiegando in ogni equazione gli stessi strumenti dell'"infeasible BNL2S", ossia $E(\partial f_i/\partial a_i')$, in pratica i valori attesi dei regressori. Il metodo di stima che ne risulta viene definito metodo dei minimi quadrati a tre stadi ottimale (best: BNL3S). Per le stesse considerazioni gia' svolte nel paragrafo (2.2) sulla impossibilita' pratica di calcolare questi strumenti nel caso di modelli complessi, la letteratura successiva indica questo metodo come "infeasible BNL3S".

Sempre Amemiya (1977) formalizza la stima di massima verosimiglianza a informazione completa per modelli non-lineari (NLFIML) e fornisce anche una elegante dimostrazione sulla possibilita' di ottenere la stima iterando fino a convergenza un metodo di variabili strumentali, con una opportuna scelta degli strumenti: si tratta di strumenti stocastici, diversi quindi dagli strumenti della classe di stimatori NL3S. Si estende cosi' ai modelli non-lineari quella equivalenza (almeno sul piano operativo, se non su quello concettuale) tra i metodi di massima verosimiglianza e i metodi di variabili strumentali gia' teorizzata, per i modelli lineari, da Durbin (1963, 1988) e successivamente ripresa e applicata da Hausman (1974, 1975).

Hatanaka (1978) sviluppa una versione linearizzata, a due stadi, del metodo FIML non-lineare, elencando in dettaglio i passi operativi per l'applicazione ai modelli econometrici simultanei piu' diffusi nelle applicazioni pratiche, ossia i modelli non-lineari nelle variabili, ma lineari nei coefficienti (si veda anche Mellander, 1983, per una formalizzazione parzialmente analitica del FIML per questo tipo di modelli).

3.1. Consistenza e robustezza

La consistenza del NLFIML viene dimostrata da Amemiya (1977, 1982) solo nel caso di normalita' degli errori strutturali. Questa e' una differenza importante rispetto al caso del modello lineare dove la consistenza del FIML non richiede la corretta specificazione del processo di errore.

Il problema della scarsa robustezza del NLFIML e' stato dibattuto in seguito nella letteratura. Da un lato le proprieta' delle stime di massima verosimiglianza e relativi problemi inferenziali nel caso di errata specificazione del processo di errore vengono affrontati in un contesto molto generale nei lavori sulla "quasi massima verosimiglianza" (QML, White, 1982, 1983) e "pseudo massima verosimiglianza" (PML, Gourieroux, Monfort e Trognon, 1984). Dall'altro lato, nel caso specifico dei sistemi simultanei non-lineari, Phillips (1982) e Davidson (1985) identificano casi in cui il mancato rispetto dell'ipotesi di normalita' porta, nonostante tutto, ad una stima NLFIML consistente. Rimane comunque un problema di sostanziale non-robustezza delle stime di massima verosimiglianza, di cui non risentono invece le stime della classe NL3S.

3.2. Algoritmi di calcolo

Le difficolta' di calcolo connesse con la massimizzazione della funzione di verosimiglianza (2) sono apparse in tutta evidenza gia' nelle prime applicazioni ai sistemi di equazioni lineari (e.g. Chernoff e Divinsky, 1953). Si deve infatti notare che per le stime FIML l'unica semplificazione che la linearita' del modello apporta alla (2) e' nel determinante Jacobiano, che rimane costante al variare dell'indice t.

Il metodo di massimizzazione generalmente adottato nei primi e pionieristici lavori sulle stime FIML e' stato il metodo di Newton-Raphson. Per ovviare alla difficolta' di convergenza di tale metodo, Eisenpress e Greenstadt (1966) ne propongono una modifica: ad ogni iterazione l'algoritmo di Newton-Raphson viene impiegato per determinare la direzione lungo cui muoversi, mentre la lunghezza del passo da compiere viene determinata con un semplice algoritmo di ottimizzazione unidimensionale lungo la direzione data.

Sfruttando l'identita' fondamentale sulla matrice di informazione, basata sull'uguaglianza tra i valori attesi delle derivate seconde (matrice Hessiana) e dei prodotti esterni delle derivate prime della funzione di verosimiglianza (outer product matrix), Berndt, Hall, Hall e Hausman (1974) propongono un metodo di gradiente che non richiede il laborioso calcolo delle derivate seconde.

Hausman (1974, 1975), riprendendo un precedente lavoro di Durbin (1963, 1988) osserva che per un modello lineare si puo' ottenere la stima FIML iterando, fino alla convergenza, un algoritmo di variabili strumentali di tipo FIVE. Amemiya (1977) dimostra che questo metodo puo' estendersi ai modelli non-lineari, purche' gli strumenti vengano definiti e calcolati in modo opportuno (diversi dagli strumenti della classe NL3S), ma sospetta che non si tratti di un algoritmo di calcolo efficiente. Dagenais (1978) si accorge, invece, che si tratta spesso di un algoritmo preferibile al Newton-Raphson quando il punto di partenza del procedimento numerico e' abbastanza lontano dal punto di massimo.

Belsley (1979) rileva la maggiore semplicita' degli algoritmi iterativi della classe NL3S, rispetto a quelli per il FIML. In un articolo successivo (1980) concentra l'attenzione sul FIML non-lineare e applicando sperimentalmente i diversi algoritmi ad alcuni modelli con dati reali, osserva che il numero di iterazioni necessarie quando si usa il metodo di Newton-Raphson e' decisamente piu' basso che per gli altri metodi, talmente piu' basso da compensare il maggior tempo di calcolo richiesto da ogni singola iterazione (dovuto principalmente al calcolo della matrice Hessiana) Calzolari, Panattoni e Weihs (1987) effettuano una vasta sperimentazione di tipo Monte Carlo sui diversi algoritmi applicati a modelli lineari e non-lineari di varie dimensioni. Distinguono tra i problemi di convergenza globale relativi ai metodi di massimizzazione e quelli di convergenza locale (in prossimita' del punto di massimo). Arrivano a suggerire una strategia ottimale di tipo misto basata, nelle prime iterazioni, sull'impiego congiunto di variabili strumentali o minimi quadrati generalizzati (tipo Amemiya, Dagenais o Hausman) e di ottimizzazione unidirezionale fino al soddisfacimento di un criterio di convergenza piuttosto grossolano; poi, nelle ultime iterazioni, su un metodo analogo a quello di Eisenpress e Greenstadt. Robinson (1988b), senza occuparsi degli aspetti dell'efficienza computazionale degli algoritmi, analizza le proprieta' statistiche degli stimatori che si ottengono ai vari stadi di iterazione con i diversi algoritmi di calcolo. Sempre prescindendo dall'efficienza computazionale, Calzolari e Panattoni (1988) studiano l'impatto dei diversi algoritmi di calcolo sulla stima delle varianze e covarianze dei coefficienti, utilizzando tecniche Monte Carlo.

Per concludere, occorre ricordare che sono stati anche proposti metodi che non richiedono neppure il calcolo delle derivate prime della funzione di verosimiglianza, metodi per i quali la maggiore lentezza e le eventuali difficolta' di convergenza possono essere compensate dalla maggiore semplicita' di programmazione (e.g. Parke, 1982).

3.3. Momenti simulati, stime semiparametriche e restrizioni sulle covarianze

Due argomenti apparentemente lontani fra loro hanno ricevuto negli ultimi tempi una particolare attenzione da parte degli econometrici: le stime semiparametriche (Hansen, 1982, Chamberlain, 1987, Robinson, 1988a, Newey, 1990b) e i metodi dei momenti simulati (o simulation-based estimation: McFadden, 1989, Pakes e Pollard, 1989, Laroque e Salanie, 1989, Lee e Ingram, 1991, Gourieroux e Monfort, 1991).

L'approccio semiparametrico alla stima di un modello econometrico rappresenta un compromesso tra la scelta parametrica e l'approccio non-parametrico. In particolare, molta attenzione e' stata rivolta al problema della stima di una struttura parametrica, dove pero' non viene specificata la distribuzione dei termini di errore. I metodi "simulation-based" si basano su tecniche di tipo Monte Carlo (o simulazione stocastica) per calcolare momenti o probabilita' da impiegare poi in una stima col metodo dei momenti o con il metodo della massima verosimiglianza.

In due recenti articoli, Robinson (1991) e Brown (1990) propongono l'uso delle tecniche di simulazione "residual-based" (Brown e Mariano, 1984) in un sistema simultaneo non-lineare per produrre gli strumenti del metodo dei minimi quadrati a tre stadi ottimale. Ottengono in questo modo una versione "feasible" del BNL3S, di applicazione pratica relativamente agevole. Il metodo risultante e' asintoticamente equivalente all'"infeasible BNL3S" ed e' asintoticamente efficiente nella classe degli stimatori semiparametrici; raggiunge cioe', il "semiparametric efficiency bound" ricavato da Chamberlain (1987) in un contesto generale (si veda anche, a questo proposito, la rassegna in Newey, 1990a).

Newey (1990b) esamina due diversi metodi per rendere operativo (o "feasible") il metodo BNL3S: uno coincide praticamente con il metodo dello sviluppo in serie di Kelejian (1971), l'altro si basa su una regressione non-parametrica per la costruzione degli strumenti ottimali.

Sotto ipotesi un po' meno generali sui termini di disturbo, pur senza adottare una specifica distribuzione, e' possibile derivare metodi di stima piu' efficienti. Ad esempio Brown (1990) sviluppa alcune varianti "feasible", efficienti rispetto al BNL3S nell'ipotesi di distribuzione simmetrica dei termini di errore. Newey (1990a) ricava il "semiparametric efficiency bound" nell'ipotesi di indipendenza stocastica tra i termini di errore e le variabili esogene (il risultato piu' generale di Chamberlain, 1987, richiedeva una ipotesi meno restrittiva sulla media condizionata degli errori). Rilstone (1991) ricava una stima efficiente rispetto al BNL3S; per mezzo di regressioni ausiliarie tra i termini di disturbo e i tradizionali strumenti ottimali, si ottengono condizioni addizionali sui momenti che, solo se il modello non e' lineare, possono migliorare l'efficienza delle stime; si arriva al risultato apparentemente paradossale che l'impiego di strumenti ottenuti mediante un processo di stima (e quindi "feasible") e' preferibile all'ipotetico impiego degli strumenti ottimali teorici.

L'impiego dei residui nella costruzione degli strumenti e' stato sfruttato soprattutto per migliorare l'efficienza delle stime nel caso di restrizioni sulle covarianze tra equazioni (ad esempio nel caso di matrice di covarianze diagonale, o diagonale a blocchi, o nel caso generale di restrizioni lineari). Per il modello simultaneo lineare Hausman, Newey e Taylor (1987) costruiscono gli strumenti efficienti combinando linearmente, oltre alle variabili esogene e ritardate endogene del sistema, anche i residui delle equazioni non correlate (si veda anche al riguardo il lavoro di Rothenberg e Ruud, 1990). Calzolari e Sampoli (1992) estendono la trattazione ai sistemi non-lineari e osservano che, se il metodo delle variabili strumentali viene impiegato iterativamente per produrre stime FIML, non e' necessario rispettare i tradizionali requisiti per gli strumenti: incorrelazione con i termini di errore e massima correlazione con i regressori.

4. Le ipotesi

Con pochissime (recenti) eccezioni, nel caso non-lineare lo studio dei metodi di stima e delle loro proprieta' viene sempre impostato per modelli statici: i regressori, cioe', sono sempre variabili esogene o endogene correnti, o funzioni di esogene o endogene correnti. Fino alla fine degli anni '70 la presenza di endogene ritardate tra i regressori di un sistema simultaneo non-lineare, inevitabile in ogni modello di una certa complessita', veniva segnalata come fonte di possibili problemi (si vedano, ad esempio, Gallant, 1977, p.73 e Hatanaka, 1978, p.326). Sono rispettivamente del 1982 il lavoro di Burguete, Gallant e Souza e del 1983 l'articolo di Amemiya che, in un certo senso, fanno il punto della situazione per il modello simultaneo non-lineare statico (si vedano anche il libro di Amemiya, 1985, e l'articolo di Hausman, 1983).

I primi lavori che prendono in esame esplicitamente i modelli non-lineari dinamici sono di Bierens (1982) e di Hansen (1982). In forme diverse, entrambi i lavori richiedono una forma di omogeneita' temporale per il processo generatore dei dati. Forme di eterogeneita' vengono prese esplicitamente in esame negli articoli di Domowitz e White (1982), White e Domowitz (1984) (si veda anche il libro di White, 1984), Gallant e White (1987), Andrews (1988), che trattano versioni della legge uniforme dei grandi numeri e del teorema del limite centrale applicabili a variabili casuali dipendenti e non identicamente distribuite. Una recente e dettagliata rassegna delle problematiche relative alla teoria asintotica per modelli econometrici non-lineari dinamici e' fornita da Poetscher e Prucha (1991).

Proprieta' delle stime in condizioni di non-stazionarieta' sono praticamente ancora tutte da scoprire. Alcune ipotesi che permettono la presenza di forme di non-stazionarieta' stabile sono discusse da Gallant e White (1987). Tali ipotesi, pero', non arrivano a coprire metodi di stima basati sull'impiego di variabili strumentali piuttosto complesse. Proprieta' di stimatori quali il "feasible BNL3S" in presenza di variabili endogene ritardate sono dimostrate solo sotto ipotesi di "regolarita' assoluta" (Robinson, 1991, p.762), ben difficili da verificare se non in casi di non-linearita' molto semplici; si pensi, ad esempio, al problema della stazionarieta', cosi' agevole da affrontare attraverso lo studio degli autovalori nei modelli lineari, e cosi' ambiguo, invece, nei modelli dinamici non-lineari (Malgrange, 1981).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Amemiya, T. (1974): "The Nonlinear Two-Stage Least-Squares Estimator", Journal of Econometrics 2, 105-110.

Amemiya, T. (1975): "The Nonlinear Limited-Information Maximum-Likelihood Estimator and the Modified Nonlinear Two-Stage Least-Squares Estimator", Journal of Econometrics 3, 375-386.

Amemiya, T. (1977): "The Maximum Likelihood and the Nonlinear Three-Stage Least Squares in the General Nonlinear Simultaneous Equation Model", Econometrica 45, 955-968.

Amemiya, T. (1982): "Correction to a Lemma", Econometrica 50, 1325-1328.

Amemiya, T. (1983): "Non-linear Regression Models", in Handbook of Econometrics, ed. by Z. Griliches and M. D. Intriligator. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, Vol. I, 333-389.

Amemiya, T. (1985): Advanced Econometrics. Oxford: Basil Blackwell Ltd.

Anderson, T. W., M. Kunitomo, and T. Sawa (1982): "Evaluation of the Distribution Function of the Limited Information Maximum Likelihood Estimator", Econometrica 50, 1009-1027.

Andrews, D. W. K. (1988): "Laws of Large Numbers for Dependent Non-Identically Distributed Random Variables", Econometric Theory 4, 458-467.

Angeloni, I., C. Bianchi, G. Bruno e A. Cividini (1991): "Stima Simultanea del Modello Monetario Mensile della Banca d'Italia: Problemi Econometrici e Primi Risultati Empirici". Roma: Banca d'Italia, Ricerche Applicate e Modelli per la Politica Economica, numero speciale dei Contributi all'Analisi Economica (in corso di stampa).

Artus, P., M. Deleau, and P. Malgrange (1986): Modelisation Macroeconomique. Paris: Economica.

Berndt, E. K., B. H. Hall, R. E. Hall, and J. A. Hausman (1974): "Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models", Annals of Economic and Social Measurement 3, 653-665.

Belsley, D. A. (1979): "On the Computational Competitiveness of Full-Information Maximum-Likelihood and Three-Stage Least-Squares in the Estimation of Nonlinear, Simultaneous-Equations Models", Journal of Econometrics 9, 315-342.

Belsley, D. A. (1980): "On the Efficient Computation of the Nonlinear Full-Information Maximum-Likelihood Estimator", Journal of Econometrics 14, 203-225.

Bianchi, C., J. L. Brillet, and G. Calzolari (1987): "Measuring Forecast Uncertainty: A Review with Evaluation Based on a Macro Model of the French Economy", International Journal of Forecasting 3, 211-227.

Bierens, H. J. (1982): "A Uniform Weak Law of Large Numbers under ϕ - mixing with Applications to Nonlinear Least Squares", Statistica Neerlandica 36, 81-86.

Bowden, R. J. and D. A. Turkington (1984): Instrumental Variables. Cambridge University Press, Econometric Society Monographs in Quantitative Economics.

Brown, B. W. (1983): "The Identification Problem in Systems Nonlinear in the Variables", Econometrica 51, 175-196.

Brown, B. W. (1990): "Simulation-Based Semiparametric Estimation and Prediction in Nonlinear Systems". Houston: Rice University, discussion paper presented at the 6th World Congress of the Econometric Society, Barcelona.

Brown, B. W., and R. S. Mariano (1984): "Residual-Based Procedures for Prediction and Estimation in a Nonlinear Simultaneous System", Econometrica 52, 321-343.

Brundy, J. M., and D. W. Jorgenson (1971): "Efficient Estimation of Simultaneous Equations by Instrumental Variables", The Review of Economics and Statistics 53, 207-224.

Burguete, J. F., A. R. Gallant, and G. Souza (1982): "On Unification of the Asymptotic Theory for of Nonlinear Econometric Models", Econometric Reviews 1, 151-190.

Calzolari, G., and L. Panattoni (1988): "Alternative Estimators of FIML Covariance Matrix: A Monte Carlo Study", Econometrica 56, 701-714.

Calzolari, G., L. Panattoni, and C. Weihs (1987): "Computational Efficiency of FIML Estimation", Journal of Econometrics 36, 299-310.

Calzolari, G., and L. Sampoli (1992): "A Curious Result on Exact FIML and Instrumental Variables". Universita' di Firenze: Dipartimento Statistico, mimeo.

Chamberlain, G. (1987): "Asymptotic Efficiency in Estimation with Conditional Moment Restrictions", Journal of Econometrics 34, 305-334.

Chernoff, H., and N. Divinsky (1953): "The Computation of Maximum-Likelihood Estimates of Linear Structural Equations", in Studies in Econometric Method, ed. by W. C. Hood and T. C. Koopmans. New York: John Wiley & Sons, Inc., Cowles Commission Monograph No. 14, 236-302.

Dagenais, M. G. (1978): "The Computation of FIML Estimates as Iterative Generalized Least Squares Estimates in Linear and Nonlinear Simultaneous Equations Models", Econometrica 46, 1351-1362.

Davidson, J. (1985): "Some Evidence on the Robustness of Nonlinear FIQML". London School of Economics, discussion paper.

Domowitz, I., and H. White (1982): "Misspecified Models with Dependent Observations", Journal of Econometrics 20, 35-58.

Durbin, J. (1963, 1988): "Maximum Likelihood Estimation of the Parameters of a System of Simultaneous Regression Equations". London School of Economics: discussion paper presented at The European Meeting of the Econometric Society, Copenhagen. Econometric Theory 4, 159-170.

Dhrymes, P. J. (1971): "A Simplified Structural Estimator for Large-Scale Econometric Models", Australian Journal of Statistics 13, 168-175.

Dutta, M., and E. Lyttkens (1974): "Iterative Instrumental Variables Method and Estimation of a Large Simultaneous System", Journal of the American Statistical Association 69, 977-986.

Eisenpress, H., and J. Greenstadt (1966): "The Estimation of Nonlinear Econometric Systems", Econometrica 34, 851-861.

Faliva, M. (1987): Econometria: Principi e Metodi. Torino: UTET.

Gallant, A. R. (1977): "Three-Stage Least-Squares Estimation for a System of Simultaneous, Nonlinear, Implicit Equations", Journal of Econometrics 5, 71-88.

Gallant, A.R., and H. Holly (1980): "Statistical Inference in an Implicit, Nonlinear, Simultaneous Equation Model in the Context of Maximum Likelihood Estimation", Econometrica 48, 697-720.

Gallant, A.R., and H. White (1987): A Unified Theory of Estimation and Inference for Nonlinear Dynamic Models. Oxford: Basil Blackwell.

Gourieroux, C., and A. Monfort (1991): "Simulation Based Inference in Models with Heterogeneity", Annales d-Economie et de Statistique 20/21, 69-107.

Gourieroux, C., A. Monfort, and A. Trognon (1984): "Pseudo Maximum Likelihood Methods: Theory", Econometrica 52, 681-700.

Hansen, L. P. (1982): "Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators", Econometrica 50, 1029-1054.

Hatanaka, M. (1978): "On the Efficient Estimation Methods for the Macro-Economic Models Nonlinear in Variables", Journal of Econometrics 8, 323-356.

Hausman, J. A. (1974): "Full Information Instrumental Variables Estimation of Simultaneous Equations Systems", Annals of Economic and Social Measurement 3, 641-652.

Hausman, J. A. (1975): "An Instrumental Variable Approach to Full Information Estimators for Linear and Certain Nonlinear Econometric Models", Econometrica 43, 727-738.

Hausman, J. A. (1983): "Specification and Estimation of Simultaneous Equation Models", in Handbook of Econometrics, ed. by Z. Griliches and M. D. Intriligator. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, Vol.I, 391-448.

Hausman, J. A., W. K. Newey, and W. E. Taylor (1987): "Efficient Estimation and Identification of Simulaneous Equation Models with Covariance Restrictions", Econometrica 55, 849-874.

Jorgenson, D. W., and J. Laffont (1974): "Efficient Estimation of Nonlinear Simultaneous Equations with Additive Disturbances", Annals of Economic and Social Measurement 3, 615-640.

Kelejian, H. (1971): "Two-Stage Least Squares and Econometric Systems Linear in Parameters and Nonlinear in Endogenous Variables", Journal of the American Statistical Association 66, 373-374.

Klein, L. R. (1983): Lectures in Econometrics. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

Laroque, G., and B. Salanie (1989): "Estimation of Multimarket Fix-Price Models: An Application of Pseudo-Maximum Likelihood Methods", Econometrica 57, 831-860.

Lee, B. S., and B. F. Ingram (1991): "Simulation Estimation of Time-Series Models", Journal of Econometrics 47, 197-205.

Lyttkens, E. (1974): "The Iterative Instrumental Variables Method for Estimating Interdependent Systems", Journal of Multivariate Analysis 4, 283-307.

Maddala, G. S. (1981): "Statistical Inference in Relation to the Size of the Model", in Large-Scale Macro-Econometric Models, ed. by J. Kmenta and J. B. Ramsey. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 191-218.

Malgrange, P. (1981): "Note sur le Calcul des Valeurs Propres d'un Modèle Macroéconomique", Annales de l'INSEE 41, 61-77.

Mariano, R. S. (1982): "Analytical Small Sample Distribution Theory in Econometrics: The Simultaneous Equations Case", International Economic Review 23, 503-533.

McFadden, D. (1989): "A Method of Simulated Moments for Estimation of Discrete Response Models without Numerical Integration", Econometrica 57, 995-1026.

Mellander, E. (1983): "A General FIML Estimator for a Certain Class of Models that are Nonlinear in the Variables". Stockholm: The Industrial Institute for Economic and Social Research, discussion paper presented at the European Meeting of the Econometric Society, Pisa.

Newey, W. K. (1990a): "Semiparametric Efficiency Bounds", Journal of Applied Econometrics 5, 99-135.

Newey, W. K. (1990b): "Efficient Instrumental Variables Estimation of Nonlinear Models", Econometrica 58, 809-837.

Pagan, A. (1990): Simultaneous Equations: Estimation and Inference. Bologna: Dispense del Centro Interuniversitario di Econometria (CIDE).

Pakes, A., and D. Pollard (1989): "Simulation and the Asymptotics of Optimization Estimators", Econometrica 57, 1027-1057.

Parke, W. R. (1982): "An Algorithm for FIML and 3SLS Estimation of Large Nonlinear Models", Econometrica 50, 81-95.

Phillips, P. C. B. (1982): "On the Consistency of Nonlinear FIML", Econometrica 50, 1307-1324.

Poetscher, B. M., and I. R. Prucha (1991): "Basic Structure of the Asymptotic Theory in Dynamic Nonlinear Econometric Models, Part I: Consistency and Approximation Concepts", Econometric Reviews 10, 125-216.

Rilstone, P. (1991): "Using Auxiliary Regressions for More Efficient Estimation of Nonlinear Models". Quebec: Universite Laval, discussion paper presented at the European Meeting of the Econometric Society, Cambridge.

Robinson, P. M. (1988a): "Semiparametric Econometrics: A Survey", Journal of Applied Econometrics 3, 35-51.

Robinson, P. M. (1988b): "The Stochastic Difference between Econometric Statistics", Econometrica 56, 531-548.

Robinson, P. M. (1991): "Best Nonlinear Three-Stage Least Squares Estimation of Certain Econometric Models", Econometrica 59, 755-786.

Rothenberg, T. J., and P. A. Ruud (1990): "Simultaneous Equations with Covariance Restrictions", Journal of Econometrics 44, 25-39.

Toedter, K. H. (1990): "Structural Estimation and Stochastic Simulation of Large Models with Undersized Samples". Frankfurt: Deutsche Bundesbank, Research Department, discussion paper.

White, H. (1982): "Maximum Likelihood Estimation of Misspecified Models", Econometrica 50, 1-25.

White, H. (1983): "Corrigendum", Econometrica 51, 513.

White, H. (1984): Asymptotic Theory for Econometricians. Orlando: Academic Press Inc.

White, H., and I. Domowitz (1984): "Nonlinear Regression with Dependent Observations", Econometrica 52, 143-161.