The new models of decision under risk or uncertainty : What approach?

Trabelsi, Mohamed Ali

Ecole Supérieure de Commerce de Tunis, Université Manouba

2006

Les nouveaux modèles de décision dans le risque et l'incertain : quel apport ?

TRABELSI Mohamed Ali*

Résumé : *La théorie de la décision dans le risque et l'incertain a pour objet de décrire le comportement des agents face à plusieurs perspectives incertaines, attendu que chaque agent est caractérisé par des préférences qui lui sont propres. Comme il est difficile de décrire exhaustivement ces préférences, nous cherchons à les représenter : ainsi, en associant une valeur numérique à chaque perspective incertaine, nous pouvons ordonner les préférences d'un agent aussi simplement que l'on ordonne des nombres réels. Le recours à une fonction représentative des préférences (appelée aussi fonction valeur) constitue depuis fort longtemps la méthode usuelle de description du comportement dans un contexte d'incertitude. L'intérêt évident de cette méthode est de permettre d'intégrer directement ces données dans un modèle formalisé et, par extension, de comprendre le processus d'optimisation sous-jacent à toute décision.*

La détermination de la fonction représentative des préférences doit reposer sur un fondement axiomatique. On entend par là qu'un certain nombre de règles ou de comportements généraux (appelés axiomes) sont réputés communs à tous les êtres humains. De ces axiomes, on dérivera une spécification précise de la fonction valeur. L'objectif de cet article est d'examiner l'historique des théories ayant cherché à déterminer un critère satisfaisant pour répondre au problème de décision dans le risque et l'incertain, de définir le lien entre ces deux notions et d'analyser l'apport de ces modèles.

Mots clés : Aversion pour le risque, incertain, théorie perspective, utilité espérée, utilité espérée dépendante du rang.

JEL classification : D81, C91.

The new models of decision under risk or uncertainty : What approach?

Abstract: The decision theory under risk or uncertainty has for object to describe the behavior of agents facing several uncertainty perspectives, waited that every agent is characterized by preferences that are him clean. As it is difficult to describe these preferences exhaustively, we try to represent them: thus, while associating a numeric value to each uncertain perspective, we can order an agent's preferences as merely that one orders some real numbers. The recourse to a representative function of preferences (called as function value) constitutes a long time since the usual method of behavior description in uncertainty. The interest obvious of this method is to permit to integrate these data directly in a formalized model and, by extension, to understand the underlying optimization process to all decision.

The determination of the representative function of preferences must rest on an axiomatic foundation. One hears by there that a certain number of rules or general behaviors (called axioms) are reputed common to all human beings. Of these axioms one will drift a precise specification of the function value. The objective of this paper is to examine the historic of theories having looked for to determine a satisfactory criteria to answer to the problem of decision under risk or uncertainty and to analyze the approach of these models.

Key words: risk aversion, uncertainty, prospect theory, expected utility, rank dependent expected utility.

JEL classification : G81, C91.

*Maître assistant HDR à l'Ecole Supérieure de Commerce de Tunis, Université Manouba.
E-mail: MedAli.Trabelsi@esct.rnu.tn ou daly1704@yahoo.fr.

1-Théorie de l'utilité espérée et aversion pour le risque

1-1-Modèle de l'utilité espérée

En exposant le fameux problème connu sous le nom de « paradoxe de Petersbourg », Daniel Bernoulli [9] a montré que le comportement d'un agent économique averse au risque est caractérisé par un équivalent certain (le plus faible montant de revenu certain auquel le joueur serait d'accord de céder son droit de participation au jeu). Ce paradoxe examiné par N. Bernoulli [10] vint remettre en cause la validité de l'espérance mathématique : L'opportunité de participer à un jeu dans l'espérance mathématique de gain était infinie ne suscitait aucun désir de participation dès lors que le prix de son accès dépassait une somme modique. Le jeu était le suivant : Une pièce de monnaie est lancée jusqu'à ce qu'elle tombe sur pile. Lorsque pile sort, au $k^{ième}$ jet, le joueur empoche 2^k ducats. La probabilité que pile sorte au $k^{ième}$ jet ($k \in N^*$) est $(½)^k$. Ce jeu est une loterie offrant un nombre infini de résultats et dont l'espérance mathématique de gain est : ½.2+¼.4+...........= 1+1+.......= $+\infty$.

L'attitude vis à vis du risque de l'agent économique détermine sa fonction d'utilité. De ce fait, D.Bernoulli [9], cousin de N.Bernoulli[10], a proposé de remplacer le critère de l'espérance mathématique par celui de l'utilité espérée définie sur les gains monétaires, et caractérisée par une décroissance de sa dérivée première. La fonction proposée était $u(x) = \beta \log\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)$ avec $\alpha, \beta \rangle 0$.

Cramer, un contemporain de Bernoulli, est arrivé à une solution proche de celle élaborée par ce dernier en utilisant une autre fonction d'utilité de la richesse : u(x)= $\sqrt{x}$ qui postule, comme la précédente, une décroissance de l'utilité marginale de la richesse.

Et ce n'est qu'en 1947, avec l'ouvrage de Von Neumann et Morgenstern (VNM) qu'une théorie de l'utilité a été définie.

Le théorème de l'utilité espérée affirme que, confronté à un ensemble de lignes d'actions aux résultats aléatoires ou, de manière plus générale, à un ensemble de loteries, un individu choisira celle dont l'utilité espérée est la plus élevée, pour autant que son comportement respecte cinq axiomes : la comparabilité, la transitivité, l'indépendance forte, la continuité et la dominance.

La réunion de ces cinq axiomes a permis d'énoncer le résultat suivant:

Théorème: *Pour toute relation de préférence qui est définie sur un espace des lois de probabilité* Ω *et qui satisfait les cinq axiomes, il existe une fonction d'utilité U définie sur* Ω *et à valeurs dans* $\Re$ *telle que :*

1/ $p \succ q$ *si et seulement si U(p)* $\geq$ *U(q)*

2/ $\forall\, p,q \in \Omega$ *et* $\alpha \in [0,1]$, $U(\alpha p + (1-\alpha)q) = \alpha U(p) + (1-\alpha)U(q)$.

La théorie de l'utilité espérée a pour objectif la description du comportement de l'individu face à des choix en incertitude. Cette théorie possède deux qualités principales : premièrement, elle sépare les croyances sur les sources d'incertitude, représentées par des probabilités sur des événements incertains et de l'utilité pour les gains certains, représentée par une fonction d'utilité sur les conséquences certaines. Deuxièmement, la fonction représentant les préférences est linéaire par rapport aux probabilités.

Ces qualités sont à l'origine du succès du modèle d'espérance d'utilité comme moyen de représenter les préférences d'agents évoluant dans un environnement incertain. Ce modèle reflète-t-il, pour autant, les comportements réels des individus confrontés à des choix dans une telle situation ? Plus précisément, deux questions se posent. Premièrement, est-il raisonnable de supposer que tout individu est capable d'attribuer une unique distribution de probabilité à toute situation d'incertitude ? Deuxièmement, même lorsqu'il existe une distribution de probabilité, l'individu se comporte-t-il conformément au modèle d'espérance d'utilité ?

Les auteurs qui se sont penchés sur le modèle de l'utilité ont montré que les niveaux d'utilité attachés aux différents gains ne font que refléter un ordre de préférence et il faut se garder de leur donner une quelconque interprétation psychologique ou philosophique. Ainsi, la construction de la courbe d'utilité ne dépend que de la richesse initiale du décideur et de son aversion pour le risque. A souligner que si, le critère de maximisation de l'utilité espérée apporte une réponse théorique au problème de choix en situation d'incertitude, il ne permettra pas de choisir la meilleure possibilité d'investissement que si les caractéristiques de la fonction d'utilité du décideur sont parfaitement identifiées, ce qui n'est pas réalisable dans la pratique. En effet, si l'attitude du décideur respecte les axiomes de VNM, la dérivée première de la fonction d'utilité sera positive et selon Friedman et Savage [34], la dérivée seconde sera négative pour un décideur averse pour le risque.

D'autres auteurs comme Vickrey [69], Kaysen [43] et Friedman & Savage [34] se demandaient comment le modèle d'espérance d'utilité pouvait rendre compte du comportement de tous ceux qui, à la fois, souscrivaient des polices d'assurance et achetaient des tickets de loteries. En effet, payer une prime d'assurance revient à préférer une petite perte avec certitude (le paiement de la prime) plutôt qu'une grande perte avec faible probabilité.

Au contraire, la participation à des jeux d'argent révèle la préférence pour une petite chance de gagner une grosse somme combinée à une large chance de perdre une petite somme (le prix du ticket) plutôt qu'une attitude neutre.

La première attitude semble, à leurs yeux, attester l'hypothèse de décroissance de l'utilité marginale, tandis que la seconde semble la contredire. Friedman & Savage [34] apportent la réponse suivante : la fonction d'utilité est d'abord concave, puis convexe, et à nouveau concave, autorisant ainsi des attitudes jusque là considérées comme contradictoires. Cette discussion sera éclipsée par l'avènement du concept d'indépendance. Implicite dans l'ouvrage de VNM, l'axiome d'indépendance sera explicitement introduit par Marshack [50]. L'idée consiste à ce que « l'ordre des préférences entre deux loteries ne sera pas modifié si l'on combine ces deux loteries avec une même troisième ». Cette idée est la clef de voûte du modèle d'espérance d'utilité, et c'est l'axiome d'indépendance qui rend la fonction d'utilité linéaire en probabilité. Si elle a été très largement acceptée par la suite, elle n'en n'a pas moins été fortement remise en cause par Maurice Allais [6], dès son émergence. Il démontre combien l'axiome d'indépendance résiste mal à des expériences simples. Ces expériences seront longtemps qualifiées de « paradoxes », dans la mesure où la violation constatée de l'axiome d'indépendance était interprétée comme une anomalie. Une des interprétations du paradoxe d'Allais est que les agents préfèrent les situations de certitude aux situations risquées.

Sous la dénomination de « paradoxe d'Allais », on sous-entend une expérimentation aboutissant à cette violation. De ce fait, l'espérance d'utilité ne semble pas en mesure de représenter les préférences d'une majorité d'agents.

Pour conclure, on peut dire que l'hypothèse d'espérance d'utilité laisse une certaine liberté quant aux choix de la fonction d'utilité VNM lors des applications économiques. Il faut simplement que celle-ci soit conforme au comportement de l'individu et reflète son attitude face au risque. Cette notion de risque constitue une hypothèse centrale dans la théorie financière moderne.

1-2-Mesures d'aversion pour le risque

L'aversion à l'égard du risque constitue donc une hypothèse centrale dans la théorie financière moderne. En effet, les investisseurs exigent une rémunération d'autant plus importante que le risque de leurs emplacements financiers est élevé.

Les études montrent qu'un investisseur a de l'aversion pour le risque si et seulement si sa fonction d'utilité VNM est strictement concave. Autrement dit, l'utilité marginale de la richesse doit être décroissante ($u^{''}(.) \leq 0$). Si l'utilité marginale de la richesse est croissante (resp. constante) l'investisseur opte pour le risque (resp. est neutre au risque).

Arrow [7] et Friend et Blume [35] ont montré que l'aversion absolue pour le risque décroît lorsque la richesse d'un individu augmente. Quant à Pratt [52], il a montré que l'aversion relative croit avec la richesse comme conséquence du fait que l'aversion absolue au risque est décroissante en la richesse. Cette hypothèse a été mise en cause par Friend et Blume [35] qui ont montré que l'aversion relative est plutôt constante.

Dans le même cadre de l'incertitude, Kimball [45] introduit la notion de prudence, comme étant « la propension qu'ont les individus à s'armer et se préparer pour affronter l'incertitude ». Pour lui, la prudence traduit la façon dont l'incertitude affecte les variables de décision : elle permet d'analyser les problèmes où l'on s'intéresse à l'effet du risque sur l'utilité marginale des agents, et non pas sur leur utilité totale. Sandmo [58] et Leland [46] ont étudié la décision d'épargne en incertain. Les résultats montrent que la prudence indique l'intensité du motif d'épargne de précaution : si les revenus futurs sont aléatoires, les individus prudents épargnent davantage pour se prémunir contre les variations de leur consommation future. Ils ont fini par conclure que ce type de comportement est induit par la convexité marginale, c'est à dire qu'il correspond à une dérivée troisième positive pour la fonction d'utilité VNM ($u^{'''}(.) \rangle 0$). Or la convexité de l'utilité marginale est impliquée par la décroissance de l'indice d'aversion absolue d'Arrow [7] et de Pratt [52]. Cette propriété entraîne que la prudence absolue est plus grande que l'aversion absolue. L'analogie entre la mesure d'Arrow [7] et de Pratt [52] et celle de Kimball [45] est assez évidente. La première évalue la concavité de la fonction d'utilité, la seconde évalue la convexité de l'utilité marginale. Afin de bien clarifier la différence de nature qui existe entre les deux concepts, Viala et Briys [68] citent le cas de la fonction d'utilité quadratique qui est représentative d'un comportement d'aversion pour le risque, mais pas d'un comportement prudent : l'utilité marginale est linéaire en la richesse ($u^{'''}(.) = 0$). Par conséquent, si les individus auxquels on associe cette fonction d'utilité achètent de l'assurance, l'incertitude ne les conduit jamais à accroître leur épargne en vue de se protéger des aléas portant sur leur consommation future.

Dans ce cadre, certains auteurs ont suggéré une fonction d'utilité quadratique en remarquant qu'elle décrit correctement le comportement de l'investisseur lorsqu'il est confronté au risque d'un placement en valeurs mobilières. Mais cette hypothèse reste limitée. En effet, si on considère la fonction d'utilité quadratique suivante: $U(r)=a+br-r^2$ où r est le taux de rentabilité perçu par l'investisseur et a, b et c des constantes avec b et c strictement positifs.

Si une telle fonction peut décrire l'attitude d'un investisseur qui a de l'aversion pour le risque puisque sa dérivée seconde est négative, elle n'est toutefois utilisable que si r $\in \left]-\infty, \frac{b}{2c}\right]$ pour que la dérivée première soit positive. Cette limitation constitue un inconvénient de l'utilisation d'une fonction d'utilité quadratique.

1-3-Critiques adressées au modèle d'utilité espérée

En plus des violations expérimentales de l'axiome d'indépendance, le modèle d'espérance d'utilité soulève aussi une difficulté théorique, à savoir l'interprétation de la fonction u. En effet, cette fonction possède deux rôles :

Le premier consiste à exprimer l'attitude du décideur vis-à-vis du risque (la concavité de u impliquant l'aversion pour le risque).

Le second rôle consiste à exprimer la satisfaction des résultats dans le certain (la concavité de u impliquant une utilité marginale décroissante de la richesse).

En particulier, il est impossible dans ce modèle, comme le notent Cohen et Tallon [24], de représenter un agent qui aurait à la fois une utilité marginale décroissante et du goût pour le risque. Si le modèle d'espérance d'utilité a le mérite de la parcimonie, il ne permet pas de séparer la représentation de l'attitude vis-à-vis du risque de celle vis-à-vis de la richesse dans le certain.

2-Modèles de décision dans le risque ou théories de l'utilité « non espérée »

La théorie de l'utilité espérée reste la référence de la représentation du comportement face à une incertitude exogène. Elle s'applique au cas d'une incertitude mesurée par une distribution de probabilité. Dès que la distribution n'est pas connue et peut dépendre de la décision de l'investisseur afin de mieux tenir compte du type d'incertitude qui prévaut sur les marchés financiers, le modèle de l'utilité espérée devient incapable de représenter convenablement l'attitude de l'investisseur face au risque. D'autre part, les résultats de plusieurs études empiriques et expérimentales contestent les prédictions de la théorie standard de VNM [70]. Par exemple, l'une des premières études expérimentales, celles de Allais [6], remet en cause l'hypothèse de linéarité des probabilités. Ellsberg [32] montre par ailleurs que les agents ne respectent pas l'axiome d'indépendance, en remarquant que les pondérations des utilités ne sont pas des probabilités (subjectives). D'où l'apparition de nouveaux modèles de décision tenant compte de cette défaillance.

2-1- La théorie des perspectives aléatoires ou « Prospect Theory »

L'idée de la « prospect theory » est de représenter des préférences par une fonction $V : L \rightarrow \Re$ telle que pour une loterie

$$L = (x_i, p_i)_{i=1,\ldots\ldots,n} \quad , V(L) = \sum_{i=1}^{n} \pi(p_i).u(x_i) \qquad \textbf{[1]}$$

où π est une fonction croissante de [0,1] dans [0,1], avec $\pi(0)=0$ et $\pi(1)=1$ et $\pi(.)$ traduit la transformation des probabilités pour l'agent dont on représente les préférences. Ce type de fonction de transformation permet de prendre en compte un éventuel « effet de certitude ». Ainsi, une discontinuité de $\pi(.)$ à gauche au point 1 traduirait de manière très commode la modification psychologique qu'entraîne le passage d'une zone de parfaite certitude à une zone de risque. Cela sous-entend que dans le voisinage du point 1, $\pi(p) \langle\ p$. Les $\pi(p_i)$ sont appelés par Kahneman & Tversky [41], comme par Edwards [29], « poids de décision ». Ce ne sont plus des probabilités puisque $\sum_{i=1}^{n} \pi(p_i)$ n'est plus nécessairement égale à 1. Ainsi les « paradoxes » d'Allais [6] ne sont désormais plus nécessairement des paradoxes.

D'autre part, Kahneman & Tversky [41] soulignent qu'il est nécessaire de distinguer les résultats positifs (gains) des résultats négatifs (pertes). En effet, en tentant d'estimer expérimentalement les fonctions d'un groupe d'agents, Kahneman & Tversky [41] remarquent que si dans les gains, l'utilité est bien concave, elle semble convexe dans les pertes (et de plus, la perte de l'utilité est plus forte dans les pertes que dans les gains). Pour cette raison, ils parlent d'un « effet de réflexion », constatant une symétrie autour de l'origine.

En s'intéressant à la prise en compte d'une transformation des probabilités, et plus précisément à un phénomène lié à cette transformation, à savoir la « sous-certitude », définie par :

$\forall\, p \in \left]0,1\right[,\ \pi(p)+\pi(1-p) \langle\ 1$, Kahneman & Tversky [41] montrent que cette « sous-certitude » revient à justifier l'effet de certitude, puisque quand p tend vers 1, la « sous-certitude » implique de manière vraisemblable que $\pi(p) \langle\ p$.

Malheureusement, la sous-additivité de la fonction π :

$$\forall\, p_1, p_2 \in \left]0,1\right[,\quad \pi(p_1)+\pi(p_2) \langle\, \pi(p_1+p_2)\ , \qquad \textbf{[2]}$$

qui implique en particulier la « sous-certitude » , conduit à la violation d'un axiome considéré comme universel en théorie économique : le respect de la dominance stochastique du premier ordre (Fishburn [33]). Cette défaillance pourrait amener au rejet en bloc la prospect theory, tout comme l'ensemble des théories précédentes adoptant de près ou de loin un critère du type : $\sum_{i=1}^{n} \pi(p_i).u(x_i)$.

Or, si Kahneman & Tversky [41], lors des premières versions de la prospect theory, n'étaient pas conscients de cette défaillance, ils la mentionnent dans l'article définitif de 1979. Peut-être la raison à laquelle ils ont considéré seulement deux résultats, ce qui exclut des violations de la dominance. Ainsi, dans le cas d'une loterie à deux résultats de même signe $L = (x_1, p_1 ; x_2, p_2)\ \ avec\ \ x_1 \le x_2$, la fonction représentative des préférences prend la forme $V(L) = u(x_1) + \pi(p_2)\left[u(x_2) - u(x_1)\right]$.

Cette spécification va nous fournir une clé pour échapper au problème du non respect de la dominance. En effet, en interprétant de manière très particulière cette expression, puis en étendant cette interprétation à trois résultats ou plus, nous pouvons suggérer la forme d'un critère de décision ne conduisant jamais à des violations de la dominance stochastique.

2-2- Théorie de l'utilité anticipée

Quiggin [55] a repris trois axiomes de l'analyse de VNM [70] : la transitivité, la dominance stochastique de premier ordre et la continuité. A ces trois axiomes, il a ajouté un axiome d'indépendance plus faible que celui de la théorie de l'utilité espérée.

Cet axiome se présente comme suit :

Soit un ensemble de conséquences C, et soit une loterie $L = \left(x_i, p_i\right)_{i=1,....,n}$ telle que la conséquence x_i est associée à la probabilité p_i avec $x_1 \le x_2 \le ...... \le x_n\ \ \ et\ \ \sum_{i=1}^{n} p_i$, alors :

$$\forall\ L_1 = (x_i, p_i)\ \ et\ \ L_2 = (x_i', p_i)\ \ \ pour\, tout\ \ i = 1,2,....,n$$

$$\exists\ c_i = CE\left\{(x_i, x_i');\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\},\ \text{et si}\ \ x_1^* = CE(L_1)\ \ et\ \ \ x_2^* = CE(L_2)\ \ \text{alors}$$

$$(c_i, p_i) \sim \left\{(x_1^*, x_2^*);\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}\ \ \text{où CE(X) est l'équivalent certain de X.}$$

Ainsi Quiggin définit une fonctionnelle d'utilité V : L $\longrightarrow \Re$ telle que :

1/ $V(L_1) \ge V(L_2)$ si et seulement si $L_1 \succ L_2$.

2/ Pour une loterie $L = (x_i, p_i)_{\ i=1,.........,n}$, $V(L) = \sum_{i=1}^{n} \pi(p_i).u(x_i)$

où π est une fonction non décroissante de [0,1] dans [0,1] vérifiant les hypothèses suivantes : π(.) est concave sur l'intervalle [0, $\frac{1}{2}$] ($\pi(p_i) \rangle\ p_i$) et convexe sur l'intervalle [$\frac{1}{2}$,1] ($\pi(p_i) \langle\ p_i$) avec $\pi(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ et $\pi(1)=1$.

3/ V est unique à une transformation affine près.

Quiggin montre que sous ces conditions la dominance stochastique de premier ordre est respectée et que ces hypothèses permettent d'expliquer les paradoxes d'Allais [6] et les résultats de Friedman et Savage [34] relatifs à la coexistence du jeu et de l'assurance. Elles sont en outre compatibles avec l'étude expérimentale de Kahneman et Tversky [41], lesquels observent que les agents sur-pondèrent les faibles probabilités et sous-pondèrent les probabilités élevées.

2-3- Théorie duale

Yaari [75] a proposé un modèle de choix alternatif au modèle d'espérance d'utilité, qu'il a qualifié de théorie duale. Cette théorie évalue la situation risquée sans transformer les richesses finales en utilité de la richesse et en modifiant la loi de probabilité qui définit le risque auquel est soumis l'individu. On remarque par ailleurs que l'attitude par rapport au risque n'est plus définie de la même manière. En effet, le critère de l'espérance d'utilité exprime les attitudes vis-à-vis du risque au travers de la transformation de la richesse. La théorie duale et on verra par la suite la théorie RDEU définissent les attitudes vis-à-vis du risque essentiellement au travers de la transformation des probabilités. La fonctionnelle d'utilité est définie comme suit : $V(L) = x_1 + \sum_{i=2}^{n} [x_i - x_{i-1}].\pi\left(\sum_{j=i}^{n} p_j\right) = DT(L)$ **[3]**

Or, dans son article, Yaari [75] a présenté une implication de son modèle pour des choix simples de portefeuille et qu'il a obtenu un résultat peu encourageant. En effet, en supposant que l'investisseur a le choix entre un actif sûr et un actif risqué dont l'espérance du rendement excède le taux sûr, Yaari obtient que l'investisseur ne diversifiera jamais, c'est à dire qu'il placera toute sa fortune soit dans l'actif sûr, soit dans l'actif risqué.

De ce fait, on peut affirmer que ce modèle a une propension à fournir des solutions en coin qui vont à l'encontre de l'idée de diversification.

Pour remédier à cette défaillance Eeckhoudt [30] a montré, à partir de deux exemples, que le modèle de Yaari [75] peut néanmoins dans certaines circonstances produire des comportements de diversification susceptibles d'intéresser les financiers pourvu qu'on s'écarte du cadre élémentaire de choix entre un actif sûr et un actif risqué.

Eeckhoudt [30] souligne que dans de très nombreuses contributions de gestion de portefeuille, on suppose que le décideur fait face uniquement aux risques relatifs au rendement de ses placements et qu'il peut ajuster en conséquence ses détentions d'actifs risqués. Toutefois, dans la réalité, en même temps qu'il gère son risque de portefeuille, le décideur est confronté à d'autres risques totalement (ou partiellement) incontrôlables (risques d'incendie, d'accident, de maladie). Il souligne donc, que dans le modèle d'espérance d'utilité, la prise en compte de ce phénomène se fait depuis quelques années par l'analyse de l'impact du « background risk » sur les choix de portefeuille.

Eeckhoudt [30] a montré que la présence de « background risk » réduit la demande d'actifs risqués dans un problème simple de portefeuille si la fonction d'utilité satisfait des conditions assez restrictives bien au-delà de la seule concavité de l'utilité (voir Eeckhoudt, Gollier et Shlesinger [31]). En d'autres termes, dans le modèle espérance d'utilité, l'idée intuitive suivant laquelle la présence de risques exogènes amène le décideur à prendre moins de risques endogènes n'est confirmée que si on accepte des restrictions très sévères sur l'allure de la fonction d'utilité.

Eeckhoudt [30] a observé que dans certains cas l'ajout d'un « background risk » au problème simple de portefeuille peut conduire à une solution intérieure aussi bien dans le modèle de Yaari [75] que dans celui d'espérance d'utilité. Ces résultats confirment ceux trouvés dans d'autres contextes par Demers-Demers [27] et Doherty-Eeckhoudt [28].

Eeckhoudt [30] a signalé, dans son article, que vis-à-vis du cas, très réaliste, de « background risk », le modèle de Yaari [75] produit assez naturellement des résultats intuitifs. Ce modèle, montre en effet, que pour une aversion au risque suffisamment élevée la présence du « background risk » va inciter le décideur riscophobe à investir moins dans l'actif risqué.

L'auteur conclut par le fait, qu'un changement, parfois mineur, dans le contexte du décideur pouvait conduire à des résultats plus nuancés et recréer un intérêt pour le modèle dual et donc a fortiori pour des modèles qui combinent l'espérance d'utilité et la théorie duale). Il faut souligner, que l'indépendance duale ne remplit pas l'exigence formulé par le RDEU.

La généralisation de l'espérance d'utilité est la conséquence d'un affaiblissement axiomatique concernant l'axiome d'indépendance, conformément aux exigences apparues dans les travaux remettant en cause la validité du critère d'espérance d'utilité. Elle s'oppose donc à ce critère dans la mesure où la fonction d'utilité est linéaire par rapport à la richesse et non linéaire par rapport aux probabilités.

Enfin, des expériences dues à Kahneman & Tversky [41], mais aussi à Cohen, Jaffray & Said [26] ont de plus montré que l'attitude d'un agent face à une perspective de perte diffère de celle adoptée face à une perspective de gain. Ces auteurs attribuent la différence entre attitude vis à vis des gains et attitude vis à vis des pertes, à la concavité de u(.) dans les gains et sa convexité dans les pertes. Ainsi, ils se demandent si la forme de la fonction de transformation des probabilités est à l'origine, d'une part de l'explication des différences d'attitudes entre gains et pertes. L'admission de cette possibilité nous a conduit à distinguer deux fonctions de transformation de probabilités. De ce fait, la généralisation de Tversky & Kahneman [66], dénommé « Cumulative Prospect Theory » suggère qu'il faille considérer deux fonctions de transformation $\pi^{+}\ et\ \pi^{-}$ pour un même agent, décrivant son attitude respectivement face à des gains et des pertes.

2-4- Théorie d'utilité dépendante du rang (le modèle RDEU)

Le modèle RDEU est une réponse tardive aux critiques du modèle EU formulées par Allais [6], et ce, en présentant de façon non linéaire les probabilités, et en tenant compte des observations de Ellsberg, en affaiblisant l'axiome d'indépendance. Le premier à avoir généralisé l'espérance d'utilité en mettant en évidence le bien-fondé de la transformation des probabilités dépendant du rang des résultats est Quiggin [55] qui avait pour objectif l'explicitation d'une fonctionnelle de préférence tenant compte de la transformation des probabilités et ne souffrant d'aucune des lacunes du modèle descriptif de Kahnman et Tversky [41]. Cet inconvénient, à savoir la violation de la dominance stochastique,a été éliminé par le remplacement de la transformation de la probabilité de chaque événement par la transformation de la distribution des probabilités décumulées d'événements ordonnés par résultat croissant. Ainsi, il a définie ce qu'on appelle par utilité anticipée (anticipated utility). Sous des appellations diverses : EURDP (Expected Utility with Rank Dependent Probability), RDEU (Rank Dependent Expected Utility), CU (Cumulative Utility), des concepts semblables ont été proposés par Chew [19], Allais [5], Segal [61] et Yaari [75] (Dual Theory), Karni et Shmeidler [42] et Gayant [37]. Ces auteurs notent que l'agent raisonne sur les probabilités cumulées et non sur les probabilités simples. Par conséquent, les préférences des agents ne peuvent pas être représentées par une fonction d'utilité espérée classique, mais plutôt par une fonction d'utilité espérée dépendante du rang.

Handa [40] initie une théorie où la fonction représentative des préférences est constituée à la fois d'une fonction mesurant la satisfaction associée aux résultats et d'une altération subjective des probabilités. Mais, comme le démontre Fishburn [33], une telle spécification fondée sur une transformation des probabilités simples est susceptible de conduire à des violations de la dominance stochastique du premier ordre, la propriété la plus indispensable à l'analyse économique. Tel n'est en fait pas le cas si le décideur transforme les probabilités cumulées et non les probabilités simples. La mise en évidence de cette propriété par Quiggin [55] a ouvert un champ d'investigation considérable.

Conformément à la théorie de l'espérance d'utilité dépendante du rang (RDEU), la fonction représentative des préférences est définie comme suit :

Pour toutes X, Y variables aléatoires à valeurs dans un ensemble de conséquence ou de résultats,

$$X \succ Y \Leftrightarrow V(X) \geq V(Y) \ avec \ V(X) = -\int_{-M}^{M} u(x) d\pi(G_X(x)) \qquad \textbf{[4]}$$

où, la fonction u(.) est continue et différentiable, strictement croissante de [-M, M] dans $\Re$, unique modulo une transformation affine strictement positive, et π(.) est une fonction continue, strictement croissante de [0, 1] dans [0, 1] . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que π (0)=0 et π (1)=1; de plus π (.) est unique.

Notons que, lorsque $X = L = (x_1, p_1; x_2, p_2; \ldots\ldots\ldots; x_n, p_n)$ est une loterie avec $x_1 \leq x_2 \leq \ldots\ldots\ldots\ldots \leq x_n$,

$$V(L) = u(x_1).\pi(\sum_{i=1}^{n} p_i) + \left[u(x_2) - u(x_1)\right]\pi(\sum_{i=2}^{n} p_i) + \ldots\ldots\ldots + \left[u(x_n) - u(x_{n-1})\right]\pi(p_n)$$

$$= u(x_1) + \sum_{i=2}^{n}\left[u(x_i) - u(x_{i-1})\right]\pi(\sum_{j=i}^{n} p_j) \qquad \textbf{[5]}$$

Les coefficients de pondération π_i dépendent des rangs des résultats x_i. D'où le nom donné à cette théorie. Ces pondérations reflètent la contribution marginale de π_i à la fonction de transformation des probabilités décumulées. En d'autres termes, les π_i, qui sont calculés en ordonnant les conséquences de la plus défavorable à la plus favorable, expriment un phénomène de perception des probabilités ou de traitement de l'information risquée. En conséquence, le décideur raisonne son évaluation de la théorie en ajoutant les espérances suivantes: u(x_1) (dont il est sûr, donc il pondère par 1), le surcroît [u(x_2)-u(x_1)] qu'il pondère par une transformation π (.) de la probabilité $(p_2 + p_3 + \ldots\ldots\ldots + p_n)$ d'avoir au moins ce surcroît en plus de u(x_1) , …..jusqu'au surcroît [$[u(x_n) - u(x_{n-1})]$ qu'il pondère par la même transformation π (.) de sa probabilité p_n.

Cette représentation de préférences repose sur l'hypothèse qu'il existe une loi de probabilité objective gouvernant l'apparition des états de la nature en seconde période. Toutefois, les agents ne se servent pas directement de cette loi pour effectuer les calculs d'utilité espérée mais transforment auparavant les probabilités objectives. Pour que la dominance stochastique soit respectée, il est nécessaire de considérer la transformée de la loi cumulée. Par conséquent, la fonctionnelle représentant les préférences des agents n'est plus linéaire par rapport aux probabilités. En particulier, les poids attachés à chaque état de la nature dépendant de l'ordre (ou du rang) de ceux-ci.

Notons que, sous cette représentation, dans le cas d'une loterie à deux résultats, $V(L) = u(x_1) + \pi(p_2)\left[u(x_2) - u(x_1)\right]$: il s'agit bien de la spécification particulière de la prospect theory.

Le critère RDEU est une généralisation de l'espérance d'utilité. En effet, on voit que lorsque la fonction π est la fonction identité ($\pi(p) = p, \ \forall p \in [0,1]$), la fonction représentative des préférences redevient l'espérance d'utilité classique. Ainsi la relation [5] devient :

$$V(L) = u(x_1) + \sum_{i=2}^{n}\left[u(x_i) - u(x_{i-1})\right].\left(\sum_{j=i}^{n} p_j\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) = EU(L) \qquad \textbf{[6]}$$

D'autant plus, lorsque u(x)=x, la théorie RDEU n'est autre que la théorie duale de Yaari. Et la relation [6] n'est qu'un cas particulier de la relation [5].

Comme le note J.P.Gayant [37] , la représentation RDEU exclut toute violation de la dominance stochastique du premier ordre. D'autre part comme son nom l'indique, ce critère se caractérise par la dépendance au rang des résultats de la transformation des probabilités. Cela signifie que le principe d'invariance à la modification d'une conséquence commune ne doit être postulé que lorsque le remplacement ne modifie pas l'ordre des résultats.

Un des avantages de la théorie de l'utilité espérée dépendante du rang, souligne Tallon [64,65], est qu'elle permet de distinguer plusieurs notions d'aversion vis-à-vis du risque. En effet, il remarque qu'il est possible de définir, indépendamment de toute représentation des préférences, une notion d'aversion faible vis-à-vis du risque (selon laquelle un décideur préfère l'espérance de la loterie à la loterie elle-même) et une notion d'aversion forte vis-à-vis du risque (selon laquelle un agent préfère une loterie donnée à un étalement à moyenne constante de cette même loterie).

Ces deux notions (voir Cohen [22]) se confondent dans la théorie de l'utilité espérée et correspondent à la concavité de la fonction d'utilité dans le certain. Elles ne sont plus équivalentes dans le cadre de l'utilité dépendante du rang.

Tallon [64,65] montre que, lorsque les agents maximisent une utilité espérée dépendante du rang, il suffit d'une hypothèse d'aversion faible vis-à-vis du risque pour obtenir l'assurance complète, et ce même si les agents transforment la loi de probabilité objective de manières différentes. Ce résultat est vrai même si les préférences de l'agent ne vérifient pas la dominance stochastique seconde. S'ils obéissent à la théorie de l'utilité espérée, ce résultat d'assurance totale ne serait vrai que s'ils partageaient les mêmes croyances.

D'un autre coté, l'hypothèse d'aversion forte vis-à-vis du risque lui a permis de donner une formulation alternative de l'hypothèse d'utilité espérée dépendante du rang, à savoir que les croyances d'un agent se caractérisent par un ensemble de mesure de probabilité. Son utilité est le minimum de l'utilité espérée calculée à l'aide des mesures appartenant à cet ensemble. Dans ce cas, Tallon [64,65] a montré que l'ensemble des prix d'équilibre des actifs financiers se confond avec l'intersection (sur tous les agents) de ces ensembles de probabilités.

Contrairement au critère de l'espérance d'utilité, les théories de l'espérance d'utilité dépendant du rang distinguent l'attitude vis-à-vis de la richesse de l'attitude vis-à-vis du risque, pour expliquer des comportements décisionnels. En cela, elles répondent aux expériences qui soulignent que les individus sous-estiment ou sur-estiment les probabilités de risque, c'est à dire qu'ils sont optimistes ou pessimistes (par rapport aux probabilités). Pour rendre compte de ces comportements, les théories RDEU ont introduit dans le calcul de la fonction de préférences une fonction de transformation des probabilités (Quiggin [55] et Yaari [75]) dans le risque. Ces théories sont ainsi capables de prédire des cas souvent observés dans la réalité ou dans les études expérimentales, mais inexpliqués par la théorie EU.

2-5- Le modèle de Segal [1989, première version 1984]

La généralisation de l'espérance non-additive d'utilité de Segal [61] se caractérise par une non séparabilité du critère de décision entre attitude vis à vis du risque et attitude vis à vis des probabilités. Si nous notons V la fonction représentative des préférences propre à cette généralisation, on a $\forall \ L = (x_i, p_i)_{i=1,\ldots\ldots,n} \in IL$:

$$\text{V(L)=} \ w(x_1, 1) + \sum_{i=2}^{n}\left[w(x_i, \sum_{j=i}^{n} p_j) - w(x_{i-1}, \sum_{j=i}^{n} p_j) \right] \qquad \textbf{[7]}$$

où $w: C \times [0,1] \rightarrow \Re$ est une fonction continue et croissante en son premier argument.

Dans le cas où w est séparable, c'est à dire : $\forall(x,p)\in C\times[0,1],\ w(x,p)=u(x).\phi(p)$, on montre que le critère RDEU est un cas particulier de ce modèle (voir Gayant[37]).

Cette généralisation repose sur la plus faible notion d'indépendance que Segal [60] la nomme "axiome de non-pertinence" (Irrelevance axiom), Green & Julien [38] parlent "d'indépendance ordinale" et Chateauneuf [16] évoque le principe de la chose-sûre comonotone. A noter que ces trois axiomes ne sont pas strictement équivalents, mais ils développent le même concept.

Postuler le principe de la chose-sûre comonotone sans postuler l'indépendance comonotone conduit à un critère plus général que RDEU (voir Gayant [37]).

Il faut noter que Wakker [73] et Puppe [53] ont découvert que la théorie de représentation de Segal n'est pas correct. La clarification est due à Wakker [72] (version remaniée de Wakker [73]). C'est pour cela que ce modèle n'a pas connu un grand essor en comparaison avec d'autres modèles.

2-6- Le modèle de Jaffray [1989] et Cohen [1992]

En constatant que les insuffisances de l'espérance d'utilité dans le risque sont essentiellement liées aux modifications du comportement observées lorsque surgit un effet de certitude, Jaffray et Cohen ont généralisé ce critère afin de tenir compte de cette défaillance.

En général, les agents semblent attacher une importance toute particulière à la perspective la plus défavorable de chaque loterie (ils optent le critère maximin). Ce comportement fut qualifié de facteur de "sécurité" par Lopes [47].

Mais au cours de leur étude, Cohen et Jaffray [25] ont constaté qu'un autre phénomène caractéristique devrait être intégré à la généralisation. Il s'agit de la présence d'un facteur "potentiel", conformément à la terminologie proposé par Lopes [47]. En effet, les agents se focalisent non seulement sur le pire résultat de chaque loterie, mais aussi sur le meilleur. Ainsi, Cohen [23] a achevé la généralisation en tenant compte des deux facteurs à la fois. Dans ce cas Cohen définit la fonction représentative des préférences propre à cette généralisation comme suit:

$$V(L)=\alpha(x_1,x_n)\sum_{i=1}^{n}p_i u(x_i)+\beta(x_1,x_n) \qquad \textbf{[8]}$$

Les fonctions α et β sont des fonctions de deux variables: la fonction sécurité (x_1 dans le cas de la loterie L) et la fonction potentiel (x_n dans le cas de la loterie L) avec $\alpha(x_1,x_n)\rangle 0$ et u et V sont définies à des transformations (indépendantes) affines positives près. Le terme $\sum_{i=1}^{n}p_i u(x_i)$ mesure l'espérance d'utilité de la loterie.

Cette généralisation repose sur un système de cinq axiomes : préordre total, dominance, continuité (version affaiblie) et deux axiomes d'indépendance. Le premier des deux axiomes d'indépendance, ainsi que la version affaiblie de la continuité, sont identiques aux axiomes standards. Le second axiome d'indépendance vient renforcer le premier. Ces axiomes postulent les règles conduisant à l'espérance d'utilité dans le cas où les résultats extrêmes sont semblables. Dans le cas inverse, l'espérance d'utilité ne sera pas délaissée mais "transformée".

Gayant [37] souligne que la spécification de ce modèle est simple et que son estimation est réalisable ce qui n'est pas le cas du modèle de Segal [61]. Il précise que ce modèle doit aussi avoir de bonnes qualités descriptives puisqu'il fut pragmatiquement conçu pour faire disparaître les principales "contradictions" expérimentales constatées avec l'espérance d'utilité. Pourtant l'inconvénient est qu'il nécessite l'estimation de trois fonctions (u(.), α(.) et β(.)) contre deux pour le critère RDEU, et n'a jusqu'à présent connu qu'un echo limité. A noter, aussi, qu'il est difficile d'établir un lien entre le risque et l'incertain à travers ce modèle.

Pour conclure, on peut dire que le modèle de Jaffray, contrairement au modèle de l'utilité espérée, met en évidence un effet de degré d'ambiguïté sur les décisions individuelles. Les décisions sont donc fonctions non seulement de l'attitude vis-à-vis de la richesse, mais aussi de l'indice d'optimisme-pessimisme. Ce dernier reflète l'influence du degré de connaissance des risques encourus sur l'estimation de la prime maximum. Ce modèle montre que la présence d'ambiguïté peut conduire l'individu à modifier la valeur de la prime maximum qu'il est prêt à payer pour être complètement assuré. Ainsi, son choix, comme nous l'avons souligné ci-dessus, dépend de son degré d'optimisme-pessimisme.

3-Aversion pour le risque et nouveaux modèles de décision

La notion d'aversion pour le risque, qui représente un élément de base dans toute application économique dès lors que l'environnement n'est pas certain, a été remise en cause surtout au niveau de l'interprétation de certains résultats relatifs au modèle d'espérance d'utilité. Ainsi l'apparition des nouveaux modèles de décision a nécessité la modification de la caractérisation de l'aversion pour le risque. En effet, pour un grand nombre d'économistes, la notion d'aversion pour le risque est indissociable de la décroissance de l'utilité marginale. Or si les deux notions sont effectivement confondues dans le modèle d'espérance d'utilité, elles différent sensiblement dans le modèle plus général d'espérance d'utilité dépendante du rang. Ce constat n'est pas sans conséquence. En effet, la disparition de l'équivalence entre les deux notions dans le modèle RDEU conduit à reconsidérer la notion d'aversion pour le risque dans le modèle EU lui même.

3-1-Aversion faible pour le risque

Dans l'optique d'Arrow et Pratt, la notion d'aversion pour le risque est implicitement une notion « faible ».

Définition : Aversion faible pour le risque

Un agent est faiblement adversaire du risque s'il préfère à toute loterie le gain de son espérance mathématique avec certitude.

Autrement dit , $\forall L = (x_i , p_i)_{i=1,......n} \in \mathbb{L}$, en notant $E(L) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$: l'espérance mathématique de la loterie, un agent est faiblement adversaire du risque si $(E(L);1) \succ L$.

Sous les hypothèses du modèle d'espérance d'utilité, il y a équivalence entre cette notion d'aversion pour le risque et la concavité de la fonction d'utilité.

Chateuneuf et Cohen [17] et Chateuneuf, Cohen et Meilijson [18] montrent qu'un décideur, satisfaisant au modèle RDEU et caractérisé par une fonction d'utilité u(.) continûment dérivable et concave, est faiblement adversaire au risque si et seulement si sa fonction de transformation des probabilités f(.) satisfait $f(p) \leq p$, $\forall p \in [0,1]$. Ils démontrent que si $u(x)=1-(1-x)^n$ avec $n \geq 1$, alors il est faiblement adverse au risque si et seulement si sa fonction de transformation f(.) satisfait $f(p) \geq 1-(1-p)^n$, $\forall p \in [0,1]$.

3-2-Aversion forte pour le risque

Rotschild et Stiglitz [56,57], à la suite de Hadar et Russel [39] définissent une notion plus forte. Elle se fonde sur le concept « d'étalement préservant la moyenne » (mean preserving spread) : Etant données deux variables aléatoires X et Y, dont les distributions de probabilité sont L_X et L_Y , Y se déduit de X par un étalement préservant la moyenne (noté Y MPS X) si :

1/ $E(L_X) = E(L_Y)$

2/ $\forall T \in [-M;M]$, $\int_{-M}^{T} prob\{X \langle t\}dt \leq \int_{-M}^{T} prob\{Y \langle t\}dt$

(L'expression 2/ est la définition de la dominance stochastique du second ordre (X domine Y)).

Définition : Aversion forte pour le risque

Un agent est fortement adversaire du risque si entre toutes paires de variables aléatoires telles que l'une se déduit de l'autre par un étalement préservant la moyenne, il préfère toujours la moins « étalée ».

Autrement dit, quelles que soient X et Y telles que Y MPS X, un agent est fortement adversaire du risque si : $L_X \succ L_Y$.

Sous les hypothèses du modèle d'espérance d'utilité, il y a également équivalence entre cette notion d'aversion pour le risque et la concavité de la fonction d'utilité et donc équivalence entre la notion d'aversion faible et celle d'aversion forte.

C'est la remise en cause du modèle d'espérance d'utilité qui va conférer à la distinction aversion faible-forte toute sa pertinence : sous les hypothèses du modèle RDEU, les deux notions différent. En fait, avant l'apparition de cette généralisation, la distinction entre ces notions paraissait sans fondement. Ainsi, la généralisation de l'espérance d'utilité conduit non seulement à examiner avec précaution la notion d'aversion pour le risque, mais elle conduit aussi à réexaminer les interprétations faites depuis un demi-siècle dans le cadre du modèle d'espérance d'utilité.

Les résultats de Yaari [75] ne possèdent pas un grand degré de généralité puisqu'ils ne concernent que le cas particulier du modèle RDEU pour lequel l'utilité marginale est constante, mais ils ont l'énorme qualité de révéler la nouvelle problématique de l'aversion pour le risque. Chew, Karni et Safra [20], eux, examinent cette problématique dans le cadre du modèle RDEU proprement dit. Ils aboutissent au théorème suivant :

Théorème : *Un décideur est fortement adversaire du risque si et seulement si sa fonction d'utilité est concave et sa fonction de transformation des probabilités est convexe.*

Wakker [71] montre que l'attitude à l'égard du risque dépend, de manière décisive, de la fonction de transformation des probabilités.

Or, Tversky et Wakker [67] se demandent sur la manière à comparer les fonctions de transformation d'agents différents.

Par ailleurs, Quiggin [54] définit une nouvelle notion « l'étalement monotone préservant la moyenne » (mean monotone preserving spread) permettant de définir une nouvelle notion d'aversion pour le risque, intermédiaire entre l'aversion faible et l'aversion forte. On trouve une comparaison de ces trois notions dans le modèle d'espérance d'utilité et dans le modèle RDEU (voir Cohen [22]).

4- Modèles de décision dans l'incertain

Si on définit par S l'ensemble des états de la nature et $\sum$ *une* $\sigma - a\lg \grave{e}bre$ de parties de S. Les éléments de $\sum$ sont appelés événements. Un acte, ou variable aléatoire, est une application de S dans un ensemble de conséquences ou résultats C.

Contrairement à la décision dans le risque où il existe une distribution de probabilité P connue sur S, dans l'incertain il n'existe pas nécessairement de distribution de probabilité connue sur S. Dans ce cas, il n'est possible de travailler que sur les actes (Savage [59]).

On va supposer que S est fini, $\sum = 2^S$ et C $\subset \Re$. Si l'agent choisit un acte f, et si le véritable état de la nature est s $\in$ S, alors la conséquence f(s) va résulter.

Si on note par F l'ensemble des actes, une relation de préférence sur les actes, pour tout décideur, sera notée par $\succsim$. Ainsi, $\forall$ f, g $\in$ F, f $\succsim$ g si l'acte f est préféré ou indifférent à l'acte g. A partir de cette relation au sens large, on peut définir la relation au sens strict et l'indifférence : f est strictement préférée à g et on note f $\succ$ g si f $\succ$ g et non g $\succ$ f. De même f est indifférente à g et on note f $\approx$ g si f $\succsim$ g et g $\succsim$ f.

Nous postulerons que cette relation de préférence est un préordre total, c'est à dire qu'elle est à la fois transitive et incomplète : $\forall$ f, g et h $\in$ F, f $\succsim$ g et g $\succsim$ h, alors f $\succsim$ h (relation transitive ou préordre) et $\forall$ f, g $\in$ F, f $\succsim$ g ou g $\succsim$ f (relation incomplète ou préordre total).

Tout acte f est tel qu'il existe une partition ($A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots, A_n$) de S, pour laquelle $\forall$ i=1,2,......,n f(s)= x_i ($x_i \in$ C) $\forall$ s $\in$ A_i.

On convient de noter f= ($x_1, A_1 ; x_2, A_2 ; \ldots\ldots\ldots ; x_n, A_n$) ou encore f= $(x_i, A_i)_{i=1,\ldots\ldots,n}$ sauf mention spéciale. Nous supposerons en outre que les résultats sont ordonnés : $x_1 \leq x_2 \leq \ldots\ldots\ldots \leq x_n$.

L'incertain regroupe toutes les situations pour lesquelles $\exists$ i $\in$ {1,2,.......,n} tel que P(A_i) n'est en général pas connue de manière précise. En fait, dès que l'information sur la probabilité de survenance d'un événement prend la forme d'un intervalle non dégénéré, nous nous situons dans le cadre de l'incertain. Dans le cas où l'information sur la probabilité de survenance de tous les événements est complètement inexistante ou indisponible, on parlera de situation d'incertitude totale.

Dès qu'il existe un événement dont la probabilité d'apparition appartient à un intervalle plus restreint, nous parlerons de situation d'ambiguïté.

4-1- Espérance subjective d'utilité

En général, les agents raisonneraient en créant de manière fictive une distribution de probabilité là où celle-ci n'existe pas ou est inconnue. Ces probabilités dites « subjectives » seraient formées par les agents à partir de l'information disponible. En particulier, dans le cas où la distribution de probabilités sur les résultats est partiellement connue, ces probabilités subjectives appartiendraient aux intervalles relatif à la probabilité d'apparition de chaque événement correspondant. Mais la règle essentielle qui émanait dans l'idée de probabilité subjective est la règle d'équivraisemblance que Laplace dénommait par le « principe de la raison insuffisante ». Ainsi, s'il n'y a que deux événements distincts, et si on ne dispose d'aucune information sur la vraisemblance de l'un des deux, et par conséquent de son complémentaire (situation d'incertitude totale), il est naturel d'affecter la même probabilité subjective aux deux événements. Et puisqu'une mesure de probabilité classique est additive, cette probabilité subjective sera égale à un demi.

De même en situation d'ambiguïté, la règle d'équivraisemblance sera appliquée une fois l'information disponible prise en compte.

Le critère de décision venant spontanément à l'esprit est l'espérance mathématique. La notion de probabilité subjective nous permet d'avancer cet argument dans le cadre de l'incertain comme il a été fait dans le cadre du risque.

Nous qualifierons ce critère « d'espérance subjective de gain . L'idée d'espérance subjective d'utilité apparaît donc naturellement, pour les mêmes raisons que celles qui ont conduit les auteurs du XVIII siècle à recommander un calcul d'espérance morale ou espérance d'utilité. Ce sera Savage [59] qui axiomatisera ce critère. L'axiome central étant le principe de la chose sûre. Le principe de la chose sûre dans l'incertain va connaître le même sort que l'axiome d'indépendance dans le risque. Il sera critiqué et remis en cause par la fameuse expérience d'Ellsberg [32] (voir Gayant [37]) démontrant qu'une majorité d'agents se comporte en contradiction avec lui, ce qui montre l'incapacité de la théorie d'espérance subjective d'utilité (SEU) à décrire complètement le comportement d'une majorité d'agents. Une des interprétations du paradoxe d'Ellsberg est que les agents préfèrent le risque à l'ambiguïté.

Pour expliquer ce paradoxe, il a fallu attendre une réponse de Shmeidler [62] qui, en généralisant le critère SEU, a mis en cause le principe d'additivité de la mesure. L'idée est de permettre aux agents de construire une mesure subjective non-additive dans l'incertain. La non-additivité de la mesure doit permettre de prendre en compte l'éventuelle aversion pour l'ambiguïté que possèdent les agents. Déjà Keynes [44] suggérait que la « confiance dans les probabilités influence les décisions dans l'incertain ».

D'autre part, Gayant [37] montre que le remplacement des probabilités subjectives de chaque événement A_i par de semblables « probabilités » subjectives non nécessairement additives, dans le critère de décision, pourrait conduire à des violations de la dominance : Dans l'incertain, un acte f domine un acte g au sens de la dominance si $\forall$ s $\in$ S , f (s) $\geq$ g (s).

La généralisation de Shmeidler [62] va consister en un critère de décision non additif pour lequel la mesure subjective évalue les unions d'événements et non les événements simples. Ce mode de calcul permet d'échapper à l'éventualité de violation de la dominance.

4-2-Critiques adressées au modèle d'espérance subjective d'utilité

La première critique au modèle d'espérance subjective d'utilité date de 1961 par la fameuse expérience de Ellsberg. Dans son expérience, il a montré que les sujets se comportent en contradiction avec le modèle d'espérance subjective d'utilité.

Cohen et Tallon [24] constatent que les sujets de l'expérience de Ellsberg préfèrent parier sur l'évènement « non ambigu » (c'est à dire de probabilité connue), manifestant ainsi de l'aversion pour l'ambiguïté.

A noter, qu'un agent a de l'aversion pour l'ambiguïté s'il préfère parier pour un même montant sur un événement de probabilité p connue plutôt que sur un événement de probabilité inconnue comprise entre $p-\varepsilon$ et $p+\varepsilon$.

Dans ce sens, Cohen et Tallon [24] remarquent, à travers un exemple, qu'un décideur satisfaisant aux axiomes du modèle d'espérance subjective d'utilité est neutre vis-à-vis de l'ambiguïté. D'où l'incapacité de ce modèle à décrire le comportement des sujets qui ont ou non de l'aversion pour l'ambiguïté.

4-3- Théorie non-additive d'utilité

Une mesure non nécessairement additive, aussi appelée capacité de Choquet [21] est définie comme suit :

Soit (S, $\sum$) un espace probabilisable fini. Une capacité sur $\sum$ est une mesure C de $\sum$ dans [0,1] vérifiant :

1) C($\emptyset$)=0
2) C(S) =1
3) $\forall A, B \in \sum,\ A \subset B \Rightarrow C(A) \leq C(B)$ **[9]**

La condition 3), de monotonie (d'ordre 1) au sens de l'inclusion, est une exigence très faible puisque pour A et B éléments mutuellement exclusifs de $\sum$, C(A $\cup$ B) peut être supérieure, inférieure ou égale à C(A)+C(B). Il est entenduque les probabilités sont un cas particulier (additif) de capacités.

Si de plus $C(A)+C(B) \leq C(A \cup B)+C(A \cap B)$, on dit que la capacité est convexe.

L'espérance non-additive d'utilité (ou Choquet Expected Utility (CEU)) est une fonction représentative de la relation de préférence, de F dans $\Re$, telle que pour l'acte ordonné

f= $(x_i, A_i)_{i=1,.........,n}$, on a : CEU(f)= $\sum_{i=1}^{n} \pi_i\, u(x_i)$ **[10]**

où $\pi_i = C(A_i \cup ...... \cup A_n) - C(A_{i+1} \cup ...... \cup A_n) \qquad i = 1, ..., n-1$

$\pi_n = C(A_n)$

C(.) désignant une capacité de Choquet.

L'expression [10] peut aussi se réécrire :

CEU(f)= $u(x_1) + \sum_{i=2}^{n} [\, u(x_i) - u(x_{i-1})\,]\, C(A_i \cup ..... \cup A_n)$ **[11]**

Sous cette forme, une interprétation de la formule est que le décideur calcule l'utilité à la Choquet en prenant la valeur minimale $u(x_1)$ et en y ajoutant les incréments d'utilité $[u(x_i) - u(x_{i-1})]$ pondérés par la croyance (subjective) de leur occurrence $C(A_i \cup ..... \cup A_n)$.

La non-additivité de la mesure et l'utilisation d'union d'événements ne rend plus contradictoires des attitudes telles que celles observées par Ellsberg, sans que des violations de la dominance stochastique puissent être observées.

L'additivité fait que les vraisemblances subjectivement associées aux événement s'additionnent de manière inerte, sans qu'aucune altération ne soit causée par un changement de contexte car, au gré des unions d'événements, les perspectives proposées aux agents peuvent passer d'un contexte d'incertitude totale à un contexte d'ambiguïté, ou d'un contexte d'ambiguïté à un contexte de certitude.

Autrement dit, le principe d'invariance, responsable de l'additivité de la mesure subjective n'est plus compatible avec la prise en compte de l'éventuelle aversion pour l'ambiguïté des agents puisqu'il postule que mêmes des modifications de contexte ne vont pas modifier l'ordre des préférences. Par conséquent le passage du critère SEU en CEU s'accompagne donc d'un affaiblissement du principe d'invariance à la modification d'une conséquence commune.

En distinguant l'attitude des agents vis à vis des gains et leur attitude vis à vis des pertes Tversky et Kahneman [66] ont généralisé le critère de décision afin que la vraisemblance attachée aux événements dépendra du signe des résultats correspondants à ces événements, à savoir les actes relatifs aux gains d'une part et les actes relatifs aux pertes d'autre part. C'est pourquoi l'on parlera d'espérance non-additive d'utilité dépendante du signe (Sign Dependent Choquet Expected Utility (SDCEU)) ou comme l'ont défini Tversky rt Kahneman, « Cumulative Prospect Theory » (CPT).

4-4- Théorie non-additive d'utilité dépendante du signe

Ainsi, pour un même agent, il existe deux capacités C^{+} et C^{-}, mesurant la vraisemblance subjective respectivement des gains et des pertes.

Pour un acte f= $(x_i, A_i)_{i=1,\ldots\ldots,n}$ tel que : $x_1 \le x_2 \le \ldots\ldots\ldots \le x_k \le 0 \le x_{k+1} \le \ldots\ldots\ldots \le x_n$, la fonction représentative des préférences s'écrit :

$$\text{CPT}(f) = \sum_{i=1}^{k} \pi_i^{-}.u(x_i) + \sum_{i=k+1}^{n} \pi_i^{+}.u(x_i) \qquad \textbf{[12]}$$

$$\pi_i^{-} = C^{-}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_i) - C^{-}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_{i-1}) \qquad i = 2, \ldots\ldots\ldots, k$$

$$\pi_1^{-} = C^{-}(A_1)$$

où

$$\pi_i^{+} = C^{+}(A_i \cup \ldots\ldots \cup A_n) - C^{+}(A_{i+1} \cup \ldots\ldots\ldots \cup A_n \qquad i = k+1, \ldots\ldots\ldots\ldots, n-1$$

$$\pi_n^{+} = C^{+}(A_n)$$

Or, $\forall\, A \in \sum,\ \ C^{-}(A) = 1 - C^{+}(A^{c})$, par conséquent l'espérance non-additive d'utilité (CEU) n'est autre qu'un cas particulier de la « Cumulative Prospect Theory ».

4-5- Principe de la chose sûre (Savage [1954])

Dans le risque, l'abandon de l'axiome d'additivité au profit de l'axiome d'indépendance a abouti à la généralisation de l'espérance mathématique en espérance d'utilité. Qu'en est-il si on abandonne, dans l'incertain, l'axiome de l'additivité au profit du principe de la chose sûre. Il faut tout d'abord noter que Savage [1954] a définie ce principe comme suit :

$\forall$ f , g , f' et g' $\in$ F et E $\in \sum$

f(s) = f'(s) , g(s) = g'(s) sur E et f (s) = g(s) , et f'(s) = g'(s) sur E^c

alors f $\succ$ g $\Leftrightarrow$ f' $\succ$ g'. **[13]**

Ce principe postule qu'une modification commune de la partie commune de deux actes de F ne renverse pas l'ordre des préférences entre ces deux actes. D'autre part ce principe ne postule l'invariance de l'ordre des préférences qu'à la seule modification d'une conséquence commune contrairement à l'additivité qui conduit à l'espérance subjective de gain, puisque l'on postule une conservation de l'ordre des préférences entre deux actes quelconques de F, lorsque l'on ajoute un troisième acte à chacun des deux premiers.

L'existence d'une mesure de probabilité subjective est dû à Savage [59] qui, d'une part, a constitué une mesure subjective de vraisemblance relative à chacun des éléments de $\sum$, et d'autre part, a séparé entre ces vraisemblances et l'évaluation des résultats.

Les axiomes de Savage [59] conduisent ainsi à une espérance additive subjective d'utilité. Ce critère est remis en cause par les expériences d'Ellsberg [32]. Le principe de la chose sûre y est directement remis en cause. L'invariance des préférences doit être la règle observée, y compris si la modification de la conséquence commune modifie le contexte du choix. Un tel remplacement peut, en effet, faire basculer un des actes d'une situation d'ambiguïté à une situation de certitude ou de risque.

Quelles peuvent alors être les conséquences dont le remplacement ne causera aucune modification du contexte, c'est à dire ne créera pas au profit de l'un des deux actes constituant le choix un environnement probabiliste nettement plus propice. Autrement dit moins ambigu ?

Restreindre le principe d'invariance à ces seules conséquences devraient permettre d'obtenir un critère plus satisfaisant. Afin de répondre à cette question, Shmeidler [62] a proposé un système axiomatique affaiblissant les axiomes de Savage [59]. Ces axiomes ont pour support une formalisation particulière, où les résultats des actes sont eux-mêmes des loteries. En conséquence, la modification axiomatique sera un affaiblissement, non du principe d'invariance, mais de l'indépendance définie sur ces actes particuliers. L'indépendance ne sera plus postulé que sur les actes deux à deux comonotones.

Définition : *Deux actes f et g* $\in$ *F sont comonotones s'il n'existe pas deux états de la nature distincts* s_i *et* s_j *tels que :* $f(s_i) \rangle f(s_j)$ *et* $g(s_i) \langle g(s_j)$.

Lorsque l'ensemble des conséquences est un sous-ensemble de $\Re$, la définition précédente devient :

Définition : *Deux décisions f et g sont dits comonotones si pour tout* s_i *et* s_j *,*

$[f(s_i)-f(s_j)][g(s_i)-g(s_j)] \geq 0.$

Des variables comonotones sont donc des variables offrant, d'un état de la nature à l'autre, soit des résultats tous deux meilleurs, soit des résultats tous deux moins bons.

Le principe de la chose sûre comonotone est l'un des postulats sur lequel se fonde Chateauneuf [16] pour axiomatiser le modèle RDEU. Il s'agit, comme l'a noté Gayant [37], d'une notion d'indépendance très faible, très semblable aux axiomes de « non-pertinence » (Segal [61]) et « d'indépendance ordinale » (Green & Julien [38]). Ce principe postule l'invariance des préférences au remplacement d'une conséquence commune, si ce remplacement ne modifie pas l'ordre des résultats.

Le principe de la chose sûre comonotone s'énonce comme suit :

Soient deux actes comonotones f et g $\in F$ *telle que f=* $(x_i, A_i)_{i=1,.........,n}$ *et* *g=* $(y_i, A_i)_{i=1,........,n}$ *avec* $x_{k_0} = y_{k_0}$ *pour un certain* k_0*.Soient* f' *et* g' *les deux éléments de F obtenus en remplaçant cette valeur commune de f et de g par n'importe quelle autre valeur commune qui garde la même place dans les suites croissantes des* x_k *et* y_k*. Alors,* $f \succ g \Leftrightarrow f' \succ g'$

L'exigence de comonotonie nous permet d'exclure les combinaisons susceptibles de réduire le degré d'ambiguïté relatif à l'un des actes (sans que l'autre ne bénéficie d'un privilège semblable). C'est cet affaiblissement axiomatique qui a conduit, les chercheurs, à l'espérance non-additive d'utilité.

Le système axiomatique complet de la CPT a été proposé par Wakker & Tversky [74]. L'axiome central est celui de cohérence d'arbitrages comonotones, traduction littérale de « Comonotonic Trade off Consistency ». Cet axiome conduisant au critère CEU peut conduire au CPT à condition de le remplacer par la cohérence d'arbitrages comonotones et de même signe.

A noter que l'arbitrage est la situation où la modification des résultats relatifs à un même événement, dans un choix entre deux actes, va entraîner un renversement de préférences.

Afin de tester la validité du principe de la chose sûre comonotone, Gayant [37] a effectué une expérience auprès de 49 agents. Il a constaté que 13 parmi eux (26 %) expriment des préférences en contradiction avec ce principe. De ce fait, il suggère que la validité du modèle RDEU, reposant sur l'axiome de cohérence d'arbitrages comonotones (impliquant le principe de la chose sûre comonotone), est contestée. Une minorité d'agents exprime des préférences contradictoires avec les hypothèses d'un modèle plus général que RDEU, et donc, plus fortes raisons, contradictoires avec le modèle RDEU lui même.

5- Lien entre risque et incertain

Wakker [73] a montré que, dans le cadre des modèles de décision, les résultats d'une application dans le risque sont aisément généralisables à l'incertain. En effet, le critère d'espérance d'utilité est le cas particulier du critère SEU dans le risque (les probabilités subjectives que le décideur assigne sont les probabilités objectives lorsque celles-ci sont connues). Autrement dit, l'utilisation de toute l'information disponible pour construire une mesure de probabilité subjective par le décideur, laisse ce dernier adopter la mesure de probabilité objective en situation de risque, réalisant une utilisation indiscutablement rationnelle de l'information.

D'autre part Wakker [73] démontre que, sous l'hypothèse de respect de la dominance stochastique du premier ordre, le critère RDEU est le cas particulier de CEU dans le risque : la capacité C du décideur du modèle CEU est la transformé de la mesure de probabilité objective P par sa fonction de transformation ϕ du modèle RDEU, C= ϕ oP. Ainsi, quelles que soient les propriétés de la mesure non-additive C, celle-ci se résume, dans le cas du risque, à la transformée par une fonction strictement croissante d'une mesure additive.

Dans la théorie des perspectives aléatoires (CPT) de Tversky & Kahneman [66] le lien entre risque et incertain est explicitement mis en évidence (c'est pourquoi les critères de décision sont désignés par la même appellation).

En conclusion, il est judicieux et plus pratique d'étudier le comportement de l'individu dans le risque puisque les résultats sont généralisables à l'incertain. D'ailleurs, la quasi-totalité des études faites jusqu'à nos jours ne traitent que le cas du risque.

6-Critiques adressées à ces modèles

Schoemaker [60] a montré que le modèle RDEU apporte une amélioration prédictive relativement au modèle d'espérance d'utilité dans le seul cas des pertes (et n'apporte rien en ce qui concerne les gains). Gayant [37] a constaté que l'étude de Schoemaker [60] n'est pas totalement convaincante dans la mesure où ce dernier utilise, pour construire ces tests, des hypothèses implicites dépassant le cadre du risque.

Camerer [12], Starmer [63] et Abdellaoui & Munier [4] mènent des séries d'expériences dans le cadre de la représentation proposée par Machina [49], connue sous l'appellation de "Triangle de Marshak-Machina". Le triangle utilisé par Marschak [50] puis par Machina [49] représente toutes les loteries possibles à trois paiements fixes x_1 , x_2 et x_3 ordonnées : $x_1 \langle x_2 \langle x_3$. L'axe des abscisses porte la probabilité $p_1$du paiement x_1, l'axe des ordonnées, la probabilité p_3 du paiement x_3. Les cotés du triangle étant choisis égaux à l'unité. Tout point dans le triangle donne p_2 comme la longueur du segment horizontal qui le sépare de l'hypoténuse. En décrivant le triangle, on décrit ainsi visuellement toutes les distributions possibles à supports fixes x_1, x_2 et x_3. Munier [51] a bien détaillé ce type d'expérimentation et l'usage de sa représentation graphique pour expliciter les différents "paradoxes".

Si Starmer [63] conclut à la nécessité du recours à un modèle alternatif au modèle d'espérance d'utilité, il ne peut arbitrer entre l'espérance non-additive d'utilité et la théorie du regret (Loomes et Sugden [48]). Camerer [12] et Abdellaoui & Munier [4], eux aussi, attestent de l'incapacité du modèle classique à représenter les préférences d'une majorité d'agents. Ils délimitent dans le triangle de Marshak-Machina, des "zones" où l'espérance d'utilité est valide et des "zones" où elle ne l'est pas. Abdellaoui & Munier déterminent même une zone où le modèle RDEU est invalidé.

Les travaux de Carbone Hey [15] aboutissent à des conclusions plus favorables au modèle d'espérance d'utilité, mais ils sont nettement moins convaincants que ceux de Camerer et Ho [14], établissant très clairement le bien fondé de la CPT, en prenant comme support le triangle de Marshak-Machina.

S'il n'y a pas eu beaucoup de travaux sur l'estimation de la fonction de transformation des probabilités, les estimations de Tversky et Kahneman [66] se sont révélées conformes à l'intuition de Quiggin [55] (les petites probabilités sont "sur-pondérées", les grandes probabilitées sont "sous-pondérées"). Et que les travaux de Camerer et Ho [14] ont mis en évidence, à l'aide d'une méthode différente, des fonctions très semblables à celles de Tversky et Kahneman.

Une critique, d'ordre expérimentale, est adressée à ces modèles. En effet, les protocoles expérimentaux sont toujours définis à partir de questions afin de connaître le degré d'aversion au risque des individus. Cette information est nécessaire pour aux moins deux raisons : la première consiste à cerner de façon plus précise les décisions individuelles et la seconde à vérifier les prédictions théoriques.

Mais le degré d'aversion au risque peut ne pas avoir la même valeur d'une théorie à l'autre. En effet, selon le modèle d'utilité espérée, les attitudes face au risque sont calculées à partir d'une transformation de la richesse, alors que dans la théorie duale, elles sont déterminées en fonction de la transformation des probabilités.

Afin que les agents révèlent leurs préférences, les chercheurs proposent ou bien un jeu équitable ou actuariel ou bien une situation risquée et vérifient si les agents paient une prime plus ou moins élevée que celle qui définit la neutralité au risque selon le critère d'espérance d'utilité. Si le prix est plus élevé, les agents présentent de l'aversion au risque, sinon ils ont du goût pour le risque.

Il faut noter que les incitations monétaires en économie, afin de réaliser ce genre d'expériences, sont couramment utilisées pour encourager le sujet à révéler ses préférences. Or ces méthodes monétaires sont critiquées par certains économistes qui pensent qu'elles sont peut-être à l'origine des incohérences de certaines réponses. En effet, Battalio, Kagel et Jiranyakul [8] concluent que les individus ont plus d'aversion au risque en présence d'incitations monétaires.

Par ailleurs, la formulation des questions peut influencer les individus dans leur choix.

Enfin, la complexité de ces modèles et surtout les résultats des tests dont ils ont fait l'objet nous permettent de dire que ces modèles n'ont pas encore apporté de réponses définitives permettant de conclure à leur supériorité par rapport au modèle de l'utilité espérée.

7- Conclusion

La théorie des choix en univers incertain. En effet a pris véritablement naissance après la parution en 1947 de la deuxième édition de la « Theory of Games and Economic Behaviour » de Von Neumann et Morgenstern.

Sous le nom de théorie de l'utilité espérée, elle a très vite été l'objet de plusieurs controverses.

Allais [6] a construit des expériences dans lesquelles les sujets, dans leur grande majorité, révèlent, par leur choix, des comportements en contradiction systématique avec ce modèle.

Ainsi, l'accumulation de résultats expérimentaux défavorables au modèle de l'utilité espérée a conduit à l'élaboration d'un certain nombre de modèles alternatifs, tenant compte des principales « déviations » observées par rapport à la règle de l'utilité espérée (Camerer [13]).

Plusieurs études de laboratoire (Bouyssou [11] ou Munier [51]) ont, en effet, montré que les individus, confrontés à des choix risqués simples, se comportent, en général, en contradiction avec l'hypothèse de linéarité en probabilité et, par conséquent, en violation de l'axiome d'indépendance.

Et ce n'est qu'en 1979, avec les travaux de Kahneman et Tversky [41], qu'un modèle a été proposé, capable de mieux représenter, d'après les auteurs, les comportements individuels dans des situations de choix risqués simples.

Ce modèle descriptif repose sur trois ensembles d'observations expérimentales. Le premier ensemble confirme les résultats déjà connus en ce qui concerne la violation de l'axiome d'indépendance du modèle d'utilité espérée. Le deuxième ensemble d'observations a conduit Kahneman et Tversky [41] à conclure que la plupart des individus ont tendance à renverser leur préférences entre les loteries de type (x,p) lorsqu'on transforme les gains en pertes et vice-versa. Le troisième ensemble d'observations a mis en évidence l'effet dit d'isolement, phénomène qui traduit la tendance de la plupart des sujets à ignorer dans leurs alternatives de choix leurs caractéristiques communes éventuelles, telles qu'un bonus commun, ou une même conséquence conditionnelle à un événement donné.

Or, comme le note Abdellaoui [1,3] et Abdellaoui et Munier [2], choisir entre deux loteries en ignorant un bonus qui leur est commun est incompatible avec la prise en compte par la fonction d'utilité Neumanienne u de la richesse de l'individu car dans le modèle de l'utilité espérée, les utilités des conséquences tiennent compte de la richesse initiale de l'individu.

Le point fort de ce modèle (Prospect theory) est qu'il transforme les probabilités, la principale source de faiblesse descriptive du modèle linéaire de l'utilité espérée. Mais, dès sa naissance, il a été critiqué sur deux points :

- Le modèle se limite à des loteries avec un maximum de trois conséquences ;
- Le modèle permet la violation de la dominance stochastique du premier ordre, considérée comme un principe élémentaire de rationalité.

D'autant plus que Cohen, Jaffray et Said [26] ainsi que Abdellaoui [3] ont montré que les attitudes des sujets en situation de gains sont dissemblables de leurs attitudes en situation de pertes. Cette dissemblance infirme l'existence d'un effet de symétrie qu'ont cru déceler Kahneman et Tversky [41] (deuxième ensemble d'observations) et contredit l'hypothèse de la Prospect Theory, selon laquelle les probabilités sont transformées de la même manière aussi bien pour des loteries portant sur des gains que pour des loteries portant sur des pertes.

Quiggin [55], a été à l'origine de la première approche axiomatique visant l'explication d'une fonctionnelle générale de préférence définie sur l'ensemble des loteries L tenant compte de la transformation des probabilités et ne souffrant d'aucune des lacunes du modèle de Kahneman et Tversky [41]. Il s'agit en fait d'une véritable généralisation du modèle de l'utilité espérée.

Indépendamment, Yaari [75], a proposé un modèle axiomatique dont la fonctionnelle de préférence est similaire à celle de Quiggin [55], mais avec une fonction d'utilité linéaire. Une démarche différente (non axiomatique) a conduit Allais [5], à expliciter une fonctionnelle de préférence, identique à celle de Quiggin, mais avec une fonction d'utilité tenant compte de la seule attitude vis-à-vis de la richesse. L'attitude vis-à-vis du risque est reflétée par la fonction de transformation des probabilités.

Wakker [71], présente la version la plus générale d'un modèle axiomatique de décision devant le risque qui aboutit à une fonctionnelle de préférence similaire à celle proposée par Quiggin où les coefficients de pondérations dépendent des rangs des conséquences, d'où l'appellation « utilité dépendant du rang ».

L'axiomatique proposée par Wakker [70], rend possible la séparation de l'attitude vis-à-vis de la richesse, reflétée par la fonction d'utilité u, et l'attitude vis-à-vis du risque probabiliste, reflétée par la fonction de transformation des probabilités.

L'avantage de la théorie de l'utilité espérée dépendante du rang est qu'elle permet de distinguer plusieurs notions d'aversion vis-à-vis du risque. En effet, Cohen [22] note qu'il est possible de définir, indépendamment de toute représentation des préférences, une notion d'aversion faible vis-à-vis du risque (selon laquelle un décideur préfère l'espérance de la loterie à la loterie elle même) et une notion d'aversion forte vis-à-vis du risque (selon laquelle un décideur préfère une loterie donnée à un étalement à moyenne constante de cette même loterie). Ces deux notions se confondent dans la théorie de l'utilité espérée et correspondent à la concavité de la fonction d'utilité dans le certain. Elles ne sont plus équivalentes dans le cadre de l'utilité dépendante du rang.

Cette synthèse montre l'apport de ces nouveaux modèles par rapport au modèle d'utilité espérée, néanmoins, ces modèles n'échappent pas aux critiques qui lui sont adressées et que nous avons mentionné dans le paragraphe 6.

Malgré ces critiques, cette théorie attire toujours les économistes et les financiers et fait l'objet de plusieurs études et recherches.

Dans le domaine de choix de portefeuille, Gayant [36] a montré que lorsque l'on combine deux actifs, il faut distinguer six cas. Ces six cas deviennent trente six lorsque l'on combine trois actifs. La règle devient extrêmement complexe si le nombre d'actifs est supérieur à trois. Or, dans la constitution d'un portefeuille, la minimisation du risque passe inévitablement par la diversification, autrement dit un nombre considérable d'actifs dans le portefeuille. D'où l'incapacité, du point de vue pratique, de ces modèles à répondre aux exigences des investisseurs.

D'autre part, souligne Gayant [36], que la linéarité ou la non linéarité de la fonction d'utilité u décideur n'est pas l'élément essentiel des prescriptions du modèle, mais sont les propriétés de la mesure de vraisemblance du décideur qui déterminent le choix des actifs à combiner et le mode de combinaison. Or, pour établir formellement ces intuitions, il faut, d'une part, construire une théorie complète de la détermination séquentielle des parts optimales d'actifs, et d'autre part élaborer un outil qualitatif et quantitatif destiné à concrétiser les prescriptions théoriques de ce modèle dans le domaine de la finance appliquée.

En conclusion, on ne peut pas nier l'amélioration qu'ont apporté ces nouveaux modèles de décision dans l'incertain par comparaison avec la théorie de l'utilité, sur le plan théorique. Toutefois leur apport sur le plan pratique est quasiment nul à cause de la complexité de l'algorithme et les différents cas à distinguer à chaque fois qu'on veut diversifier un portefeuille.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Abdellaoui M. (2001), A genuine rank dependent generalization of the von Neumann-Morgenstern utility theorem, *Econometrica*.

[2] Abdellaoui M. et Munier B. (2001), Substitutions probabilistiques et décision individuelle devant le risque, *Revue d'économie politique,* 111,1, pp.29-39.

[3] Abdellaoui M.(1995), Comportements individuels devant le risque et transformation des probabilités, *Revue d'économie politique,* 105,1, pp.157-178.

[4] Abdellaoui M. et Munier B. (1994), Expected utility, non expected utility or contingency on risk-structure? An experimental investigation, *Document de travail, GRID, Ecole Normale Supérieure de Cachan*.

[5] Allais M. (1986), The General Theory of Random Choices in Relation to the Invariant Cardinal Utility Function and the Specific Probability Function, the (U, θ) Model : A General Overview, *in : B. Munier, ed., Risk, Decision and Rationality*, Dordrecht/Boston, Reidel, pp. 231-289.

[6] Allais M. (1953), Le comportement de l'homme rationnel devant le risque, critique des postulats et axiomes de l'école américaine, *Econometrica*, vol.21, pp.503-546.

[7] Arrow K. (1965), The theory of risk aversion, *in Aspects of the theory of risk bearing*, Yrjo J. Saatio, Helsinki.

[8] Battalio R.C., Kagel J.H. et Jiranyakul R.K. (1990), Testing between alternative models of choice under uncertainty: Some initial results, *Journal of Risk and Uncertainty,* 3, pp.25-50.

[9] Bernouilli D.(1738), Specimen theoriae novae de mensura sortis, *Comentarii Academiae Scientarum Imperialis Petropolitanae,*(1730-1731, publié 1738). pp. 175-192. (traduit par Pringsheim A., Versuch einer neuen theorie der wertbestimmung von glucksfallen, Leipzig (1896)), (traduit par Sommer L., Exposition of a new theory on the measurement of risk, Econometrica, vol.22, (1954), pp. 23-36.

[10] Bernouilli N. (1713), Ars conjectandi, (traduit par Hausner R., Warscheinlichkeitsrechnung, Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften, 107 und 108, W. Englemann, Leipzig (1899).

[11] Bouyssou D. (1984), Decision-aid and expected utility theory: A critical survey, *in Hagen O. et Wenstop F., eds, Progress in Utility and Risk Theory*, Reidel D., pp.181-216.

[12] Camerer C.F. (1992), Recent tests of generalized utility theories, in W. Edwards (ed.), Utility: measurement, Theories and Applications, *Dordrecht: Kluwer Academic*, pp. 207-251.

[13] Camerer C.F. (1989), An experimental test of several generalized utility theories, *Journal of Risk and Uncertainty*, 2, pp. 61-104.

[14] Camerer C.F. et Ho T.H. (1994), Violations of the betweenness axiom and nonlinearity in probability, *Journal of Risk and Uncertainty*, 8, pp.167-196.

[15] Carbone E.et Hey J.D. (1994), An investigation into the determination of the error: a comparison of the estimates of EU and non-EU preference functionals arising from pairwise choice experiments and complete ranking experiments, *Document de travail, Université de York*.

[16] Chateauneuf A. (1990), On the use of comonotonicity in the axiomatization of EURDP thory for arbitrary consequences, *CERMSEM, University of Paris I*, abstract presented at fifth international conference on the foundation and applications of utility, Risk and decision theory.

[17] Chateauneuf A.et Cohen M. (1994), Risk-seeking with diminishing marginal utility in a non expected utility model, *Journal of Risk and Uncertainty*, vol.9, pp. 77-91.

[18] Chateauneuf A., Cohen M. et Meilijson I. (janvier 1997), New tools to better model behavior under risk and uncertainty : An overview, *Finance*, vol.18, , pp.25-46.

[19] Chew S.H. (1983), A generalisation of the quasilinear mean with applications to the measurement of income inequality and decision theory resolving the Allais paradox, *Econometrica*, vol.51, pp. 1065-1092.

[20] Chew S.H., Karni E. et Safra Z. (1987), Risk aversion in the theory of expected utility with rank dependent preferences, *Journal of Economic Theory*, vol.42, pp.370-381.

[21] Choquet G., (1953), Theorie des capacités, *Ann.Institut Fourier*(Grenoble),pp.131-295.

[22] Cohen M. (1995), Comparison of risks and behavior in expected and non-expected utility models, *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*.

[23] Cohen M.(1992), Expected utility, security level, potential level: a three criteria decision model under risk, *Theory and Decision*, vol.33, pp.101-134.

[24] Cohen M. et Tallon J-M. (2000), décision dans le risque et l'incertain : l'apport des modèles non additifs, *Revue d'économie politique*, 110, 5, pp.631-681.

[25] Cohen M. et Jaffray J.Y.(1988), Certainty effect versus probability distorsion : an experimental analysis of decision making under risk, *Journal of Experimental Psychology*, H.P.P, vol.14, pp.554-560.

[26] Cohen M. et Jaffray J.Y.et Said T.(1987), Experimental comparisons of individual behavior under risk and under uncertainty, *Organisational Behavior and Human Decision Processes*, vol.39, pp.1-22.
[27] Demers f. et Demers M. (1990), Price uncertainty, the competitive form and the dual theory of choice under risk, *European Economic Review*, vol.34, pp.1181-1200.
[28] Doherty N. et Eeckhoudt L. (1995), Optimal insurance without expected utility : the dual theory and the linearity of insurance contracts, *Journal of Risk and Uncertainty*, vol.10, pp.157-179.
[29] Edwards W.(1954), The theory of decision making, *Psychological Bulletin*, vol.51, pp.380-417.
[30] Eeckhoudt L.(1997), La theorie duale des choix risqués et la diversification : quelques reflexions, *Finance*, vol.18, pp.77-84.
[31] Eeckhoudt L., Gollier C. et Schlesinger h.(1996), Changes in background risk and risk taking behavior, *Econometrica*, Vol.64, pp.683-689.
[32] Ellsberg D.(1961), Risk, ambiguity and the Savage axioms, *Quarterly Jounal of Economics*, vol.75, pp.643-669.
[33] Fishburn, P.C.(1978), On Handa's new theory of cardinal utility and the maximization of expected return, *Journal of Political Economy*, vol.86, pp.321-324.
[34] Friedman M. et Savage L.J.(1948), The utility analysis of choices involving risk, *Journal of Political Economy*, vol.56, pp.279-304.
[35] Friend I. Et Blume M. (1975), The demand for risky assets, *The American Economic Review*.
[36] Gayant J-P. (1997), Constitution d'un portefeuille et espérance non-additive de gains : suggestions prescriptives pour la combinaison optimale d'actifs financiers, *Finance*, vol.18, pp.85-99.
[37] Gayant J-P. (1995), Généralisation de L'espérance D'utilité en Univers risqué, représentation et estimation, *Revue Economique*, 46, pp. 1047-1061.
[38] Green J.R et Julien B.(1988), Ordinal independance in nonlinear utility theory, Journal of risk and uncertainty, vol.1, pp.355-387.
[39] Hadar J. et Russel. W.(1969), Rules for ordering uncertain prospects, *American Economic Review*, vol.59, pp.25-34.
[40] Handa J.(1977), Risk, Probabilities and new theory of cardinal utility, *Journal of Political Economics*, vol.85, pp.97-122.
[41] Kahneman D. et Tversky A. (1979), Prospect theory : An analysis of decision under risk, *Econometrica*, vol.47, pp.263-291.
[42] Karni E. et Schmeidler D. (1991), utility theory with uncertainty, in *Hildenbran W. and Sonnenschein H., éditeur, handbooks of mathematical economics*, *North-Holland*, vol.4, pp.1763-1831.
[43] Kaysen C.(1946,1947), A revolution in economic theory, *Review of Economic Studies*, vol.14, pp.1-15.
[44] Keynes J.M. (1921), A treatise on probability. London: McMillan.
[45] Kimball M.(1990), Precautionary saving in the small and in the large, *Econometrica*, vol.58, (1990a), pp.53-73.
[46] Leland H. (1972), Theory of the firm facing uncertain demand, *American Economic Review*, vol.62, pp.278_291.
[47] Lopes L. (1886), Between hope and fear: the psychology of risk, *Advances in Experimental Social Psychology*.
[48] Loomes G. et Sugden R. (1982), Regret theory : an alternative theory of rational choice under uncertainty, *Economic Journal*, vol.92, pp.805-824.
[49] Machina M. (1982), Expected utility analysis without the independence axiom, *Econometrica*, vol.50, pp.277-323.
[50] Marschak J.(1950), Rational behavior, uncertain prospects and measurable utility, *Econometrica*, vol.18, pp.111-141.
[51] Munier B. (1989), Calcul économique et révision de la théorie de la décision en avenir risqué, *Revue d'économie politique*, vol.99, pp.276-306.
[52] Pratt J. (1964), Risk aversion in the small and in the large, *Econometrica*, vol.32, pp.122-136.
[53] Puppe C. (1990), The irrelevance axiom, relative utility and choice under risk, *Department of Statistics and Mathematical Economics*, University of Karlsruhe.
[54] Quiggin J.(1992), Increasing risk: another definition, in *Progress in Decision, Utility and Risk Theory*, Kluwer A.P.
[55] Quiggin J. (1982), A theory of anticipated utility, *Journal of Economic Behaviour and Organization*, vol.3, pp.323-343.
[56] Rothschild M. et Stiglitz J.E. (1971), Increasing risk : II. Its economic consequences, *Journal of Economic Theory*, vol.3, pp.66-84.

[57] Rothschild M. et Stiglitz J.E. (1970), Increasing risk : I. A definition, *Journal of Economic Theory*, vol.2, pp.225-243.
[58] Sandmo A. (1971), On the theory of the competitive firm under price uncertainty, *American Economic Review*, vol.61, pp.65-73.
[59] Savage L.J., The foundations of statistics, New York, John Wiley, (second edition 1972, Dover).
[60] Schoemaker P.J.H.(1991), Choices involving uncertain probabilities: Tests of generalized utility models, *Journal of Economic Behavior and Organization*, vol.16, pp.295-317.
[61] Segal U. (1989), Anticipated utility : a measure representation approach, *Annals of Operations Research*, vol.19, pp.359-373.
[62] Shmeidler D., Subjective probability and expected utility without additivity, *Econometrica*, vol.57, (1989), pp.571-587.
[63] Starmer C.(1992), Testing new theories of choice under uncertainty using the common consequence effect, *Review of Economic Studies*, vol.59, pp.813-830.
[64] Tallon J-M.(1997), Risque microéconomique et prix d'actifs dans un modèle d'équilibre général avec espérance d'utilité dépendante du rang, *Finance*,vol.18, pp.139-153.
[65] Tallon J-M.(1997), Risque microéconomique, aversion à l'incertitude et indétermination de l'équilibre, *Annales d'économie et de statistique*, 48,pp.211-226.
[66] Tversky A. et Kahnemann D.(1992), Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty, *Journal of Risk and Uncertainty*, vol.5, pp.297-323.
[67] Tversky A. et Wakker P.(1994), Risk attitudes and decision weights, *Document de travail, Stanford University & University of Leiden*.
[68] Viala P. et Briys E. (1995), Eléments de théorie financière, *editions Nathan*.
[69] Vickrey W.(1945), Measuring marginal utility by reactions to risk, *Econometrica*, vol.13, pp.319-333.
[70] Von Neumann J. et Morgenstern O.(1947), Theory of Games and Economic Behaviour, *Princeton University Press, Princeton*.
[71] Wakker P. (1994a), Separating marginal utility and risk aversion, *Theory and Decision*, vol.36, pp.1-44.
[72] Wakker P.(1993), Counterexamples to Segal's measure representation theorem, *Journal of Risk and Uncertainty*, vol.6, pp.91-98.
[73] Wakker P. (1990), Continuity, absolute continuity and weak convergence in anticipated utility representations, *Fuqua School of Business, Duke Unversity*.
[74] Wakker P. et Tversky A., An axiomatization of cumulative prospect theory, *Journal of Risk and Uncertainty*, vol.7, (1993), pp.147-176.
[75] Yaari M.E. (1987), The dual theory of choice under risk, *Econometrica*, vol.55, pp.95-115.