



Munich Personal RePEc Archive

## **Evidence Of Chaotic Behavior In American Stock Markets**

Christian Espinosa Méndez

Universidad Diego Portales

20 October 2005

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/2794/>  
MPRA Paper No. 2794, posted 19 April 2007

# EVIDENCIA DE COMPORTAMIENTO CAÓTICO EN INDICES BURSÁTILES AMERICANOS

Christian Espinosa, M.Sc.<sup>2</sup>  
Franco Parisi, Ph.D.<sup>1</sup>  
Antonino Parisi, Ph.D.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Assistant Professor, Finance and Management Department, Universidad de Chile, Chair in Finance  
EuroAmerica.

<sup>2</sup> Profesor Asistente, Facultad de Economía y Empresa, Universidad Diego Portales.

---

## Abstract

Este artículo valida el comportamiento caótico en las Bolsas de Comercio de Argentina, Brasil, Canadá, Chile, Estados Unidos, Perú y México utilizando los índices accionarios Merval, BOVESPA, S&P TSX COMPOSITE, IPSA, IGPA, S&P 500, DOW JONES INDUSTRIAL, NASDAQ, IGBVL e IPC, respectivamente. Los resultados de distintas técnicas y métodos como Análisis Gráfico, Análisis de Recurrencia, Entropía de Espacio Temporal, Coeficiente de Hurst, Exponente de Lyapunov y Dimensión de Correlación, apoyan la hipótesis de que los mercados bursátiles americanos se comportan de forma caótica, en contra de la hipótesis de mercados eficientes y la hipótesis de aleatoriedad. Esta conclusión valida el uso de herramientas predictivas de retornos accionarios en los mercados de renta variable Americanos. Destacable es el resultado de la técnica Coeficiente de Hurst, que en promedio fue de 0,75 para los índices en estudio, lo que estaría justificando la utilización de modelos tipo ARFIMA, entre otros, para la predicción de dichas series.

*CJEL: C12, C14, G10, G14 y G15*

---

Key Words: Teoría de Caos, Análisis de Recurrencia, Entropía de Espacio Temporal, Coeficiente de Hurst, Exponente de Lyapunov, Dimensión de Correlación, Test BDS.

## I. Introducción

Albert Einstein recibió el premio Nóbel por su contribución a la teoría cuántica. No obstante, nunca aceptó que el universo estuviera gobernado por el azar. Sus ideas al respecto están resumidas en su famosa frase “Dios no juega a los dados”. La mecánica cuántica no predice un único resultado para un experimento determinado sino que predice un cierto número de resultados posibles y entrega las probabilidades de ocurrencia de cada uno de ellos. Es decir, si se realizara el mismo experimento sobre un gran número de sistemas similares, con las mismas condiciones de partida en cada uno de ellos, se encontraría que el resultado del experimento sería “A” un cierto número de veces, “B” otro número de veces, y así sucesivamente. Se podría predecir el número aproximado de veces que se obtendría el resultado “A” o el “B”, pero no se podría predecir el resultado específico de un experimento determinado. Así pues, la mecánica cuántica introduce un elemento inevitable de incapacidad de predicción, *una aleatoriedad en la ciencia*<sup>1</sup>.

En finanzas, la palabra aleatoriedad ha sido tema de discusión constante en torno a los precios accionarios. Desde que Fama (1970) planteara la hipótesis de mercados eficientes, muchos estudios han señalado que las fluctuaciones de los precios accionarios siguen un camino aleatorio. No obstante, trabajos posteriores<sup>2</sup> han concluido que existe evidencia de que los precios accionarios no siguen un proceso *random walk* y muestran que los retornos accionarios pueden ser predecibles en algún grado. En síntesis, se asume que la evolución de los retornos accionarios futuros se pueden predecir por modelos basados en series de tiempo.

---

<sup>1</sup> Párrafo extraído del libro “Historia del Tiempo”: del Big Bang a los Agujeros Negros, Stephen Hawking.

<sup>2</sup> Lo y MacKinley (1988); Conrad y Kaul (1988); Fama y French (1988), entre otros.

El análisis de series de tiempo fue impulsado por Box y Jenkins (1970) y dio origen a la metodología del mismo nombre. Estos modelos se han empleado exitosamente sobre variables económicas pero no han tenido igual éxito en variables financieras. Como consecuencia de esto, aparecieron modelos que pueden explicar en mejor medida las variables financieras. En este contexto destacan los modelos ARCH y GARCH desarrollados por Engle y Bollerslev (1982 y 1986, respectivamente) los cuales, ocupando las bases de la metodología ARIMA, la amplían para estudiar la varianza. Por cierto que los modelos ARCH y GARCH han dado pie a numerosos modelos de la misma familia, entre los cuales se encuentran los modelos T-GARCH, E-GARCH, I-GARCH, M-GARCH, entre muchos otros.

Durante la década del '70 se desarrolla la **Teoría de Caos** (o análisis de series de tiempo con comportamiento caótico) gracias a los trabajos de Lorenz (1963), Takens (1981) y Mandelbrot (1982), entre otros. Pero no fue hasta 1980 donde se amplió el análisis a las series temporales gracias a Packard, Crutchfield, Farmer y Shaw (1980) para que luego, en 1981, Takens lo formalizara matemáticamente.

La contrastación de comportamiento caótico en series económicas y financieras se inició en los años 80 para variables macroeconómicas como el PIB y agregados monetarios. En dichas series se encontró poca evidencia de caos, no obstante, se demostró la existencia de una estructura no lineal (Le Barón, 1994). Desde entonces se han realizado diversos estudios en la búsqueda de comportamiento caótico en las series financieras y económicas (Di Matteo, Aste y Dacorogna, 2005; Los, 2004; Los y Yu, 2005). Así, lo habitual es encontrar investigaciones que utilizan técnicas y herramientas tales como el Coeficiente de Hurst, Exponente de Lyapunov y la Dimensión de Correlación para la contrastación de comportamiento caótico en dichas series.

En el contexto del Coeficiente de Hurst, estudios recientes muestran dependencia de largo plazo en las series de precios de los activos financieros. Así, por ejemplo, Kyaw, Los y Zong (2004), utilizando *wavelet multiresolution analysis* (MRA) para las series diarias de los índices bursátiles y tasas de cambio latinoamericanos (Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Venezuela) encontraron un Coeficiente de Hurst igual o mayor a 0.5 en todos los países, excepto en Colombia. Similares resultados encontraron Los y Yu (2005) para el mercado accionario de China. En dicho estudio, utilizando precios de cierre diarios de los índices de las Bolsas de Valores de Shanghai y Shenzhen encontraron un Coeficiente de Hurst de 0.54 y 0.55, respectivamente.

De esta manera, se infiere que los mercados bursátiles latinoamericanos, en general, presentan memoria de largo plazo al igual que el mercado bursátil chino. No obstante, esta evidencia no es consistente con resultados encontrados para países europeos. Por ejemplo, Lipka y Los (2003) realizan un estudio que involucra a ocho índices bursátiles europeos, correspondientes a Austria, Dinamarca, Francia, Alemania, España, Noruega y Reino Unido. Los autores, tomando muestras irregulares que van desde 435 observaciones para el índice IBEX 35 de España hasta 4,437 para el índice FTSE 100 correspondiente al Reino Unido, utilizando 7 técnicas distintas para computar el coeficiente de Hurst, encontraron resultados completamente distintos, dependiendo de la técnica utilizada. Así, el cálculo del Coeficiente de Hurst varía desde 0.22 a 0.56.

Para la detección de comportamiento caótico, una herramienta utilizada habitualmente en diversas investigaciones es el Exponente de Lyapunov. Así, por ejemplo, Rajaratnam y Weston (2004) encontraron un Exponente de Lyapunov de 0.132 para la serie del tipo de cambio entre Nueva Zelanda y Estados Unidos, para el período comprendido

entre 1985 y 2004, lo que indicaría claramente la existencia de un comportamiento caótico en dicha serie.

Como se ha visto, la dependencia de largo plazo en las series financieras ha sido investigada y documentada, al igual que el cómputo del Exponente de Lyapunov. Sin embargo, dichos estudios se limitan a contrastar sólo dicha cualidad y no abordan el análisis utilizando más herramientas para contrastar comportamiento caótico sobre las mismas series financieras, utilizando, por ejemplo, análisis de recurrencia, entropía de espacio temporal o la dimensión de correlación, entre otras. Este problema es justamente resuelto en la presente investigación.

De esta manera, nuestro trabajo se centra en analizar la existencia de un comportamiento caótico en las Bolsas de Argentina, Brasil, Canadá, Chile, Estados Unidos, Perú y México, utilizando la evolución de los índices accionarios Merval, BOVESPA, S&P TSX Composite, IPSA, IGPA, S&P 500, Dow Jones Industrials, NASDAQ, IGBVL e IPC, respectivamente. Los resultados de aplicar distintas técnicas y métodos como Análisis Gráfico, Análisis de Recurrencia, Entropía de Espacio Temporal, Coeficiente de Hurst, Exponente de Lyapunov y Dimensión de Correlación, apoyan la hipótesis de que los mercados bursátiles americanos se comportan de forma caótica, en contra de la hipótesis de aleatoriedad.

La implicancia teórica de contrastar un comportamiento caótico en los mercados accionarios Americanos radica en el hecho que, a diferencia de la hipótesis de mercados eficientes, la información (o nueva información) que se agrega a la serie de precios accionarios (cambio de directores, anuncio de aumento de dividendos, etc.) no es externa sino que es propia de la dinámica interna del mercado. Por tanto, el desafío ya no consiste en dar una explicación estadística, o de otro tipo, a variables estocásticas que ayudan a

mejorar el pronóstico de la evolución futura de activos financieros, sino que radica en descubrir la dinámica propia del mercado. Es decir, en terminología caótica, reconstruir el “atractor financiero”.

Desde el punto de vista práctico, sin duda que la importancia de evidenciar un comportamiento caótico en series de activos financieros justifica la búsqueda de técnicas predictivas a la hora de invertir en los mercados accionarios Americanos. A su vez, confirma la conveniencia de usar éstas técnicas para lograr una mayor eficiencia en la administración de portafolios de inversión.

En síntesis, el principal aporte de la teoría de caos es que otorga una explicación teórica de la existencia de sistemas dinámicos con comportamientos irregulares sin la necesidad de recurrir a variables estocásticas.

Esta investigación se estructura de la siguiente forma: En el apartado 2 se introducen los conceptos básicos de las series con comportamiento caótico a través del análisis de los sistemas dinámicos. En el apartado 3 se describen los datos y series a utilizar. En el apartado 4 corrobora el comportamiento caótico en las series analizadas. En el apartado 5 se aplican test no paramétricos para contrastar aleatoriedad y caos. Finalmente, el apartado 6 resume las principales conclusiones.

## **II. Sistemas Dinámicos con comportamiento caótico**

La diferencia fundamental entre un sistema dinámico y uno estático es que en el primero las variables están en función del tiempo, mientras que en un sistema estático no ocurre lo mismo. Los sistemas dinámicos pueden ser clasificados de acuerdo al comportamiento de sus órbitas. Dichas órbitas corresponden al movimiento en el cual

evoluciona el sistema a lo largo del tiempo dentro del *espacio de fase*<sup>3</sup>, es decir, el movimiento del vector describe el sistema.

En un sistema dinámico, un vector representa una “fotografía” del sistema en un determinado momento. Para el mercado financiero, el vector puede estar formado por variables que afectan el mercado (precio, volumen, etc.). De esta forma, si el sistema se mueve en un conjunto  $\mathfrak{R}^n$ , tal que  $A$  es subconjunto de  $\mathfrak{R}^n$ , entonces las órbitas podrán tener el siguiente comportamiento:

- Sistema disipativo: Si  $A$  se contrae con el paso del tiempo.
- Sistema expansivo: Si  $A$  se expande con el paso del tiempo.
- Sistema conservativo: Si  $A$  se mantiene con el paso del tiempo.

Un concepto asociado a los sistemas disipativos es el de *atractor*. Se denomina atractor a un subconjunto  $B$  hacia el que  $A$  tiende a contraerse en el tiempo. Por lo tanto, las órbitas que entran en un atractor no escapan sino que permanecen en él. En un sistema dinámico el atractor representa el equilibrio, ya que una vez alcanzado dicho equilibrio la órbita no tiende a separarse de él.

De acuerdo a Eckmann y Ruelle (1985) existen 4 tipos de atractores: Atractor Fijo, Atractor Periódico, Atractor Semi-Periódico y Atractor Aperiódico. Este último es un atractor en donde las órbitas no pueden clasificarse como periódicas ni como semi-periódicas. Así, un retorno accionario con este tipo de atractor se movería sin una pauta que lo identificase y podría parecer que los precios se mueven de forma errática. Finalmente, Ruelle y Takens (1971) denominaron a este último tipo de atractor “*atractor extraño*”. Así,

---

<sup>3</sup> Espacio vectorial en donde cada vector representa la descripción del sistema dinámico en ese instante. Cada componente del vector es una variable que determina el estado del sistema.



*los sistemas dinámicos que presentan atractores extraños se denominan sistemas caóticos.*

Un sistema caótico presenta las siguientes características:

- i) Sensibilidad a las condiciones iniciales: Un sistema con comportamiento caótico tendrá sensibilidad a las condiciones iniciales si el conjunto de partida no se contrae en todas direcciones sino que en algunas de ellas se expande. No obstante, el conjunto sigue siendo limitado y, por lo tanto, sigue manteniendo un atractor. Si el sistema en algún momento se expande, las diferencias iniciales no tienden a desaparecer y, por lo tanto, pueden llegar a ser importantes. En resumen, la sensibilidad a las condiciones iniciales no nos dice cual va a ser el estado final o futuro del conjunto, sin embargo, *podríamos inferir cuál será su comportamiento a muy corto plazo.*
- ii) Puntos periódicos densos: La característica de puntos periódicos densos indica que existen infinitos puntos y soluciones periódicas inestables asociadas a un atractor extraño. Es decir, las órbitas que se encuentran dentro del atractor se aproximan a los límites de estos puntos (soluciones) inestables y permanecen hasta que la naturaleza de estas soluciones (inestabilidad) haga que dicha órbita escape a los límites de otra solución inestable, hasta que finalmente encuentre un equilibrio estable caótico. La manera en que se agrupan los equilibrios periódicos inestables y el equilibrio estable caótico desencadena que el atractor extraño sea denso en puntos (soluciones) periódicos.
- iii) Transitividad: Esta característica implica que un sistema dinámico no podrá descomponerse en dos subsistemas independientes entre sí. A pesar que la característica de sensibilidad a las condiciones iniciales indica que las órbitas que se encuentran infinitamente próximas se alejen en el tiempo, dichas órbitas a largo plazo pasarán por

todas las regiones que componen el atractor extraño formando un solo sistema dinámico.

### **III. Datos y Modelos**

Los datos fueron extraídos de Economática. En el caso de Argentina, la serie de observaciones del índice Merval fue ampliada hasta el 25 de abril de 2005 para completar las 3,841 observaciones por índice accionario. La elección del número de datos se ajustó a los requerimientos de los diversos cálculos realizados. Los datos corresponden a los valores de cierre diarios de cada índice. Un resumen de la serie final se muestra en Tabla 1.

Las herramientas que permiten probar la existencia de un comportamiento caótico en las series de tiempo son sensibles a los procesos estocásticos en los cuales existen dependencias entre las variables. Por ello es necesario realizar un filtro para eliminar dichas dependencias, por medio de un modelo ARMA. De esta manera, luego de filtrar los retornos accionarios, la nueva serie es de residuos no correlacionados. Así, si el sistema era caótico, la serie de residuos continuará teniendo las características del sistema original y si era estocástico los residuos no serán más que ruido blanco.

Dado lo anterior, utilizando los tests de Dickey-Fuller aumentado (1979) y de Phillips Perron (1988), se analizó si la serie es estacionaria, para luego buscar modelos del tipo ARMA  $(p,q)$ . De esta forma, se encontraron modelos ARMA para los índices Merval, S&P TSX Composite, IGPA, IPC y S&P 500. Para los otros índices se encontraron modelos estadísticamente significativos pero con correlación en los residuos, por este motivo se desecharon dichos modelos y se buscaron modelos alternativos que arrojaran residuos no correlacionados. Con esto, y luego de la inspección gráfica de las

series, se estimó que los modelos GARCH (Bollerslev,1986) eran los más adecuados para generar residuos no correlacionados. Los modelos definitivos se muestran en la Tabla 2.

#### **IV. Detección de comportamiento caótico**

Peters (1994) intenta encontrar indicios de una serie con comportamiento caótico mediante el análisis gráfico y señala que las series de precios de los activos financieros tienen gráficamente la misma estructura, sea cual sea la escala temporal estudiada. Al observar las gráficas de la evolución de los índices en cuestión, no resultan diferencias entre éstas, dificultando establecer cuál es el horizonte temporal al que corresponden dichas gráficas<sup>4</sup>. El hecho de que estas series tengan la misma apariencia en distintas escalas de tiempo es un indicio de que estamos ante un fractal. Sin embargo, esta característica encontrada en las series de los índices bursátiles americanos no es garantía definitiva de estar ante un proceso caótico.

Una de las características de los sistemas caóticos es que tienen soluciones (puntos) periódicas densas inestables. Gilmore (1993) busca estas órbitas periódicas inestables en forma gráfica. Si estas órbitas proceden de un atractor extraño, existirán observaciones que se encuentren cercanas a una órbita periódica. Si ocurriera esto encontraríamos que las siguientes observaciones también estarían cercanas a dicha órbita, por lo menos antes de alejarse como consecuencia de la sensibilidad a las condiciones iniciales.

Para la reconstrucción de los gráficos de recurrencia se detectan patrones y cambios estructurales ocultos en los datos o semejanzas en patrones a través de la serie de tiempo en estudio. Así, una señal de determinismo será cuando más estructurado sea el gráfico de recurrencia. Una señal de aleatoriedad será cuando el gráfico de recurrencia sea más

---

<sup>4</sup> Para un ejemplo véase la Gráfica 1.

uniforme y no tenga un patrón identificable<sup>5</sup>. Para obtener los gráficos de recurrencia es necesario calcular la dimensión de inmersión y el tiempo de retardo. Estos datos son difíciles de obtener, no obstante, existen distintos programas para su cómputo como, por ejemplo, el programa VRA<sup>6</sup> que utiliza la técnica *Información Mutua (AMI)*<sup>7</sup> para determinar el tiempo de retardo y el método de *Falsos Vecinos Cercanos (FNN)*<sup>8</sup> para la dimensión de inmersión. Los resultados de los cálculos de *AMI* y *FNN* se muestran en la Tabla 3.

La estimación del tiempo de retardo ( $T$ ) mediante la función de información mutua mostró homogeneidad para los registros estudiados (como promedio  $T=18$  para las series en estudio) y la dimensión de inmersión fue relativamente elevada para cada uno de los registros, con  $m \geq 13$  en todos los casos (excepto para la serie del índice Bovespa,  $FNN=8$ ). Así, al observar los gráficos de recurrencia de las series originales de los índices en estudio, se encontró que son como una serie aleatoria en donde no hay un patrón definido, lo que estaría denotando las dependencias lineales que existirían en dicha serie, a diferencia de los gráficos de recurrencias aplicados a las series de los residuos de los modelos ARMA y

---

<sup>5</sup> Véase el Grafico 2 para diferenciar un gráfico de recurrencia aleatorio de uno caótico.

<sup>6</sup> Visual Recurrence Analysis (VRA). El VRA es un programa escrito por Eugene Kononov basándose en la definición de gráfico de recurrencia de Eckmann, Kamphorst y Ruelle (1987) y en el RQA de Zbilut y Webber (1992).

<sup>7</sup> La información mutua estima el valor óptimo de tiempo de retardo ( $T$ ) para la reconstrucción del espacio de fases propuesto por Fraser y Swinney (1986). La idea central de esta técnica es que un buen tiempo de retardo  $T$  es aquél que, dado un estado del sistema  $X(t)$  provea una información nueva máxima acerca del estado  $X(t+T)$ . Es decir, si se consideran dos mediciones  $x(n)=x_n$  y  $x(n+T)=x_{n+T}$ , la información mutua entre la medición  $x_n$  y la medición  $x_{n+T}$  es la cantidad aprendida de  $x_{n+T}$  acerca de  $x_n$  para algún  $n$  (para una descripción más detallada véase Abarbanel H.D.I., 1995).

<sup>8</sup> La base teórica de este método es que, para los sistemas determinísticos, los puntos que son cercanos en el espacio de fases reconstruido permanecen de esta forma bajo iteraciones posteriores en espacios de mayor dimensión, esto es cierto si la dimensión de inmersión es suficientemente elevada como para resolver el determinismo (Kennel, Brown y Abarbanel, 1992). En términos simples, este método encuentra el vecino más cercano de cada punto en una dimensión dada, luego comprueba si estos puntos siguen siendo vecinos cercanos en una dimensión más alta. El funcionamiento de este método es el siguiente: dado un punto  $Xn$  en  $m$  dimensiones, se buscan sus puntos vecinos más cercanos  $Xi$ . Por ejemplo, al dejar que la distancia entre  $Xn$  y  $Xi$  sea  $\epsilon_i$ : si la distancia entre estos puntos en el espacio de dimensión  $m+1$  es mayor que  $s*\epsilon_i$ , donde  $s$  es un determinado factor, el punto  $Xi$  se marca como un falso vecino cercano. La fracción de falsos vecinos cercanos indica entonces si el proceso es determinístico en  $m$  dimensiones o no.

GARCH que se asemejan al del atractor de Lorenz, indicando un comportamiento determinista<sup>9</sup>. Sin embargo, los gráficos de recurrencia no son concluyentes dado que en algunas series (residuos ARMA y GARCH del índice Merval y residuos GARCH de NASDAQ) no se encuentra evidencia clara acerca de que exista un comportamiento caótico.

La Entropía de Espacio Temporal (STE) compara la distribución de colores sobre un gráfico completo de recurrencia con la distribución de colores sobre cada línea diagonal del gráfico. Cuanto más altas son las diferencias entre la distribución global y las distribuciones sobre las líneas diagonales individuales, más estructurada es la imagen. Aquí se comparan las distancias entre todos los pares de vectores en el espacio reconstruido con las distancias entre las diversas órbitas que se desarrollan durante el tiempo. El resultado se normaliza y se presenta como porcentaje. Así, porcentajes cercanos a 100 indicarán aleatoriedad en la serie, mientras que porcentajes cercanos a 0 representarán series periódicas. Por último, porcentajes entre 0 y 100 indicarán series con comportamiento caótico. De los resultados de la Tabla 4 se infiere un comportamiento caótico en las series de residuos de los modelos seleccionados, con un promedio de 59% para todos los índices en contraste con un 2% para las series originales, lo cual representaría periodicidad en dichas series<sup>10</sup>.

El Coeficiente de Hurst indica la persistencia o la no-persistencia en una serie temporal. De encontrarse persistencia, ésta sería una señal de que dicha serie no es ruido blanco y, por lo tanto, existiría algún tipo de dependencia entre los datos. Hurst (1951) estudió la capacidad de reserva de las represas del río Nilo a través del tiempo y elaboró un

---

<sup>9</sup> Véase Gráfico 3 para un ejemplo de los gráficos de recurrencia de los índices bursátiles IPC, IGPA y DJI.

<sup>10</sup> El cómputo de la Entropía de Espacio Temporal no es significativo para series que no sean estacionarias, por tal motivo no podríamos concluir nada acerca de los resultados de las series originales. No obstante, los resultados de las series de residuos de los modelos en estudio es un indicio claro, pero no definitorio, de estar en presencia de series con comportamiento caótico.

estadístico para contrastar si el nivel de dichas reservas seguiría una caminata aleatoria o no. Si el estadístico se encuentra entre 0.5 y 1, indicaría persistencia en la serie (los valores tenderían a mantenerse en el tiempo), si se encuentra entre 0 y 0.5 indica no-persistencia; y un valor igual a 0.5 indicaría ruido blanco<sup>11</sup>.

El cálculo del Coeficiente de Hurst viene dado de la siguiente ley de potencia que muestra la ecuación (1):

$$R/S(N) = (a * N)^H \quad (1)$$

Donde  $a$  es una constante;  $N$  es el número de observaciones;  $H$  es el exponente o coeficiente de Hurst;  $R/S(N)$  es el estadístico  $R/S$  que depende del tamaño de la serie y que se define como el rango de variación de la serie partido por su desviación típica.

El Coeficiente de Hurst se utiliza para la detección de memoria a largo plazo en las series temporales. Los resultados de la Tabla 5 evidencian memoria de largo plazo en los índices bursátiles americanos en estudio, con un Coeficiente de Hurst promedio de 0.75<sup>12</sup>. No obstante, los modelos GARCH capturan en mejor medida esta cualidad que los modelos ARMA. El Coeficiente de Hurst promedio para los modelos ARMA fue de 0.57, mientras que para los modelos GARCH fue de 0.84. Sobre esto, sabemos que una de las principales características de los modelos GARCH es que consideran la información pasada de la variable y su volatilidad observada como factor explicativo de su comportamiento presente y futuro lo cual es consistente con las series con comportamiento caótico.

---

<sup>11</sup> Cabe señalar que Lo (1991) plantea que, si bien es cierto que el análisis R/S puede detectar dependencia de largo plazo en series temporales, dicho análisis presenta sensibilidad a la dependencia de corto plazo. Para soslayar esta deficiencia plantea una modificación al rango reescalado que denomina *rango reescalado modificado* (RRM), este análisis no es abordado en el presente estudio y solo se contempla la estimación del coeficiente de Hurst derivado del análisis del rango reescalado.

<sup>12</sup> Hay que destacar la significancia individual del coeficiente (el estadístico t es estadísticamente significativo al nivel del 5%), así como el alto nivel de bondad de ajuste ( $R^2$ ) de la regresión.

El Exponente de Lyapunov ( $\lambda$ ) (Eckmann y Ruelle, 1992) es utilizado para medir la sensibilidad a las condiciones iniciales y es, quizás, el método más empleado para la detección de caos en series de datos de las ciencias naturales. Puntualmente, representa la separación exponencial entre dos trayectorias, inicialmente próximas, al cabo de  $N$  pasos o iteraciones.

Ahora bien, los sistemas dinámicos que presentan atractores extraños se denominan sistemas caóticos. Para que un atractor sea extraño ha de tener al menos un exponente positivo de Lyapunov. Así, si  $\lambda < 0$ , implica contracción, por lo que la serie presenta convergencia, es decir, las órbitas convergerán en el tiempo hasta alcanzar el estado estacionario. Si  $\lambda = 0$ , las órbitas no convergen ni divergen, lo cual indica que el comportamiento es periódico o cuasiperiódico. Si  $\lambda$  pasa de negativo a nulo de forma alternante, la serie es cíclica. Si  $\lambda > 0$ , implica alejamiento de los puntos, por lo que la serie presenta una dinámica caótica.

En la práctica, se determina el primer exponente que es más fácil de calcular y permite diferenciar el caos de los comportamientos periódicos y cuasiperiódicos. De esta manera, la presencia de un exponente positivo es suficiente para diagnosticar caos. Existen diferentes algoritmos<sup>13</sup> para calcular el máximo exponente de Lyapunov. No obstante, la mayoría de estos métodos no son aplicables para series de tiempo pequeñas y son relativamente difíciles de implementar. Rosenstein, Collins y De Luca (1993) desarrollaron un método que resuelve estos inconvenientes. Así, después de reconstruir la dinámica del atractor, hacen que el algoritmo localice el punto  $Y_n'$  más cercano a cada punto de la trayectoria  $Y_n$ . Además, impone la restricción adicional que los puntos vecinos más cercanos deben tener una separación espacial mayor que el período medio de las series de

---

<sup>13</sup> Wolf, Swift, Swinney y Vastano, 1985; Sato, Sano y Sawada, 1987; Casdagli, 1989, entre otros.

tiempo. Esto permite considerar que cada par de vecinos corresponden a condiciones iniciales muy cercanas pero de diferentes trayectorias. Así, el exponente máximo de Lyapunov es aproximadamente la velocidad media de separación de los puntos vecinos más cercanos.

Los resultados del exponente de Lyapunov, que se encuentran resumidos en Tabla 6, indican que  $\lambda > 0$  para todas las series de residuos de los índices bursátiles en estudio, lo que representa una conclusión robusta de la existencia de un comportamiento caótico en los índices bursátiles americanos<sup>14</sup>.

Sabemos que los sistemas dinámicos que presentan atractores extraños se denominan sistemas caóticos. Ahora corresponde determinar la dimensión de dicho atractor. Lo habitual para determinar dicha dimensión es calcular la dimensión de correlación<sup>15</sup> del sistema en estudio. La dimensión de correlación,  $D_c$ , de un sistema dinámico es una medida de su complejidad, permitiendo discriminar entre un sistema determinista y uno aleatorio<sup>16</sup>. Así, si  $D = 1$  indicaría una serie con comportamiento de oscilaciones periódicas,  $D = 2$  oscilaciones cuasi periódicas;  $D > 2$  comportamiento caótico.

Para calcular la dimensión de correlación Grassberger y Procaccia (1983) desarrollaron un eficiente algoritmo en el cual plantean que  $D_c \leq D$ , donde  $D$  es la dimensión de capacidad<sup>17</sup>. La idea es reemplazar el algoritmo para calcular  $M(\epsilon)$ , llamado box-counting, por la distancias entre puntos representando

---

<sup>14</sup> El programa MTRCHAOS y MTRLYAP, elaborado por Rosenstein, Collins y De Luca, permite calcular el máximo exponente de Lyapunov como también los parámetros necesarios para estimar dicho exponente.

<sup>15</sup> Eckmann y Ruelle, 1992; Bai Lin Hao, 1990.

<sup>16</sup> Grassberger y Procaccia, 1983.

<sup>17</sup> La dimensión de capacidad viene definida por  $D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log M(\epsilon)}{-\log \epsilon}$  donde, en un conjunto de puntos  $A$  en un espacio euclídeo de  $n$  dimensiones,  $\epsilon$  corresponde a la medida de los lados de los hipercubos luego de “mallar” dicho espacio y  $M(\epsilon)$  es el número mínimo de tales hipercubos o celdas que son necesarios para cubrir el conjunto  $A$ . Así, por ejemplo, si  $A$  fuera un segmento de longitud 1,  $D=1$ .



posiciones del sistema a lo largo de una órbita en el conjunto atractor. Los resultados de la dimensión de correlación están resumidos en la Tabla 7. Los valores de la dimensión de correlación son muy cercanos a dos lo que representa oscilaciones cuasi periódicas, no obstante 8 de las 15 series presentan una dimensión mayor a dos lo que apoya la hipótesis de que éstos índices bursátiles tienen un comportamiento caótico.

## V. Test Estadísticos

Si bien los resultados apoyan la hipótesis fractal contra la de aleatoriedad es necesario aplicar test estadísticos que confirmen estos hallazgos. En este contexto, se aplicaron dos test estadísticos: el Test de Rachas para carácter aleatorio (o test de Wald-Wolfowitz) y el test BDS desarrollado por Brock, Dechert, Scheinkman y LeBaron (1996).

El test no paramétrico de Rachas plantea en su hipótesis nula que la serie es aleatoria. Los resultados de este test confirman que las series de índices bursátiles en estudio no corresponden a una serie aleatoria y, a través del tipo de esquema resultante, descarta que el atractor que caracteriza dichos sistemas sea de carácter periódico o cuasi-periódico, para el caso de los sistemas disipativos. De esta forma, podríamos estar en presencia de un atractor cuasi-periódico o extraño que caracteriza a los sistemas con comportamiento caótico, los resultados se muestran en la Tabla 8.

La prueba BDS es un test no paramétrico con la hipótesis nula de que una determinada serie temporal es independiente e idénticamente distribuida (i.i.d.). Este test puede ser aplicado a series de residuos estimados para evaluar si éstos son independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.). Se estimó la prueba BDS para dimensiones de

correlación 2, 3, 4, 5 y 6, con el fin de maximizar la veracidad de dicha prueba. Los resultados están resumidos en la Tabla 9 y rechazan la hipótesis de independencia en las series originales y de residuos de los modelos GARCH (de acuerdo a Brock y Dechert, 1991). Solo en la serie de residuos del modelo ARMA, correspondiente al índice Merval, se presenta independencia. Los resultados de la prueba BDS es un apoyo robusto para confirmar que las series de índices bursátiles americanos no presentan un comportamiento lineal.

## **VI. Conclusiones**

La Tabla 10 presenta un resumen de los resultados encontrados al aplicar las diversas técnicas y métodos para detectar comportamientos caóticos en las series de índices bursátiles americanos. Los resultados presentan evidencia de no aleatoriedad en las series en estudio y son un apoyo robusto a la existencia de un comportamiento caótico en las series de índices bursátiles americanos. Esto implica que el mercado tiene memoria y que es útil el análisis de la información de empresas que operan en él, dado esto, es conveniente el uso de técnicas de predicción de retornos accionarios en estos mercados.

La aleatoriedad en los mercados financieros no se sostiene, sino que hay evidencia de una pseudoaleatoriedad, determinada por la dinámica del sistema. Es decir, se trata de una aleatoriedad intrínseca que genera un proceso pseudoaleatorio como lo es el caos determinista, el cual es generado por la dinámica del atractor que origina dicho proceso. En los casos extremos de aleatoriedad, como son los *crash* y *boom*, la Teoría de Caos permite explicar dichos acontecimientos como parte de la evolución endógena del propio sistema, sin la necesidad de recurrir a variables exógenas. Esta evolución endógena viene

determinada por la sensibilidad a las condiciones iniciales lo que a través del *efecto mariposa* puede explicar un *crash* o *boom* bursátil.

El hecho de que la evolución de los retornos accionarios se comporten en forma aleatoria también es explicado por la Teoría de Caos a través de los puntos o soluciones periódicas densas que se encuentran próximos de la evolución de dicho sistema. Así, se podrían repetir situaciones ocurridas en el pasado cuando la evolución del sistema pase nuevamente cerca de algún acontecimiento en particular. Por otra parte, en el muy corto plazo sería posible predecir la evolución de dicho sistema, lo que validaría el análisis técnico como herramienta predictiva. Con esto, la Teoría de Caos une las fluctuaciones rápidas, y a muy corto plazo, con las de largo plazo. Es decir, no separa sino que une los cambios de minuto a minuto o día a día con los de mes a mes o año a año.

La presencia de memoria de largo plazo en los índices accionarios americanos, determinada por el Coeficiente de Hurst, valida la utilización de modelos no lineales con memoria larga, para la predicción de la evolución de dichas series. En resumen, los resultados confirman la existencia de un comportamiento caóticos en las Bolsas de Argentina, Brasil, Canadá, Chile, Estados Unidos, Perú y México, utilizando la evolución de los índices accionarios Merval, BOVESPA, S&P TSX COMPOSITE, IPSA, IGPA, S&P 500, DOW JONES INDUSTRIALS, NASDAQ, IGBVL e IPC, respectivamente.

## Referencias

- Abarbanel, H.D.I., Brown, R. y Kennel M.B.: *Local Lyapunov exponents computed from observed data*. Journal of Nonlinear Science. Vol. 1, p. 175-199. (1991).
- Bai Lin H.: *Chaos II*. World Scientific Publishing Company, Singapore. (1990).
- Bollerslev, T.: *Generalized Autorregresive Conditional Heterocedasticity*. Journal of Econometrics. Vol. 31, p. 307-327. (1986).
- Box, G. E. P. y Jenkins, G. M.: *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Holden Day Inc., San Francisco. (1970).
- Brock, W. A. y Dechert, D. W.: *Non-linear dynamical systems: instability and chaos in economics*. W. Hildenbrand and H. Sonnenschein, eds., *Handbook of Mathematical Economics IV*. Amsterdam: North-Holland, p. 2209-2235. (1991).
- Brock, W., Dechert, W., y Scheinkman, J.: *A Test for Independence Based on the Correlation Dimension*. University of Wisconsin at Madison, Department of Economics, Working Paper. (1987).
- Brock, W.A., Dechert, W.D., Scheinkman, J.A. y LeBaron, B.: *A test for Independence Based on the Correlation Dimension*. Econometric Reviews. Vol.15, N°3, p. 197-235. (1996).
- Casdagli M.: *Nonlinear prediction of chaotic time series*. Physica D 35. Vol. 35, p.335-356.(1989).
- Conrad J. y Kaul G.: *Time-variation in expected returns*. Journal of Business. Vol. 61, p. 409-425. (1988).
- Conrad J. y Kaul G.: *Mean reversion in short-horizon expected returns*. Review of Financial Studies 2, p. 225-240. (1989).
- Dickey, D.A. y Fuller, W.A.: *Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root*. Journal of the American Statistical Association. Vol. 74, p. 427-431. (1979).
- Di Matteo, Aste y Dacorogna.: *Term memories of developed and emerging markets: using the scaling analysis to characterize their stage of development*. Journal of Banking & Finance. Vol. 29, p. 827-851. (2005).
- Eckmann, J.P. y Ruelle, D.: *Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors*. Review of Modern Physics. Vol. 57, N° 3, p. 617-656. (1985).
- Eckmann J.P. y Ruelle D.: *Fundamental limitations for estimating dimensions and Lyapunov exponents in dynamical systems*. Physica D. Vol 56, p.185-187. (1992).
- Engle, R.F.: *Autorregresive Conditional Heterocedasticity with Estimates of the Variance of the U.K. Inflation*. Econometrica. Vol. 50, N° 4, p. 987-1007. (1982).
- Fama, E. y French K. R.: *Permanent and temporary components of stock prices*. Journal of Political Economy. Vol. 98, p. 247-273. (1988).
- Fama, E.: *Efficient capital markets: A review of theory and empirical work*. Journal of Finance. Vol. 25, p. 383-417. (1970).
- Fraser, A. y H. Swinney.: *Independent coordinates for strange attractors from mutual information*. Physical Review A. Vol. 33, p.1134-1140. (1986).
- Gilmore, Claire G.: *A new test for chaos*. Journal of Economic Behaviour Organisations. Vol. 22, p. 209-237. (1993).
- Grassberger, P. y Procaccia, I.: *Characterization of Strange Attractors*. Physical Review Letters. Vol. 50, N°3, p. 346-349. (1983).

- Grassberger, P y Procaccia, I.: *Measuring the Strangeness of Strange Attractors*. Physica D 9, p. 189-208. (1983).
- Hawking, S.: *Historia del Tiempo del Big Bang a los Agujeros Negros*. Editorial Critica 1ª Edición, Barcelona. (2005).
- Hurst H.E.: *Long-term Storage Capacity of Reservoirs*. Transactions of the American Society of Civil Engineers. Vol. 116, p. 770-799. (1951).
- Kyaw N., Los C. y Zong S.: *Persistence Characteristics of Latin American Financial Markets*. Economics Working Paper, Archive EconWPA, Finance N° 0411013. (2004).
- Kennel M.B., Brown R., y Abarbanel H.D.I.: *Determining embedding dimension for phase space reconstruction using a geometrical construction*. Physica. Review A, N° 45, p. 403-3411. (1992).
- Le Barón, B.: *Chaos and nonlinear forecastability in Economics and Finance*. Philosophical Transactions of Royal Society of London, Series A, 348, p. 397-404. (1994).
- Lipka J. M. y Los C.: *Long-Term Dependence Characteristics Of European Stock Indices*. Economics Working Paper Archive, EconWPA, Finance N° 0409044. (2003).
- Lo, A. W.: *Long-term memory in stock market prices*. Econometrica. Vol. 59, p. 1279-1313. (1991).
- Lo, A. y MacKinley A. C.: *Stock market prices do not follow random walk: Evidence from a simple specification test*. Review of Financial Studies. Vol. I, p. 41-66. (1988).
- Los, C.: *Visualization of Chaos for Finance Majors*. Economics Working Paper Archive, EconWPA, Finance N° 0409035. (2004).
- Los C. y Yu B.: *Persistence Characteristics of the Chinese Stock Markets*. Economics Working Paper Archive, EconWPA, Finance N° 0508008. (2005).
- Lorenz, E.N.: *Detrministic nonperiodic Flow*. Journal of Atmospheric Sciences. Vol. 20, p. 130. (1963).
- Ljung, G. y G. Box.: *On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models*. Biometrika. Vol. 65, p. 297-303. (1979).
- Lyapunov, A.M.: *The general Problem of the Stability of Motion*. Number 17 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1947. Reprinted from Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, p. 27-247, 1907, a French translation of a Russian original from 1893. English translation: The General Problem of the Stability of Motion. Taylor and Francis, London. (1992).
- Mandelbrot, B.: *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, San Francisco. (1982).
- Mindlin, G.B. y Gilmore, R.: *Topological analysis and synthesis of chaotic time series*. Physica D, N°58, p. 229-242. (1992)
- Packard, N.H., Crutchfield, J.P., Farmer, J.D. y Shaw, R.S.: *Geometry from a time series*. Physical Review Letters. Vol. 47, p. 712-716. (1980).
- Peters, E.: *Fractal Market analysis: Applying chaos theory to investment and economics*. John Wiley & Sons Inc. (1994).
- Peters. E.: *Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility, 2nd Edition*. John Wiley & Sons Inc., 288 p.(1996).
- Phillips, P.C.B. y Perron, P.: *Testing for a Unit Root in Time Series Regression*. Biometrika. Vol. 75, p. 335-346. (1988).

- Rajaratnam P. y Weston R.: *A Chaotic Analysis of the New Zealand Exchange Rate*. New Zealand Association of Economists (Inc.). Research classified by Journal of Economic Literature (JEL) code f31. (2004).
- Rosenstein M.T., Collins J.J. y De Luca C.J.: *A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets*. Physica D. Vol.65, p. 117-134. (1993).
- Ruelle, D. y Takens, F.: *On the nature of turbulence*. Math. Phys. Vol. 20, p. 167-192. (1971).
- Sano M., y Sawada Y.: *Measurement of the Lyapunov Spectrum from a Chaotic Time Series*. Physical Review Letters, Vol. 55, N° 10, p. 1082-1085. (1985).
- Sato S., Sano M., y Sawada Y.: *Practical methods of measuring the generalized dimension and the largest Lyapunov exponent in high dimensional chaotic systems*. Progress of Theoretical Physics. Vol. 77, No. 1, p. 1-5. (1987).
- Takens, F.: *Detecting Strange Attractors in Turbulence, en Dynamical Systems and Turbulence*. Warwick 1980, Lecture Notes in Mathematics 898, Springer, Berlin, p. 366-381. (1981).
- Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L y Vastano J.A.: *Determining Lyapunov exponents from a time series*. Physica D. Vol. 16. p. 285-317. (1985).

Tabla 1  
 Descripción de los datos utilizados obtenidos de *Economática*.

PAIS	INDICE	Desde	Hasta	Datos
ARGENTINA	MERVAL	19-10-1989	25-04-2005	3841
BRASIL	BOVESPA	15-03-1989	06-10-2004	3841
CANADA	S&P TSX COMPOSITE	29-04-1989	13-05-2005	765
CHILE	IPSA	05-05-1989	06-10-2004	3841
CHILE	IGPA	02-05-1989	06-10-2004	3841
MEXICO	IPC	02-06-1989	06-10-2004	3841
PERU	IGBVL	03-05-1989	06-10-2004	3841
USA	DJI	17-07-1989	06-10-2004	3841
USA	NASDAQ	17-07-1989	06-10-2004	3841
USA	S&P 500	13-07-1989	06-10-2004	3841

Tabla 2  
Series seleccionadas para contrastar un comportamiento caótico.

PAIS	INDICE	SERIE - MODELO
ARGENTINA	MERVAL	ARMA (6,5)
		GARCH (1,1)
BRASIL	BOVESPA	GARCH (1,1)
CANADA	S&P TSX COMPOSITE	ARMA (4,4)
		GARCH (1,1)
CHILE	IPSA	GARCH (2,1)
CHILE	IGPA	ARMA (2,3)
		GARCH (2,1)
MEXICO	IPC	ARMA (3,2)
		GARCH (1,1)
PERU	IGBVL	GARCH (2,1)
USA	DJI	GARCH (1,1)
USA	NASDAQ	GARCH (3,1)
USA	S&P 500	ARMA (10,10)
		GARCH (1,1)



Tabla 3

Valores óptimos para el *tiempo de retardo* (Función de Información Mutua, AMI) y *dimensión de inmersión* (Falsos Vecinos Cercanos, FNN) para las series originales y modelos seleccionados.

PAIS	INDICE	SERIE - MODELO	AMI	FNN
ARGENTINA	MERVAL	ORIGINAL	47	29
		ARMA (6,5)	4	30
		GARCH (1,1)	21	16
BRASIL	BOVESPA	ORIGINAL	44	8
		GARCH (1,1)	18	16
CANADA	S&P TSX COMPOSITE	ORIGINAL	10	30
		ARMA (4,4)	2	13
		GARCH (1,1)	22	30
CHILE	IPSA	ORIGINAL	42	28
		GARCH (2,1)	32	28
CHILE	IGPA	ORIGINAL	50	23
		ARMA (2,3)	4	30
		GARCH (2,1)	21	28
MEXICO	IPC	ORIGINAL	35	15
		ARMA (3,2)	2	13
		GARCH (1,1)	32	17
PERU	IGBVL	ORIGINAL	43	24
		GARCH (2,1)	14	29
USA	DJI	ORIGINAL	37	23
		GARCH (1,1)	36	30
USA	NASDAQ	ORIGINAL	33	14
		GARCH (3,1)	23	22
USA	S&P 500	ORIGINAL	44	26
		ARMA (10,10)	1	15
		GARCH (1,1)	37	25

Tabla 4

Entropía de Espacio Temporal para las series originales y los modelos en estudio. Para lograr la STE sobre el índice S&P TSX Composite (\*) el tiempo de retardo y la *dimensión de inmersión* se computó como 5 y 10 respectivamente.

PAIS	INDICE	SERIE - MODELO	STE
ARGENTINA	MERVAL	ORIGINAL	16 %
		ARMA (6,5)	71 %
		GARCH (1,1)	70 %
BRASIL	BOVESPA	ORIGINAL	0 %
		GARCH (1,1)	52 %
CANADA	S & P TSX COMPOSITE	ORIGINAL	*0 %
		ARMA (4,4)	69 %
		GARCH (1,1)	*32 %
CHILE	IPSA	ORIGINAL	0 %
		GARCH (2,1)	60 %
CHILE	IGPA	ORIGINAL	0 %
		ARMA (2,3)	74 %
		GARCH (2,1)	67 %
MEXICO	IPC	ORIGINAL	0 %
		ARMA (3,2)	76 %
		GARCH (1,1)	57 %
PERU	IGBVL	ORIGINAL	0 %
		GARCH (2,1)	54 %
USA	DJI	ORIGINAL	0 %
		GARCH (1,1)	38 %
USA	NASDAQ	ORIGINAL	8 %
		GARCH (3,1)	47 %
USA	S & P 500	ORIGINAL	0 %
		ARMA (10,10)	77 %
		GARCH (1,1)	40 %
STE PROMEDIO SERIES ORIGINALES			2 %
STE PROMEDIO MODELOS SELECCIONADOS			59 %

Tabla 5  
Coeficiente de Hurst para las series de residuos de los modelos en estudio.

PAIS	INDICE	SERIE - MODELO	COEFICIENTE DE HURST	Estadístico t	R <sup>2</sup>
ARGENTINA	Merval	ARMA (6,5)	0,61	29,103	0,988
		GARCH (1,1)	0,78	73,402	0,996
BRASIL	BOVESPA	GARCH (1,1)	0,82	50,512	0,991
CANADA	S&P TSX COMPOSITE	ARMA (4,4)	0,65	34,436	0,995
		GARCH (1,1)	0,89	62,684	0,998
CHILE	IPSA	GARCH (2,1)	0,82	70,506	0,995
CHILE	IGPA	ARMA (2,3)	0,55	41,637	0,994
		GARCH (2,1)	0,84	112,282	0,998
MEXICO	IPC	ARMA (3,2)	0,5	40,639	0,994
		GARCH (1,1)	0,8	78,672	0,996
PERU	IGBVL	GARCH (2,1)	0,84	98,125	0,998
USA	DJI	GARCH (1,1)	0,86	70,231	0,995
USA	NASDAQ	GARCH (3,1)	0,91	94,644	0,997
USA	S&P 500	ARMA (10,10)	0,55	28,571	0,988
		GARCH (1,1)	0,88	81,897	0,997
<b>PROMEDIO COEFICIENTE DE HURST</b>			<b>0,75</b>		

Tabla 6

Máximo exponente de Lyapunov para las series en estudio utilizando el programa MTRCHAOS y MTRLYAP correspondiente al algoritmo de Rosenstein, Collins y De Luca (1993).

PAIS	INDICE	SERIE - MODELO	MAX EXP. LYAPUNOV
ARGENTINA	MERVAL	ARMA (6,5)	0.134200
		GARCH (1,1)	0.041480
BRASIL	BOVESPA	GARCH (1,1)	0.009892
CANADA	S&P TSX COMPOSITE	ARMA (4,4)	0.132200
		GARCH (1,1)	0.032770
CHILE	IPSA	GARCH (2,1)	0.008398
CHILE	IGPA	ARMA (2,3)	0.177400
		GARCH (2,1)	0.009125
MEXICO	IPC	ARMA (3,2)	0.462700
		GARCH (1,1)	0.004367
PERU	IGBVL	GARCH (2,1)	0.052920
USA	DJI	GARCH (1,1)	0.003601
USA	NASDAQ	GARCH (3,1)	0.032360
USA	S&P 500	ARMA (10,10)	0.209900
		GARCH (1,1)	0.003392

Tabla 7

Dimensión de correlación para las series en estudio utilizando el programa MTRCHAOS y MTRLYAP correspondiente al algoritmo de Rosenstein, Collins y De Luca (1993).

PAIS	INDICE	SERIE - MODELO	DIM. CORRELACION
ARGENTINA	Merval	ARMA (6,5)	2.588
		GARCH (1,1)	1.987
BRASIL	BOVESPA	GARCH (1,1)	2.028
CANADA	S&P TSX COMPOSITE	ARMA (4,4)	2.213
		GARCH (1,1)	2.052
CHILE	IPSA	GARCH (2,1)	2.198
CHILE	IGPA	ARMA (2,3)	2.021
		GARCH (2,1)	1.922
MEXICO	IPC	ARMA (3,2)	2.019
		GARCH (1,1)	2.311
PERU	IGBVL	GARCH (2,1)	1.981
USA	DJI	GARCH (1,1)	1.954
USA	NASDAQ	GARCH (3,1)	1.812
USA	S&P 500	ARMA (10,10)	1.977
		GARCH (1,1)	1.927

Tabla 8

Test de Wald-Wolfowitz (o Test de Rachas) para las series de los índices bursátiles americanos en estudio a un nivel de significancia del 5%.

PAIS	INDICE	z Calculado	Hipotesis Nula	Tipo de Esquema
ARGENTINA	MERVAL	-3.6	Rechaza	Tendencia
BRASIL	BOVESPA	-3.34	Rechaza	Tendencia
CANADA	S&P TSX COMPOSITE	-0.78	Acepta	Aleatorio
CHILE	IPSA	-11.77	Rechaza	Tendencia
CHILE	IGPA	-17.14	Rechaza	Tendencia
MEXICO	IPC	-7.63	Rechaza	Tendencia
PERU	IGBVL	-14.24	Rechaza	Tendencia
USA	DJI	1.3	Acepta	Aleatorio
USA	NASDAQ	-6.1	Rechaza	Tendencia
USA	S&P 500	-0.03	Acepta	Aleatorio

Tabla 9  
Resultados del Test BDS.

S&P TSX COMP.	Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
CANADA	2	0.199307	0.001472	135.3832	0
	3	0.338869	0.002322	145.9465	0
	4	0.436608	0.002742	159.0342	0
	5	0.50346	0.002834	177.6789	0
	6	0.549951	0.002709	203.0324	0

S&P TSX COMP.	Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
CANADA	2	0.177438	0.004311	41.15907	0
	3	0.30006	0.006881	43.60468	0
	4	0.383416	0.008235	46.55929	0
	5	0.438313	0.008628	50.80082	0
6	0.473644	0.008366	56.61674	0	

S&P TSX COMP.	Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
ARMA (4,4)	2	0.013138	0.002895	4.538462	0
	3	0.02541	0.004593	5.531942	0
	4	0.036531	0.005461	6.689411	0
	5	0.042891	0.005682	7.548026	0
	6	0.046798	0.005471	8.554045	0

S&P	Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
USA	2	0.204558	0.000705	290.0695	0
	3	0.348313	0.001114	312.8044	0
	4	0.449141	0.001317	341.1373	0
	5	0.519724	0.001362	381.5393	0
	6	0.568975	0.001304	436.414	0

S&P	Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
USA	2	0.183537	0.001805	101.6815	0
	3	0.311464	0.002876	108.2857	0
	4	0.39868	0.003436	116.0355	0
	5	0.457169	0.003593	127.2361	0
	6	0.495203	0.003477	142.4165	0

S&P	Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
ARMA (10,10)	2	0.013754	0.001455	9.453695	0
	3	0.033161	0.002311	14.34647	0
	4	0.047445	0.002752	17.23994	0
	5	0.058569	0.002868	20.42182	0
	6	0.064789	0.002765	23.42769	0

NASDAQ	Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
	2	0.202919	0.00137	148.1379	0
	3	0.345276	0.002169	159.195	0
	4	0.444851	0.002573	172.8772	0
	5	0.514234	0.002672	192.4421	0
	6	0.562341	0.002567	219.0252	0

NASDAQ	Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
GARCH (3,1)	2	0.179049	0.002101	85.23462	0
	3	0.303146	0.003352	90.42883	0
	4	0.387564	0.004012	96.61228	0
	5	0.444037	0.004203	105.6426	0
	6	0.480651	0.004076	117.9255	0

IPSA	Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
	2	0.205267	0.000998	205.6026	0
	3	0.349055	0.001578	221.1725	0
	4	0.44962	0.001869	240.6079	0
	5	0.51987	0.001936	268.4808	0

IPSA	Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
GARCH (2,1)	2	0.125917	0.001915	65.73697	0
	3	0.213634	0.003053	69.98085	0
	4	0.269525	0.003648	73.89212	0
	5	0.302855	0.003816	79.37132	0
	6	0.31985	0.003694	86.58904	0

IPC	Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
	2	0.203318	0.00085	239.18	0
	3	0.345687	0.001342	257.6761	0
	4	0.445218	0.001586	280.7824	0
	5	0.514622	0.00164	313.7923	0
	6	0.562853	0.001569	358.6834	0

IPC	Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
GARCH (1,1)	2	0.158565	0.001833	86.49217	0
	3	0.263893	0.002915	90.52396	0
	4	0.330945	0.003475	95.23537	0
	5	0.371615	0.003627	102.4707	0
	6	0.393612	0.003502	112.3848	0

IPC	Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
ARMA (3,2)	2	0.020904	0.001442	14.49526	0
	3	0.039379	0.00229	17.19954	0
	4	0.052974	0.002724	19.44775	0
	5	0.059614	0.002837	21.01644	0
	6	0.062294	0.002733	22.79227	0

MERVAL	Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
	2	0.201112	0.00154	130.6103	0
	3	0.342203	0.002446	139.8926	0
	4	0.440833	0.002912	151.3658	0
	5	0.509527	0.003035	167.8743	0
	6	0.557186	0.002927	190.3688	0

MERVAL	Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
GARCH (1,1)	2	0.181612	0.00213	85.24691	0
	3	0.307505	0.003398	90.50903	0
	4	0.392663	0.004063	96.6435	0
	5	0.448959	0.004254	105.5268	0
	6	0.485125	0.004123	117.6613	0

MERVAL	Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
ARMA (6,5)	2	-1.36E-07	8.41E-06	-0.016173	0.9871
	3	-4.08E-07	1.88E-05	-0.02171	0.9827
	4	-8.17E-07	3.15E-05	-0.025963	0.9793
	5	-1.36E-06	4.60E-05	-0.029576	0.9764
	6	-2.04E-06	6.23E-05	-0.032782	0.9738

IGPA	Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
	2	0.205555	0.001104	186.1747	0
	3	0.349437	0.001746	200.0841	0
	4	0.450026	0.002069	217.4641	0
	5	0.520276	0.002146	242.4351	0
	6	0.569261	0.002059	276.4782	0

IGPA	Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
GARCH (2,1)	2	0.108511	0.002055	52.80437	0
	3	0.185655	0.003278	56.63265	0
	4	0.23474	0.003921	59.86254	0
	5	0.262322	0.004107	63.87338	0
	6	0.275796	0.003981	69.28251	0

IGPA	Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
ARMA (2,3)	2	0.025472	0.001446	17.61965	0
	3	0.049897	0.002299	21.70423	0
	4	0.06742	0.00274	24.61003	0
	5	0.076548	0.002857	26.78846	0
	6	0.080632	0.002758	29.2381	0

DJI	Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
	2	0.205146	0.000696	294.8739	0
	3	0.348746	0.001094	318.6729	0
	4	0.448945	0.001289	348.2711	0
	5	0.518734	0.001329	390.423	0
	6	0.567127	0.001267	447.6695	0

DJI	Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
GARCH (1,1)	2	0.187374	0.001845	101.5474	0
	3	0.317797	0.002941	108.0546	0
	4	0.407106	0.003514	115.8437	0
	5	0.467341	0.003676	127.1238	0
	6	0.506979	0.003559	142.456	0

BOVESPA	Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
	2	0.202202	0.000824	245.4547	0
	3	0.343843	0.001302	263.9928	0
	4	0.442876	0.001542	287.1686	0
	5	0.51208	0.001598	320.4588	0

BOVESPA	Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
GARCH (1,1)	2	0.178381	0.00185	96.40031	0
	3	0.301656	0.002949	102.2995	0
	4	0.384863	0.003523	109.2534	0
	5	0.439525	0.003684	119.2984	0
	6	0.473794	0.003566	132.8712	0

IGBVL	Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
	2	0.206171	0.001092	188.7899	0
	3	0.349888	0.001721	203.3459	0
	4	0.450038	0.002031	221.5997	0
	5	0.519709	0.002098	247.7433	0
	6	0.568019	0.002005	283.3346	0

IGBVL	Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
GARCH (2,1)	2	0.126992	0.002345	54.16142	0
	3	0.217006	0.003745	57.94909	0
	4	0.275051	0.004486	61.31431	0
	5	0.309978	0.004706	65.8707	0
	6	0.328864	0.004569	71.97319	0

Tabla 10

Resumen de las diversas técnicas aplicadas para determinar un comportamiento caótico en las series de índices bursátiles de las Bolsas de Argentina, Brasil, Canadá, Chile, Estados Unidos, Perú y México. El signo (+) indica el hallazgo de un comportamiento caótico, lo contrario sucede con el signo (-).

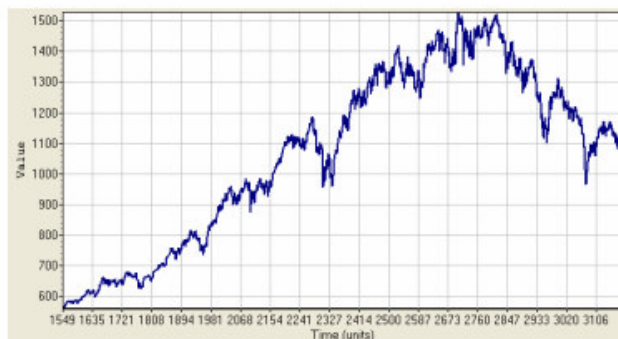
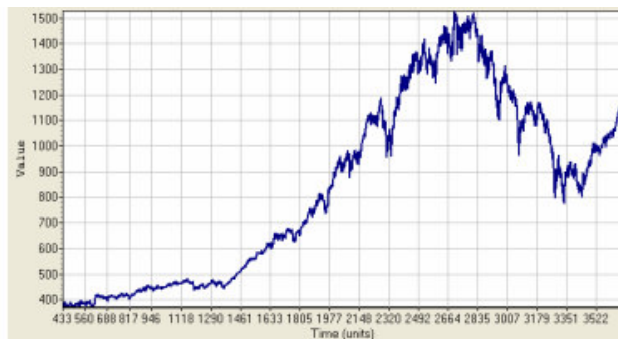
Análisis Gráfico y Gráfico de Recurrencia: (+) para hallazgo de comportamiento caótico; STE: Entropía de Espacio Temporal: (+) para valores entre 0 y 100; Coeficiente de Hurst: (+) para valores > 0.5; Exponente de Lyapunov: (+) para valores > 0; Dimensión de Correlación: (+) para valores  $\geq 2$ . Test de Aleatoriedad: (+) para series no aleatorias; Prueba BDS: (+) para series no i.i.d.

PAIS	INDICE	SERIE - MODELO	Análisis Gráfico	Gráfico de Recurrencia	STE	Coef. Hurst	Exp. Lyapunov	Dim. Correlación	Test Aleatoriedad	Prueba BDS
ARGENTINA	MERVAL	ARMA (6,5)	+	-	+	+	+	+	+	-
		GARCH (1,1)	+	-	+	+	+	-	+	+
BRASIL	BOVESPA	GARCH (1,1)	+	+	+	+	+	+	+	+
CANADA	S&P TSX COMPOSITE	ARMA (4,4)	+	+	+	+	+	+	+	+
		GARCH (1,1)	+	+	+	+	+	+	+	+
CHILE	IPSA	GARCH (2,1)	+	+	+	+	+	+	+	+
CHILE	IGPA	ARMA (2,3)	+	+	+	+	+	+	+	+
		GARCH (2,1)	+	+	+	+	+	-	+	+
MEXICO	IPC	ARMA (3,2)	+	+	+	-	+	+	+	+
		GARCH (1,1)	+	+	+	+	+	+	+	+
PERU	IGBVL	GARCH (2,1)	+	+	+	+	+	-	+	+
USA	DJI	GARCH (1,1)	+	+	+	+	+	-	+	+
USA	NASDAQ	GARCH (3,1)	+	-	+	+	+	-	+	+
USA	S&P 500	ARMA (10,10)	+	+	+	+	+	-	+	+
		GARCH (1,1)	+	+	+	+	+	-	+	+



Gráfico 1

Evolución diaria del índice bursátil NASDAQ para el período de la muestra. Las ampliaciones se muestran en sentido de las manecillas del reloj. Los datos que comprenden las ampliaciones corresponden a las series de: 1 - 3841, 901-3600, 1297-3134 y 2353-2851 datos. Es decir: 3841, 2700, 1838 y 499 datos respectivamente. En el eje vertical se encuentra el valor de cierre del índice y en el eje horizontal la cantidad datos.



## Gráfico 2

Gráfico de recurrencia para una serie aleatoria (izquierda) y para el atractor de Lorenz (derecha).

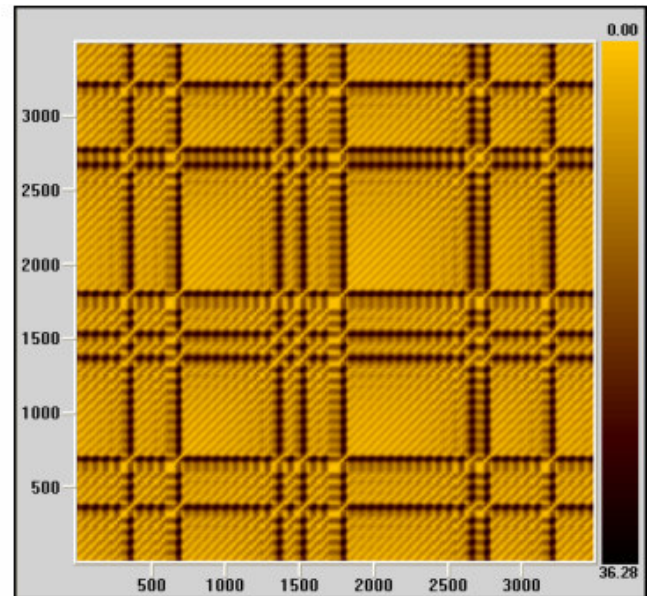
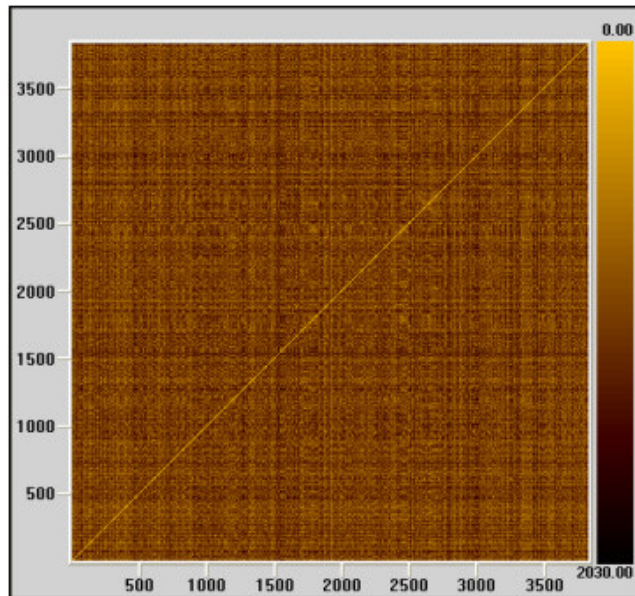


Gráfico 3

Gráfico de recurrencia para el índice IPC. De izquierda a derecha: la serie original, la serie de residuos del modelo ARMA(3,2) y la serie de los residuos del modelo GARCH(1,1).

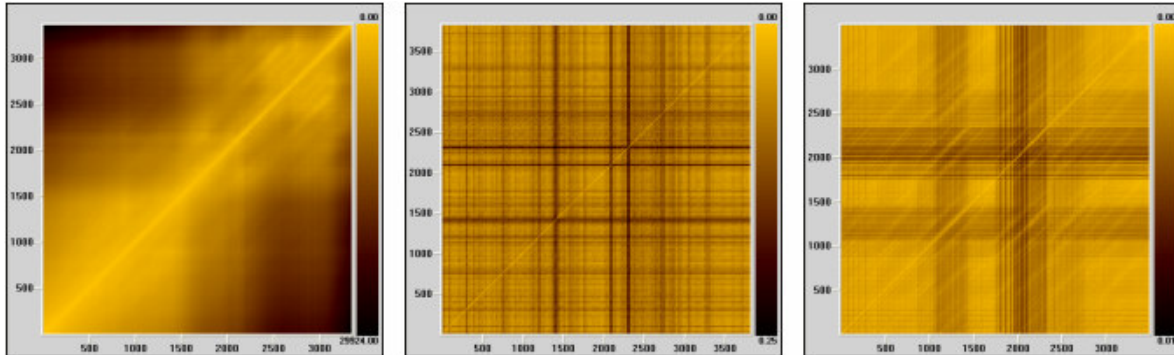


Gráfico de recurrencia para el índice IGPA. De izquierda a derecha: la serie original, la serie de residuos del modelo ARMA(2,3) y la serie de los residuos del modelo GARCH(2,1).

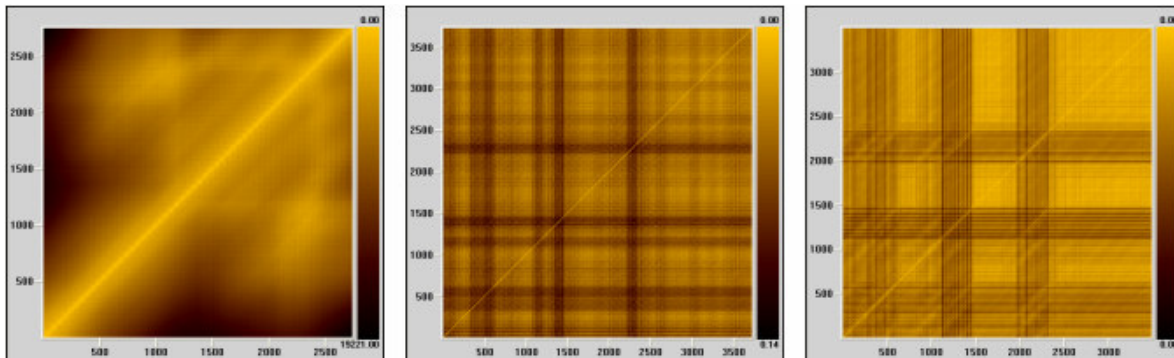
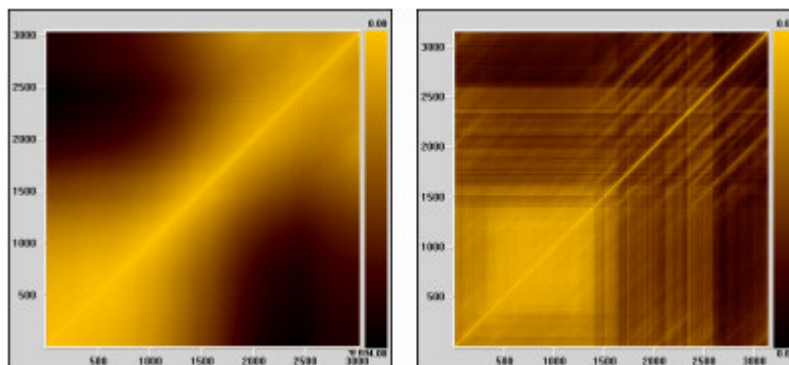


Gráfico de recurrencia para el índice DJI. De izquierda a derecha: la serie original y la serie de los residuos del modelo GARCH(1,1).



**Abstract**

This article validates the chaotic behavior in the Argentinean, Brazilian, Canadian, Chilean, American, Peruvian and Mexican Stock Markets using the Merval, BOVESPA, S&P TSX Composite, IPSA, IGPA, S&P 500, Dow Jones Industrials, NASDAQ, IGBVL and IPC Stock Indexes respectively. The results of different techniques and methods like: Graphic Analysis, Recurrence Analysis, Temporal Space Entropy, Hurst Coefficient, Lyapunov Exponential and Correlation Dimension support the hypothesis that the stock markets behave in a chaotic way and rejected the hypothesis of randomness. Our conclusion validates the use of prediction techniques in those stock markets. It's remarkable the result of the Hurst Coefficient Technique, that in average was of 0,75 for the indexes of this study which would justify the use of ARFIMA models among others for the prediction of such series.

*CJEL: C12, C14, G10, G14 y G15*

---

Key Words: Chaos Theory, Recurrence Analysis, Temporal Space Entropy, Hurst Coefficient, Lyapunov Exponential, Correlation Dimension, BDS Test.