

# MPRA

Munich Personal RePEc Archive

## **Portfolio analysis with Sharpe ratios resampled by bootstrapping**

Gonzales, Rolando

2009

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/28402/>  
MPRA Paper No. 28402, posted 25 Jan 2011 19:55 UTC

# Análisis de Portafolio con Ratios de Sharpe Remuestrados Mediante Bootstrapping

Rolando Gonzales  
*Universidad de Alcalá*

## Resumen

En este trabajo se realiza un análisis de portafolio tradicional empleando el ratio de Sharpe para identificar el portafolio de mercado. Esta medida del desempeño de la inversión se compara con las obtenidos con remuestras *bootstrapping* del ratio de Sharpe. Los resultados indican que la elección del portafolio de mercado se ve muy afectada por la incertidumbre respecto a la estimación de los retornos esperados y la matriz varianza-covarianza entre los retornos, i.e. el riesgo de la estimación asociado a estos parámetros.

*Palabras Clave: Análisis de portafolio, Bootstrapping*  
*Clasificación JEL: G11, C15*

## 1. Introducción

En este trabajo se aplican técnicas de análisis de portafolio con las cotizaciones mensuales al cierre de las acciones de Thermal Energy International Inc. (TMG.V), Crew Energy Inc (CR.TO), KV Pharmaceutical Co. (KV-A) y N-Viro International Corp. (NVIC.OB), desde noviembre de 2004 a mayo de 2010 (67 observaciones).

El objetivo del trabajo es identificar la composición del portafolio de mercado que ofrece la inversión más eficiente en términos de rendimiento-riesgo entre los portafolios óptimos de la frontera eficiente. Para encontrar este portafolio, se emplea el ratio de Sharpe (1964) y se compara éste con los resultados de remuestras con *bootstrapping*.

La parte 2 del trabajo describe la metodología, la parte 3 son los resultados y la parte 4 concluye.

## 2. Análisis de portafolio con Ratios de Sharpe Remuestreados

La teoría de selección de portafolio basada en el análisis media-varianza toma en cuenta solamente los dos primeros momentos de la distribución de los retornos de los activos. Defínase  $\boldsymbol{\mu} = [E[r_1], E[r_2], \dots, E[r_i]]^T$  como el vector de retornos esperados y  $\boldsymbol{\Sigma}$  la matriz de covarianza de los retornos con  $\sigma_i^2 = Var[r_i]$  y  $\sigma_{kl} = Cov[r_k, r_l]$  de un portafolio de  $i$  activos con pesos  $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_i]^T$ , que representan la fracción del total de la inversión de capital colocada en el activo  $i$ . Por definición,  $\mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1$ . El retorno esperado y la varianza del portafolio son simplemente,

$$E[r_p] = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}, Var[r_p] = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}.$$

Si no se incluye activos libres de riesgo y asumiendo ventas a corto ilimitadas, el portafolio de mínima varianza resuelve el problema de minimización,

$$\min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \text{ s.a. } \mu_{p,i} = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}, \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1$$

para un retorno esperado del portafolio  $\mu_p$ .

Si se quiere encontrar el portafolio de mercado entre los portafolios que forman la frontera-eficiente, puede utilizarse el ratio de Sharpe ( $S$ ),

$$S_i = \frac{\mathbf{w}_i^T \boldsymbol{\mu} - rf}{\sqrt{\mathbf{w}_i^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}_i}}$$

y escoger aquel portafolio que tenga el mayor ratio de Sharpe, con el  $\mathbf{w}_i^T \boldsymbol{\mu}$  rendimiento,  $\mathbf{w}_i^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}_i$  la varianza y los  $\mathbf{w}_i$  pesos del  $i$ -portafolio, dada una  $rf$  tasa libre de riesgo.

Sin embargo, los retornos esperados y la desviación estándar del portafolio no son observables y tienen que ser estimados –normalmente mediante el promedio de los retornos históricos y la matriz varianza-covarianza muestral– por lo que el ratio de Sharpe es estrictamente una variable aleatoria que tendrá un estimador puntual,

$$\widehat{S}_i = \frac{\mathbf{w}_i^T \widehat{\boldsymbol{\mu}} - rf}{\sqrt{\mathbf{w}_i^T \widehat{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{w}_i}}$$

Es decir, debido a que  $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$  y  $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$  son estimadores,  $\widehat{S}_i$  es una variable aleatoria con un función de distribución de probabilidad, que resulta de interés para

medir la incertidumbre en la estimación de  $S_i$ . Si bien existen resultados analíticos para los momentos de esta distribución –véase por ejemplo Bao y Ullah (2005)–, Vinod y Morey (2001) sugirieron aproximar la función de distribución de  $\hat{S}_i$  mediante *bootstrapping*. En lugar de asumir una distribución paramétrica para  $\hat{S}_i$ , con la metodología de remuestreo *bootstrapping* se aproxima empíricamente la distribución muestral de  $\hat{S}_i$  investigando la variación de  $\hat{S}_i$  en un gran número de pseudo-muestras de tamaño  $n$ . (El remuestreo implica tomar una muestra aleatoria con reemplazamiento de la muestra, como si ésta se tratara de una población finita de tamaño  $n$ .)

Si para cada  $i$ -activo se calculan  $\tilde{S}_{1,i}, \tilde{S}_{2,i}, \dots, \tilde{S}_{B,i}$  meta-estimadores del ratio de Sharpe con  $b = 1, 2, \dots, B$  remuestras *bootstrap* de tamaño  $n$ , un estimador de la desviación estándar de  $\hat{S}_i$  será,

$$\hat{\sigma}_{\hat{S}_i} = \sqrt{(B-1)^{-1} \sum_{b=1}^B (\tilde{S}_{b,i} - \bar{\tilde{S}}_i)^2}$$

Nótese que la estimación  $\hat{S}_i$  de  $S_i$  sólo puede obtenerse en una ocasión con una muestra de tamaño  $n$ , por lo que el meta-estimador *bootstrap*  $\tilde{S}_{B,i}$  proporciona información sobre la variación de  $\hat{S}_i$  (no de  $S_i$ ), y  $\hat{\sigma}_{\hat{S}_i}$  puede ser interpretado como el riesgo de estimación del ratio de Sharpe. Si dos portafolios tienen ratios de Sharpe muy próximos, un inversor elegirá el portafolio con menor riesgo de estimación en el ratio de Sharpe (menor  $\hat{\sigma}_{\hat{S}_i}$ ).

Vinod y Morey (2001) sugirieron también construir un ratio de Sharpe *doble* para evaluar un portafolio. Este ratio de Sharpe doble es el cociente entre el ratio de Sharpe  $\hat{S}_i$  y su riesgo de estimación  $\hat{\sigma}_{\hat{S}_i}$ ,  $\hat{S}_i / \hat{\sigma}_{\hat{S}_i}$ .

Por último, el *bootstrapping* percentílico provee un  $1 - \alpha$  intervalo de confianza no-paramétrico para  $S_i$  a partir de la distribución empírica que resulta de las muestras *bootstrap*  $(\tilde{S}_{1,i} - \hat{S}_i, \dots, \tilde{S}_{B,i} - \hat{S}_i)$ , escogiendo  $\alpha/2$  y  $1 - \alpha/2$  cuantiles:

$$\left[ \tilde{S}(1 - \alpha/2) - \hat{S}_i, \tilde{S}(\alpha/2) - \hat{S}_i \right],$$

por lo que:

$$\begin{aligned} P \left( \tilde{S}(1 - \alpha/2) - \hat{S}_i < S_i - \hat{S}_i < \tilde{S}(\alpha/2) - \hat{S}_i \right) \\ = P \left( \tilde{S}(1 - \alpha/2) < S_i < \tilde{S}(\alpha/2) \right) \approx 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Véase Kvam y Vidakovic (2007).

### 3. Resultados

En la figura 1 se observa (i) una caída en los precios de cotización de las acciones de Thermal Energy International Inc. y de KV Pharmaceutical Co. en las últimas observaciones de la muestra, y (ii) que los rendimientos de Crew Energy Inc. y N-Viro International Corp. son más volátiles que los rendimientos de Thermal Energy International Inc. y de KV Pharmaceutical Co. Con los rendimientos de las acciones de estas empresas se calculó el vector de retornos esperados estimado  $\hat{\boldsymbol{\mu}} = [0.0020, 0.0089, -0.0383, 0.0036]^T$ , la matriz varianza-covarianza muestral,

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{pmatrix} 0.0672 & 0.0079 & 0.0154 & 0.0090 \\ 0.0079 & 0.0284 & 0.0152 & -0.0015 \\ 0.0154 & 0.0152 & 0.0982 & 0.0162 \\ 0.0090 & -0.0015 & 0.0162 & 0.0407 \end{pmatrix},$$

y se simularon mil portafolios con composición aleatoria (figura 2). Se construyó además la frontera-eficiente, con los portafolios que producen la asignación óptima en términos de rendimiento-riesgo. El portafolio óptimo de menor riesgo tiene un rendimiento de 7.40%, y un riesgo de 42.58% (Tabla 1).

Asumiendo  $rf = 2\%$  (anual), el portafolio con mayor ratio de Sharpe es el portafolio número 7, ( $\hat{S}_7 = 0.0443$ , véase la Tabla 1). El rendimiento anualizado de este portafolio es 9.55%, y su riesgo es de 49.26%. La composición que corresponde a este portafolio es  $\mathbf{w}_7 = [0, 0.828, 0, 0.172]^T$ , 0% para Thermal Energy International Inc., 0% para KV Pharmaceutical Co., 82,8% para Crew Energy Inc. y 17.2% para N-Viro International Corp. Los resultados de mil remuestras con *bootstrapping* del ratio de Sharpe para este portafolio muestran sin embargo que existe bastante incertidumbre respecto al valor de la estimación puntual de  $\hat{S}_7 = 0.0443$ , ya que  $\hat{\sigma}_{\hat{S}_7} = 0.1128$  y el intervalo de confianza del 95 por ciento incluye al cero, por lo que no puede rechazarse estadísticamente que el ratio de Sharpe de este portafolio sea nulo (véase la figura ?? y la tabla 1). Considerando las medidas de remuestreo, el portafolio 9 tiene la menor desviación estándar del ratio de Sharpe (menor riesgo de estimación), igual a  $\hat{\sigma}_{\hat{S}_9} = 0.0986$ , por lo que tiene el mayor ratio de Sharpe doble comparado con el resto de los portafolios. En este portafolio la asignación es  $\mathbf{w}_9 = [0, 0.942, 0, 0.0573]^T$ , 94,27% para Crew Energy Inc. y 5.73% para N-Viro International Corp.

En todos los portafolios, los límites inferiores de los intervalos de confianza del 95 por ciento son negativos, sugiriendo que el desempeño del activo

libre de riesgo podría ser superior al de las inversiones en las acciones de las empresas analizadas.

## 4. Conclusión

En este trabajo se utilizó el ratio de Sharpe como medida del desempeño de la inversión para escoger la composición óptima entre los portafolios que forman la frontera eficiente. Debido a que el ratio de Sharpe se basa en los retornos esperados y la desviación estándar del portafolio para su cálculo –parámetros que son desconocidos y requieren ser estimados–, existe un riesgo de estimación asociado al ratio de Sharpe. Mediante técnicas de remuestreo con *bootstrapping*, se aproximó el valor de este riesgo y se utilizó los datos para construir intervalos de confianza y ratios de Sharpe dobles. Los resultados muestran que la incertidumbre en la estimación del ratio de Sharpe puede modificar la elección del portafolio de mercado y sugieren que en algunos casos el desempeño del activo libre de riesgo puede ser igual o superior al de las inversiones en las acciones del portafolio con riesgo.

## Referencias

- [1] Bao, Yong, Aman Ullah (2006). Moments of the estimated Sharpe ratio when the observations are not IID, *Finance Research Letters*, Volume 3, Issue 1, March 2006, pp. 49-56.
- [2] Kvam, Paul, Brani Vidakovic (2007), NONPARAMETRIC STATISTICS WITH APPLICATIONS TO SCIENCE AND ENGINEERING, Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, pp. 446.
- [3] Sharpe, William F. (1964), Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, *The Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3 (Sep., 1964), pp. 425-442.
- [4] Vinod, H.D., Morey, M.R. (2001). A double Sharpe ratio. En: Lee, C.F. (Ed.), *Advances in Investment Analysis and Portfolio Management*, vol. 8. JAI/Elsevier Science, New York, pp. 57–65.

Tabla 1. Portafolio Óptimos

Portafolio	Análisis de Portafolio				Remuestreo Bootstrap	
	Rendimiento*	Riesgo*	Ratio de Sharpe*	Desv. estándar	IC 95 %	Ratio de Sharpe Doble
1	7.4017	42.5770	0.0366	0.1400	-0.1834, 0.3711	0.2615
2	7.7605	42.7579	0.0389	0.1365	-0.1820, 0.3303	0.2849
3	8.1193	43.2959	0.0408	0.1313	-0.2111, 0.3105	0.3107
4	8.4781	44.1780	0.0423	0.1309	-0.2197, 0.2667	0.3231
5	8.8369	45.3867	0.0435	0.1243	-0.2015, 0.2466	0.3499
6	9.1957	47.0668	0.0441	0.1236	-0.2071, 0.2220	0.3569
7	9.5545	49.2696	0.0443	0.1128	-0.2386, 0.2084	0.3927
8	9.9133	51.9286	0.0440	0.1049	-0.2001, 0.1895	0.4196
9	10.2720	54.9776	0.0434	0.0986	-0.1474, 0.1629	0.4397
10	10.6308	58.3555	0.0427	0.1013	-0.0783, 0.1102	0.4215

(\*) Los datos de rendimiento y riesgo son anualizados. El ratio de Sharpe se calculó con la frecuencia mensual de los rendimientos.

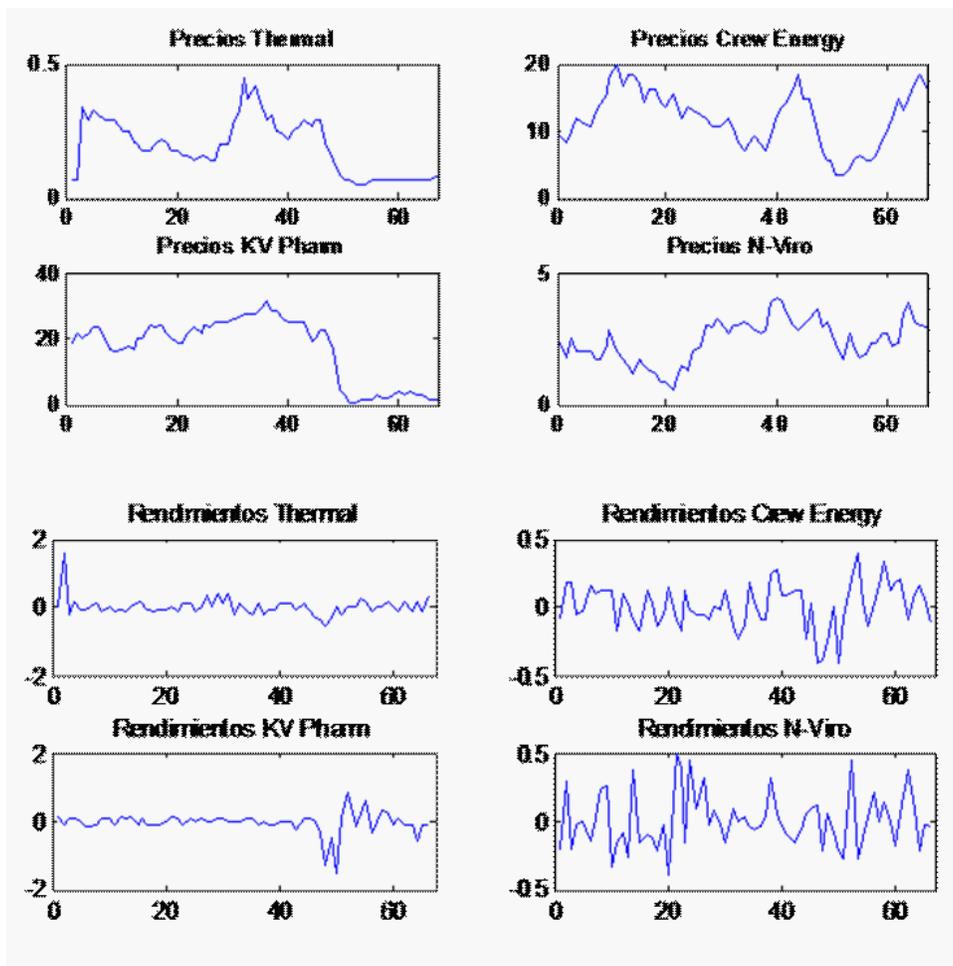


Figura 1: Cotizaciones y rendimientos de los activos analizados

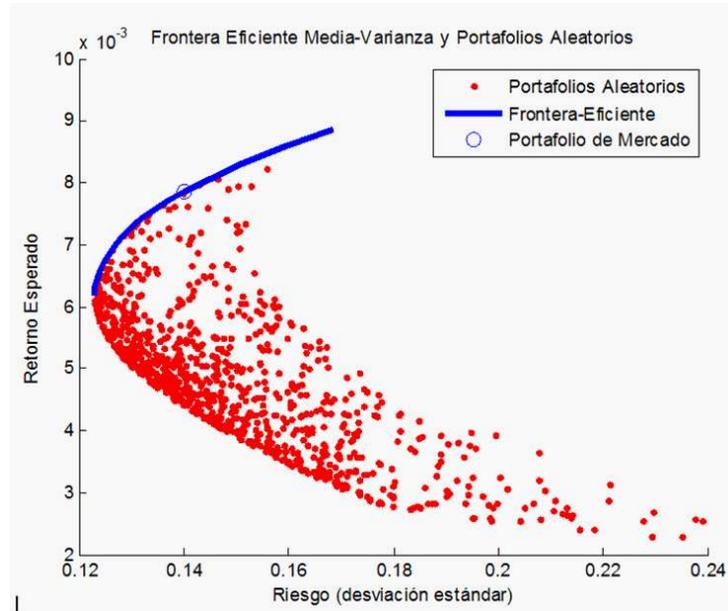


Figura 2: Frontera eficiente, portafolios aleatorios y portafolio de mercado

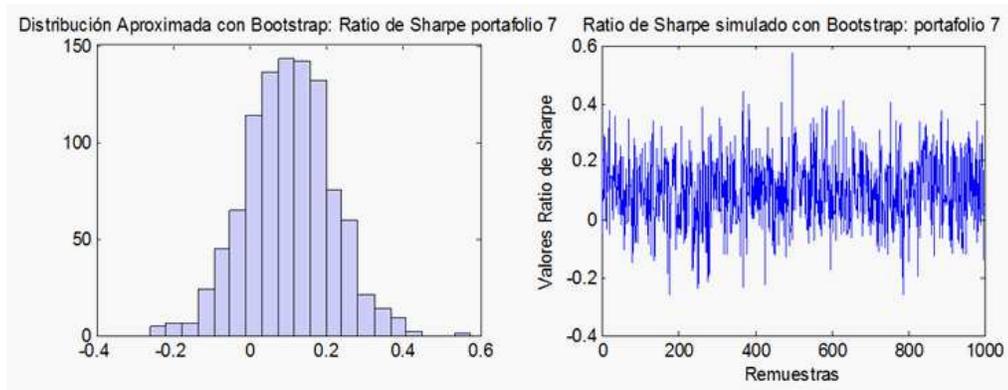


Figura 3: Distribución del mayor ratio de Sharpe (portafolio 7) obtenida con *bootstrap*