MPRA
Munich Personal RePEc Archive

Economic and mathematical modelling of software market

Soloviev, Vladimir

Institute for Humanities and Information Technology

11 September 2009

Online at https://mpra.ub.uni-muenchen.de/28974/
MPRA Paper No. 28974, posted 19 Feb 2011 18:08 UTC

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УПРАВЛЕНИЯ»

Кафедра прикладной математики

В. И. Соловьев

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЫНКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Вега-Инфо

Москва ● 2009

УДК 330.115
ББК 65
С60

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор *В. И. Быков*;

доктор экономических наук, кандидат физико-математических наук, профессор *Т. М. Гатауллин*;

доктор физико-математических наук, профессор *И. М. Петрушко*;

доктор физико-математических наук, профессор *В. В. Шмелев*

Соловьев Владимир Игоревич

С60 Экономико-математическое моделирование рынка программного обеспечения : монография / В. И. Соловьев; ГУУ. — М.: Вега-Инфо, 2009. — 176 с.

ISBN 978-5-91590-005-8

Рассмотрен новый для экономико-математической науки рынок программного обеспечения. Проведено статистическое исследование рынка серверных операционных систем; построены статические и динамические модели смешанной дуополии производителей коммерческого и некоммерческого программного обеспечения (в том числе с учетом взаимодействия с поставщиками аппаратного обеспечения, роста рынка, ненулевых издержек по обеспечению технической поддержки, а также теневого распространения нелегальных копий), модель взаимодействия производителей и пользователей коммерческого программного обеспечения в условиях существования рынка нелегальных (пиратских) копий, стохастические обобщения модели Харрода — Домара, модели Солоу и фундаментальной модели диффузии инноваций, модель диффузии инноваций в условиях пространственной неоднородности экономики. Для решения задач оптимального управления распределенными системами предложено обобщение принципа максимума Понтрягина.

Для научных работников, специализирующихся в области экономико-математических методов и экономики знаний, аспирантов, преподавателей и студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям.

ББК 65

ISBN 978-5-91590-005-8

© Соловьев В. И., 2009
© ООО «Вега-Инфо», 2009

Содержание

Введение

Эффективность и конкурентоспособность экономики страны, ее независимость от экономического положения в других странах существенно зависят от развития инновационных отраслей и рынка интеллектуальной собственности.

В частности, одной из важнейших задач, поставленных в *Стратегии развития информационного общества в Российской Федерации*, является развитие экономики России на основе использования информационных и телекоммуникационных технологий.

Конкуренция на рынках интеллектуальной собственности существенно отличается от конкуренции на рынках традиционных товаров. Связано это с особенностями знаний как товара, прежде всего, с отсутствием свойства редкости.

Наиболее ярким примером рынка интеллектуальной собственности, демонстрирующим его отличия от традиционных рынков, в современной экономике является рынок программного обеспечения: например, в сегменте операционных систем еще 15 лет назад производители коммерческих продуктов занимали монопольное положение, поскольку пользователи не доверяли некоммерческим аналогам, не гарантирующим качество, надежность и безопасность; сейчас в сегменте серверных операционных систем примерно по 40% занимают коммерческий программный продукт *Microsoft Windows* и некоммерческий программный продукт *Linux*.

На рис. В.1 представлена схема современного рынка операционных систем, а на рис. В.2 — структура потребительского спроса на этом рынке.

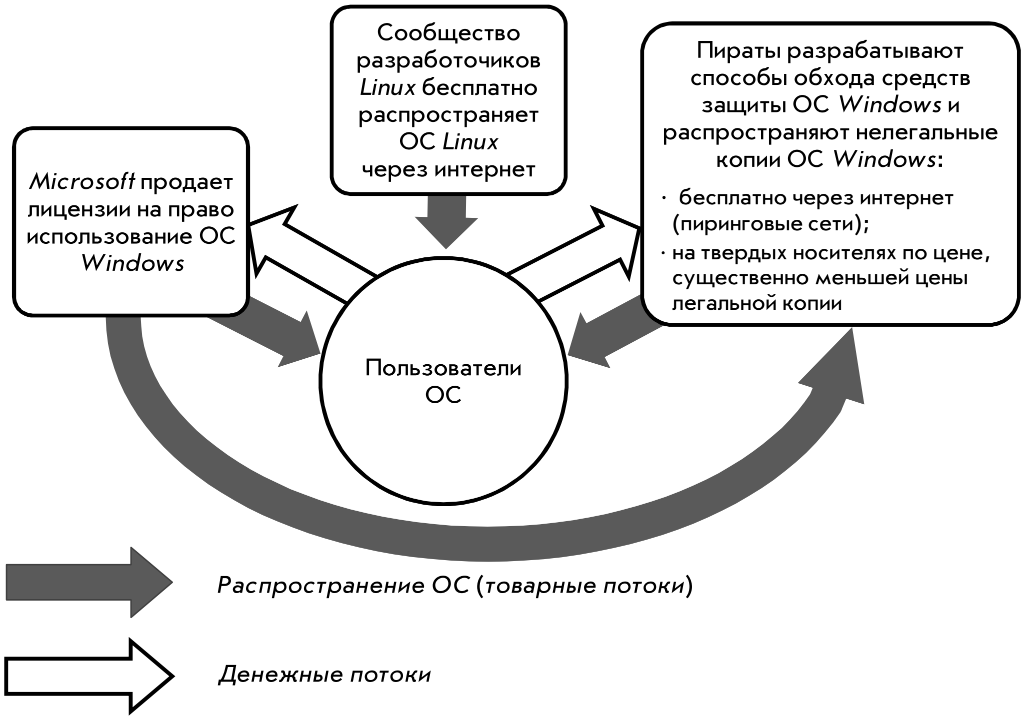

Рис. В.1. *Схема современного рынка операционных систем*

В последнее время перед пользователями программного обеспечения во всем мире стоит актуальный вопрос, что выгоднее:

- приобрести лицензионный коммерческий программный продукт (например, операционную систему *Microsoft Windows* или офисный пакет *Microsoft Office*);
- бесплатно и легально использовать альтернативный некоммерческий программный продукт, свободно распространяемый через интернет (операционную систему *Linux*, офисный пакет *OpenOffice*);
- или же незаконно воспользоваться пиратской копией коммерческого программного продукта.

Соответственно, и производители программного обеспечения пытаются определить, какой из способов извлечения доходов является оптимальным:

- получение доходов от распространения лицензий на программное обеспечение;

- или же бесплатное распространение программного обеспечения (даже, возможно, с открытыми исходными кодами) и получение доходов от оказания дополнительных услуг.

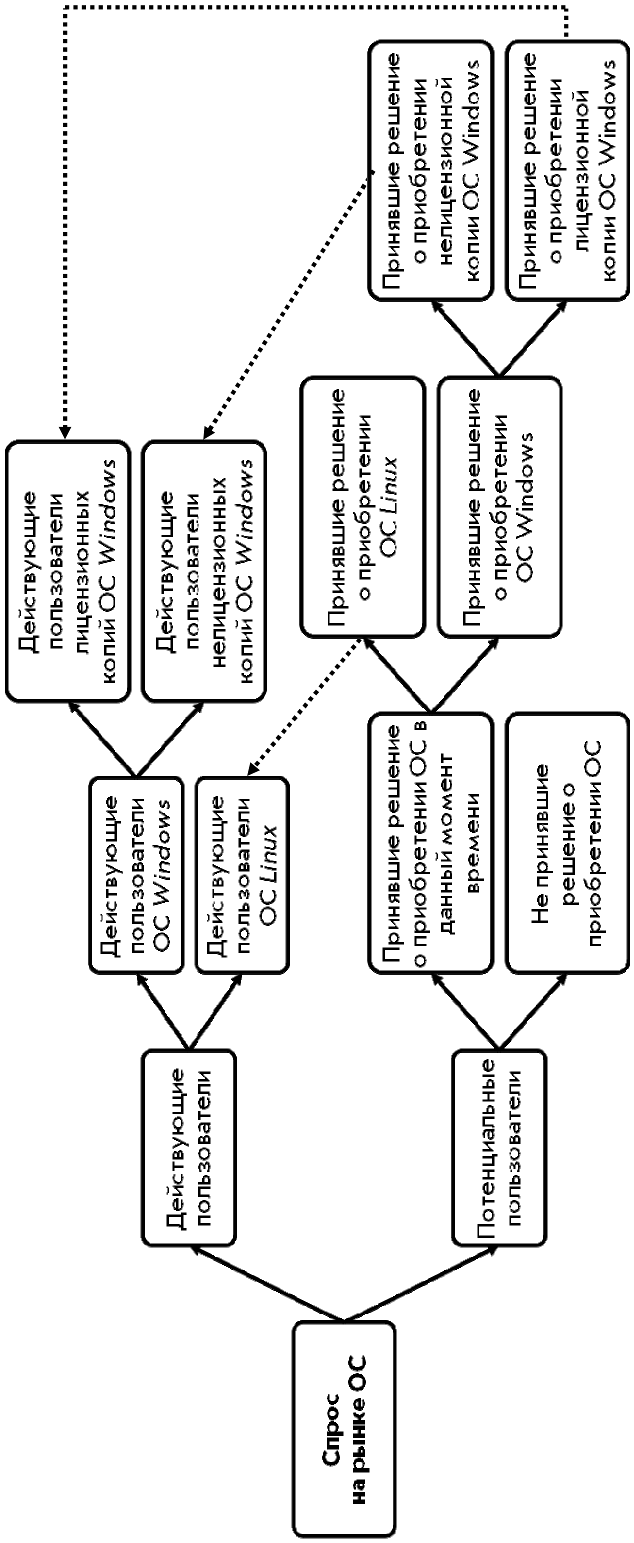

Рис. В.2. *Структура потребительского спроса на современном рынке операционных систем*

Как показывает практика, однозначного ответа на сформулированные вопросы пока нет. Существуют целые страны, почти на 100% использующие нелегальные копии лицензионного программного обеспечения. Например, до недавнего времени такой страной был Китай, однако вот уже несколько лет, как государственные органы Китая отказались от использования программного обеспечения *Microsoft* в пользу открытого кода.

Число пользователей некоммерческих программных продуктов растет, и при этом производители программного обеспечения, распространяющие свою продукцию в открытом коде, получают достаточно стабильные доходы.

Но и число пользователей коммерческих программных продуктов остается значительным, давая возможность производителям получать устойчивую прибыль от продажи лицензий.

Особенности взаимодействия участников рынков интеллектуальной собственности в настоящее время еще недостаточно исследованы, и **проблема математического моделирования механизмов конкуренции на рынке программного обеспечения с учетом специфических особенностей продуктов этого рынка как знаний и инноваций** является актуальной.

Объектом исследования является рынок программного обеспечения и его участники — предприятия, организации и физические лица.

Предметом исследования выступают механизмы взаимодействия участников рынка программного обеспечения:

- распространение продуктов;
- формирование спроса и предложения;
- ценообразование;
- конкуренция;
- появление на рынке новых участников;
- выбывание с рынка участников, потерпевших поражение в конкурентной борьбе, и др.

Целью исследования является определение оптимальных стратегий поведения участников рынка программного обеспечения.

В соответствии с поставленной целью в работе были сформулированы и решены следующие теоретические и практические задачи:

- исследование современных подходов к моделированию распространения программных продуктов и конкуренции на рынке программного обеспечения;
- статистический анализ рынка программного обеспечения;
- разработка и исследование математических моделей рынка программного обеспечения, процесса распространения продуктов на этом рынке, поведения производителей и потребителей, механизмов формирования спроса и предложения;
- исследование механизмов конкуренции на рынке программного обеспечения с помощью построенных моделей, учитывающих особенности этого рынка.

История моделирования конкуренции начинается с работ А. Курно, Г. фон Штакельберга, Л. Вальраса, Ж. Бертрана, К. Эрроу, Дж. Нэша и других классиков экономико-математической науки.

Современные модели конкуренции на отраслевых рынках, в основном, разработаны в соответствии с заложенными классиками традициями: абсолютное большинство моделей конкуренции производителей симметричны в том смысле, что рассматриваются конфликты участников рынка, каждый из которых максимизирует свою прибыль.

Монополия и симметричная дуополия исследованы на сегодняшний день достаточно глубоко. Например, в работах В. В. Лебедева и К. В. Лебедева исследованы различные динамические модели монополии, учитывающие не только процессы распределения, обиена и потребления, но также и производственную деятельность. В частности, построены модели монополии с учетом инвестиционных и амортизационных процессов и в отсутствие ценового равновесия, где показано, что при максимизации монополией перспективного уровня фонда потребления устойчивость оптимального равновесного решения зависит от инвестиционной политики монополии. В работах Л. Е. Варшавского построена динамическая модель дуополии, которая учитывает не только динамику конкуренции, но и динамику производства. С помощью этой модели были предложены методы и алгоритмы государственного регулирования инвестиционной и инновационной деятельности для управления динамикой конкуренции. В частности, Л. Е. Варшавский получил условия сосуществования дуополистов на рынке и вытеснения одним монополистом другого.

Вместе с тем, современный рынок программного обеспечения характерен своей асимметрией: одни участники максимизируют свои доходы, а другие — нет.

Кроме того, существующие модели конкуренции на отраслевых рынках не отражают принципиальных отличий знаний и инноваций от других продуктов и потому не вполне пригодны для исследования рынка программного обеспечения.

Первые динамические модели распространения инноваций были предложены Ц. Грилихесом, Дж. Коулманом, Э. Катцем и Х. Менцелем. В дальнейшем модели диффузии инноваций активно разрабатывались Ф. Бассом, С. Калишем, В. Махаджаном, Е. Мюллером, Р. Петерсоном, С. Сэном и другими исследователями.

На сегодняшний день опубликовано довольно большое число работ, в которых конкуренция исследуется с помощью различных модификаций фундаментальной модели диффузии инноваций, состоящих в том, что ее коэффициенты рассматриваются как функции от цен, расходов на рекламу и других факторов.

Что касается моделирования конкуренции на рынке программного обеспечения, то абсолютное большинство работ, проведенных в этом направлении, посвящено исследованию процессов теневого распространения нелегальных копий лицензионных коммерческих программных продуктов. Здесь, прежде всего, стоит отметить работы М. Гивона, П. Деванбю, А. Н. Козырева, В. Махаджана, Е. Мюллера, С. А. Середы и С. Стаблбайна.

Практические результаты работ В. Л. Макарова, В. А. Васильева, В. И. Данилова, Г. А. Кошевого, А. Н. Козырева и А. И. Сотскова по общей теории экономического равновесия оправдывают ценовую дискриминацию на рынках интеллектуальной собственности и обосновывают существование эффективного равновесия на таких рынках.

Например, в работах А. Н. Козырева модели двухэтапного ценообразования с дифференцированной ценой входа на рынок для потребителя применены к интерпретации идей теории прав собственности и уточнению некоторых ее выводов применительно к оценке объектов интеллектуальной собственности. В частности, А. Н. Козырев показал, что сочетание такого двухкомпонентного тарифа с ценовой дискриминацией нивелирует эту дискриминацию.

Такие модели вполне хорошо описывают рынки предоставления патентов, информационных и информационно-технологических услуг, когда потребители вначале платят некоторую сумму за вход на рынок и право пользоваться услугами по цене предельных издержек, а затем — оплачивают собственно услуги по цене предельных издержек (например, вначале пользователь платит за подключение к интернету, а затем оплачивает использованный трафик).

Применение подобной схемы к ценообразованию на рынке программного обеспечения сводится к тому, что вначале пользователь приобретает программный продукт, а затем платит по цене предельных издержек за техническую поддержку или обновления этого продукта. Однако на рынке программного обеспечения распространение продуктов представляет гораздо больший интерес, чем оказание технической поддержки или рассылка обновлений. Поэтому математическое моделирование конкуренции на рынке программного обеспечения требует развития.

Конкуренция коммерческого и некоммерческого программного обеспечения до настоящего времени в основном рассматривалась с позиции потребителя, а не производителя (среди таких исследований потребительского выбора нужно отметить работы Д. Ли и Х. Мендельсона).

Исследование конкуренции коммерческого и некоммерческого программного обеспечения, проведенное автором, в значительной степени базируется на работе

Р. Касадесуса-Масанелла и П. Гемавата, которые представили в 2006 г. первую динамическую модель конкуренции между коммерческим продуктом *Microsoft Windows* и его некоммерческим заменителем *Linux*.

В процессе работы были также существенно использованы результаты Х. Р. Вэриана, Д. Йоффе, Р. Касадесуса-Масанелла, М. Л. Каца, Б. Нейлбуффа, Дж. Фаррелла, К. Шапиро и Н. Экономайдса в области сетевой экономики; труды Р. Харрода, Е. Домара, Р. Солоу, В. Л. Макарова, А. А. Петрова, И. Г. Поспелова, А. А. Шананина, В. А. Колемаева и В. В. Лебедева по моделированию экономической динамики; теория оптимального управления, развитая в работах Л. С. Понтрягина, В. Г. Болтянского, И. В. Гирсанова, А. Я. Дубовицкого, А. А. Милютина, Л. И. Розоноэра, В. З. Беленького, А. Г. Бутковского, А. И. Егорова, В. Ф. Кротова, Б. А. Лагоши и других авторов; методология «мягкого» моделирования, обобщенная В. И. Арнольдом; труды Ф. Блэка, М. Шоулса, Р. Мертона, А. Н. Ширяева, А. Диксита, Р. Пиндайка, А. В. Бухвалова, В. В. Капитоненко, А. Н. Козырева и А. В. Мельникова по финансовой математике и финансовой экономике; теоретические аспекты экономики знаний, исследованные П. Друкером, В. Л. Макаровым, Г. Б. Клейнером, А. Е. Варшавским, Л. Е. Варшавским и А. Н. Козыревым.

Теоретическую и методологическую основу данной работы составили исследования в области математического моделирования экономической динамики, математической теории оптимального управления, теории игр и теории отраслевых рынков, экономики знаний, теории инноваций и научно-технического прогресса, неоинституциональной экономики и теории прав собственности, финансовой математики и финансовой экономики, а также аппарат теории вероятностей, теории случайных процессов и стохастического исчисления, математической и прикладной статистики, многомерных статистических методов и эконометрики.

В статической модели дуополии производителей коммерческого и некоммерческого программного обеспечения оптимальная ценовая стратегия производителя коммерческого программного продукта определена методами одномерной оптимизации.

Теоретико-игровая модель взаимодействия производителей и пользователей коммерческого программного обеспечения в условиях существования рынка нелегальных (пиратских) копий представляет собой биматричную игру, в которой найдено решение Нэша.

Динамическая модель смешанной дуополии производителей коммерческого и некоммерческого программного обеспечения является обобщением модели Касадесуса-Масанелла — Гемавата. В предположении линейного роста рынка, а также наличия теневого распространения нелегальных копий и ненулевых издержек по обеспечению технической поддержки, методами оптимального управления определены оптимальные ценовые стратегии производителя коммерческого программного продукта, а также условия сосуществования коммерческого и некоммерческого программного обеспечения на рынке и вытеснения одним конкурентом другого.

Модели сотрудничества и конкуренции разработчиков программного обеспечения с производителями аппаратного обеспечения представляют собой кооперативные непрерывные игры. В этих моделях найдены ситуации равновесия либо доказано их отсутствие.

Стохастические обобщения модели Харрода — Домара, модели Солоу и фундаментальной модели диффузии инноваций исследованы методами стохастического исчисления: найдены случайные процессы, представляющие собой решения соответствующих уравнений, а также их числовые характеристики.

В ходе исследования модели диффузии инноваций в условиях пространственной неоднородности экономики построено обобщение принципа максимума Понтрягина для решения задач оптимального управления распределенными системами.

Для реализации статистического анализа рынка программного обеспечения использовался пакет *Microsoft Excel.*

Большинство построенных моделей являются «мягкими» в том смысле, что полученные с их помощью результаты носят общий характер при довольно широком классе используемых функций.

Информационную базу исследования составили данные о рынке программного обеспечения и его участниках, опубликованные в открытой печати, в том числе, на официальном сайте агентства *IDC* и официальных сайтах производителей программного обеспечения.

Научная новизна работы заключается в рассмотрении нового для экономико-математической науки рынка программного обеспечения в качестве объекта исследования и получении новых результатов с помощью построения и исследования экономико-математических моделей поведения участников этого рынка. Это позволяет рассматривать совокупность результатов, полученных в ходе исследования, как новое научное направление.

В работе получены следующие новые научные результаты:

- статистическое исследование рынка серверных операционных систем;
- статическая модель смешанной дуополии производителей коммерческого и некоммерческого программного обеспечения;
- теоретико-игровая модель взаимодействия производителей и пользователей коммерческого программного обеспечения в условиях существования рынка нелегальных (пиратских) копий;
- динамическая модель смешанной дуополии производителей коммерческого и некоммерческого программного обеспечения с ненулевыми издержками по обеспечению технической поддержки, построенная в предположении линейного роста рынка, а также наличия теневого распространения нелегальных копий;
- модели сотрудничества и конкуренции разработчиков коммерческого и некоммерческого программного обеспечения с производителями аппаратного обеспечения;

- стохастические обобщения модели Харрода — Домара и модели Солоу и их применение к исследованию динамики разработки программного обеспечения;
- стохастическое обобщение фундаментальной модели диффузии инноваций;
- модель диффузии инноваций в условиях пространственной неоднородности экономики;
- обобщение принципа максимума Понтрягина для решения задач оптимального управления распределенными системами.

Достоверность полученных результатов обеспечивается построением экономически обоснованных математических моделей, корректным использованием математических методов для исследования этих моделей, совпадением частных случаев с наблюдениями и известными результатами. Основные положения работы сформулированы в виде утверждений и доказаны.

Разработанные статические и динамические математические модели смешанной дуополии вносят вклад в математическую экономику, развивая область экономико-математического моделирования рынка программного обеспечения и других рынков, специфичных для экономики знаний.

Стохастические обобщения модели Харрода — Домара, модели Солоу и фундаментальной модели диффузии инноваций расширяют границы финансовой математики.

Обобщение принципа максимума Понтрягина представляет собой вклад в математическую теорию оптимального управления, являясь достаточно удобным формализмом для решения распределенных задач оптимального управления, имеющих как экономическую, так и любую другую природу. В частности, этот формализм позволяет исследовать распространение инноваций в условиях пространственной неоднородности экономики.

Важно, что многие из построенных в работе моделей можно использовать не только при исследовании рынка программного обеспечения, но и при исследовании других рынков инновационной продукции и нематериальных активов, существенно отличающихся от традиционных рынков.

Результаты работы могут быть использованы:

- руководителями и аналитиками предприятий — участников рынков инновационной продукции и нематериальных активов при принятии решений о входе на рынок, выходе с рынка, ценообразовании и т. д.;
- консультантами и аналитиками консалтинговых компаний в процессе консультирования участников указанных рынков;
- руководителями и специалистами органов государственного управления в качестве инструмента поддержки принятия решений по регулированию названных рынков;
- профессорами и преподавателями учебных заведений высшего и дополнительного профессиионального образования при обучении студентов, переподготовке и повышении квалификации специалистов — работников соответствующих предприятий и государственных органов.

Работа состоит из введения, пяти глав, основных выводов и списка использованной литературы.

Первая глава посвящена исследованию современного рынка программного обеспечения как рынка инноваций и знаний, в этой главе описываются коммерческие и некоммерческие механизмы распространения программного обеспечения, а также обсуждаются современные подходы к моделированию процессов распространения инноваций и конкуренции на рынке инноваций.

Во второй главе проводится статистическое исследование современного рынка программного обеспечения, а также сравнение стоимости владения коммерческим программным продуктом и его некоммерческим аналогом; затем строятся простейшие модели поведения участников рынка программного обеспечения:

- статическая модель смешанной дуополии коммерческого и некоммерческого производителей программного обеспечения;
- теоретико-игровая модель взаимодействия производителя коммерческого программного обеспечения с

пользователями в условиях существования рынка пиратских копий.

В третьей главе построены и исследоваы методами оптимального управления три динамические модели:

- модель монополии единственного производителя коммерческого программного обеспечения;
- модель смешанной дуополии производителей коммерческого и некоммерческого программного обеспечения в отсутствие пиратства при нулевых переменных издержках коммерческого производителя;
- модель смешанной дуополии производителей коммерческого и некоммерческого программного обеспечения при ненулевых издержках по обеспечению технической поддержки и наличии теневого рынка нелегальных копий коммерческого продукта.

В четвертой главе построены и исследованы методами теории игр три модели:

- модель взаимодействия монопольных производителей аппаратного и программного обеспечения;
- модель взаимодействия производителей коммерческого и некоммерческого программного обеспечения с монопольным поставщиком аппаратного обеспечения;
- модель взаимодействия двух конкурирующих поставщиков аппаратного обеспечения с производителями коммерческого и некоммерческого программного обеспечения.

В пятой главе предложены стохастические ообощения известных экономико-математических моделей:

- модели Харрода — Домара;
- модели Солоу;
- фундаментальной модели диффузии инноваций.

Также в пятой главе рассматриваются задачи оптимального управления распределенными экономическими системами; строится удобный формализм для исследования таких задач — обобщение принципа максимума Понтрягина, ставится задача оптимального управления распространением инноваций в пространственно-неоднородной экономике.

ГЛАВА 1. Современный рынок программного обеспечения как рынок инноваций и знаний

§ 1.1. Инновации и знания на рынке информационных технологий

Основные особенности знаний и инноваций

В 2000—2008 гг. российская экономика демонстрировала достаточно высокие темпы роста на фоне усиления роли государства. Однако рост экономики был в значительной степени обусловлен не развитием инноваций и новых технологий, а благоприятной конъюнктурой мировых цен на ресурсы (прежде всего, высокими ценами на нефть и газ).

Экономический рост в России происходил в условиях низкой конкурентоспособности национальной экономики: по данным очередного *Отчета о мировой конкурентоспособности* [28], опубликованного 23 октября 2008 г. Всемирным экономическим форумом, Российская Федерация занимает 51 место из 134 стран по интегральному индексу конкурентоспособности, но при этом по доступности современных технологий — 98 место, по внедрению технологий на уровне фирм — 105 место, по законодательству в сфере информационно-коммуникационных технологий — 79 место, по прямым иностранным инвестициям — 99 место.

Падение мировых цен на энергоносители в результате мирового финансового кризиса 2008 г. привело к существенному замедлению экономического роста в России, стало причиной национального экономического кризиса.

По данным агенства новостей «Интерфакс», в 2009 г. федеральный бюджет впервые с 1999 г. станет дефицитным, причем дефицит может составить около 4 трлн руб., инфляция за год — 15%, а средний курс доллара США — 34 рубля за доллар [38]; 20 января 2009 г. министр финансов Российской Федерации А. Л. Кудрин в интервью агентству «Интерфакс» не назвал конкретных чисел, но охарактеризовал предполагаемый дефицит бюджета как «значительный» [149].

Чтобы повысить конкурентоспособность и усилить независимость от экономического положения в других странах, российская экономика должна развиваться не только за счет эксплуатации природных ресурсов, рост национальной экономики должен обеспечиваться использованием инновационного потенциала, созданием новых конкурентоспособных продуктов и услуг.

Вполне закономерно, что Президент и Правительство Российской Федерации решающими факторами социально-экономического роста видят развитие инноваций и новых технологий [20].

Термин «инновация» был введен Й. Шумпетером в 30-х гг. XX в. [223] для обозначения любых изменений с целью внедрения и использования новых товаров, рынков и форм организации компаний.

П. Друкер в 1985 г. отметил: «Суть последовательной инновационной деятельности состоит в целенаправленном и организованном поиске перемен, а также последовательном анализе тех возможностей для экономических и социальных нововведений, которые несут эти перемены» [55].

Современный *Экономико-математический энциклопедический словарь* определяет *инновации* как «нововведения, результаты творческой деятельности, направленные на разработку, создание и распространение новых видов изделий, технологий и материалов, внедрение новых организационных форм производства и управления» [227].

В 1962 г. Ф. Махлуп в своей книге [123] (см. также [120, 121, 122]) ввел термин «экономика знаний», рассмотрев знание как продукт, который может быть и публичным, и частным благом (до появления этой книги знания, если и рассматривались в экономике, то только как публичные блага).

Под *экономикой знаний* сейчас понимают обычно «экономику, которая создает, распространяет и использует знания для ускорения собственного роста и конкурентоспособности» [62].

На формирование и функционирование рынка знаний влияют следующие особенности, принципиально отличающие знания от других продуктов (см., например, [62]):

- дискретность;
- отсутствие редкости;
- наличие автора.

Дискретность означает, что знание либо передано, либо нет, и потому невозможно предъявить знание потенциальному покупателю, чтобы он смог принять решение о необходимости его приобретения.

Отсутствие редкости приводит к эффекту возрастания отдачи от масштаба распространения, поскольку существует принципиальная разница между себестоимостью создания знания и существенно меньшей, близкой к нулю, себестоимостью его копирования.

Наличие автора означает, что знание является частным благом, а отсутствие редкости — что знание представляет собой общественное благо.

Классические модели конкуренции на отраслевых рынках, восходящие к А. Курно [92], Г. фон Штакельбергу [206], Л. Вальрасу [21], Ж. Бертрану [11] и их последователям (см., например, библиографию в [25, 26, 63, 78, 79, 129]), не отражают указанные свойства знаний и потому непригодны для моделирования рынков знаний и инноваций.

В настоящем исследовании предлагается ряд моделей, отражающих специфические особенности таких рынков.

Инновации на рынке информационных технологий

Обратимся к инновациям на таком важнейшем рынке знаний, как рынок информационных технологий, развивающийся чрезвычайно стремительно: ведь с момента появления первых ЭВМ прошло всего полвека, и за это время появились микропроцессоры, персональные компьютеры, ноутбуки, АСУ, ГАП, САПР, *ERP*- и *CRM*-системы и др.

И дело не только в развитии качества и возможностей продуктов, но и в их удешевлении: за последние 30 лет вычислительная мощность вырастала в среднем приблизительно на 50% в год, а цена ежегодно падала примерно на 20% [100].

В 2006 г. в рамках проекта *OLPC — One Laptop Per Child* («Ноутбук каждому ребенку») выпущена первая партия полнофункциональных ноутбуков себестоимостью около 100 долл. [134], сейчас налаживается массовое производство таких компьютеров для поставок в развивающиеся страны, чтобы каждый школьник в таких странах имел собственный ноутбук.

Очевидно, в будущем появятся более дешевые компьютеры с увеличенным быстродействием, более емкими и дешевыми запоминающими устройствами и т. п.

Более того, существуют многочисленные экспертные суждения о том, что производители аппаратного обеспечения «придерживают» новые технологии (прежде всего, технологии производства микропроцессоров) до тех пор, пока «старые» технологии, вполне удовлетворяющие требованиям пользователей, еще не принесли их создателям достаточной, с их точки зрения, прибыли.

Прогресс в области информационных технологий не сравним ни с какой другой сферой. Если бы так же быстро развивался транспорт, то сейчас за 30 руб. можно было бы в течение 15 мин. совершить путешествие на Марс и обратно!

Сегодня компьютеры окружают нас повсюду: покупая продукты в магазине, или получая общегражданский или заграничный паспорт в УВД, или справку в ЕИРЦе, или совершая платеж в банке, или заполняя налоговую декларацию — в таких и во многих других повседневных ситуациях сложно представить, как можно обойтись без возможностей, предоставляемых современными информационными технологиями.

В. В. Годин отмечает, что в мировой экономике в настоящее время происходит технологическая революция, в процессе которой под влиянием информационных технологий существенным образом меняется бизнес, его среда и участники, методы управления им. Информационные технологии перестали быть вспомогательным ресурсом бизнеса, теперь они играют в бизнесе структурирующую и реструктурирующую роль [34, 35, 36, 204].

Простейшими примерами использования информационно-технологических инноваций в бизнесе являются:

- компьютерные системы бухгалтерского учета, существенно облегчившие, ускорившие и удешевившие работу бухгалтеров;
- системы автоматизации торговли, связавшие в единое целое складской учет, закупки, расстановку товаров на витрине, бухгалтерский учет, планирование и т. д.;
- интернет-магазины, которые позволили существенно снизить издержки торговых предприятий за счет отсутствия необходимости иметь торговые площади и содержать большой штат продавцов.

Реальная информационная система крупного концерна, такого, например, как *BMW*, устроена следующим образом [192, 193].

Покупатель (находящийся, возможно, в другой стране) не выходя из дома заходит на интернет-сайт автодилера и указывает модель, комплектацию и цвет автомобиля, необходимое дополнительное оборудование и т. п., а также номер своей платежной карты.

После подтверждения, которое покупатель совершает нажатием кнопки мыши, информационная система рассчитывает стоимость такого автомобиля и отправляет в банк запрос о наличии на счете клиента необходимой суммы. Если банк отвечает положительно, тут же эта сумма на счете клиента блокируется, а автоматический конвейер завода начинает сборку автомобиля — специально для данного покупателя, с учетом всех его пожеланий.

При необходимости информационная система автоматически заказывает комплектующие у поставщиков, оптимально планирует время поставок — поближе к моменту сборки автомобиля (чтобы не занимать лишних складских площадей), автоматически следит за транспортировкой заказа и т. п.

Менеджер может в любой момент, обратившись к информационной системе, получить точную информацию о количестве заказанных автомобилей, о запасах готовой продукции и комплектующих на складах, о денежных суммах на счетах и т. д.

Внедрение такой корпоративной информационной системы стоит очень дорого, но затраты окупаются.

Существуют достаточно продвинутые технологии и в тех областях, где, казалось бы, возможны только простейшие улучшения.

Например, на первый взгляд, банальная технология управления очередью заключается в том, что клиенты получают из автомата номерки и затем на табло могут следить за своим продвижением в очереди, а в конце процесса табло информирует их о номере окна, к которому следует подойти.

На самом деле, эта технология позволяет поставщику услуг не только минимизировать время клиентов, но и, например, определять области их интересов [с помощью видеокамер, фиксирующих направление взгляда, система определяет, какая информация на табло (которое, помимо номера вызываемого клиента, показывает, например, котировки различных финансовых инструментов) заинтересовала клиента, и сообщает о ней менеджеру перед тем, как клиент к нему обратится].

Еще один пример — так называемый виртуальный офис, когда сотрудники выполняют свою работу дома, пересылая результаты работодателю с помощью интернета, а заработная плата им начисляется на пластиковые карты.

Показательной иллюстрацией такой формы организации бизнеса, основанного на знаниях, является оффшорное программирование. Если в стране имеются квалифицированные программисты, а спрос на них в этой стране недостаточен, то, казалось бы, выход один — иммиграция в ту страну, где имеется соответствующий спрос.

С появлением интернета стало возможным оставаться в своей стране и работать на иностранную фирму. Очевидно, экономический эффект от оффшорного программирования получает и программист, и фирма — работодатель, и страна, где она расположена, и страна, гражданином которой является программист.

Другой вопрос, что для России, в отличие от, например, активной в оффшорном программировании Индии (доход которой от оффшорного программирования только в 2007 г. составил около 35—40 млрд. долл. [27]), более правильной представляется другая стратегия, связанная, прежде всего, с производством собственного специализированного программного обеспечения.

Важнейшими направлениями реализации *Стратегии развития информационного общества в Российской Федерации* являются следующие [199]:

- стимулирование применения организациями и гражданами информационных и телекоммуникационных технологий;
- создание условий для развития конкурентоспособной отечественной индустрии информационных и телекоммуникационных технологий, средств вычислительной техники, радиоэлектроники, теле-

коммуникационного оборудования и программного обеспечения;

- привлечение инвестиций для развития российской отрасли информационных и телекоммуникационных технологий, а также отечественной электронной промышленности;
- развитие венчурного финансирования высокотехнологичных инновационных проектов в сфере информационных и телекоммуникационных технологий;
- стимулирование создания новых компаний, занятых производством высокотехнологичного оборудования и продукции в сфере информационных и телекоммуникационных технологий;
- развитие экономики Российской Федерации на основе использования информационных и телекоммуникационных технологий;
- увеличение объемов экспорта продукции и услуг в сфере информационных и телекоммуникационных технологий;
- повышение экономической эффективности использования российскими правообладателями объектов интеллектуальной собственности.

Интеллектуальный капитал участников рынка информационных технологий

В современной трактовке В. Л. Макарова и Г. Б. Клейнера *капитал* — это «результат социальной оценки ограниченного, допускающего накопление, ликвидного, воспроизводимого ресурса, способного приносить новую (добавочную) стоимость» [107].

Фирмы — инноваторы демонстрируют, что и денежный капитал, и многие другие факторы производства гораздо меньше влияют на развитие организации по сравнению с ее рыночной позицией и способностью адаптироваться к изменяющейся рыночной среде [138] (см. также [8, 30]).

Ярким примером служит компания *Nokia*, которая выступает сейчас одним из лидеров на рынке мобильных телефонов, практически не имея собственных производственных мощностей и выйдя на этот высокотехнологичный рынок, имея только опыт в шинной промышленности и деревообработке [138].

Л. Эдвинсон и М. Мэлон определили в 1997 г. *интеллектуальный капитал* как знание, которое может быть преобразовано в стоимость [224] (см. также более раннюю работу Т. Стюарта [200]).

Коэффициент Тобина q (см., например, [3, 106, 200, 224]) представляет собой отношение рыночной стоимости компании (для корпорации это сумма рыночной капитализации и балансовой стоимости заемных средств) к восстановительной стоимости ее активов (на практике обычно в качестве нее берут бухгалтерскую стоимость).

Коэффициент Тобина отражает вклад интеллектуального капитала в стоимость компании, определяя организационные возможности, качество управления, способность к адаптации.

Одной из наиболее успешных по этим критериям фирм является корпорация *Microsoft* [30, 91], для которой коэффициент Тобина на 9 января 2009 г. составил по данным консолидированной финансовой отчетности за 2008 г. [83] и данным о котировках акций [84] корпорации *Microsoft*

$$q_{Microsoft} = \frac{173\ 640\ 000\ 000 \text{ долл.}}{72\ 793\ 000\ 000 \text{ долл.}} = 2{,}39 \text{ —}$$

и это во время мирового финансового кризиса, а в спокойном 2001 г. коэффициент Тобина у данной корпорации составлял 5,5 (см. [106])!

Наибольшее значение коэффициента Тобина, равное 15,2, было зарегистрировано у компании *Lotus* в 1995 г. — в момент ее приобретения корпорацией *IBM* после длительной борьбы за покупку между *IBM* и *Microsoft* [107, 224].

Некоторые российские компании также демонстрируют высокие значения коэффициента Тобина.

Например, по данным консолидированной финансовой отчетности ОАО «РБК Информационные Системы» за 2007 г. [82] и данным рейтингового агентства «Эксперт РА» о капитализации этой компании в том же году [67]

$$q_{\text{РБК}} = \frac{23\,001\,700\,000\text{ руб.}}{13\,869\,000\,000\text{ руб.}} = 1{,}66.$$

И это — закономерность: конкретные исследования интеллектуального капитала российских и мировых компаний, проведенные в работах [13, 14, 59, 73, 106], демонстрируют более высокие значения коэффициента Тобина в компаниях информационно-технологической отрасли по сравнению с другими отраслями.

§ 1.2. Свободное и открытое программное обеспечение как альтернатива коммерческому

Себестоимость продукции на рынке программного обеспечения

Как отмечают В. Л. Макаров и Г. Б. Клейнер [107], в традиционной экономике «тиражирование стандартной продукции в нужном для удовлетворения потребностей количестве — основной процесс, обеспечивающий существование общества и человека».

Рынок программного обеспечения представляет собой яркий пример рынка знаний. Тиражирование продукции на этом рынке производится практически без материальных затрат — в отличие от создания новых продуктов. Себестоимость записи программы на компакт-диск достаточно мала, а себестоимость распространения копии продукта через интернет еще меньше.

В связи с этим исчисление себестоимости на рынке программного обеспечения имеет особенность, состоящую в невозможности разнесения издержек по экземплярам продукции.

Переменные издержки, таким образом, на рынке программного обеспечения близки к нулю, а себестоимость практически совпадает с постоянными издержками по созданию нового продукта.

Коммерческое программное обеспечение и инструменты его распрстранения

А. Н. Козырев в работе [76] позиционирует рынок программного обеспечения как «рынок лицензий, основанных на авторском праве».

На сегодняшний день существуют следующие **инструменты распространения коммерческого программного обеспечения:**

- *традиционные лицензионные договоры*, заключаемые в письменной форме и предусматривающие паушальный платеж и периодическую выплату роялти;
- *коробочные* (или *оберточные*) *лицензии*, напечатанные на упаковке продукта (или размещенные на сайте, с которого пользователи скачивают продукт), представляющие собой разновидность договора оферты (к которой покупатель присоединяется, вскрыв упаковку или завершив скачивание копии продукта с сайта); этот вид лицензий был введен в практику в 70-х гг. XX в. корпорацией *Microsoft*, и получил наиболее широкое распространение в связи с отсутствием необходимости в переговорах о цене лицензии в процессе торговли, что создает определенные психологические удобства как для производителя, так и для потребителя (подробнее см. [76]);
- *договоры аренды*, по которым программное обеспечение остается в собственности производителя, а потребитель получает право пользования программным продуктом в течение оговоренного срока;

- *подписки на обновления*, когда потребитель приобретает право пользования постоянно развивающимся программным продуктом, а также право на периодическое получение очередных версий и обновлений продукта; такой способ наиболее удобен для распространения антивирусов, бухгалтерских пакетов, а также справочных правовых систем.

Некоммерческое программное обеспечение

Принципиальная возможность приобретения пиратских копий программных продуктов влечет за собой несоответствие деятельности производителя коммерческого программного обеспечения целям его функционирования: производитель вынужден изобличать незаконных пользователей и привлекать их к ответственности, на что приходится отвлекать от основной деятельности — производства программного обеспечения — довольно значительные ресурсы (либо мириться с нелегальным использованием программ).

Как отмечает П. Друкер, любое несоответствие является потенциальным источником инновации [55]. Результатом отмеченного несоответствия стало появление на рынке программного обеспечения инновационных — некоммерческих — форм распространения продукции:

- свободного программного обеспечения;
- программного обеспечения с открытым кодом.

Согласно определению основателя Фонда свободного программного обеспечения (*Free Software Foundation*) Р. Столлмана, «*Free software is software that gives the user the freedom to share, study and modify it*» [154], т. е. программное обеспечение называется *свободным*, если пользователь обладает тремя свободами:

- распространять программное обеспечение;
- изучать, как оно устроено;
- изменять его.

Те же самые свободы предполагает и движение открытого кода (*Open Source Software*), однако это движение считает коммерческое распространение программного обеспечения неоптимальным решением, тогда как Фонд свободного программного обеспечения считает небесплатное программное обеспечение социальной проблемой.

В данной работе под *некоммерческим программным обеспечением* понимается и программное обеспечение с открытым кодом, и свободное программное обеспечение.

На сегодняшний день наиболее ярким представителем некоммерческого программного обеспечения является операционная система *Linux*.

Кроме того, следует отметить офисный пакет *OpenOffice*, браузер *Firefox*, серверы баз данных *MySQL* и *Firebird*, *Web*-сервер *Apache*, почтовую систему *Sendmail*, препроцессор гипертекста *PHP*, а также язык скриптов *PERL* и набор библиотек *Boost C++*.

Институциональной основой программного обеспечения с открытым кодом является *открытое лицензионное соглашение GNU (GNU General Public License, GNU GPL)*, разработаное Фондом свободного программного обеспечения в рамках проекта ***G**NU* (***G**NU's **N**ot **U**NIX* — «*GNU* — не *UNIX*!») в 1988 г. Оно вводит термин «*копилефт*» (*copyleft*), подразумевая, в отличие от «*копирайта*» (*copyright*), что программное обеспечение, защищенное открытым лицензионным соглашение *GNU*, может быть бесплатно использовано, изучено и изменено, но измененный продукт должен распространяться на тех же условиях *GNU GPL*, и его исходный код не может быть «закрыт».

Конкуренция коммерческого и некоммерческого программного обеспечения

Современный рынок программного обеспечения предлагает пользователю выбор из трех вариантов:

- приобрести лицензии и использовать коммерческое программное обеспечение (например, *Microsoft Windows* в качестве операционной системы, *Microsoft Office* в качестве офисного пакета, *Microsoft SQL Server* в качестве сервера СУБД, *Microsoft Internet Information Server* в качестве веб-сервера и т. д.);
- бесплатно использовать некоммерческое программное обеспечение (например, *Linux* в качестве операционной системы, *OpenOffice* в качестве офисного пакета, *MySQL* в качестве сервера СУБД, *Apache* в качестве веб-сервера и т. д.; в табл. 1.2.1 представлены сведения о наиболее популярных некоммерческих программных продуктах, заимствованные из работы [61]);
- использовать пиратские копии коммерческого программного обеспечения.

Данные варианты соответствуют **трем типам игроков рынка программного обеспечения:**

- игроки, максимизирующие прибыль от производства программного обеспечения и продажи лицензий (например, *Microsoft*);
- игроки, не ориентированные на извлечение прибыли от производства программного обеспечения (например, команда разработчиков *Linux*);
- пираты.

Поскольку переменные издержки равны нулю, цена продукта на рынке программного обеспечения (или, с точки зрения потребителя, стоимость владения продуктом) представляет собой сумму трех слагаемых:

- компенсации постоянных издержек;
- добавленной (при продаже) стоимости;
- стоимости обслуживания.

При этом постоянные издержки как коммерческого, так и некоммерческого программного обеспечения близки друг к другу, однако покупатель коммерческого продукта компенсирует эти издержки производителя, в случае некоммерческих продуктов такой компенсации не происходит.

Таблица 1.2.1

Основные некоммерческие программные продукты (данные за 2005 г. [61])

Продукт	Инсталляции в 2005 г. (Y, ТБайт в неделю)	Инвестиции венчурного и человеческого капитала в 1995—2005 гг. (x, млн. долл. США)
Linux	204	1500,0
OpenOffice	27	317,0
MySQL	15	76,0
Firefox	12	48,0
Jboss	3	24,0
Linux on Xbox	1,3	15,0
Apache	0,7	10,0
Vega Strike	0,5	0,0
Perl	0,4	0,0
Tcl	0,3	0,0
Python	0,3	0,0
StepMania	0,2	0,0
SugarCRM	0,15	0,0
Fink	0,13	0,0
Compiere	0,08	0,0
Xine	0,07	0,0
Plone	0,06	0,0
PHP	0,05	0,0
Boost C++	0,05	0,0
Firebird	0,05	0,0
PCGen	0,04	0,0

Стоимость обслуживания коммерческого и некоммерческого программного обеспечения для потребителя приблизительно одинакова.

Прибыль же производителя коммерческого программного обеспечения строго положительна (и производитель стремится ее максимизировать), в отличие от производителя некоммерческого продукта, у которого прибыль от продажи равна нулю (некоммерческие производители, однако, также зарабатывают, но не на продажах, а на обслуживании своих продуктов).

Аналогичная конкуренция происходит не только на других сегментах рынка программного обеспечения, но и на других рынках (например, между университетами и консалтинговыми фирмами на рынке управленческого консалтинга и др.).

Важно отметить принципиальную асимметрию рынка программного обеспечения: производители лучше осведомлены о дефектах и уязвимостях предлагаемых ими продуктов, чем потенциальные пользователи, выбирающие между несколькими производителями.

Такой «рынок лимонов» впервые был рассмотрен Дж. Акерлофом [1]. Потенциальная возможность использования пиратского программного обеспечения является причиной морального риска со скрытыми действиями и скрытой информацией. Рассматриваемый рынок характеризуется наличием сигналов (в основном, репутации брендов), иногда приукрашивающих действительность, особенно в отношении поддержки программных продуктов.

Эти институциональные аспекты (теория которых излагается, например, в работах [124, 128, 130, 145, 150, 212, 230]) обязательно следует учитывать при анализе процессов принятия решений участниками рынка программного обеспечения.

Может показаться, что выбор потребителя очень прост: использовать некоммерческий продукт в связи с относительно более низкой ценой владения (и некоторыми другими преимуществами — особенно, в случае, когда речь идет об открытом продукте, таком как *Linux*, и пользователь имеет возможность непосредственно влиять на качество продукта).

На самом деле ситуация сложнее. Дело в том, что в начале конкуренции между коммерческим и некоммерческим программным обеспечением (в начале 90-х гг. XX в.) около 100% рынка было занято производителями, максимизирующими прибыль, и некоммерческим производителям было крайне сложно обеспечить распространение своих продуктов (даже бесплатное) в связи с широкой известностью и авторитетом коммерческих продуктов и абсолютной недоказанностью таких потребительских свойств некоммерческих аналогов, как надежность, безопасность и т. п.

В течение последних 10—15 лет на многих сегментах рынка программного обеспечения некоммерческие продукты обогнали по объемам распространения своих коммерческих конкурентов.

В данной работе существенное внимание уделено конкуренции на рынке программного обеспечения (на примере рынка серверных операционных систем, где некоммерческий продукт *Linux* сосуществует с коммерческим продуктом *Windows*, занимая каждый приблизительно по 40% рынка (см. табл. 1.2.2, составленную по данным компании *IDC* [141]).

Таблица 1.2.2

Динамика разделения рынка операционных систем между конкурентами в 1994—2003 гг. в % [141]

Годы	*Windows*	*Novell*	*Linux*	*Unix*	Другие
1994	7,0	39,6	0,0	28,6	11,0
1995	18,1	34,7	0,0	25,4	8,0
1996	25,6	32,1	6,5	20,1	4,5
1997	35,3	26,7	6,8	20,9	3,9
1998	38,3	22,8	15,8	18,8	1,3
1999	38,1	19,1	24,8	15,5	1,0
2000	38,5	15,0	30,0	15,0	5,0
2001	39,5	13,0	34,0	13,0	3,0
2002	40,5	12,0	36,0	12,0	2,0
2003	41,0	10,0	38,0	10,0	2,0

§ 1.3. Модели диффузии инноваций

Базовая модель диффузии инноваций

За последние полвека накоплен достаточно большой опыт экономико-математического моделирования процесса распространения инновационных продуктов на рынке. Обсудим основные подходы к моделированию этого процесса.

Начнем с очевидной схемы движения потребителей инновационного продукта между сегментами рынка, представленной на рис. 1.3.1, на котором

$T(t)$ — суммарное число индивидов на рынке в момент времени t;

$M(t)$ — суммарное число потенциальных потребителей инновационного продукта на рынке в момент времени t;

$N(t)$ — суммарное число действующих потребителей инновационного продукта на рынке в момент времени t;

$m(t)=\dfrac{dM(t)}{dt}$ — число индивидов, переходящих за бесконечно малый промежуток времени dt с неохваченного рынка на потенциальный;

$n(t)=\dfrac{dN(t)}{dt}$ — *скорость распространения инновации* — число индивидов, переходящих за бесконечно малый промежуток времени dt с потенциального рынка на охваченный.

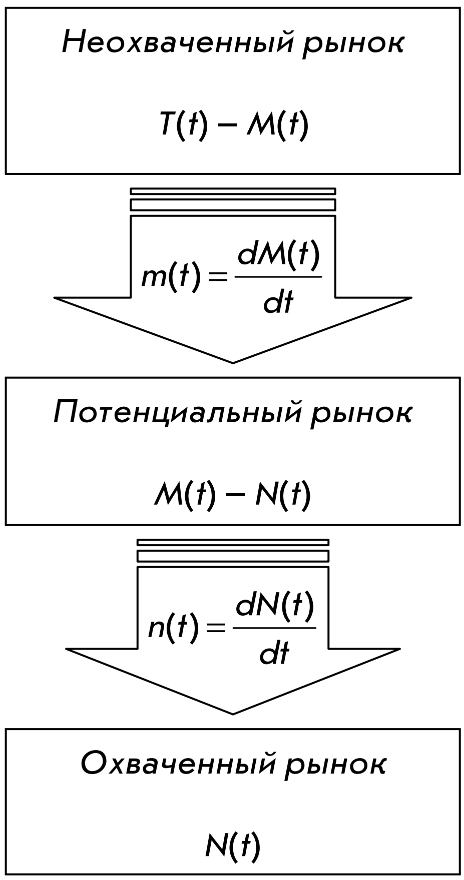

Рис. 1.3.1. *Перемещение потребителей между сегментами инновационного рынка*

В теории инноваций под *диффузией инноваций* понимается решение

$$N = N(t)$$

задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{dN}{dt} = f(t, N(t))$$

с начальным условием

$$N(0) = N_0. \qquad (1.3.1)$$

Здесь

t — время;

$N(t)$ — объем распространения инновации к моменту t (который определяется обычно количеством проданных экземпляров или количеством действующих потребителей инновационного продукта);

$f(t, N(t))$ — функция, определяющая форму диффузионной кривой и отражающая определенные предположения о природе процесса распространения инновации.

При этом предполагается обычно, что функция $N(t)$ непрерывна и дифференцируема при всех неотрицательных t, а функция $f(t, N(t))$ унимодальна.

Базовая модель диффузии инноваций (согласно терминологии, предложенной в классических работах С. Калиша и С. Сэна, [66], В. Махаджана и М. Шумана [119] (см. также более поздние работы В. Махаджана и Р. Петерсона [117], В. Махаджана, Е. Мюллера и Ф. Басса [112, 113, 114], В. Махаджана, С. Шармы и Р. Баззелла [118], В. Махаджана, Е. Мюллера и Й. Винда [115]) выглядит следующим образом:

$$\frac{dN(t)}{dt} = g(t, N(t))(M - N(t)). \qquad (1.3.2)$$

В этой модели предполагается, что общее число потенциальных потребителей инновации M неизменно во времени, а скорость распространения инновации $dN(t)/dt$ в каждый момент времени пропорциональна объему потенциального рынка $M - N(t)$.

По мере увеличения общего числа действующих потребителей инновационного продукта $N(t)$ и сооветственного уменьшения числа потенциальных потребителей $M - N(t)$ скорость распространения инновации снижается.

Фундаментальная модель диффузии инноваций

Функция $g(t, N(t))$ в модели (1.3.2) называется в теории инноваций *скоростью адаптации*, обычно интерпретируется как вероятность того, что потенциальный потребитель инновационного продукта приобретет его в момент t, и считается линейной функцией $N(t)$:

$$g(t, N(t)) = a + bN(t). \tag{1.3.3}$$

Подстановка скорости адаптации (1.3.3) в базовую модель диффузии инноваций (1.3.2) дает следующее обыкновенное дифференциальное уравнение *фундаментальной модели диффузии инноваций* [117]:

$$\frac{dN}{dt} = (a + bN)(M - N). \tag{1.3.4}$$

Параметры a и b в фундаментальной модели диффузии инноваций (1.3.4) отражают соответственно степень внешних и внутренних воздействий на скорость адаптации и, следовательно, на скорость распространения инновации.

Обычно считается, что внешние влияния на скорость адаптации определяются потребностью индивидов в инновациях и уровнем маркетинговых и рекламных коммуникаций, чему соответствует слагаемое

$$a(M - N)$$

в правой части (1.3.4).

Внутренние влияния на скорость адаптации обусловлены коммуникациями между действующими пользователями инновации и потенциальными потребителями (в результате которых потенциальным потребителям передается информация об инновационном продукте), и этому соответствует слагаемое

$$bN(t)(M-N).$$

Модели внешнего влияния

Первые модели диффузии инноваций ([86, 87, 207, 214], см. также [219]) основывались на предположении о том, что скорость распространения инновации $dN(t)/dt$ зависит только от потенциальной возможности насыщения рынка, иными словами, только от числа потенциальных потребителей $M - N(t)$, при этом коэффициент a отражает инновационность потребителей (их потребность в инновациях) и эффективность стратегии продвижения инновационного продукта на рынок.

Такие *модели внешнего влияния* представляют собой частный случай фундаментальной модели диффузии инноваций (1.3.4) при $b = 0$ и выглядят следующим образом:

$$\frac{dN}{dt} = a(M-N). \qquad (1.3.5)$$

Разделяя переменные в уравнении (1.3.5), имеем

$$\int \frac{dN}{M-N} = \int a\,dt,$$

откуда

$$\ln(M-N) = -at + \text{Const}$$

или

$$N(t) = M - e^{-at + \mathrm{Const}}.$$

Постоянная интегрирования определяется из начального условия (1.3.1), и окончательно рост охвата рынка во времени описывается функцией

$$N(t) = M - (M - N_0)e^{-at}. \qquad (1.3.6)$$

График этой функции представлен на рис. 1.3.2.

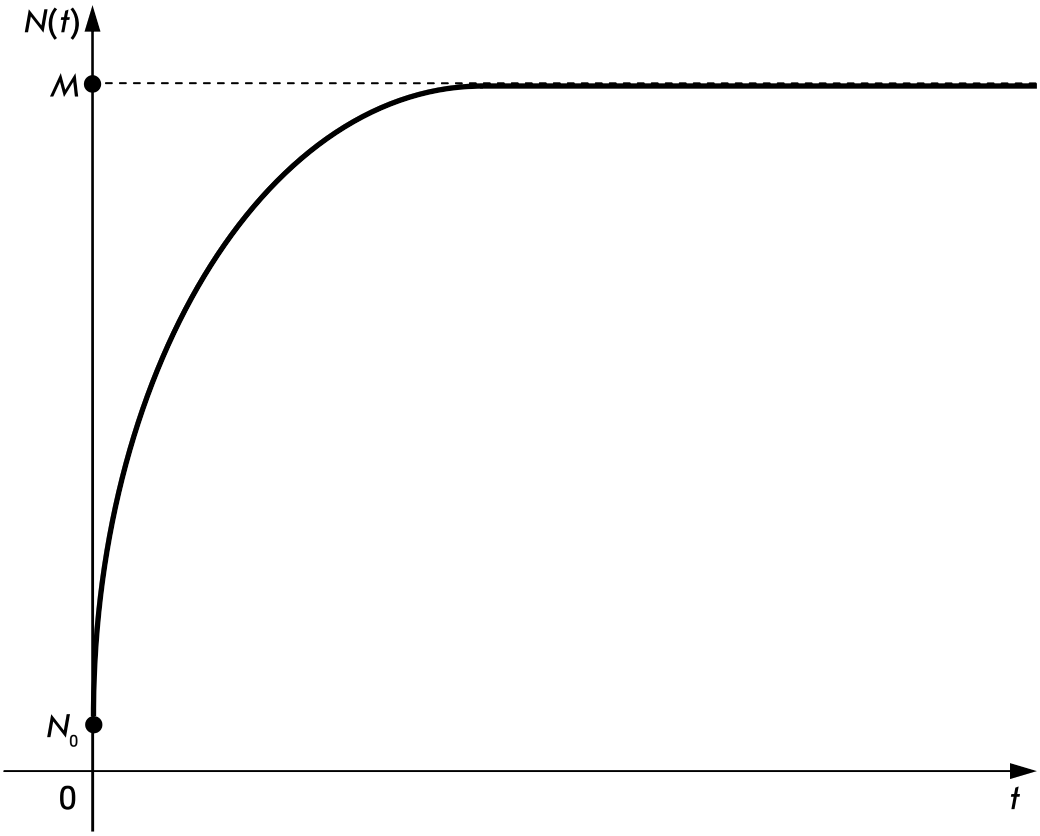

Рис. 1.3.2. *Рост объема охваченного рынка в моделях внешнего влияния*

Впервые в теории инноваций функции вида (1.3.6) появились в 1957 г. в работе Дж. Коулмана, Э. Катца и Х. Менцеля [86], которые описывали с помощью таких функций распространение новых лекарств в группе врачей (см. также монографию [87]). В 1960 г. Л. Форт и Дж. Вудлок в работе [207] с помощью функций вида (1.3.6) прогнозировали спрос на некоторые потребительские товары.

Р. Хэмблин, Б. Джакобсен и Дж. Миллер в работе 1973 г. [214] с помощью аналогичной модели анализировали распространение забастовок и политических демонстраций в различных странах.

Основное ограничение моделей внешнего влияния состоит в том, что эти модели не учитывают взаимодействия действующих и потенциальных потребителей инновации, коммуникаций между ними. Поэтому данный тип моделей может применяться для описания процесса распространения тех инноваций, которые не являются ни социально значимыми, ни сколь-нибудь сложными.

Модели внутреннего влияния

Модели внутреннего влияния представляют собой частный случай фундаментальной модели диффузии инноваций (1.3.3) при $a = 0$ и выглядят следующим образом:

$$\frac{dN}{dt} = bN(M - N). \tag{1.3.7}$$

Первые и наиболее известные модели внутреннего влияния были предложены Ц. Грилихесом в 1957 г. [40] и Э. Мэнсфилдом в 1961 г. [131].

Ц. Грилихес описывал с помощью подобной модели различия в использовании гибридной кукурузы фермерами из различных географических районов США, а Э. Мэнсфилд по данным различных отраслей изучал процесс смены технологий и определял факторы, влияющие на скорость распространения инноваций в различных компаниях.

Основное предположение, лежащее в основе данного типа моделей, состоит в том, что скорость распространения инновации $dN(t)/dt$ пропорциональна как потенциальной возможности насыщения рынка $M - N(t)$, так и достигнутому уровню распространения инновации $N(t)$. При этом предполагается, что внешние влияния (потребность индивидов в инновациях, а также общая информация о продукте, получаемая не из личных контактов между действующими и потенциальными потребителями) не оказывают существенного воздействия на процесс принятия решения о приобретении инновационного продукта. В моделях данного типа считается, что потенциальный потребитель может принять решение о приобретении только в результате личного контакта с действующим пользователем инновации.

Коэффициент b в уравнении (1.3.7) пропорционален вероятности встречи двух случайно выбранных индивидов, один из которых уже использует инновационный продукт, а другой — еще нет.

Уравнение (1.3.7) представляет собой уравнение Бернулли первого порядка:

$$\int \frac{dN}{N(M-N)} = \int b\,dt$$

или

$$\int \frac{dN}{N} - \int \frac{dN}{M-N} = bM \int dt.$$

Интегрируя, получаем:

$$\ln \frac{N}{M-N} = bMt + \mathrm{Const}$$

или

$$N(t) = \frac{M}{1 + \mathrm{e}^{-bMt - \mathrm{Const}}}.$$

Определяя постоянную интегрирования из начального условия (1.3.1), находим функцию

$$N(t) = \frac{M}{1 + \dfrac{M - N_0}{N_0} \mathrm{e}^{-bMt}}, \qquad (1.3.8)$$

которая описывает рост охвата рынка во времени. График этой функции называется *S-образной* или *логистической кривой*; он представлен на рис. 1.3.3.

Модели смешанного влияния

Наиболее распространены в исследованиях такие разновидности фундаментальной модели диффузии инноваций (1.3.4), в которых и a, и b не равны нулю — *модели смешанного влияния*, основанные на коммуникационной гипотезе, сформулированной П. Лазарсфельдом, Б. Берельсоном и Х. Гаудетом в работе 1948 г. [94].

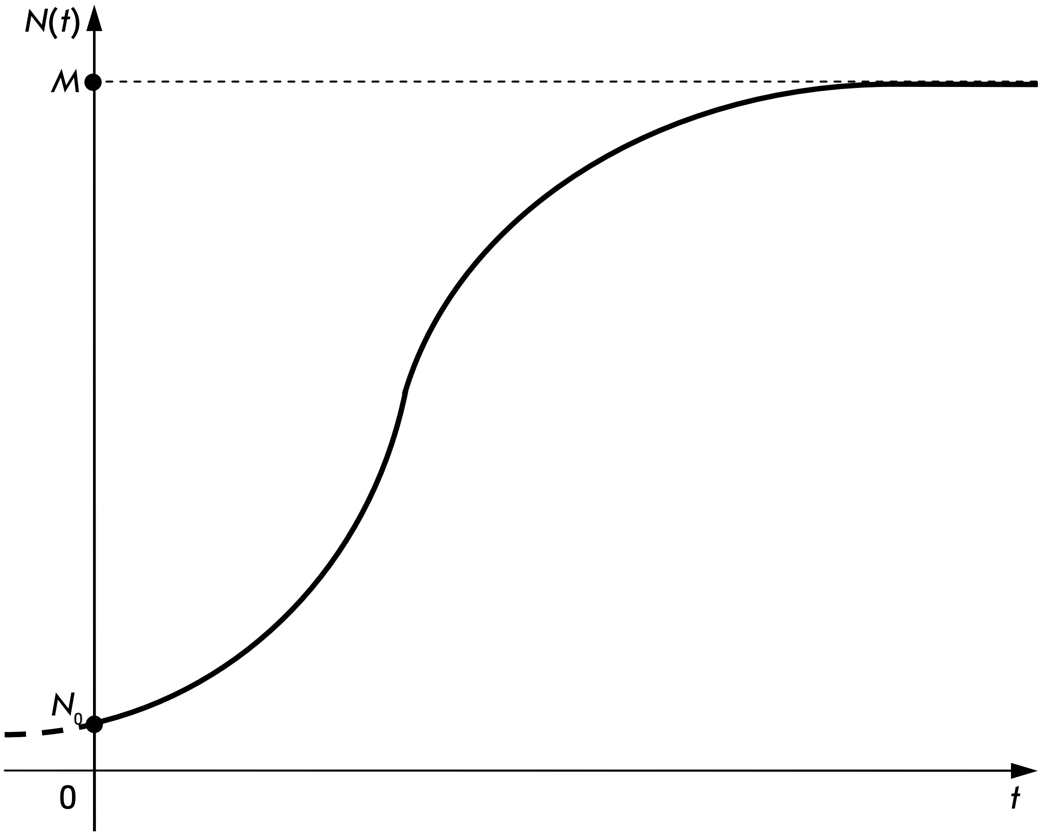

Рис. 1.3.3. *Рост объема охваченного рынка в моделях внутреннего влияния*

Эта гипотеза состоит в том, что сообщение о продукте в средствах массовой информации не оказывает влияния на основную часть потенциальных потребителей, но достигает некоторой небольшой группы, которая затем влияет на других индивидов.

Модели смешанного влияния предполагают, что на процесс принятия решения о приобретении инновационного продукта оказывают влияние и внешние факторы — потребность индивидов в инновациях, а также общая информация о продукте, получаемая из средств массовой информации, и внутренние факторы — личные контакты действующих пользователей инновации с их потенциальными потребителями.

Перепишем уравнение (1.3.4) в виде

$$\int \frac{dN}{(a+bN)(M-N)} = \int dt,$$

разложим подынтегральную дробь в левой части на простейшие:

$$\int \frac{bdN}{(a+bM)(a+bN)} + \int \frac{dN}{(a+bM)(M-N)} = \int dt$$

и проинтегрируем обе части последнего уравнения, получим в результате

$$\frac{1}{a+bM} \ln \frac{a+bN}{M-N} = t + \mathrm{Const},$$

или

$$\frac{a+bN}{M-N} = \mathrm{e}^{(a+bM)(t+\mathrm{Const})},$$

откуда

$$N(t) = \frac{M - a\,\mathrm{e}^{-(a+bM)(t+\mathrm{Const})}}{1 + b\,\mathrm{e}^{-(a+bM)(t+\mathrm{Const})}}.$$

Определив постоянную интегрирования из начального условия (1.3.1), находим функцию

$$N(t) = \frac{M\left(a+bN_0\right) - a\left(M-N_0\right)\mathrm{e}^{-(a+bM)t}}{a+bN_0+b\left(M-N_0\right)\mathrm{e}^{-(a+bM)t}}, \qquad (1.3.9)$$

описывающую зависимость объема охваченного рынка от времени.

График функции (1.3.9), изображенный на рис. 1.3.4, представляет собой *обобщенную логистическую кривую*.

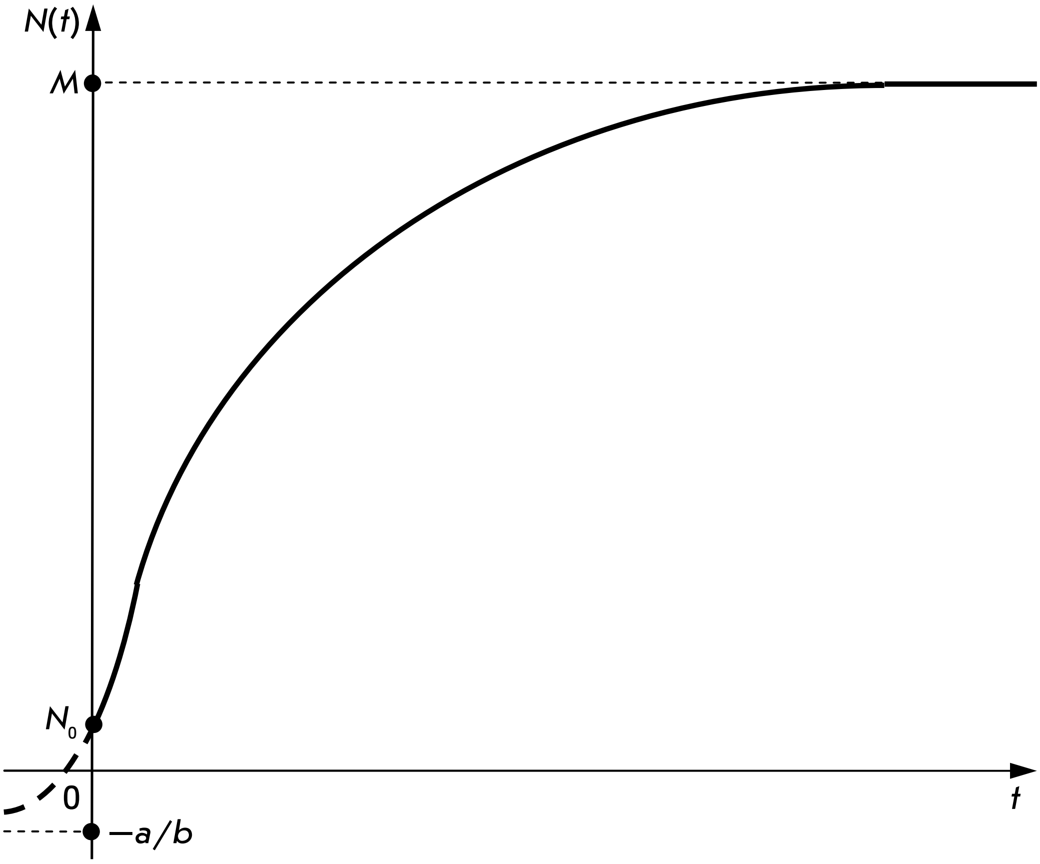

Рис. 1.3.4. *Рост объема охваченного рынка в моделях смешанного влияния*

Вероятностная интерпретация фундаментальной модели диффузии инноваций

Активное использование моделей диффузии инноваций в маркетинге началось в 1969 г. с работы Ф. Басса [5], в которой он предложил рассматривать процесс распространения нового продукта как «эпидемию», когда люди, которые еще не стали потребителями инновации «инфицируются» действующими потребителями, а также подвергаются воздействию внешних факторов, таких как реклама.

Ф. Басс использовал предложенную им модель для анализа процесса распространения различных товаров длительного пользования (телевизоров, магнитофонов, холодильников, кондиционеров, кофеварок и др.) и получил хорошее согласие полученных с помощью модели прогнозов объемов продаж этих продуктов с реальными объемами продаж. В дальнейшем несколько сотен исследователей применяли модель смешанного влияния для описания диффузии различных инноваций в разных странах, получая результаты, хорошо согласующиеся с реальностью (см. библиографию в работах [6, 7, 112, 113, 115, 135, 136, 151]).

Базовая идея Ф. Басса состоит в том, что скорость роста условной вероятности приобретения индивидом инновационного продукта в момент t при условии, что данный индивид к моменту t еще не является потребителем рассматриваемой инновации, представляет собой линейную функцию от числа действующих пользователей продукта:

$$\frac{d\mathbf{P}(A_{t+0} \mid \bar{A}_t)}{dt} = p + q\mathbf{P}(A_t). \qquad (1.3.10)$$

Здесь

t — время;

A_t — случайное событие, состоящее в том, что случайно выбранный индивид уже является пользователем инновационного продукта к моменту времени t;

$\bar{A}_t$ — случайное событие, противоположное A_t, т. е. состоящее в том, что индивид к моменту времени t еще не является потребителем данного продукта;

A_{t+0} — случайное событие, означающее, что в момент t индивид принимает решение о покупке и приобретает продукт;

p — числовой параметр, определяющий *инновационную готовность индивида* (т. е. готовность и желание приобрести новый для себя продукт);

q — числовой параметр, определяющий *способность индивида к имитации* (т. е. готовность приобрести новый продукт, уже приобретенный кем-либо из круга общения индивида);

$\mathbf{P}$ — вероятностная мера.

Переходя к случайному процессу X_t — суммарному числу действующих потребителей продукта к моменту t, формулу (1.3.10) можно переписать следующим образом:

$$\frac{1}{1-F_{X_t}(x)}\frac{dF_{X_t}(x)}{dt}=p+qF_{X_t}(x). \qquad (1.3.11)$$

В формуле (1.3.11) $F_{X_t}(x)$ представляет собой функцию распределения вероятностей сечения случайного процесса X_t в момент t. Обозначая

$$g_{X_t}(x)=\frac{dF_{X_t}(x)}{dt},$$

получаем:

$$\frac{g_{X_t}(x)}{1-F_{X_t}(x)}=p+qF_{X_t}(x). \qquad (1.3.12)$$

Считая потенциальный объем рынка (общее количество индивидов M) достаточно большим ($M\to\infty$), и обозначая $N(t)$ число действующих пользователей инновации к моменту t — реализацию случайного процесса X_t, получаем (в силу закона больших чисел в форме Бернулли), что

$$F_{X_t}\left(N(t)\right)=\lim_{M\to\infty}\frac{N(t)}{M}. \qquad (1.3.13)$$

Дифференцирование формулы (1.3.13) приводит к выражению

$$g_{X_t}\left(N(t)\right)=\lim_{M\to\infty}\frac{dN(t)/dt}{M}. \qquad (1.3.14)$$

Переходя в (1.3.12) к пределу при $M\to\infty$ и подставляя (1.3.13) и (1.3.14), имеем:

$$\lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{1-N(t)/M}\frac{dN(t)/dt}{M}\right)=\lim_{M\to\infty}\left(p+q\frac{N(t)}{M}\right),$$

или

$$\lim_{M\to\infty}\frac{dN(t)}{dt}=\lim_{M\to\infty}\left(\left(p+\frac{q}{M}N(t)\right)\left(M-N(t)\right)\right). \qquad (1.3.15)$$

Сравнивая (1.3.15) с фундаментальной моделью диффузии инноваций (1.3.4), замечаем, что модель (1.3.4) представляет собой предельный случай модели Басса при неограниченном потенциальном объеме рынка M; при этом $a = p,\ b = \lim\limits_{M \to \infty}(q / M)$.

§ 1.4. Анализ современных подходов к моделированию распространения инноваций на рынке программного обеспечения в условиях конкуренции

Учет конкуренции в современных моделях диффузии инноваций

Если речь идет о базисных инновациях, то одной из их основных особенностей является распространение в отсутствие конкуренции, поскольку никто из потенциальных конкурентов еще не овладел соответствующей технологией.

Однако подавляющее большинство инновационных продуктов на любом рынке, в частности, на рынке программного обеспечения, являются улучшающими, и их распространение происходит в условиях конкуренции с аналогами.

На сегодняшний день опубликовано довольно большое число работ, в которых конкуренция исследуется с помощью различных модификаций фундаментальной модели диффузии инноваций (1.3.4), состоящих в том, что коэффициенты a и b рассматриваются как функции от цены, расходов на рекламу и других переменных.

Достаточно полные критические обзоры работ, посвященных моделям диффузии инноваций с учетом конкуренции, содержатся в статьях Р. Долана, А. Джойланда и Е. Мюллера [51], а также Р. Четтери, Дж. Элиашберга и В. Рао [217].

Все эти работы можно разделить на две группы:

- аналитические;
- эмпирические.

К первой группе относятся работы, посвященные аналитическому исследованию конкуренции в моделях диффузии инноваций и определению различного рода оптимальных правил и нормативов.

Так, работы М. Коннорса и Д. Тейчроу 1967 г. [81], Дж. Тенга и Р. Томпсона 1983 г. [201], Д. Хорски и К. Мэйта 1988 г. [213], Е. Докнера и С. Йоргенсена 1992 г. [48] посвящены оптимальным рекламным стратегиям; в статьях Р. Рао и Ф. Басса 1985 г. [144], Дж. Элиашберга и А. Джойланда 1986 г. [228], Е. Докнера и С. Йоргенсена 1988 г. [49], Ф. Мартинса и В. Нэсциментo 1993 г. [111] определяются оптимальные ценовые стратегии; исследование Р. Томпсона и Дж. Тенга 1984 г. [202] посвящено одновременному определению и оптимальных рекламных, и оптимальных ценовых стратегий; С. Калиш, В. Махаджан и Е. Мюллер в своей работе 1995 г. [65] исследовали оптимальные стратегии вывода инновационного продукта на рынок и сравнили стратегии «водопада» и «ручья» в различных странах.

Вторая группа работ посвящена эмпирическому анализу конкуренции по данным конкретных наблюдений.

Многопродуктовая конкуренция на реальном рынке инноваций была впервые исследована Р. Петерсоном и В. Махаджаном, которые в 1978 г. проанализировали с помощью фундаментальной модели диффузии инноваций рынок страховых продуктов [139].

Дж. Додсон и Е. Мюллер в статье [47], опубликованной в том же 1978 г., учли возможность переключения потребителей между брендами.

Г. Лилиен, А. Рао и С. Калиш в 1981 г. построили модель смешанного влияния, в которой учли технологии продвижения, состоящие в бесплатном распространении пробных экземпляров продукта в условиях конкуренции [103].

А. Рао и М. Ямада в 1988 г. применили модель Лилиена — Рао — Калиша к рынку 20 конкурирующих лекарственных препаратов, продемонстрировав значимое влияние технологий продвижения на результирующие объемы продаж [143].

В. Махаджан, С. Шарма и Р. Баззелл в 1993 г. с помощью модели смешанного влияния исследовали процесс входа нового конкурента на рынок [118]. Конкретнее, анализировался вход компании *Kodak* на рынок моментальных фотоаппаратов в США, где до того присутствовала только компания *Polaroid*. Оказалось, что рост продаж «старого бренда» в основном зависит от внешних влияний, тогда как продажи «нового бренда» растут под воздействием как внешних, так и внутренних факторов.

В 1994 г. М. Хан, С. Парк, Л. Кришнамурти и А. Золтнерс опубликовали статью [209], в которой модифицировали модель смешанного влияния путем учета воздействия усилий кокурентов по продвижению товара на коэффициент a в фундаментальной модели диффузии инноваций (1.3.4). Построенная модель была успешно апробирована на 21 конкурирующем лекарственном препарате.

В работе П. Паркера и Х. Гатиньона [137], опубликованной в 1994 г., исследовалось влияние таких маркетинговых факторов, как цена и реклама, на процесс диффузии конкурирующих брендов. Результаты исследования муссов для укладки волос девяти различных брендов показали, что каждый бренд характеризуется своей моделью диффузии, причем соотношение вклада ценовых и рекламных факторов в распространение продуктов у разных брендов различается.

Т. Кришнан, Ф. Басс и В. Кумар в работе 2000 г. [88] исследовали с помощью модели смешанного влияния зависимость объема продаж существующих на рынке брендов от появления новых брендов (на примере рынка мобильных телефонов).

Современные подходы к моделированию рынка программного обеспечения

М. Гивон, В. Махаджан и Е. Мюллер в работе 1995 г. [31] с помощью обобщения фундаментальной модели диффузии инноваций исследовали влияние теневого (пиратского) распространения программного обеспечения (а именно, текстовых процессоров и электронных таблиц) на легальное распространение лицензий на эти продукты.

Авторы продемонстрировали на реальных данных о пользователях электронных таблиц и текстовых процессоров в Великобритании, что пираты играют доминирующую роль в превращении потенциальных пользователей программного обеспечения в действующих легальных пользователей.

Оказалось, что информация, передаваемая пользователями пиратских копий потенциальным потребителям, оказывает практически такое же воздействие, как информация, передаваемая легальными пользователями соответствующих продуктов.

Более того, оказалось, что для данных двух типов программных продуктов пираты обеспечили 80% продаж!

Те же авторы в работе 1997 г. [32] усложнили предыдущую модель [31] и рассмотрели не только одновременное законное и незаконное использование программного обеспечения, но и переключение пользователей между различными производителями.

Результаты, полученные на основании анализа тех же данных о пользователях электронных таблиц и текстовых процессоров в Великобритании, что и в работе [31], дали основание заключить, что в условиях существования компьютерного пиратства и возможного переключения пользователей между различными брендами — заменителями на британском рынке текстовых процессоров и электронных таблиц, долю рынка следует оценивать числом пользователей продукта, а не числом проданных лицензий.

П. Деванбю и С. Стаблбайн в работе [45] сформулировали следующее условие выгодности пиратской деятельности (для пиратов):

$$nC_b >> C_h + nC_c + P_{11}(n)C_{11}(n),$$

где

n — количество распространённых нелегальных копий программного продукта;

C_b — цена легальной копии программного продукта;
C_h — затраты на взлом системы защиты;
C_c — цена пиратской копии программного продукта;
$P_{11}(n)$ — вероятность обнаружения нарушителя, распространившего n пиратских копий;
$C_{11}(n)$ — величина штрафа за распространение n пиратских копий.

Действительно, обычно затраты на нарушение авторских прав на программное обеспечение значительно ниже стоимости легального приобретения этого программного обеспечения — даже с учетом возможного наказания.

В работах С. А. Середы 2002—2005 гг. [12, 155, 156] проведено детальное исследование проблемы нелегального распространения программных продуктов, в частности, приведены причины нелегального использования программного обеспечения (табл. 1.3.1), рассмотрена простая графическая модель спроса и предложения на рынке программного обеспечения с учетом предложениия легальных и пиратских копий (рис. 1.3.1), построены модели поведения и взаимодействия агентов рынка программного обеспечения.

Таблица 1.3.1

Причины приобретения легального и пиратского программного обеспечения [155]

Причины приобретения легальных копий программных продуктов	*Причины приобретения пиратских копий программных продуктов*
Необходимость использовать продукт для учебы или работы	Дороговизна программного продукта
Длительное использование программного продукта	Желание попробовать программный продукт
Наличие бумажной документации	Недостаточные для приобретения легальных копий доходы
Соблюдение законов	Краткосрочное использование программного продукта
Техническая поддержка	Легкость копирования
Политика учебного заведения или фирмы	Ожидание новой версии продукта
Невозможность найти продукт у знакомых	Низкая вероятность изобличения
Гарантия защиты от вирусов	Использование пиратских программ большинством знакомых
Наличие обновлений	Неприемлемо жесткие ограничения лицензии
Престижность владения легальной копией	

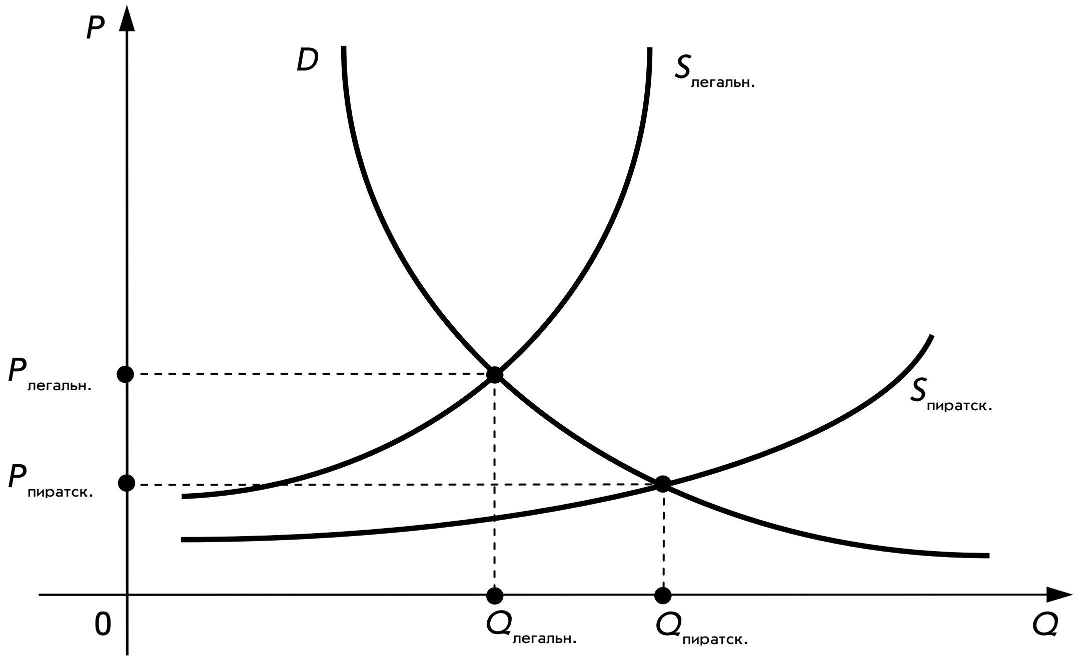

Рис. 1.3.1. *Графическая модель рынка программного обеспечения с учетом предложения пиратских копий*

В графической модели спроса и предложения на рынке программного обеспечения с учетом предложениия легальных и пиратских копий кривая $S_{\text{пиратск.}}$ теневого предложения более полога, чем кривая $S_{\text{легальн.}}$ предложения официальных распространителей ввиду существенно более низких цен пиратских копий, а также более низкой эластичности теневого предложения по цене.

Две точки рыночного равновесия: на рынке легальных программных продуктов $\left(Q_{\text{легальн.}}; P_{\text{легальн.}}\right)$ и на теневом рынке $\left(Q_{\text{пиратск.}}; P_{\text{пиратск.}}\right)$ определяют общий объем продаж на рынке программного обеспечения, равный $Q_{\text{пиратск.}}$, объем легальных продаж $Q_{\text{легальн.}}$, объем теневого рынка $Q_{\text{пиратск.}} - Q_{\text{легальн.}}$.

Потери от теневого распространения программного обеспечения составляют при этом

$$\int_{P_{\text{пиратск.}}}^{P_{\text{легальн.}}} D(P)dP + P_{\text{пиратск.}}\left(Q_{\text{пиратск.}} - Q_{\text{легальн.}}\right),$$

где $D(P)$ — спрос на программный продукт при цене P.

Модели поведения производителя программного продукта, пользователя и пирата, построенные С. А. Середой [155, 156] представляют собой модели дискретного линейного программирования с булевыми переменными. Также С. А. Середа рассмотрел две матричные игры, описывающие конфликтные ситуации между государством и теневым рынком программного обеспечения, а также между производителем программного обеспечения и пиратами [155, 156].

В тезисах [77] к круглому столу «Экономика пиратства: Создание и уничтожение стоимости» [226], прошедшему в декабре 2008 г. в Центральном экономико-математическом институте РАН, А. Н. Козырев сформулировал основные принципы, на которых он основывается при анализе рынка программного обеспечения:

- затраты на создание программного продукта фиксированы;
- затраты на тиражирование и распространение программного продукта близки к нулю;
- полезность, которую могут извлечь потенциальные пользователи программного продукта, имеет денежное выражение;
- одному пользователю нужна ровно одна копия программного продукта;
- количество пользователей, готовых купить копию программного продукта по некоторой фиксированной цене, обратно пропорционально этой цене.
- полная стоимость программного продукта — это максимальная сумма, которую готовы заплатить за получение копий произведения все пользователи.

В таких предположениях А. Н. Козырев доказывает следующие два утверждения:

- если цена копии программного продукта постоянна для всех покупателей, то прибыль производителя не зависит от цены;
- полная стоимость программного продукта может быть получена производителем, если каждому поль-

зователю он продаст копию программного продукта по наивысшей приемлемой для этого покупателя цене.

Следует заметить, что участники рынка программного обеспечения конкурируют в условиях существования обучения действием (*learning-by-doing* — авторитет некоммерческих продуктов вырастает в процессе их использования потребителями). Теория конкуренции с обучением действием, которая была предложена в 1981 г. А. М. Спенсем [198], в основном, фокусируется на влиянии суммарного выпуска (суммарных продаж) на снижение цены.

Исследование конкуренции коммерческого и некоммерческого программного обеспечения до настоящего времени имело своим предметом в основном проблему выбора потребителя: купить или разработать самому (*make-or-buy* — обзор таких исследований, например, приводится в работе Дж. Куана [90]).

Д. Ли и Х. Мендельсон в своей работе 2008 г. [102], напротив, считают, что рынок программного обеспечения состоит из двух сегментов с различными предпочтениями потребителей и положительными сетевыми эффектами.

Один из недавних наиболее важных, с точки зрения автора, шагов в изучении конкуренции на рынке программного обеспечения был сделан в 2006 г. Р. Касадесусом-Масанеллом и П. Гемаватом [69], которые соединили классическую теорию дуополии с обучением рынка и расширили рассматриваемую ситуацию до динамической, представив динамическую модель смешанной дуополии и применив эту модель к исследованию конкуренции между *Microsoft Windows* и *Linux*.

§ 1.5. Моделирование сетевых внешних эффектов при взаимодействии производителей программного и аппаратного обеспечения

В последние годы значительное число отраслей экономики перешло от вертикальной интеграции к горизонтальной, когда одни фирмы разрабатывают и производят компоненты, а другие фирмы в дальнейшем собирают из компонентов конечные продукты.

В горизонтально интегрированных отраслях экономики фирмы находятся друг с другом не в отношениях клиентов и традиционных поставщиков, и не в отношениях конкурентов, а во взаимоотношениях дополняющих поставщиков.

Наиболее яркие примеры такой организации демонстрирует отрасль информационных технологий, в которой есть поставщики аппаратных комплектующих (процессоров, модулей памяти, материнских плат, видеокарт, мониторов, накопителей и т. п.), поставщики программного обеспечения (операционных систем, офисных пакетов и др.), и сборщики компьютеров, поставляющие на рынок готовые сервера и рабочие станции (как правило, с предустановленным программным обеспечением).

Производителями микропроцессоров могут быть *Intel* или *AMD*, сборщиками компонентов — *ASUS*, *Dell*, *Hewlett Packard*, *IBM* и др., на одни и те же компьютеры может устанавливаться одна из двух операционных систем — *Microsoft Windows* или *Linux*, и под управлением различных операционных систем могут работать различные прикладные программы (например, офисные пакеты *Microsoft Office* и *OpenOffice*).

Аналогичные взаимоотношения дополняющих поставщиков возникают во многих других отраслях:

- в телекоммуникациях (между поставщиками электронных устройств и провайдерами);
- в здравоохранении (между поставщиками лекарственных препаратов и медицинскими учреждениями);
- на транспорте (между поставщиками транспортных средств, запасных частей и топлива) и др.

Горизонтальная интеграция отрасли информационных технологий связана с введением корпорацией *IBM* стандарта открытой архитектуры персональных компьютеров (*IBM PC*) в 1980 г. В итоге произошла глубокая специализация игроков рынка — и производителей комплектующих, и сборщиков, и разработчиков программного обеспечения.

В частности, решение *IBM* о выборе *Intel* и *Microsoft* в качестве производителей процессоров и операционных систем — ключевых компонентов персональных компьютеров — привело к тому, что *Intel* и *Microsoft* уже почти 30 лет занимают доминирующее положение на рынке персональных компьютеров (в отличие от *IBM*, утратившей свои стратегические позиции на этом рынке).

По данным работы Р. Касадесуса-Масанелла и Д. Йоффе [70], в 2007 г. более 80% рабочих станций и персональных компьютеров во всем мире были произведены на базе процессоров *Intel* и продавались с предустановленной операционной системой *Microsoft Windows*. При этом на рынке достаточно много производителей остальных компонентов компьютеров (материнских плат, модулей памяти, накопителей, мониторов и т. п.).

Как демонстрируют Д. Йоффе, Р. Касадесус-Масанелл и С. Матту [64], суммарная прибыль корпораций *Intel* и *Microsoft* в течение большинства 1990-х гг. превысила суммарную прибыль всех других компаний, участвующих на рынке компьютеров.

В 2004 г. суммарная чистая прибыль *Intel* и *Microsoft* составила более 15 млрд. долл., тогда как суммарная прибыль трех крупнейших сборщиков компьютеров (*Dell*, *Hewlett-Packard* и *IBM*) оказалась равна примерно 2,5 млрд. долл. Корпорация *IBM* потеряла более 1 млрд. долл. в 1998 г. и около 1 млрд. долл. за 2001—2004 гг. Только компания *Dell* показывала в последние годы положительную прибыль от производства компьютеров. (Более подробные данные о динамике рынка можно найти в работе [64].)

Это дает основания считать *Microsoft* и *Intel* основными стратегическими игроками рынка информационных технологий, оказывающими непосредственное влияние на цену конечного продукта (в отличие от производителей других компонентов).

Анализ взаимоотношений дополняющих поставщиков — задача не менее актуальная, чем исследование конкуренции нескольких производителей или отношений между производителями и потребителями.

А. Курно в классической книге 1838 г. [92] рассмотрел первую в математической экономике модель взаимодействия дополняющих поставщиков — монополистов (ими были производители меди и цинка как составных частей композитного продукта — латуни).

Основной результат, полученный Курно при исследовании модели взаимодействия дополняющих поставщиков, состоит в том, что вне зависимости от соотношения цен компонент производители разделят прибыль поровну! Результат Курно повторен и в данной работе при анализе взаимодействия поставщиков аппаратного и программного обеспечения, каждый из которых является монополистом (применительно к рынку персональных компьютеров такая модель соответствует ситуации, когда на рынке представлен только один производитель аппаратного обеспечения — *Intel* и только одна операционная система — *Microsoft Windows*).

Однако на реальном рынке информационных технологий существует конкуренция и между производителями аппаратного обеспечения (на рынке представлены сервера и рабочие станции на базе процессоров *Intel* и *AMD*), и между поставщиками операционных систем *Microsoft Windows* и *Linux*).

Ценовая конкуренция между вертикально дифференцированными товарами, так же, как и между дополняющими производителями — монополистами, хорошо исследована в математической экономике, но объединенный случай конкуренции между производителями комплементарных благ исследован на сегодняшний день еще в недостаточной степени.

В работе П. МакАфи, Дж. МакМиллана и М. Уинстона 1989 г. [108] построена теоретико-игровая модель объединения компонентов в композитный продукт и получены условия, когда объединение выгодно для производителей. В развитие этого направления Дж. Чой и К. Стефанадис в 2001 г. [218], а также Б. Нейлбуфф в 2004 г. [132] исследовали вопрос о целесообразности вхождения на рынок с композитным продуктом.

В 1996 г. А. Бранденбургер и Б. Нейлбуфф [15] рассмотрели *Intel* и *Microsoft* как пример игроков, одновременно сотрудничающих и конкурирующих, они даже ввели термин «Co-Opetition» для обозначения такого типа взаимодействия игроков.

В 2003 г. Р. Касадесус-Масанелл и Д. Йоффе [70] предложили игровую модель для ситуации сотрудничества и конкуренции *Intel* и *Microsoft*, в результате исследования которой оказалось, что в отличие от модели Курно, где оба производителя делят прибыль поровну, в данном случае оптимальная стратегия корпорации *Microsoft* состоит в установлении заниженной цены для увеличения клиентской базы, но *Intel* в ответ на это просто завышает цену и отбирает у *Microsoft* конкурентное преимущество, поскольку операционная системы не продается отдельно от компьютеров (см. также кейс Д. Йоффе, Р. Касадесуса-Масанелла и С. Матту [64]).

Дж. Фарелл и М. Л. Кац в 2000 г. [205] рассмотрели ситуацию, когда монопольный производитель одного из компонентов входит на конкурентный рынок второго компонента, чтобы удешевить его цену, и как следствие, цену композитного продукта. Эта модель может быть применена к деятельности компании *Intel* по производству материнских плат в дополнение к процессорам, но не к взаимодействию производителей программного и аппаратного обеспечения.

Л. К. Ченг и Дж. Нам в 2007 г. [216] рассмотрели стратегию Штакельберга в ситуации сотрудничества и конкуренции монопольных производителей двух компонентов, каждый из которых может быть использован как в составе композитного продукта, так и отдельно. На рынке информационных технологий использование одного компонента без другого невозможно, кроме того, существует конкуренция и между производителями компонентов.

В работе М. Чена, К. и Б. Нейлбуффов [215] (2006 г.) рассмотрен рынок с односторонней строгой комплементарностью: когда первый компонент может быть использован без второго, но использование второго компонента без первого невозможно. М. Чен, К. и Б. Нейлбуффы применили свою модель к исследованию рынка операционных систем и прикладного программного обеспечения. Они показали, что производителю операционных систем выгодно войти на конкурентный рынок прикладных программ со своим продуктом, и предлагать этот продукт по нулевой цене. В результате конкуренты на рынке прикладного программного обеспечения будут вынуждены присоединяться к монополии.

Среди других работ по экономике информационных технологий следует отметить работы М. Л. Каца и К. Шапиро 1985 г. [72], Н. Экономайдса 1996 г. [225], А. Ю 1998 г. [229], А. Гоуэра и М. Кузумано 2002 г. [39], посвященные исследованию различных сетевых эффектов на рынке информационных технологий.

Особенно следует отметить подробное изложение современного состояния теории сетевой экономики в приложении к рынку информационных технологий, в частности, таких сетевых эффектов, как эффект от масштаба, ценовая дискриминация, конкуренция за монопольное положение и войны стандартов, в обзорной монографии Х. Р. Вэриана, Дж. Фаррелла и К. Шапиро 2004 г. [29].

В работе Р. Касадесуса-Масанелла, Б. Нейлбуффа и Д. Йоффе 2008 г. [71] представлена модель взаимодействия двух конкурирующих поставщиков аппаратного обеспечения (*Intel* и *AMD*) с монопольным производителем операционных систем (*Microsoft*). Работа [71] представляет собой, по сути, первое исследование конкуренции дополняющих поставщиков. В ней рассматривается конкуренция как между поставщиками дополняющих друг друга компонентов (*Intel* и *Microsoft*), так и между конкурирующими поставщиками компонентов одного типа (*Intel* и *AMD*).

Резюме

Представляется, что рынок программного обеспечения, существенно отличаясь от традиционных рынков, требует более детального анализа с использованием экономико-математического моделирования.

В частности, целесообразно учесть одновременное присутствие на рынке коммерческих программных продуктов, их некоммерческих аналогов, а также пиратских копий.

Представляется важным также исследовать сотрудничество и конкуренцию поставщиков коммерческого и некоммерческого программного обеспечения с производителями аппаратного обеспечения.

Также целесообразно рассмотреть динамику распространения программных продуктов как диффузию инноваций, причем представляет интерес выбор оптимальной ценовой политики производителями коммерческого программного обеспечения.

Для большой страны, какой является Российская Федерация, при моделировании распространения инноваций важно учесть географическую неоднородность, а также случайные факторы.

Кроме того, открыт вопрос о целесообразности борьбы с теневым распространением программного обеспечения.

ГЛАВА 2. Простейшие модели поведения участников рынка программного обеспечения

§ 2.1. Статистическое исследование современного рынка программного обеспечения

Анализ зависимости объема инсталляций некоммерческого программного обеспечения от величины инвестиции в его разработку

В работе [194] (2009 г.) по данным табл. 1.2.1 построена функция линейной регрессии объема инсталляций некоммерческого программного обеспечения (Y) на инвестиции в развитие этого программного обеспечения (x):

$$\hat{Y}_x = -0{,}08 + 0{,}13x.$$

При этом коэффициент детерминации составил 0,99, а рассчитанный уровень значимости гипотезы о равенстве нулю коэффициента при x, оказался равным $1{,}57 \cdot 10^{-21}$ (соответствующая t-статистика равна 49,39).

Интервальные прогнозы математического ожидания объема инсталляций и реального значения объема инсталляций для конкретного продукта при заданном объеме инвестиций приведены на рис. 2.1.1 и в табл. 2.1.1.

Таблица 2.1.2

Прогнозы по модели регрессии

Объем инвестиций за 10 лет (млн. долл. США)	95%-ный интервальный прогноз математического ожидания объема инсталляций при данном объеме инвестиций (ТБайт в неделю)	95%-ный интервальный прогноз объема инсталляций для конкретного программного продукта при данном объеме инвестиций (ТБайт в неделю)
0	(0,00; 1,83)	(0,00; 8,51)
100	(11,51; 15,17)	(0,00; 21,91)
200	(24,83; 28,68)	(18,16; 35,35)
300	(38,00; 42,34)	(31,52; 48,82)
400	(51,06; 56,11)	(44,84; 62,33)
500	(64,06; 69,94)	(58,12; 75,88)
600	(77,01; 83,82)	(71,37; 89,46)
700	(89,93; 97,73)	(84,59; 103,07)
800	(102,84; 111,65)	(97,78; 116,71)
900	(115,73; 125,59)	(110,94; 130,38)
1000	(128,61; 139,54)	(124,08; 144,07)
1100	(141,49; 153,49)	(137,19; 157,79)
1200	(154,36; 167,45)	(150,28; 171,53)
1300	(167,23; 181,41)	(163,35; 185,29)
1400	(180,09; 195,38)	(176,40; 199,07)
1500	(192,95; 209,35)	(189,43; 212,87)
1600	(205,81; 223,32)	(202,45; 226,68)
1700	(218,67; 237,29)	(215,46; 240,50)
1800	(231,53; 251,26)	(228,45; 254,34)
1900	(244,39; 265,23)	(241,44; 268,18)
2000	(257,24; 279,21)	(254,41; 282,04)

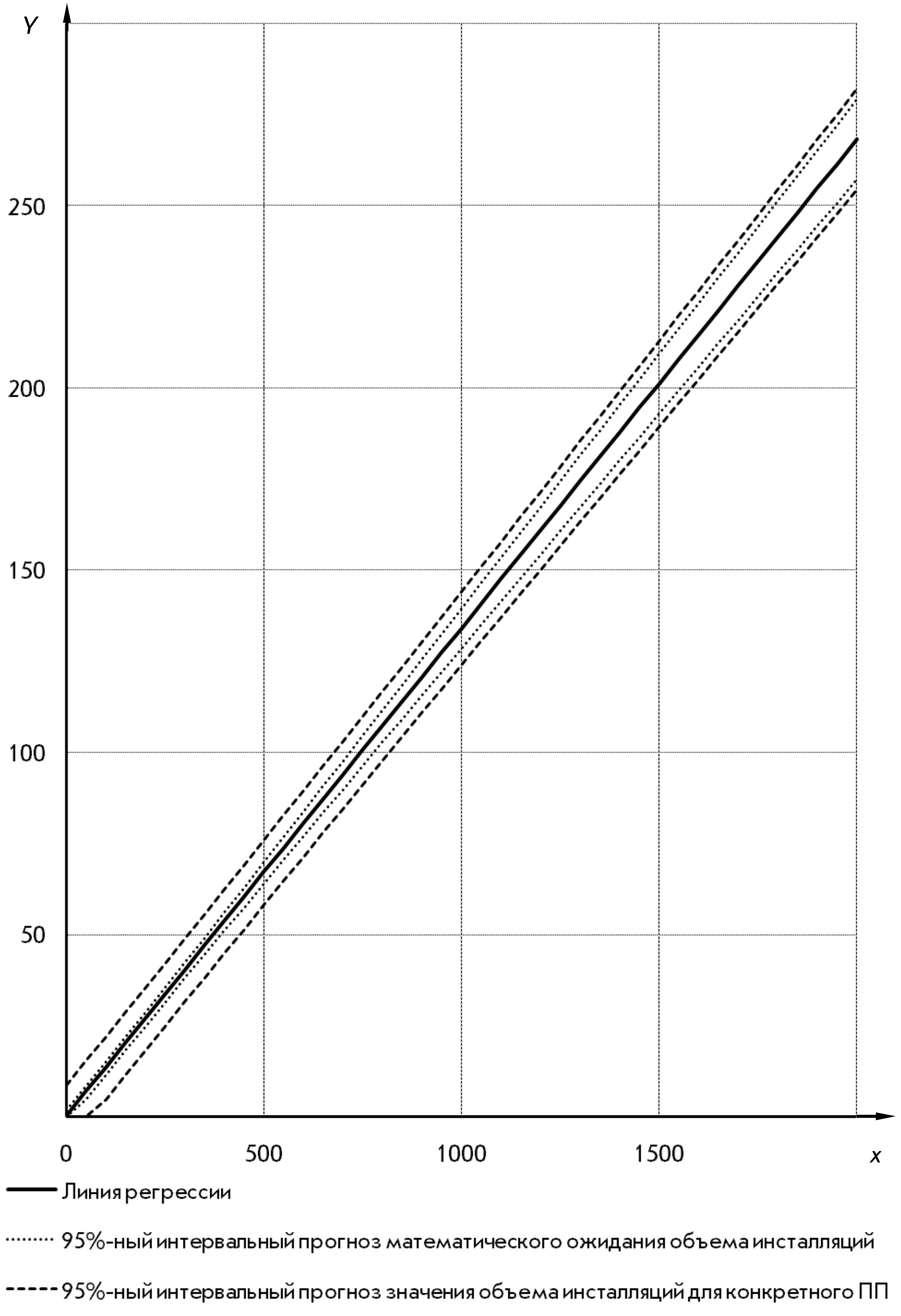

Рис. 2.1.1. *Прогнозы по модели регрессии*

Оценка коэффициента при регрессоре x, равная 0,13, говорит о том, что увеличение инвестиций в некоммерческий программный продукт на 1 млн. долл. за 10 лет сопровождается в среднем увеличением количества инсталляций на 0,13 Тбайт в неделю.

Гораздо интереснее интерпретировать анализ относительных изменений: оценка коэффициента средней эластичности Y по x составляет 1,01, поэтому увеличение инвестиций в некоммерческий программный продукт на 1% ведет в среднем к увеличению количества инсталляций на 1,01% — объем распространения программных продуктов сверхэластичен по инвестициям!

Корреляционный анализ динамики рынка операциорнных систем

Таблица 2.1.2 содержит результаты корреляционного анализа динамики разделения рынка операционных систем между конкурентами в 1994—2003 гг., проведенного в работе [195] (по данным табл. 1.2.2).

Таблица 2.1.2

Матрица оценок парных коэффициентов корреляции, рассчитанная по данным о динамике рынка операционных систем

	Windows	*Novell*	*Linux*	*Unix*	Другие
Windows	1,00	–0,91	0,82	–0,91	–0,92
Novell	–0,91	1,00	–0,98	0,98	0,77
Linux	0,82	–0,98	1,00	–0,96	–0,69
Unix	–0,91	0,98	–-0,96	1,00	0,82
Другие	–0,92	0,77	–0,69	0,82	1,00

Рассчитанный уровень значимости всех оценок существенно меньше 0,01 — все коэффициенты корреляции значимы.

Результаты корреляционного анализа демонстрируют, что доли рынка, занимаемого операционными системами *Windows* и *Linux*, находятся между собой в сильной прямой корреляционной зависимости, и при этом доли рынка, занимаемого и *Windows*, и *Linux*, находятся в сильной обратной корреляционной зависимости с долями *Novell*, *Unix* и других операционных систем.

§ 2.2. Сравнение стоимости владения коммерческой и некоммерческой серверными операционными системами

Проанализируем в табл. 2.2.1 стоимость внедрения некоммерческой серверной операционной системы (*Linux*) и аналогичной коммерческой (*Windows*).

В предположении, что стоимость технического обслуживания (администрирования) для двух платформ одинакова, приходим к очевидному выводу о существенно более низкой стоимости владения серверной операционной системой *Linux* по сравнению с *Windows*.

Таблица 2.2.1

Сравнение стоимости внедрения (в долл. США) некоммерческой серверной операционной системы (Linux) и аналогичной коммерческой (Windows)

Исходные данные модельной организации:	*Linux*	*Windows*
Количество пользователей	1000	1000
Необходимое количество серверов	1	4
Программное обеспечение:		
Лицензия на серверную операционную систему	99	4000
Клиентские лицензии	0	128
Итого (программное обеспечение)	99	144 000
Аппаратное обеспечение:		
Стоимость одного сервера	6000	6000
Стоимость инсталляции	250	250
Итого (аппаратное обеспечение)	6250	25 000
Интеграция:		
Время на один сервер	32	16
Стоимость нормочаса	250	125
Итого (интеграция)	8000	8000
Всего:	14 349	177 000

На самом деле, при использовании *Linux* затраты на оплату труда системных администраторов, как правило, выше, но ненамного (для модельной организации разница составляет около 10 000 долл. США в год).

Практика показывает, что программные продукты, распространяемые на условиях открытого лицензионного соглашения *GNU* (например, операционная система *Linux* и *Web*-сервер *Apache*), превосходят своих коммерческих конкурентов (соответственно, *Windows* и *Internet Information Server*), помимо стоимости владения, по крайней мере, еще по двум параметрам:

- количеству дефектов;
- скорости реакции на сообщения пользователей о найденных дефектах.

Следует отметить высокую конкуренцию коммерческого и некоммерческого программного обеспечения на рынке серверных продуктов (серверных операционных систем, *Web*-серверов и т. п., где коммерческие и свободные продукты делят рынок приблизительно поровну), поскольку пользователи этих продуктов — системные администраторы и профессиональные программисты — способны полноценно использовать возможности изучения открытого кода и его модификации.

При этом на рынке клиентских продуктов пользователи, как правило, не ощущают преимуществ от использования открытого кода, поскольку, не обладая квалификацией разработчика, невозможно ни разобраться в «устройстве» продукта, ни модифицировать его под свои нужды (так, например, число инсталляций свободного офисного пакета *OpenOffice* не сравнимо с числом инсталляций его коммерческого аналога — *Microsoft Office*).

§ 2.3. Статическая модель смешанной дуополии на рынке серверных операционных систем

Основные предположения

В работе [195] (2009 г.) построена простейшая статическая экономико-математическая модель дуополии коммерческого и некоммерческого производителей на рынке интеллектуального продукта.

Всюду далее коммерческий продукт именуется *Microsoft Windows*, а его некоммерческий аналог — *Linux*. Данные названия на самом деле условны: все результаты справедливы и для любой другой конкурирующей пары коммерческого и некоммерческого продуктов.

Microsoft, производитель операционной системы *Windows*, стремится максимизировать свою прибыль, устанавливая цену лицензии на использование своего продукта, в отличие от партнерства разработчиков операционной системы *Linux*, распространяемой свободно (т. е. бесплатно и с возможностью изменения исходных кодов на условиях *copyleft*).

Будем полагать, что изначально пользователь ориентирован на использование коммерческого продукта (*Windows*), и только его высокая цена может заставить пользователя приобрести альтернативный некоммерческий продукт (*Linux*).

Переменные издержки будем считать нулевыми (действительно, стоимость изготовления копии программного продукта на компакт-диске или ее размещения в интернете пренебрежимо мала по сравнению с затратами на проектирование и разработку).

Также сделаем допущение, что каждый пользователь приобретает один и только один продукт: или *Windows*, или *Linux* (т. е. одновременная установка двух операционных систем не практикуется — на рынке серверных операционных систем данное предположение вполне соответствует действительности).

Распространение пиратских копий в данной модели мы пренебрежем.

Пусть

c — цена лицензии на право использования серверной операционной системы *Windows*;

$q_{\max}$ — емкость рынка;

$x_W(c)$ — количество пользователей *Windows* при цене лицензии, равной c ден. ед.;

$x_L(c)$ — количество пользователей *Linux* при такой цене лицензии *Windows*;

d — постоянные издержки, которые *Microsoft* относит на производство серверных операционных систем *Windows*.

Будем считать, что функция спроса на *Windows* линейна:

$$x_W(c) = q_{\max} - bc,$$

где $b > 0$, а все пользователи на рынке, которые не приобрели *Windows*, бесплатно устанавливают *Linux*:

$$x_L(c) = q_{\max} - x_W(c) = bc.$$

Задача максимизации прибыли коммерческого производителя в конкуренции с некоммерческим

Задача, которая стоит перед корпорацией *Microsoft* — это *максимизация прибыли*

$$\Pi_W(c) = cx_W(c) - d = c(q_{\max} - bc) - d \to \max$$

путем установления цены лицензии c.

Утверждение 2.3.1. *Оптимальная цена лицензии*

$$c^* = \frac{q_{\max}}{2b}$$

доставляет производителю коммерческого продукта наибольшую прибыль

$$\Pi_W^* = \frac{q_{\max}^2}{4b} - d$$

в ситуации конкуренции с некоммерческим продуктом; при этом коммерческий и некоммерческий продукты делят рынок поровну:

$$x_W^* = x_L^* = \frac{q_{\max}}{2}.$$

Доказательство. Оптимальная цена лицензии

$$c^* = \frac{q_{\max}}{2b}$$

соответствует точке максимума квадратичной функции

$$\Pi_W(c) = c\left(q_{\max} - bc\right) - d = -bc^2 + q_{\max}c - d.$$

При такой цене лицензии *Windows* спрос на эту операционную систему составит

$$x_W^* = x_W\left(c^*\right) = q_{\max} - bc^* = \frac{q_{\max}}{2},$$

при этом спрос на *Linux* будет равен

$$x_L^* = x_L\left(c^*\right) = q_{\max} - x_W\left(c^*\right) = \frac{q_{\max}}{2},$$

а прибыль *Microsoft* —

$$\Pi_W^* = \Pi_W\left(c^*\right) = c^* x_W\left(c^*\right) - d = \frac{q_{\max}^2}{4b} - d,$$

что и требовалось доказать. ❑

Сравнение с классическими моделями дуополии

Сравним полученные результаты с классическими моделями картеля, равновесия Курно, равновесия и неравновесия Штакельберга в дуополии двух производителей, максимизирующих прибыль (см. табл. 2.3.1).

Таблица 2.3.1

Сравнение цен, объемов выпуска и прибыли конкурентов в различных статических моделях рынка

Модель рынка	x_1^*	x_2^*	$x_1^* + x_2^*$	c^*	Π_1^*	Π_2^*	$\Pi_1^* + \Pi_2^*$
Картель			$\frac{q_{\max}}{2}$	$\frac{q_{\max}}{2b}$			$\frac{q_{\max}^2}{4b} - 2d$
Равновесие Курно	$\frac{q_{\max}}{3}$	$\frac{q_{\max}}{3}$	$\frac{2q_{\max}}{3}$	$\frac{q_{\max}}{3b}$	$\frac{q_{\max}^2}{9b} - d$	$\frac{q_{\max}^2}{9b} - d$	$\frac{2q_{\max}^2}{9b} - 2d$
Равновесие Штакельберга	$\frac{q_{\max}}{2}$	$\frac{q_{\max}}{4}$	$\frac{3q_{\max}}{4}$	$\frac{q_{\max}}{4b}$	$\frac{q_{\max}^2}{8b} - d$	$\frac{q_{\max}^2}{16b} - d$	$\frac{3q_{\max}^2}{16b} - 2d$
Неравновесие Штакельберга	$\frac{2q_{\max}}{5}$	$\frac{2q_{\max}}{5}$	$\frac{4q_{\max}}{5}$	$\frac{q_{\max}}{5b}$	$\frac{2q_{\max}^2}{25b} - d$	$\frac{2q_{\max}^2}{25b} - d$	$\frac{4q_{\max}^2}{25b} - 2d$
Равновесие на рынке серверных операционных систем	$\frac{q_{\max}}{2}$	$\frac{q_{\max}}{2}$	$q_{\max}$	$\frac{q_{\max}}{2b}$	$\frac{q_{\max}^2}{4b} - d$	$-d$	$\frac{q_{\max}^2}{4b} - 2d$

Видно, что потребителям конкуренция коммерческого и некоммерческого производителей менее выгодна, чем конкуренция двух производителей, оба из которых максимизируют свою прибыль: равновесному состоянию в смешанной дуополии производителей коммерческого и некоммерческого программного обеспечения соответствует такая же цена $q_{\max} / (2b)$, как в случае картеля (и монополии).

Производителю же коммерческого программного обеспечения также предпочтительнее конкурировать с некоммерческим производителем, чем с участником рынка, максимизирующим прибыль: прибыль коммерческого производителя в случае смешанной дуополии такая же, как суммарная прибыль картеля на традиционном рынке!

§ 2.4. Теоретико-игровая модель взаимодействия производителя коммерческого программного обеспечения с пользователями в условиях существования рынка нелегальных копий

Описание конфликтной ситуации

Приведем простейшую модель конкуренции производителя коммерческого программного обеспечения с пиратами, предложенную в работах [168, 190] (2008 г.).

Предполагается, что на рынке действует производитель программного обеспечения (для простоты — монополист типа *Microsoft*), который продает лицензии на использование своей продукции.

Пользователь имеет возможность установить лицензионную копию программного обеспечения или пиратскую.

Поскольку значительная часть пользователей пользуются нелицензионными копиями, производитель может предпринимать определенные меры по изобличению пользователей пиратских копий и привлечению их к ответственности.

Будем предполагать, что полезность, которую приносит пользователю использование нелицензионного программного обеспечения, в точности равна полезности от использования легальной копии, а также что себестоимость изготовления одной копии (и легальной, и пиратской) пренебрежимо мала по сравнению со всеми остальными величинами.

Введем необходимые обозначения:

c — цена лицензии на использование программного продукта;

d — цена нелицензионной (пиратской) копии программного продукта;

f — размер штрафа за использование нелицензионного программного продукта (взимаемого с пользователя, незаконно использующего программное обеспечение, в пользу производителя);

l — издержки производителя по организации проверки легальности использования программного обеспечения.

Очевидно, выполняются следующие соотношения:

$$f > l > c >> d > 0;$$

$$f > c + l.$$

Будем считать также, что

$$l > 2c$$

(последнее неравенство эквивалентно тому, что $c - l < -c$).

Данная конфликтная ситуация является типичной иллюстрацией асимметрии информации, когда пользователь знает происхождение своего программного обеспечения (легальное оно или пиратское), а производитель (и государство) не может отличить «честного» пользователя от пользователя — пирата.

Подобные ситуации типичны для современной экономики, много примеров таких ситуаций разобрано в книге [230].

Теоретико-игровая постановка задачи

Вначале рассмотрим позиционную форму игры и построим ее дерево (рис. 2.4.1).

Первым игроком является пользователь, он осознанно принимает одно из двух решений: приобрести лицензионное или пиратское программное обеспечение.

Производитель является вторым игроком, поскольку он может принять решение по инициации проверки только после того, как пользователь сделает свой ход.

Поскольку производитель в момент принятия решения не знает, в какой из двух точек зоны неопределенности он находится, данная конфликтная ситуация формализуется с помощью биматричной игры с биматрицей выигрышей

$$\begin{pmatrix} (-c; c-l) & (-c; c) \\ (-f-d; f-l) & (-d; 0) \end{pmatrix}.$$

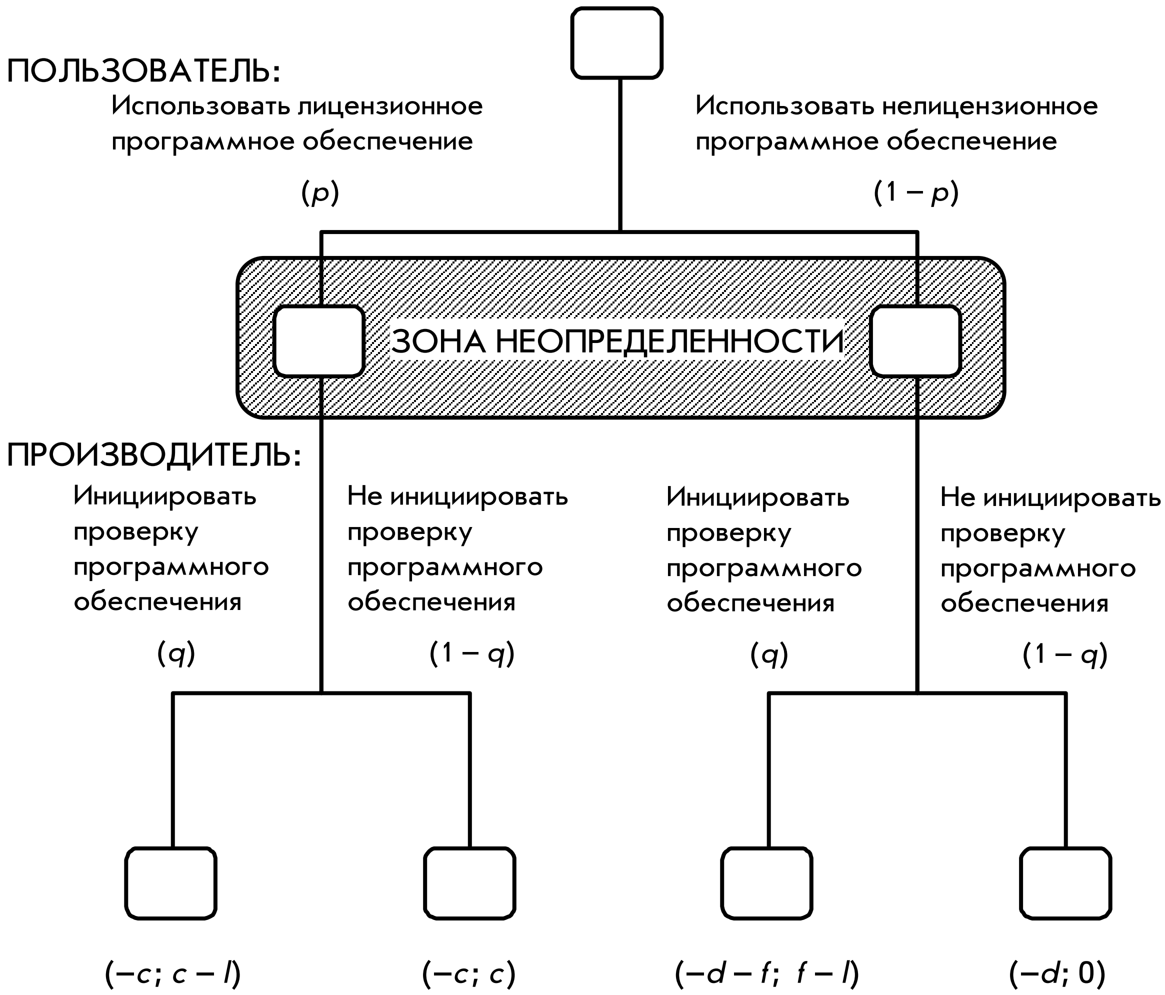

Рис. 2.4.1. *Дерево игры*

Строки соответствуют стратегиям первого игрока (пользователя):

- использовать лицензионное программное обеспечение;
- использовать нелицензионное программное обеспечение.

Столбцы соответствуют стратегиям второго игрока (производителя):

- инициировать проверку лицензий на использование пользователем программного обеспечения;
- не инициировать такую проверку.

Пусть

$$\mathbf{p} = (p; 1-p), \qquad \mathbf{q} = (q; 1-q) \text{ —}$$

смешанные стратегии игроков: пользователь с вероятностью p приобретает лицензионное программное обеспечение [и с вероятностью $(1 - p)$ — нелицензионное], производитель с вероятностью q инициирует проверку лицензий [и с вероятностью $(1 - q)$ не инициирует].

Утверждение 2.4.2. *Модель взаимоотношений пользователя и производителя в условиях существования теневого распространения нелегальных копий имеет единственное решение Нэша, которое определяется смешанными стратегиями пользователя*

$$\mathbf{p}_N = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

и производителя

$$\mathbf{q}_N = (0;\ 1);$$

при этом выигрыш пользователя равен

$$\pi_1 = -\frac{c+d}{2},$$

а выигрыш производителя

$$\pi_2 = \frac{c}{2}.$$

Доказательство. Множество возможных исходов игры в зависимости от выбора игроками смешанных стратегий представлено на рис. 2.4.2.

Максиминные выигрыши пользователя и производителя равны соответственно

$$\alpha = \max\{-c; -d-f\} = -c, \qquad \beta = \max\{c-l; 0\} = 0.$$

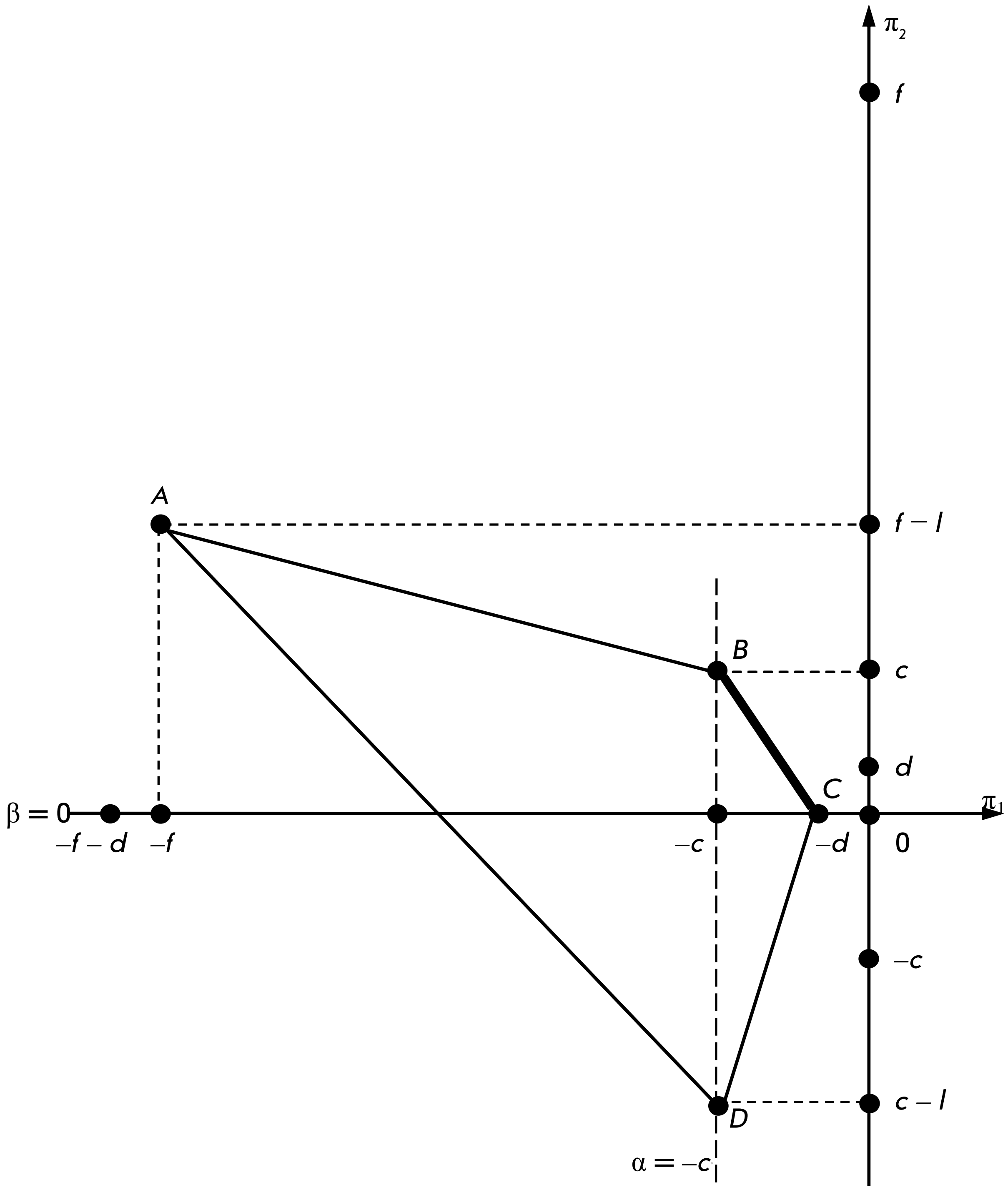

Рис. 2.4.2. *Множество возможных исходов конфликтной ситуации*

Множество Парето-оптимальных исходов — это ломаная *ABC*, а переговорное множество, отсекаемое от множества Парето максиминными выигрышами, — это выделенный жирным на рис. 2.4.2 отрезок

$$BC = \left\{ \left(\pi_1; \pi_2 = -\frac{c(\pi_1 + d)}{c - d} \right) \middle| \pi_1 \in [-c; -d] \right\}.$$

Решение Нэша (см., например, [79]) определяется максимумом функции Нэша $N(\pi_1; \pi_2)$ (произведения приростов выигрышей игроков над максиминными):

$$\max_{(\pi_1;\pi_2)\in BC} N(\pi_1;\pi_2) = \max_{(\pi_1;\pi_2)\in BC} \left((\pi_1 - \alpha)(\pi_2 - \beta) \right) =$$

$$= \max_{\pi_1 \in [-c;-d]} \left(\left(\pi_1 - (-c) \right) \left(-\frac{c(\pi_1 + d)}{c - d} - 0 \right) \right) = \max_{\pi_1 \in [-c;-d]} \left(-\frac{c(\pi_1 + d)(\pi_1 + c)}{c - d} \right) = \frac{c(c - d)}{4},$$

который достигается при

$$\pi_1 = -\frac{c + d}{2}, \qquad \pi_2 = \frac{c}{2},$$

что соответствует смешанным стратегиям игроков

$$\mathbf{p}_N = \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2} \right), \qquad \mathbf{q}_N = (0;\ 1).$$

Утверждение доказано. ❑

Обсуждение результатов

Итак, рациональный потребитель в половине случаев предпочтет использование нелицензионного программного обеспечения, а рациональному производителю никогда не выгодно инициировать проверку лицензий.

Если считать функции полезности и пользователя, и производителя строго возрастающими, принципиальных изменений в конфликтной ситуации не произойдет.

Таким образом, вне зависимости от склонности производителей и пользователей программного обеспечения к риску, рациональный пользователь только в половине случаев предпочтет приобрести лицензионное программное обеспечение, а рациональный производитель никогда не будет инициировать проверку легальности использования его продукта пользователями.

Так будет всегда, пока цена лицензии c будет больше цены пиратской копии d. В случае же, когда $c = d$, очевидно, пользователь предпочтет приобрести легальную копию, но при этом прибыль производителя существенно сократится (если не превратится в убытки).

Резюме

Статистический анализ рынка серверных операционных систем показывает, что в настоящее время происходит жесткая конкуренция коммерческого продукта *Windows* и некоммерческого продукта *Linux*, поэтому именно данный рынок целесообразно выбрать в качестве наглядного примера. Другой интересный результат статистического анализа рынка программного обеспечения состоит в сверхэластичности объема распространения программных продуктов по инвестициям.

Стоимостной анализ (на примере серверных операционных систем *Microsoft Windows* и *Linux*) демонстрирует, что стоимость владения некоммерческими программными продуктами существенно меньше, чем у коммерческих конкурентов.

Анализ построенной статической модели смешанной дуополии позволяет заключить, что конкуренция коммерческого и некоммерческого производителей выгоднее, чем конкуренция двух производителей, оба из которых максимизируют свою прибыль, как потребителям, так и коммерческим производителям (а некоммерческий производитель и не стремится получить выгоду от продажи программных продуктов).

Модель взаимодействия производителя коммерческого программного обеспечения с пользователями в условиях наличия рынка нелегальных копий показывает, что рациональный пользователь только в половине случаев предпочтет приобрести лицензионное программное обеспечение, а рациональный производитель никогда не будет инициировать проверок легальности использования его продукта пользователями.

Полученный результат демонстрирует **несовершенство подхода производителя к коммерциализации разработанного им программного обеспечения на основе продажи лицензий:** ведь при этом производитель соберет только половину от потенциальной выручки, а половина пользователей будет приобретать пиратские копии.

Выходом представляется отказ от продажи лицензий и свободное распространение программного обеспечения, при котором производитель зарабатывает на оказании дополнительных услуг: поддержке, разработке дополнительных модулей, встраивании рекламы (как в популярных интернет-сервисах) и т. п. При этом производитель занимается собственно разработкой программного обеспечения, не затрачивая ресурсов на выявление нарушителей авторских прав и привлечение их к ответственности.

Глава 3. Динамическая модель смешанной дуополии производителей коммерческого и некоммерческого программного обеспечения

§ 3.1. Основные предположения

В данной главе анализируется смешанная дуополия производителей коммерческого программного обеспечения (для определенности, серверной операционной системы *Microsoft Windows*) и некоммерческого (для определенности, *Linux*) путем математического моделирования с использованием аппарата теории оптимального управления.

Описываемая в этой главе модель, предложенная и исследованная в работах [159, 160, 163, 174] (2008—2009 гг.), продолжает исследования конкуренции в динамике, проведенные в работах А. М. Спенса [198] и Д. Росса [148], и вплотную примыкает к модели, предложенной Р. Касадесусом-Масанеллом и П. Гемаватом [69].

Основное отличие данной модели от модели Касадесуса-Масанелла — Гемавата состоит в том, что рынок предполагается л и н е й н о р а с т у щ и м с темпом роста a: в единицу времени на рынок приходят a новых пользователей, т. е. суммарное число пользователей на рынке серверных операционных систем к моменту времени t равно $N(t) = N_0 + at$.

Будем считать, что каждый новый пользователь выбирает один и только один продукт: или приобретает лицензионную копию *Windows*, или бесплатно скачивает копию *Linux*.

Через $n_W(t)$ и $n_L(t)$ обозначим суммарное число пользователей, использующих на момент t операционные системы *Windows* и *Linux* соответственно.

Если обозначить $q(t)$ долю новых пользователей, входящих на рынок в момент t и приобретающих *Windows*, то доля новых пользователей, приобретающих в этот момент *Linux*, составит $1-q(t)$, поэтому

$$n_W(t)=\int_0^t aq(\tau)d\tau, \qquad (3.1.1)$$

$$n_L(t)=\int_0^t a\left(1-q(\tau)\right)d\tau=N(t)-n_W(t). \qquad (3.1.2)$$

Цена некоммерческого продукта *Linux* предполагается нулевой (или равной предельным издержкам), а коммерческий производитель *Microsoft* принимает решение об установлении цены лицензии на использование продукта *Windows* в размере c ден. ед.

Определим технологические траектории операциионных систем по Р. Фостеру [208].

Функции спроса на *Windows*

$$c=\alpha_W\left(n_W(t),n_L(t)\right)(1-q)$$

и на *Linux*

$$c=\alpha_L\left(n_W(t),n_L(t)\right)(1-q)$$

считаются в модели линейными в каждый момент времени, но их наклон предполагается динамически изменяющимся в зависимости от объемов рынка, занятых обоими продуктами.

На рис. 3.1.1 представлены сечения функций спроса на *Windows* (жирная сплошная линия) и на *Linux* (жирная пунктирная линия) в фиксированный момент времени t.

Эти функции спроса показывают, как высоко пользователь оценивает каждую из операционных систем, например, на рис. 3.1.1 доля пользователей $q(t)$ оценивает

Windows дороже, чем *c* ден. ед., а доля $1 - q(t)$ — дешевле, чем *c* ден. ед.

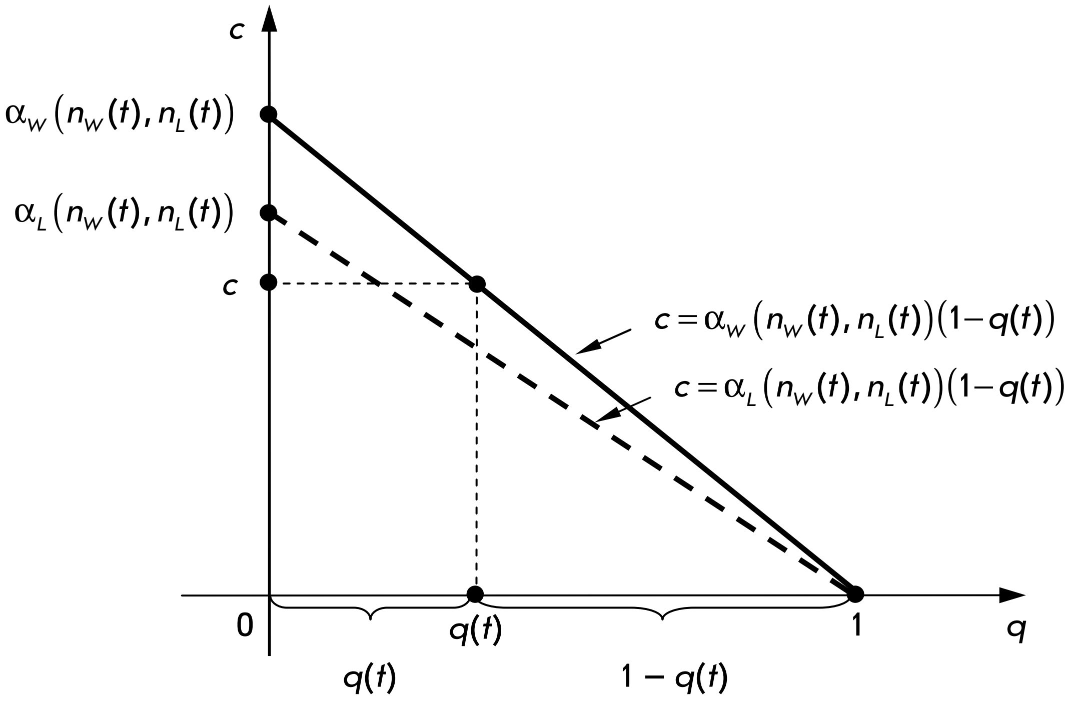

Рис. 3.1.1. *Спрос на Windows и Linux*

Несмотря на то, что *Linux* распространяется бесплатно, функция спроса этой операционной системы не сливается с осью абсцисс: в момент времени t для любого числа $c \in \left[0; \alpha_L\left(n_W(t), n_L(t)\right)\right]$ часть пользователей готова заплатить за эту операционную систему сумму, превышающую *c* ден. ед.

Очевидно, на сегодняшний день функция спроса на *Linux* является более пологой, чем функция спроса на *Windows*: в противном случае при нулевой цене *Linux* все пользователи приобретали бы только эту операционную систему — как имеющую наибольшую потребительскую ценность и при этом предлагающуюся бесплатно, но на реальном рынке это не так.

Функции $\alpha_W\left(n_W(t), n_L(t)\right)$ и $\alpha_L\left(n_W(t), n_L(t)\right)$, следуя Р. Фостеру [208], будем называть *технологическим траекториями*.

Будем считать, что технологические траектории в каждый момент времени t определяются взвешенной разностью

$$y(t)=n_W(t)-sn_L(t)=(1+s)n_W(t)-sN(t) \tag{3.1.3}$$

долей рынка, занимаемых операционными системами *Windows* и *Linux*:

$$\alpha_W\left(n_W(t),n_L(t)\right)=\alpha_W\left(n_W(t)-sn_L(t)\right)=\alpha_W\left(y(t)\right), \tag{3.1.4}$$

$$\alpha_L\left(n_W(t),n_L(t)\right)=\alpha_L\left(n_W(t)-sn_L(t)\right)=\alpha_L\left(y(t)\right). \tag{3.1.5}$$

При $s = 1$ технологические траектории определяются просто разностью суммарного числа пользователей *Windows* и суммарного числа пользователей *Linux* к данному моменту времени.

В общем случае константа s определяет характер обучения пользователей: поскольку

$$s=-\frac{dy}{dn_L},$$

при $s>1$ увеличение числа $n_L(t)$ пользователей *Linux* больше усиливает бренд *Linux*, чем ослабляет бренд *Windows*, а при $s < 1$ — наоборот.

Предполагается, что технологические траектории $\alpha_W\left(y(t)\right)$ и $\alpha_L\left(y(t)\right)$ удовлетворяют следующим естественным допущениям:

- с ростом размера рынка, занимаемого каждым из продуктов, его потребительская ценность растет:

$$\frac{\partial\alpha_W\left(n_W(t)-sn_L(t)\right)}{\partial n_W}>0; \qquad \frac{\partial\alpha_L\left(n_W(t)-sn_L(t)\right)}{\partial n_L}>0;$$

- потребительская ценность каждой из операционных систем конечна, даже если все пользователи будут использовать эту операционную систему:

$$\lim_{y\to+\infty}\alpha_W(y)=\bar{\alpha}_W<+\infty; \qquad \lim_{y\to-\infty}\alpha_L(y)=\bar{\alpha}_L<+\infty;$$

- потребительская ценность операционной системы, которой никто не пользуется, а все пользуются конкурирующим продуктом, равна нулю:

$$\lim_{y\to-\infty}\alpha_W(y)=\lim_{y\to+\infty}\alpha_L(y)=0.$$

Замечание 1. Из первого предположения следует, в частности, что

$$\frac{\partial \alpha_W\left(n_W(t)-sn_L(t)\right)}{\partial n_L}<0\,; \qquad \frac{\partial \alpha_L\left(n_W(t)-sn_L(t)\right)}{\partial n_W}<0\,,$$

т. е. с ростом размера рынка, занимаемого каждым из продуктов, потребительская ценность конкурирующего продукта снижается.

Замечание 2. Из данных предположений следует, очевидно, что $\forall y\in(-\infty;+\infty) \qquad \alpha_W(y)\geqslant 0;\ \alpha_L(y)\geqslant 0$.

Замечание 3. Будем считать, что потенциальная потребительская ценность *Linux* выше, чем *Windows*: $\bar{\alpha}_W<\bar{\alpha}_L$.

Обозначим y° решение уравнения

$$\alpha_W(y)=\alpha_L(y) \text{ —}$$

оно соответствует такому разделению рынка между *Windows* и *Linux*, при котором потребительская оценка этих продуктов одинакова. Положим

$$\beta(y)=\alpha_W(y)-\alpha_L(y) \tag{3.1.6}$$

и будем считать, что

$$\forall y>y^{\circ} \qquad \frac{d^2\beta}{dy^2}\leqslant 0\,,$$

т. е. что с увеличением объема рынка, занимаемого операционной системой *Windows*, влияние структуры рынка на разницу между потребительскими ценностями операционных систем уменьшается.

Замечание 4. Из сделанных предположений следует, очевидно, что y° существует и единственно.

§ 3.2. Монополия единственного производителя коммерческого программного обеспечения

Задача оптимального управления ценой лицензии на коммерческий программный продукт для получения максимальной интегральной дисконтированной прибыли на монопольном рынке

Рассмотрим вначале случай, когда на рынке присутствует только коммерческий продукт *Windows*.

Его производитель — *Microsoft* — стремится так управлять ценой лицензии $c(t)$, чтобы обеспечить себе *максимум интегрального дисконтированного* (*по непрерывной ставке* δ) *дохода*

$$J = \int_{0}^{+\infty} aq(t)c(t)\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt \to \max \tag{3.2.1}$$

при условиях

$$\frac{dy}{dt} = aq(t); \tag{3.2.2}$$

$$c(t) = \alpha_W\left(y(t)\right)\left(1 - q(t)\right); \tag{3.2.3}$$

$$c(t) \geqslant 0.$$

Постановка задачи максимизации дохода (а не прибыли) в данном случае оправдана, ввиду того, что речь идет о стадии распространения, когда производитель уже понес постоянные издержки по разработке продукта, а переменные издержки по его тиражированию близки к нулю (и включены в цену лицензии).

Исследование модели

Свойства оптимальной стратегии производителя коммерческого программного обеспечения на монопольном рынке определяются следующим утверждением ([159, 160], 2008 г.).

Утверждение 3.2.1. *Оптимальная стратегия монопольного производителя коммерческого программного обеспечения, обеспечивающая неограниченный рост рынка и бесконечную интегральную дисконтированную прибыль, на больших временах соответствует установлению цены лицензии на уровне половины от потенциальной потребительской ценности данного программого обеспе-*

чения; при этом мгновенная прибыль равна четверти произведения темпа роста рынка на потенциальную потребительскую ценность продукта.

Доказательство. Выразим из формулы (3.2.3)

$$q(t)=1-\frac{c(t)}{\alpha_W\left(y(t)\right)} \tag{3.2.4}$$

и подставим в (3.2.1) и (3.2.2), тогда задача примет следующий вид:

$$J=\int\limits_0^{+\infty} a\left(1-\frac{c(t)}{\alpha_W\left(y(t)\right)}\right)c(t)\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt\to\max$$

при условиях

$$\frac{dy}{dt}=a\left(1-\frac{c(t)}{\alpha_W\left(y(t)\right)}\right);$$

$$c(t)\geqslant 0\,.$$

Составим гамильтониан [сопряженную переменную обозначим $m(t)\mathrm{e}^{-\delta t}$]:

$$H=a\left(1-\frac{c(t)}{\alpha_W\left(y(t)\right)}\right)c(t)\mathrm{e}^{-\delta t}+m(t)\mathrm{e}^{-\delta t}\,a\left(1-\frac{c(t)}{\alpha_W\left(y(t)\right)}\right)=$$
$$=a\,\mathrm{e}^{-\delta t}\left(1-\frac{c(t)}{\alpha_W\left(y(t)\right)}\right)\left(c(t)+m(t)\right).$$

Запишем необходимые условия принципа максимума Понтрягина:

$$\frac{\partial H}{\partial c}=0\Leftrightarrow c(t)=\frac{\alpha_W\left(y(t)\right)-m(t)}{2}; \tag{3.2.5}$$

$$\frac{d\left(m(t)\mathrm{e}^{-\delta t}\right)}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y}\Leftrightarrow\frac{dm}{dt}=\delta m(t)-\frac{a\alpha_W'\left(y(t)\right)c(t)\left(c(t)+m(t)\right)}{\alpha_W^2\left(y(t)\right)}; \tag{3.2.6}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}\Leftrightarrow\frac{dy}{dt}=a\left(1-\frac{c(t)}{\alpha_W\left(y(t)\right)}\right). \tag{3.2.7}$$

Подставляя выражение $c(t)$ из (3.2.5) в (3.2.6) и (3.2.7), получаем соответственно:

$$\frac{dm}{dt}=\delta m(t)-\frac{a\alpha'_W\left(y(t)\right)\left(\alpha_W^2\left(y(t)\right)-m^2(t)\right)}{4\alpha_W^2\left(y(t)\right)};$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{a}{2}\left(1+\frac{m(t)}{\alpha_W\left(y(t)\right)}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{t\to+\infty} y^*(t)=+\infty,$$

поэтому

$$\lim_{t\to+\infty}\alpha_W\left(y(t)\right)=\overline{\alpha}_W,$$

т. е. с ростом объема продаж функция спроса перестает изменяться:

$$c=\overline{\alpha}_W(1-q),$$

значит,

$$\lim_{t\to+\infty} c^*(t)=\frac{\overline{\alpha}_W}{2},$$

$$\lim_{t\to+\infty} m^*(t)=+\infty,$$

и из формулы (3.2.4)

$$\lim_{t\to+\infty} q^*(t)=\frac{1}{2}.$$

Мгновенная прибыль при этом равна

$$\pi^*=\lim_{t\to+\infty}\left(aq^*(t)c^*(t)\right)=\frac{a\overline{\alpha}_W}{4}.$$

Утверждение полностью доказано. ❑

Запомним этот результат, чтобы сравнить его со случаем дуополии!

§ 3.3. Смешанная дуополия производителей коммерческого и некоммерческого программного обеспечения

Задача оптимального управления ценой лицензии на коммерческий программный продукт для получения максимальной интегральной дисконтированной прибыли в конкуренции с некоммерческим продуктом-заменителем

Перейдем теперь к основному предмету данной главы — исследованию динамики конкурентной борьбы производителей коммерческого и некоммерческого программных продуктов.

Так как функции спроса на *Windows* и *Linux* заданы формулами (3.1.4) и (3.1.5) соответственно, при этом *Linux* распространяется свободно, а *Windows* в момент t продается по цене $c(t) \geqslant 0$, цена *Windows*, при которой пользователю будет безразличен выбор между коммерческим и некоммерческим продуктами, определяется формулой

$$\alpha_W\left(y(t)\right)\left(1-q(t)\right)-c(t)=\alpha_L\left(y(t)\right)\left(1-q(t)\right).$$

Отсюда

$$c(t)=\left(\alpha_W\left(y(t)\right)-\alpha_L\left(y(t)\right)\right)\left(1-q(t)\right)$$

или

$$c(t)=\beta\left(y(t)\right)\left(1-q(t)\right),$$

где функция $\beta(y)$ определена формулой (3.1.6).

Иными словами, если в момент времени t *Microsoft* устанавливает цену лицензии на *Windows*, равную $c(t)$, то доля

$$q(t)=1-\frac{c(t)}{\beta\left(y(t)\right)}$$

новых пользователей, которые в данный момент считают, что разность между потребительскими ценностями *Windows* и *Linux* превышает цену лицензии *Windows*, приобретет легальные копии этой коммерческой операционной системы, а оставшаяся часть

$$1-q(t)=\frac{c(t)}{\beta(y(t))}$$

новых пользователей бесплатно скачает копию некоммерческого продукта *Linux*.

Из формул (3.1.1)—(3.1.3) следует, что

$$y(t)=n_W(t)-sn_L(t)=\int_0^t aq(\tau)d\tau-s\int_0^t a(1-q(\tau))d\tau=$$
$$=\int_0^t a\big(q(\tau)-s(1-q(\tau))\big)d\tau=\int_0^t a((1+s)q(\tau)-s)d\tau.$$

Теперь задача оптимального управления, стоящая перед *Microsoft*, принимает следующий вид: так изменять цену лицензии $c(t)$ во времени, чтобы обеспечить себе *максимум интегрального дисконтированного* (*по непрерывной ставке* δ) *дохода*

$$J=\int_0^{+\infty} aq(t)c(t)\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt\to\max \qquad (3.3.1)$$

при условиях

$$\frac{dy}{dt}=a((1+s)q(t)-s); \qquad (3.3.2)$$

$$q(t)=1-\frac{c(t)}{\beta(y(t))}; \qquad (3.3.3)$$

$$c(t)\geqslant 0; \qquad (3.3.4)$$

$$\beta(y(0))>0. \qquad (3.3.5)$$

Исследование модели

Условия совместного существования коммерческого и некоммерческого продуктов на рынке определяются утверждением 3.3.1 ([163, 174], 2008 г.).

Утверждение 3.3.1. *Коммерческий и некоммерческий продукт сосуществуют на рынке тогда и только тогда, когда $s>1$, при этом оптимальная цена лицензии и мгновенная прибыль производителя коммерческого продукта меньше, чем на монопольном рынке коммерческого продукта.*

Доказательство. Очевидно, в случае $s\leqslant 1$ предпочтения пользователей таковы, что операционная система *Linux* даже не смогла бы начать распространяться, поскольку все пользователи предпочитали бы устанавливать *Windows*. Исследуем более сложный случай $s>1$.

Подставляя выражение $q(t)$ из (3.3.4) в (3.3.2) и (3.3.3), преобразуем задачу (3.3.2)—(3.3.6):

$$J=\int_0^{+\infty} a\left(1-\frac{c(t)}{\beta(y(t))}\right)c(t)\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt\to\max$$

при условиях

$$\frac{dy}{dt}=a\left((1+s)\left(1-\frac{c(t)}{\beta(y(t))}\right)-s\right);$$

$$c(t)\geqslant 0;$$

$$\beta(y(0))>0.$$

Составим гамильтониан:

$$H=a\left(1-\frac{c(t)}{\beta(y(t))}\right)c(t)\mathrm{e}^{-\delta t}+m(t)\mathrm{e}^{-\delta t}\,a\left((1+s)\left(1-\frac{c(t)}{\beta(y(t))}\right)-s\right)=$$
$$=a\,\mathrm{e}^{-\delta t}\left(c(t)+m(t)-\frac{c(t)\big(c(t)+(1+s)m(t)\big)}{\beta(y(t))}\right)$$

[здесь $m(t)\mathrm{e}^{-\delta t}$ — сопряженная переменная].

Экономический смысл сопряженной переменной выражается следующим образом: $m(t)$ равна современной ценности прироста интегрального дисконтированного дохода *Microsoft* в результате усиления предпочтения пользователями бренда *Windows* бренду *Linux* [т. е. в результате увеличения на единицу величины $y(t) = n_W(t) - sn_L(t)$].

Условия принципа максимума Понтрягина для данной задачи имеют следующий вид:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \Leftrightarrow c(t) = \frac{\beta(y(t)) - (1+s)m(t)}{2}; \tag{3.3.6}$$

$$\frac{d\left(m(t)e^{-\delta t}\right)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{dm}{dt} = \delta m(t) - \frac{a\beta'(y(t))c(t)\left(c(t) + (1+s)m(t)\right)}{\beta^2(y(t))}; \tag{3.3.7}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = a\left(1 - \frac{(1+s)c(t)}{\beta(y(t))}\right). \tag{3.3.8}$$

Подставляя выражение $c(t)$ из (3.3.6) в (3.3.7) и (3.3.8), получаем соответственно:

$$\frac{dm}{dt} = \delta m(t) - \frac{a\beta'(y(t))\left(\beta^2(y(t)) - (1+s)^2 m^2(t)\right)}{4\beta^2(y(t))}; \tag{3.3.9}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a\left((1-s)\beta(y(t)) + (1+s)^2 m(t)\right)}{2\beta(y(t))}. \tag{3.3.10}$$

Определим стационарные состояния системы дифференциальных уравнений (3.3.9)—(3.3.10) как решения $(m; y)$ соответствующей системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta m = \dfrac{a\beta'(y)\left(\beta^2(y) - (1+s)^2 m^2\right)}{4\beta^2(y)}, \\ \dfrac{a\left((1-s)\beta(y) + (1+s)^2 m\right)}{2\beta(y)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+s)^2 m^2 + \dfrac{4\delta\beta^2(y)}{a\beta'(y)} m - \beta^2(y) = 0, \\ m = \dfrac{(s-1)\beta(y)}{(1+s)^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{\beta(y)\left(-2\delta\beta(y) \pm \sqrt{4\delta^2\beta^2(y) + a^2(1+s)^2\left(\beta'(y)\right)^2}\right)}{a(1+s)^2\beta'(y)}, \\ m = \dfrac{(s-1)\beta(y)}{(1+s)^2}. \end{cases}$$

Таким образом, возможны два случая:

$$\begin{cases} m = \dfrac{\beta(y)\left(-2\delta\beta(y) + \sqrt{4\delta^2\beta^2(y) + a^2(1+s)^2\left(\beta'(y)\right)^2}\right)}{a(1+s)^2\beta'(y)}, \\ m = \dfrac{(s-1)\beta(y)}{(1+s)^2} \end{cases} \tag{3.3.11}$$

и

$$\begin{cases} m = \dfrac{\beta(y)\left(-2\delta\beta(y) - \sqrt{4\delta^2\beta^2(y) + a^2(1+s)^2\left(\beta'(y)\right)^2}\right)}{a(1+s)^2\beta'(y)}, \\ m = \dfrac{(s-1)\beta(y)}{(1+s)^2}. \end{cases} \tag{3.3.12}$$

Система (3.3.11) имеет два решения:

- $\left(m = 0; y = y^\circ\right)$, где y° — решение уравнения

$$\alpha_W(y) = \alpha_L(y)$$

(см. § 3.1): поскольку $\beta\left(y^\circ\right) = 0$, правые части обоих уравнений системы (3.3.11) при $y = y^\circ$ обращаются в нуль);

- $\left(m = \widehat{m}; y = \widehat{y}\right)$, где $\widehat{y}$ — решение уравнения

$$\frac{\beta'(y)}{\beta(y)} = \frac{\delta(s-1)}{as}, \tag{3.3.13}$$

которое получается путем упрощения уравнения

$$\frac{\beta(y)\left(-2\delta\beta(y) + \sqrt{4\delta^2\beta^2(y) + a^2(1+s)^2\left(\beta'(y)\right)^2}\right)}{a(1+s)^2\beta'(y)} = \frac{(s-1)\beta(y)}{(1+s)^2},$$

а

$$\widehat{m} = \frac{(s-1)\beta\left(\widehat{y}\right)}{(1+s)^2}. \tag{3.3.14}$$

Анализ фазовой диаграммы, построенной на рис. 3.3.1, показывает, что стационарное состояние $\left(m=0; y=y^{\circ}\right)$ является неустойчивым, а стационарное состояние $\left(m=\widehat{m}; y=\widehat{y}\right)$ — устойчивым.

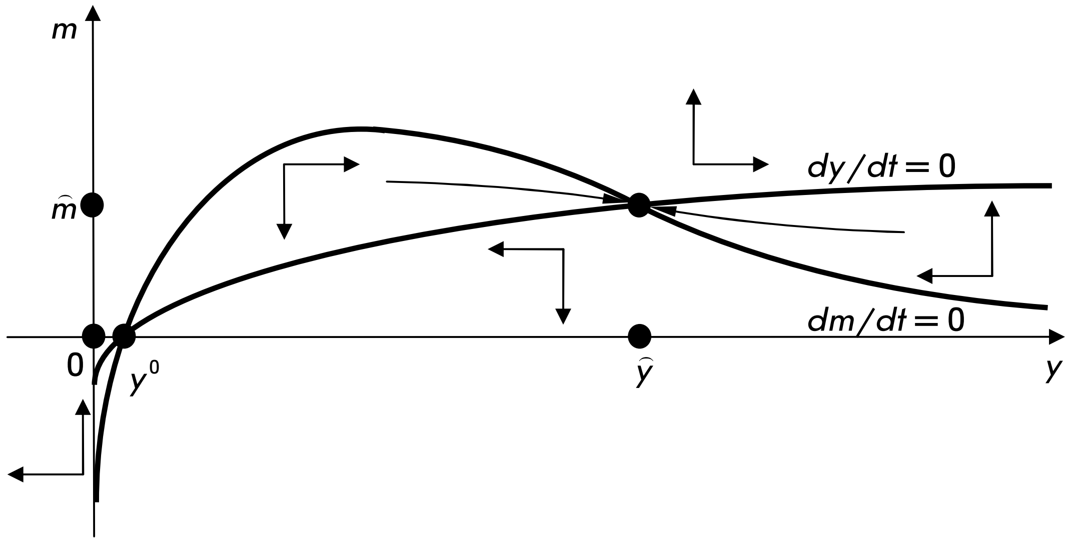

Рис. 3.3.1. *Фазовая диаграмма*

На всех траекториях, ведущих в устойчивую стационарную точку $\left(m=\widehat{m}; y=\widehat{y}\right)$, выполняется достаточное условие оптимальности Мангасаряна [110], поэтому все они являются оптимальными.

Система (3.3.12) имеет единственное решение $\left(m=0; y=y^{\circ}\right)$, но на всех траекториях, ведущих в эту устойчивую стационарную точку, сопряженная переменная (т. е. современная ценность прироста интегрального дисконтированного дохода *Microsoft* в результате усиления предпочтения пользователями бренда *Windows* бренду *Linux*) отрицательна, в силу чего эти траектории не могут быть оптимальными.

Подставляя (3.3.14) в (3.3.6) и переходя к пределу при $t \to +\infty$, определяем

$$\lim_{t\to+\infty} c^*(t) = \frac{\beta(\widehat{y})}{1+s} < \frac{\overline{\alpha}_W}{2}; \qquad (3.3.15)$$

так как $\beta(\widehat{y}) < \overline{\alpha}_W$, $s > 1$.

Переход к пределу в выражении $q^*(t)$ (3.3.3) с подстановкой $\lim\limits_{t\to+\infty} c^*(t)$ из (3.3.15) дает

$$\lim_{t\to+\infty} q^*(t) = \frac{s}{1+s} > \frac{1}{2};$$

так как $\beta(\hat{y}) < \bar{\alpha}_W$, $s > 1$.

Мгновенная прибыль при этом равна

$$\pi^* = \lim_{t \to +\infty} \left(a q^*(t) c^*(t) \right) = \frac{a s \beta(\hat{y})}{(1+s)^2} < \frac{a \bar{\alpha}_W}{4}.$$

Утверждение полностью доказано. ❑

§ 3.4. Влияние издержек по технической поддержке и пиратства на конкуренцию коммерческого и некоммерческого программного обеспечения

Задача оптимального управления ценой лицензии с учетом распространения нелегальных копий коммерческого программного обеспечения и наличия издержек на осуществление технической поддержки

В предыдущих параграфах переменные издержки коммерческого производителя предполагались нулевыми. На самом деле производитель несет издержки — прежде всего, связанные с осуществлением технической поддержки. Обозначим w издержки по осуществлению технической поддержки одного экземпляра программного продукта, тогда интегральная дисконтированная прибыль будет равна

$$J = \int_0^{+\infty} a q(t) \left(c(t) - w \right) \mathrm{e}^{-\delta t} \, dt.$$

Если считать, что доля ρ всех потребителей, входящих на рынок, применяет пиратские копии коммерческого продукта, причем часть μ из них в случае отсутствия теневого рынка нелицензионных копий приобрела бы легальные копии *Windows*, а часть $1-\mu$ воспользовалась бы альтернативным некоммерческим продуктом *Linux*, то общее число пользователей *Windows* будет равно

$$n_W(t)=\int_0^t a\left(q(\tau)+\rho\right)d\tau,$$

общее число пользователей *Linux* —

$$n_L(t)=\int_0^t a\left(1-q(\tau)-\rho\right)d\tau,$$

а функция спроса на *Windows* изменится с (3.3.1) на

$$q(t)=1-\frac{c(t)}{\beta\left(y(t)\right)}-\mu\rho.$$

При этом

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dn_W}{dt}-s\frac{dn_L}{dt}=a\left(q(t)+\rho\right)-sa\left(1-q(t)-\rho\right)=$$
$$=a\Big(q(\tau)+\rho-s\left(1-q(t)-\rho\right)\Big)=a\big((1+s)q(t)+\rho-s(1-\rho)\big).$$

Задача оптимального управления, стоящая перед производителем коммерческого программного обеспечения, примет в результате следующий вид:

$$J=\int_0^{+\infty} aq(t)\left(c(t)-w\right)e^{-\delta t}dt\to\max \tag{3.4.1}$$

при условиях

$$\frac{dy}{dt}=a\big((1+s)q(t)+\rho-s(1-\rho)\big); \tag{3.4.2}$$

$$q(t)=1-\frac{c(t)}{\beta\left(y(t)\right)}-\mu\rho; \tag{3.4.3}$$

$$c(t)\geqslant 0; \tag{3.4.4}$$

$$\beta\left(y(0)\right)>0. \tag{3.4.5}$$

Как показывает утверждение 3.4.1 ([163], 2008 г.), наличие теневого рынка может изменить расстановку сил.

Утверждение 3.4.1. *При небольшом уровне пиратства* ρ *доля рынка, занимаемая коммерческим продуктом, увеличивается, а при достаточно большом уровне пиратства* ρ *или при достаточно больших издержках* w*, связанных с оказанием технической поддержки, коммерческий продукт может покинуть рынок вне зависимости от выбранной ценовой стратегии.*

Доказательство. Как и раньше, случай $s \leqslant 1$ тривиален. Рассмотрим случай $s > 1$.

Подставляя $q(t)$ из (3.4.3) в (3.4.1) и (3.4.2), преобразуем задачу (3.4.1)—(3.4.5):

$$J = \int_0^{+\infty} a\left(1 - \frac{c(t)}{\beta(y(t))} - \mu\rho\right)(c(t) - w)\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt \to \max$$

при условиях

$$\frac{dy}{dt} = a\left((1+s)\left(1 - \frac{c(t)}{\beta(y(t))} - \mu\rho\right) + \rho - s(1-\rho)\right);$$

$$c(t) \geqslant 0;$$

$$\beta(y(0)) > 0.$$

Гамильтониан

$$H = a\left(1 - \frac{c(t)}{\beta(y(t))} - \mu\rho\right)(c(t) - w)\,\mathrm{e}^{-\delta t} +$$

$$+ m(t)\,\mathrm{e}^{-\delta t}\, a\left((1+s)\left(1 - \frac{c(t)}{\beta(y(t))} - \mu\rho\right) + \rho - s(1-\rho)\right) =$$

$$= a\,\mathrm{e}^{-\delta t}\left(\left(1 - \frac{c(t)}{\beta(y(t))} - \mu\rho\right)(c(t) - w) +\right.$$

$$\left. + \left((1+s)\left(1 - \frac{c(t)}{\beta(y(t))} - \mu\rho\right) + \rho - s(1-\rho)\right)m(t)\right)$$

[$m(t)\mathrm{e}^{-\delta t}$ — сопряженная переменная].

Принцип максимума Понтрягина приводит к следующим условиям:

$$\frac{\partial H}{\partial c}=0 \Leftrightarrow c(t)=\frac{\beta\left(y(t)\right)(1-\mu\rho)+w-(1+s)m(t)}{2}; \qquad (3.4.6)$$

$$\frac{d\left(m(t)\mathrm{e}^{-\delta t}\right)}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y}\Leftrightarrow \qquad (3.4.7)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dm}{dt}=\delta m(t)-\frac{a\beta'\left(y(t)\right)c(t)\left(c(t)+(1+s)m(t)-w\right)}{\beta^2\left(y(t)\right)};$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}\Leftrightarrow \frac{dy}{dt}=a\left((1+s)\left(1-\frac{c(t)}{\beta\left(y(t)\right)}-\mu\rho\right)+\rho-s(1-\rho)\right). \qquad (3.4.8)$$

Подставляя $c(t)$ из (3.4.6) в (3.4.7) и (3.4.8), получаем соответственно:

$$\frac{dm}{dt}=\delta m(t)-\frac{a\beta'\left(y(t)\right)\left(\beta^2\left(y(t)\right)(1-\mu\rho)^2-\left(w-(1+s)m(t)\right)^2\right)}{4\beta^2\left(y(t)\right)}; \qquad (3.4.9)$$

$$\frac{dy}{dt}=a\frac{\beta\left(y(t)\right)\left(1-s+\rho(2-\mu)(1+s)\right)-w(1+s)+(1+s)^2m(t)}{2\beta\left(y(t)\right)}. \qquad (3.4.10)$$

Стационарные состояния системы дифференциальных уравнений (3.4.9)—(3.4.10) представляют собой решения $(m;y)$ системы

$$\begin{cases}\delta m=\dfrac{a\beta'(y)\left(\beta^2(y)(1-\mu\rho)^2-\left(w-(1+s)m(t)\right)^2\right)}{4\beta^2(y)},\\ a\dfrac{\beta\left(y(t)\right)\left(1-s+\rho(2-\mu)(1+s)\right)-w(1+s)+(1+s)^2m(t)}{2\beta\left(y(t)\right)}=0,\end{cases}$$

которая после упрощения принимает вид

$$\begin{cases}m=\dfrac{a\beta'(y)(1+s)w-2\delta\beta^2(y)}{a\beta'(y)(1+s)^2}\pm\\ \quad\pm\dfrac{\beta(y)\sqrt{4\delta^2\beta^2(y)-4\delta wa\beta'(y)(1+s)+a^2\left(\beta'(y)\right)^2(1-\mu\rho)^2(1+s)^2}}{a\beta'(y)(1+s)^2},\\ m=\dfrac{w(1+s)-\beta(y)\left(1-s+\rho(2-\mu)(1+s)\right)}{(1+s)^2}.\end{cases}$$

Приравнивая правые части этой системы и анализируя соответствующую фазовую диаграмму системы дифференциальных уравнений (3.4.9)—(3.4.10), получаем единственную устойчивую стационарную точку $(m = \hat{m}; y = \hat{y})$, определяемую соотношениями

$$\delta w(1+s) = a\beta'(\hat{y})\big(\rho(1+s)-s\big)\big(\rho\big((\mu-1)(1+s)\big)-1\big)- \\ -\delta\beta(\hat{y})\big(s-1-\rho(2-\mu)(1+s)\big); \tag{3.4.11}$$

$$\hat{m} = \frac{w(1+s)-\beta(\hat{y})\big(1-s+\rho(2-\mu)(1+s)\big)}{(1+s)^2}. \tag{3.4.12}$$

Из (3.4.11) находим

$$\frac{d\hat{y}}{d\rho} = \tag{3.4.13}$$

$$= \frac{a\beta'(\hat{y})\big(2\rho(\mu-1)(1+s)^2-\big(s(\mu-1)+1\big)(1+s)\big)+\delta\beta(\hat{y})(2-\mu)(1+s)}{\delta\beta'(\hat{y})\big(s-1-\rho(2-\mu)(1+s)\big)-a\beta''(\hat{y})\big(\rho(1+s)-s\big)\big(\rho\big((\mu-1)(1+s)\big)-1\big)}$$

и

$$\frac{d\hat{y}}{dw} = \tag{3.4.14}$$

$$= \frac{\delta(1+s)}{a\beta''(\hat{y})\big(\rho(1+s)-s\big)\big(\rho\big((\mu-1)(1+s)\big)-1\big)-\delta\beta'(\hat{y})\big(s-1-\rho(2-\mu)(1+s)\big)}.$$

Из формулы (3.4.12) видно, что при достаточно больших значениях ρ сопряженная переменная (т. е. современная ценность прироста интегрального дисконтированного дохода *Microsoft* в результате усиления предпочтения пользователями бренда *Windows* бренду *Linux*) отрицательна, поэтому в таких ситуациях *Microsoft* не имеет оптимальной стратегии, т. е. *Windows* в итоге покидает рынок.

Формула (3.4.13) показывает, что при небольших ρ производная $d\hat{y}/d\rho > 0$, т. е. пиратство в небольших объемах стимулирует увеличение доли рынка, занимаемой *Windows*.

Формула (3.4.14) показывает, что при достаточно больших w производная $d\hat{y}/dw < 0$, т. е. *Windows* в итоге может покинуть рынок.

Утверждение полностью доказано. ❑

Резюме

Итак, если считать, что теневого распространения нелицензионных (пиратских) копий нет, а переменные издержки *Microsoft* нулевые, то в таких условиях *Linux* и *Windows* сосуществуют на рынке только при $s > 1$, при $s \leqslant 1$

Windows полностью вытесняет *Linux* с рынка, а *Linux* ни при каких условиях не может вытеснить *Windows* (при этом реальное значение s представляется приблизительно равным трем — четырем).

Важно отметить, что и цена, и мгновенный объем продаж, и мгновенная прибыль коммерческого производителя в смешанной дуополии меньше, чем если бы конкурирующего некоммерческого продукта на рынке не было, причем этот факт не зависит ни от s, ни от δ!

Распространение пиратских копий *Windows* в небольших объемах только стимулирует увеличение доли *Windows* на рынке, но, начиная с определенной доли пиратства, ситуация становится катастрофической для производителя коммерческого продукта, и он в результате вынужден покинуть рынок.

Также покинуть рынок его могут заставить слишком высокие издержки по осуществлению технической поддержки пользователей.

ГЛАВА 4. Модели взаимодействия поставщиков аппаратного и программного обеспечения

§ 4.1. Модель взаимодействия двух дополняющих монополистов — производителей аппаратного и программного обеспечения

Основные предположения

Конкуренция двух дополняющих монополистов впервые была исследована А. Курно еще в 1838 г. [92]. В этом параграфе описывается адаптация модели Курно к рынку информационных технологий, предложенная в работе [162] (2008 г.).

Предположим, что и производитель аппаратного обеспечения (которого будем обозначать индексом I, имея в виду *Intel*), и производитель коммерческой операционной системы (W — *Windows*) занимают монопольное положение.

Будем считать, что аппаратное обеспечение с операционной системой представляют собой комбинированный продукт, и ни один потребитель не приобретает компьютер без операционной системы или операционную систему отдельно от компьютера.

Пусть

c_I — цена аппаратного обеспечения;

c_W — цена коммерческой операционной системы;

$q_{I+W}\left(c_I + c_W\right)$ — функция спроса на компьютеры (с коммерческой операционной системой);

$e_I = f_I + v_I q_{I+W}$ — полные издержки производителя аппаратного обеспечения;

f_I — постоянные издержки производителя аппаратного обеспечения;

v_I — переменные издержки производителя аппаратного обеспечения;

$e_W = f_W + v_W q_{I+W}$ — полные издержки производителя коммерческой операционной системы;

f_W — постоянные издержки производителя коммерческой операционной системы;

v_W — переменные издержки производителя коммерческой операционной системы.

Цены аппаратного обеспечения и программных продуктов складываются из постоянных издержек, прибыли производителя, переменных издержек и издержек по обеспечению технической поддержки.

Постоянные издержки и издержки по обеспечению технической поддержки у производителей программного обеспечения довольно невелики, а переменные издержки и вовсе близки к нулю (записать копию программного продукта на компакт-диск не стоит практически ничего, а выложить очередную версию в интернет — и того дешевле).

Постоянные издержки у производителей аппаратного обеспечения существенно больше, чем у разработчиков программных продуктов, а переменные издержки (так же, как и у производителей программного обеспечения) стремятся к нулю (поскольку для производства микросхем необходимо строительство высокотехнологичного завода стоимостью в несколько млрд. долл., но затем производство одного микропроцессора обходится дешевле 1 долл.). Издержки по обеспечению технической поддержки у производителей аппаратного обеспечения приблизительно такие же, как и у разработчиков программных продуктов.

Задача максимизации прибыли монопольными поставщиками аппаратного обеспечения и операционных систем

Задача производителя аппаратного обеспечения состоит в определении такой цены продукта c_I, которая обеспечит *максимум прибыли:*

$$\pi_I = (c_I - v_I) q_{I+W}(c_I + c_W) - f_I \to \max. \qquad (4.1.1)$$

Задача, стоящая перед производителем коммерческой операционной системы, аналогична: *установить такую цену продукта c_W, при которой прибыль будет достигать максимального значения:*

$$\pi_W = (c_W - v_W) q_{I+W}(c_I + c_W) - f_W \to \max. \qquad (4.1.2)$$

Аналогичная задача ставилась А. Курно в его классической работе [92]. Практически дословно повторяя выкладки Курно, докажем следующее утверждение.

Утверждение 4.1.1. *На рынке, где производство аппаратного обеспечения и разработка операционных систем монополизированы, цена лицензии на операционную систему должна быть равна цене аппаратного обеспечения, а сумма прибыли и постоянных издержек у разработчика операционной системы такая же, как и у производителя аппаратного обеспечения.*

Доказательство. Запишем условия максимума первого порядка в задачах (4.1.1), (4.1.2):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_I}{\partial c_I} = q_{I+W}(c_I + c_W) + (c_I - v_I)\dfrac{dq_{I+W}(c_I + c_W)}{d(c_I + c_W)} = 0; \\ \dfrac{\partial \pi_W}{\partial c_W} = q_{I+W}(c_I + c_W) + (c_W - v_W)\dfrac{dq_{I+W}(c_I + c_W)}{d(c_I + c_W)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \qquad (4.1.3)$$

$$\Leftrightarrow c_I - v_I = c_W - v_W \Leftrightarrow \qquad (4.1.4)$$

$$\Leftrightarrow \pi_I + f_I = \pi_W + f_W. \qquad (4.1.5)$$

Если считать, что на рассматриваемом рынке

$$v_W < v_I \ll 1, \qquad f_W \ll f_I,$$

то условие (4.1.4) означает, что цена лицензии на операционную систему должна быть равна цене аппаратного обеспечения, а условие (4.1.5) — что прибыль без учета постоянных издержек делится поровну между разработчиком операционной системы и производителем аппаратного обеспечения.

Утверждение доказано. ❑

Однако реальный рынок демонстрирует, что средняя цена персонального компьютера на московском рынке в 2009 г. составляет около 15 000 руб., тогда как цена наиболее популярной версии операционной системы *Microsoft Windows XP Professional* равна 1250 руб.

Отличие реальной ситуации от модели объясняется несколькими причинами:

- наличием конкуренции как на стороне аппаратного обеспечения (между компьютерами на базе процессоров *Intel* и *AMD*), так и на стороне программного обеспечения (кроме коммерческой операционной системы *Microsoft Windows* существует некоммерческая операционная система *Linux*, которая на рынке серверов уже отвоевала значительную часть рынка, и в настоящее время завоевывает позиции на рынке новых персональных компьютеров, прежде всего, ноутбуков и нетбуков);
- получением производителем операционной системы дополнительных доходов от сопутствующих продуктов (например, офисных пакетов);
- сознательным занижением цены продукта производителем операционных систем.

Эти причины будут рассмотрены далее.

Эластичность спроса на коммерческое программное обеспечение с учетом взаимодействия с производителями аппаратного обеспечения

Перепишем второе из условий (4.1.3) в виде

$$1+\frac{c_W-v_W}{q_{I+W}(c_I+c_W)}\frac{dq_{I+W}(c_I+c_W)}{d(c_I+c_W)}=0.$$

Будем считать, что производители аппаратного обеспечения образуют рынок совершенной конкуренции и не могут влиять на цену своего продукта c_I. Тогда

$$\frac{dq_{I+W}(c_I + c_W)}{d(c_I + c_W)} = \frac{dq_{I+W}(c_I + c_W)}{dc_W}.$$

Если определить эластичность спроса на комбинированный продукт по цене как

$$\varepsilon_{I+W} = -\frac{dq_{I+W}(c_I + c_W) / d(c_I + c_W)}{q_{I+W}(c_I + c_W) / (c_I + c_W)} = \\ = -\frac{dq_{I+W}(c_I + c_W) / dc_W}{q_{I+W}(c_I + c_W) / (c_I + c_W)},$$

то условие (4.1.2) можно переписать в следующем виде:

$$1 + \frac{c_W - v_W}{c_I + c_W} \frac{dq_{I+W}(c_I + c_W) / dc_W}{q_{I+W}(c_I + c_W) / (c_I + c_W)} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 = \frac{c_W - v_W}{c_I + c_W} \varepsilon_{I+W} \Leftrightarrow \varepsilon_{I+W} = \frac{c_I + c_W}{c_W - v_W}.$$

Подставляя в правую часть формулы

$$\varepsilon_{I+W} = \frac{c_I + c_W}{c_W - v_W}$$

нулевые переменные издержки производителя операционной системы $v_W = 0$, среднюю цену рабочей станции в Москве в 2009 г., равную $c_I = 15\,000$ руб., и цену лицензии на наиболее популярную операционную систему *Microsoft Windows XP Professional*, равную $c_W = 1250$ руб., находим эластичность спроса на такие рабочие станции:

$$\varepsilon_{I+W} = \frac{c_I + c_W}{c_W - v_W} = \frac{15\,000 + 1250}{1250 - 0} = 13.$$

На самом деле, такое высокое значение не означает, что спрос настолько эластичен, скорее, дело в занижении производителем цены лицензии на операционную систему, которое связанно, в частности, с получением дополнительных доходов от продажи прикладного программного обеспечения пользователям операционной системы.

Учет доходов производителя коммерческой операционной системы от продажи прикладного программного обеспечения

Предположим, что монопольный производитель коммерческой операционной системы получает прибыль также и от комплементарных продуктов (например, *Microsoft* — производитель операционной системы *Microsoft Windows* — получает прибыль также и от продажи лицензий на офисный пакет *Microsoft Office*).

Комплементарный продукт покупают не все пользователи операционной системы, а их доля $\lambda_O \leqslant 1$.

Пусть

p_O — цена комплементарного продукта (индекс O означает *Microsoft Office*);

f_O — постоянные издержки по производству комплементарного продукта;

v_O — переменные издержки по производству комплементарного продукта.

Тогда задача монопольного производителя коммерческого программного обеспечения принимает следующий вид:

$$\pi_W = \left(c_W - v_W + \lambda_O\left(c_O - v_O\right)\right)q_{I+W}\left(c_I + c_W\right) - f_W - f_O \to \max.$$

Условие максимума первого порядка имеет вид

$$\frac{\partial \pi_W}{\partial c_W} = q_{I+W}\left(c_I + c_W\right) +$$

$$+\left(c_W - v_W + \lambda_O\left(c_O - v_O\right)\right)\frac{dq_{I+W}\left(c_I + c_W\right)}{dc_W} = 0 \Leftrightarrow 1 +$$

$$+\frac{c_W - v_W + \lambda_O\left(c_O - v_O\right)}{c_I + c_W}\frac{dq_{I+W}\left(c_I + c_W\right)/\,dc_W}{q_{I+W}\left(c_I + c_W\right)/\left(c_I + c_W\right)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{c_W - v_W + \lambda_O\left(c_O - v_O\right)}{c_I + c_W}\varepsilon_{I+W} \Leftrightarrow \varepsilon_{I+W} = \frac{c_I + c_W}{c_W - v_W + \lambda_O\left(c_O - v_O\right)}.$$

Считая, что четверть всех пользователей операционной системы приобретает офисный пакет (т. е. что $\lambda_O = 0{,}25$) и подставляя в правую часть формулы

$$\varepsilon_{I+W} = \frac{c_I + c_W}{c_W - v_W + \lambda_O\left(c_O - v_O\right)}$$

нулевые переменные издержки производителя операционной системы и офисного пакета $v_W = v_O = 0$, среднюю цену рабочей станции в Москве в 2009 г., равную $c_I = 15\,000$ руб., цену лицензии на операционную систему *Microsoft Windows XP Professional*, равную $c_W = 1250$ руб., и цену лицензии на офисный пакет *Microsoft Office Standard* 2007 *Professional*, равную $c_O = 13\,500$ руб., находим эластичность:

$$\varepsilon_{I+W} = \frac{15\,000 + 1250}{1250 - 0 + 0{,}25\left(13\,500 - 0\right)} = 3{,}51.$$

Данный результат говорит о сверхэластичности спроса на компьютеры в существующем диапазоне цен лицензий на программное обеспечение!

§ 4.2. Модель взаимодействия монопольного производителя аппаратного обеспечения с поставщиками коммерческого и некоммерческого программного обеспечения

Основные предположения

В этом параграфе предлагается модель взаимодействия двух конкурирующих поставщиков операционных систем (*Microsoft* и *Linux*) с монопольным производителем аппаратного обеспечения (*Intel*).

Данная работа продолжает исследование проблемы разделения прибыли между поставщиками компонентов на рынке информационных технологий, начатое Р. Касадесусом-Масанеллом, Б. Нейлбуффом и Д. Йоффе в 2008 г. в работе [71], в которой представлена модель взаимодействия конкурирующих поставщиков аппаратного обеспечения (*Intel* и *AMD*) с монопольным производителем операционных систем (*Microsoft*).

Будем предполагать, что *Intel* (нижний индекс *I*) занимает монопольное положениие на рынке аппаратного обеспечения, а на рынке операционных систем конкурируют коммерческий продукт *Microsoft Windows* (нижний индекс *M*) и некоммерческий продукт *Linux* (нижний индекс *L*).

Аппаратное обеспечение с операционной системой представляют собой комбинированный продукт, и ни один потребитель не приобретает компьютер без операционной системы или операционную систему отдельно от компьютера.

Таким образом, пользователь может принять одно из двух решений:

- приобрести компьютер с предустановленной коммерческой операционной системой;
- либо приобрести компьютер с предустановленной некоммерческой операционной системой;

На сегодняшний день конкуренция *Windows* и *Linux*, особенно в сегменте нетбуков, растет, поскольку цена лицензии на *Windows* для многих моделей составляет более 10% от цены конечного продукта.

Хотя лицензия на *Windows* имеет положительную цену, а *Linux* распространяется свободно, оба продукта сосуществуют на рынке. Это говорит о том, что потребительская ценность *Windows* больше потребительской ценности *Linux*.

Введем обозначения:

$q_{\max}$ — емкость рынка персональных компьютеров;

C_I — максимально возможная цена персонального компьютера с некоммерческой операционной системой;

C_{I+W} — максимально возможная цена персонального компьютера с коммерческой операционной системой ($C_{I+W} > C_I$);

c_I — цена персонального компьютера;

c_W — цена лицензии на коммерческую операционную систему;

q_W — спрос на коммерческую операционную систему;

q_L — спрос на некоммерческую операционную систему;

$q_I = q_W + q_L$ — спрос на персональные компьютеры;

f_I — постоянные издержки производителя персональных компьютеров;

f_W — постоянные издержки разработчика коммерческой операционной системы;

v_I — переменные издержки производителя персональных компьютеров;

v_W — переменные издержки разработчика коммерческой операционной системы;

$\pi_I = q_I(c_I - v_I) - f_I$ — прибыль производителя аппаратного обеспечения;

$\pi_W = q_W(c_W - v_W) - f_W$ — прибыль разработчика коммерческой операционной системы.

Будем использовать линейные функции спроса:

$$q_{I+W}(c) = q_{\max}\left(1 - \frac{c}{C_{I+W}}\right) —$$

на персональные компьютеры на базе процессоров *Intel* с операционной системой *Windows*;

$$q_{I+L}(c) = q_{\max}\left(1 - \frac{c}{C_I}\right) —$$

на персональные компьютеры на базе процессоров *Intel* с операционной системой *Linux*.

Спрос на компоненты композитного продукта

Если *Intel* установит цену персонального компьютера равной c_I, а *Microsoft* установит цену лицензии на *Windows* в размере c_W, то спрос на персональные компьютеры на базе процессоров *Intel* с операционной системой *Windows* составит

$$q_W = q_{\max}\left(1 - \frac{c_I + c_W}{C_I}\right),$$

а спрос на персональные компьютеры на базе процессоров *Intel* с операционной системой *Linux* —

$$q_L = q_{\max}\left(1 - \frac{c_I}{C_I}\right) - q_{\max}\left(1 - \frac{c_I + c_W}{C_I}\right) = q_{\max}\frac{c_W}{C_I}.$$

Это означает, что пользователь приобретет композитный продукт (персональный компьютер с одной из операционных систем) тогда и только тогда, когда потребительская ценность продукта для данного пользователя превышает его цену (рис. 4.2.1).

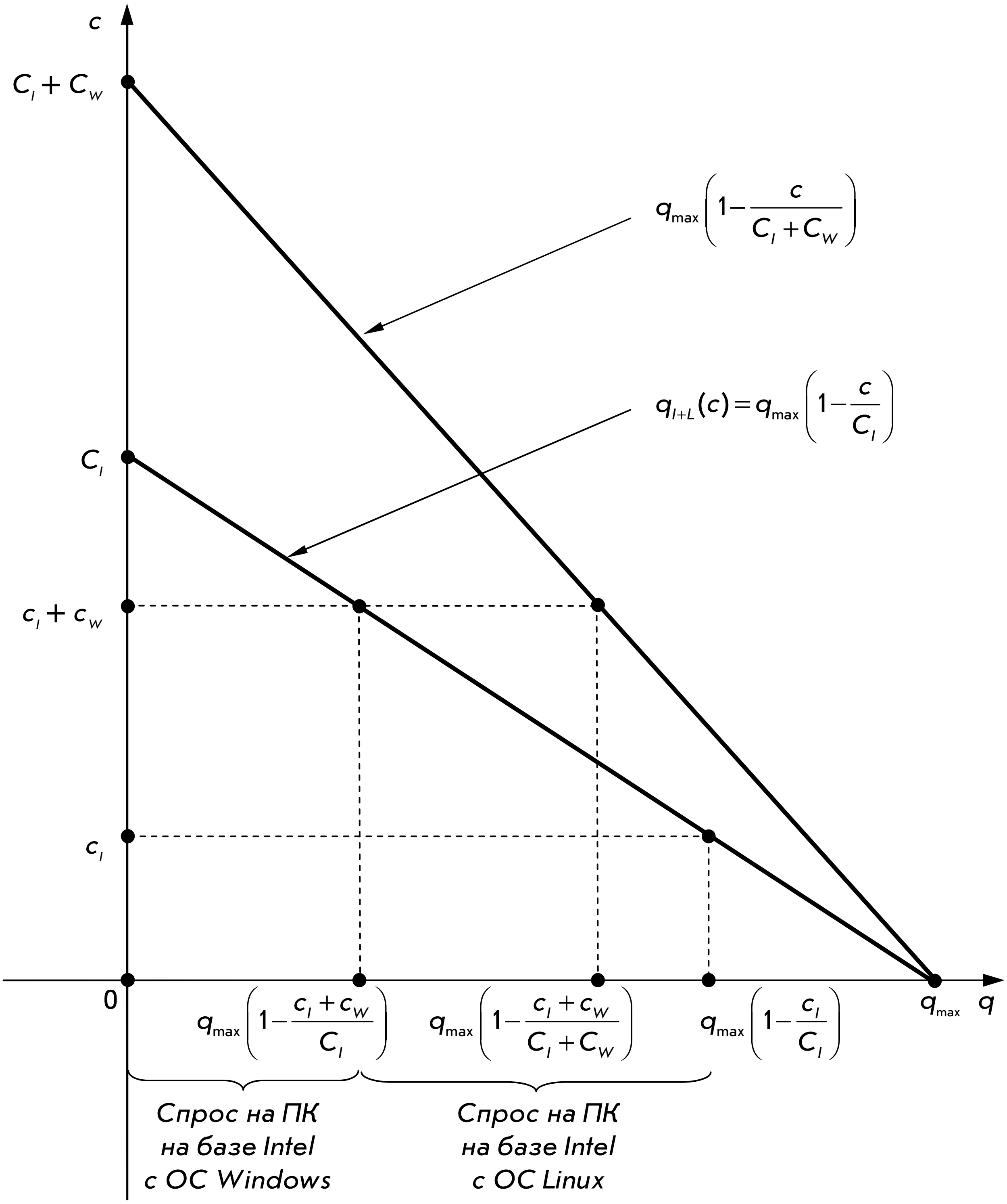

Рис. 4.2.1. *Функции спроса на компьютеры на базе процессоров Intel с операционными системами Windows и Linux*

Суммарный спрос на аппаратное обеспечение будет равен

$$q_I = q_{\max}\left(1-\frac{c_I + c_W}{C_I}\right) + q_{\max}\frac{c_W}{C_I} = q_{\max}\left(1-\frac{c_I}{C_I}\right).$$

Выражения (4.2.5)—(4.2.5) позволяют сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 4.2.1. *Реализованный спрос на компьютеры с некоммерческой операционной системой зависит только от цены коммерческого конкурента (но не от цены аппаратного обеспечения); спрос на аппаратное обеспечение зависит только от его цены (но не от цены коммерческой операционной системы); спрос на коммерческую операционную систему зависит и от цены лицензии на этот продукт, и от цены аппаратного обеспечения.*

Оптимальная ценовая политика производителей аппаратного обеспечения и коммерческой операционной системы

Задача, которая стоит перед производителем аппаратного обеспечения, состоит в *установлении такой его цены c_I, которая обеспечит максимум прибыли*

$$\pi_I = q_I(c_I - v_I) - f_I = \qquad (4.2.1)$$
$$= q_{\max}\left(1-\frac{c_I}{C_I}\right)(c_I - v_I) - f_I \to \max.$$

Аналогично, разработчик коммерческой операционной системы также стремится *максимизировать свою прибыль*

$$\pi_W = q_W(c_W - v_W) - f_W = \qquad (4.2.2)$$
$$= q_{\max}\left(1-\frac{c_I + c_W}{C_I}\right)(c_W - v_W) - f_W \to \max.$$

путем выбора оптимальной цены лицензии c_W.

Утверждение 4.2.2. *Оптимальная цена аппаратного обеспечения, равная*

$$c_I^* = \frac{C_I + v_I}{2} \qquad (4.2.3)$$

обеспечивает его производителю максимальную прибыль

$$\pi_I^* = q_{\max} \frac{(C_I - v_I)^2}{4C_I} - f_I; \qquad (4.2.4)$$

оптимальная цена лицензии на операционную систему

$$c_W^* = \frac{C_I + 2v_W - v_I}{4} \qquad (4.2.5)$$

обеспечивает ее разработчику максимальную прибыль

$$\pi_W^* = q_{\max} \frac{(C_I - 2v_W - v_I)^2}{16C_I} - f_W; \qquad (4.2.6)$$

при этом

$$\frac{\partial c_W^*}{\partial c_I^*} = -\frac{1}{2}, \qquad (4.2.7)$$

а прибыль производителя аппаратного обеспечения превышает прибыль разработчика операционной системы тогда и только тогда, когда

$$q_{\max}(3C_I - 3v_I - 2v_W)(C_I + 2v_W - v_I) > 16C_I(f_I - f_W). \qquad (4.2.8)$$

Доказательство. Условие максимума первого порядка в задаче (4.2.1) дает оптимальное значение цены аппаратного обеспечения

$$\frac{d\pi_I}{dc_I} = 0 \Leftrightarrow q_{\max} \frac{C_I - 2c_I + v_I}{C_I} = 0 \Leftrightarrow c_I^* = \frac{C_I + v_I}{2}.$$

При этом (в соответствии с утверждением 4.2.1) производитель аппаратного обеспечения устанавливает цену без оглядки на разработчика коммерческой операционной системы.

После того, как производитель аппаратного обеспечения установил цену на свой продукт, разработчик коммерческой операционной системы может принять решение о цене лицензии. Записав условие максимума первого порядка в задаче (4.2.2), получим функцию реакции

$$\left.\frac{\partial \pi_W}{\partial c_W}\right|_{c_I=c_I^*=\text{const}} = 0 \Leftrightarrow q_{\max}\left(\frac{C_I + v_W - c_I^* - 2c_W}{C_I}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_W^* = \frac{C_I + v_W - c_I^*}{2}. \tag{4.2.9}$$

Подставляя в функцию реакции уже известную цену аппаратного обеспечения c_I^*, получаем формулу (4.2.5)

Выражения для прибылей (4.2.4), (4.2.6) получаются простой подстановкой оптимальных цен в функции прибыли участников рынка.

Дифференцируя в формуле (4.2.11) c_W^* по c_I^*, получаем формулу (4.2.7).

Далее,

$$\pi_I^* > \pi_W^* \Leftrightarrow q_{\max}\frac{(C_I - v_I)^2}{4C_I} - f_I > q_{\max}\frac{(C_I - 2v_W - v_I)^2}{16C_I} - f_W \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q_{\max}\frac{4(C_I - v_I)^2 - (C_I - 2v_W - v_I)^2}{16C_I(f_I - f_W)} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q_{\max}(3C_I - 3v_I - 2v_W)(C_I + 2v_W - v_I) > 16C_I(f_I - f_W).$$

Утверждение полностью доказано. ❑

Заметим, что согласно формуле (4.2.7) увеличение оптимальной цены аппаратного обеспечения на 1 ден. ед. сопровождается уменьшением оптимальной цены программного обеспечения только на 0,5 ден. ед., а условие (4.2.8) на практике не выполняется ввиду чрезвычайно больших постоянных издержек производителя аппаратного обеспечения.

§ 4.3. Модель взаимодействия двух конкурирующих поставщиков аппаратного обеспечения с производителями коммерческого и некоммерческого программного обеспечения

Перейдем к описанию модели взаимодействия двух конкурирующих поставщиков аппаратного обеспечения (*Intel* и *AMD*) с двумя конкурирующими поставщиками операционных систем (*Microsoft* и *Linux*). На сегодняшний день рынок серверов, новых рабочих станций, ноутбуков и нетбуков устроен именно таким образом.

В дополнение к основным предположениям, сформулированным в предыдущем параграфе, будем считать, что потребитель оценивает компьютер на базе процессора *AMD* ниже, чем компьютер на базе процессора *Intel*, но разница в потребительской ценности компьютеров на базе разных процессоров меньше, чем разница в потребительской ценности компьютеров с разными операционными системами.

Введем следующие дополнительные обозначения:

C_A — максимально возможная цена персонального компьютера с некоммерческой операционной системой;

C_{A+W} — максимально возможная цена персонального компьютера с коммерческой операционной системой ($C_{I+W} > C_I$);

c_A — цена персонального компьютера на базе процессора *AMD*;

q_{I+W} — спрос на персональные компьютеры на базе процессора *Intel* с коммерческой операционной системой;

q_{I+L} — спрос на персональные компьютеры на базе процессора *Intel* с некоммерческой операционной системой;

q_{A+W} — спрос на персональные компьютеры на базе процессора *AMD* с коммерческой операционной системой;

q_{A+L} — спрос на персональные компьютеры на базе процессора *AMD* с некоммерческой операционной системой;

$q_I = q_{I+W} + q_{I+L}$ — спрос на персональные компьютеры на базе процессора *Intel*;

$q_A = q_{A+W} + q_{A+L}$ — спрос на персональные компьютеры на базе процессора *AMD*;

f_A — постоянные издержки производителя персональных компьютеров на базе процессора *AMD*;

v_A — переменные издержки производителя персональных компьютеров на базе процессора *AMD*;

$\pi_A = q_A(c_A - v_A) - f_A$ — прибыль производителя персональных компьютеров на базе процессора *AMD*.

Функции спроса на все продукты предполагаются линейными (рис. 4.3.1).

Как видно из рис. 4.3.1—4.3.2, если *Intel* установит цену персонального компьютера равной c_I, *AMD* установит цену персонального компьютера равной c_A, а *Microsoft* установит цену лицензии на *Windows* в размере c_W, то спрос на персональные компьютеры на базе процессоров *Intel* с операционной системой *Windows* составит

$$q_{I+W} = q_{\max}\left(1 - \frac{c_I + c_W}{C_A}\right);$$

спрос на персональные компьютеры на базе процессоров *Intel* с операционной системой *Linux* —

$$q_{I+L} = q_{\max}\left(1 - \frac{c_I}{C_A}\right) - q_{\max}\left(1 - \frac{c_A + c_W}{C_A}\right) = \frac{q_{\max}(c_A + c_W - c_I)}{C_A};$$

спрос на персональные компьютеры на базе процессоров *AMD* с операционной системой *Windows* составит

$$q_{A+W} = q_{\max}\left(1 - \frac{c_A + c_W}{C_A}\right) - q_{\max}\left(1 - \frac{c_I + c_W}{C_A}\right) = \frac{q_{\max}(c_I - c_A)}{C_A};$$

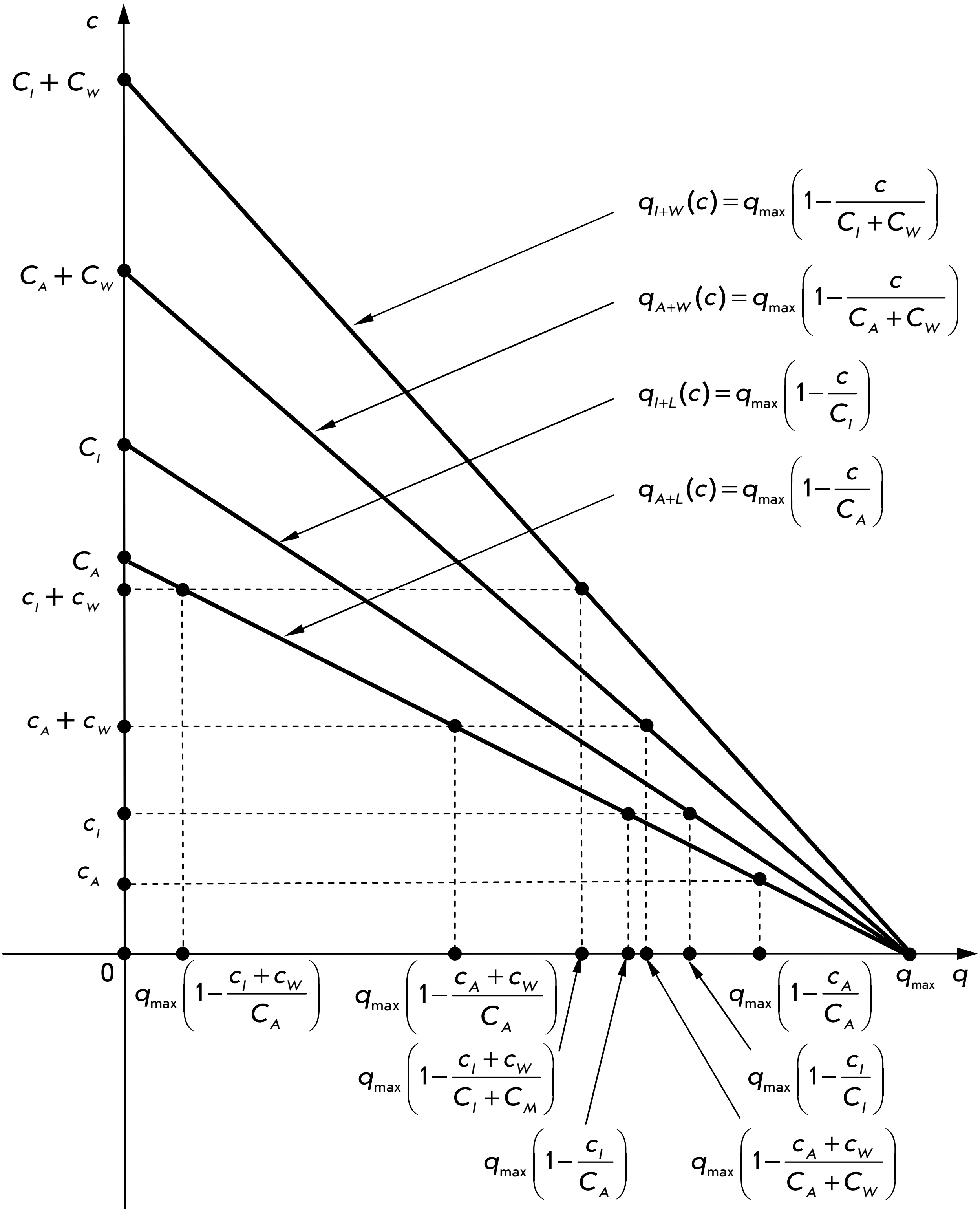

Рис. 4.3.1. *Функции спроса на компьютеры на базе процессоров Intel и AMD с операционными системами Windows и Linux*

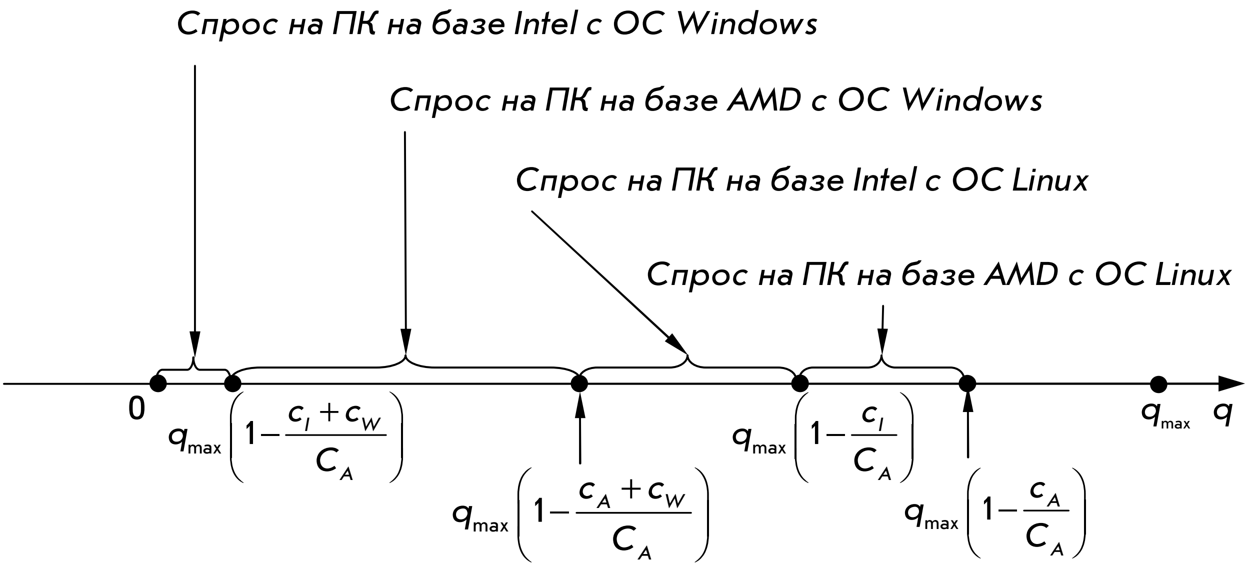

Рис. 4.3.2. *Спрос на компьютеры на базе процессоров Intel и AMD с операционными системами Microsoft Windows и Linux*

спрос на персональные компьютеры на базе процессоров *AMD* с операционной системой *Linux* окажется точно таким же:

$$q_{A+L} = q_{\max}\left(1-\frac{c_A}{C_A}\right) - q_{\max}\left(1-\frac{c_I}{C_A}\right) = \frac{q_{\max}(c_I - c_A)}{C_A}.$$

Спрос на компьютеры на базе процессоров *Intel* составит при этом

$$q_I = q_{I+W} + q_{I+L} = q_{\max}\left(1-\frac{c_I+c_W}{C_A}\right) + \frac{q_{\max}(c_A + c_W - c_I)}{C_A} = \\ = \frac{q_{\max}(C_A - 2c_I + c_A)}{C_A};$$

спрос на компьютеры на базе процессоров *AMD* будет равен

$$q_A = q_{A+W} + q_{A+L} = \frac{q_{\max}(c_I - c_A)}{C_A} + \frac{q_{\max}(c_I - c_A)}{C_A} = \\ = \frac{2q_{\max}(c_I - c_A)}{C_A};$$

спрос на операционную систему *Windows* —

$$q_W = q_{I+W} + q_{A+W} = q_{\max}\left(1 - \frac{c_I + c_W}{C_A}\right) + \frac{q_{\max}(c_I - c_A)}{C_A} =$$
$$= q_{\max}\left(1 - \frac{c_A + c_W}{C_A}\right),$$

спрос на операционную систему *Linux* —

$$q_L = q_{I+L} + q_{A+L} = \frac{q_{\max}(c_A + c_W - c_I)}{C_A} + \frac{q_{\max}(c_I - c_A)}{C_A} = \frac{q_{\max} c_W}{C_A}.$$

Задачи максимизации прибыли производителей таковы:

$$\pi_I = (c_I - v_I) q_I - f_I =$$
$$= \frac{q_{\max}(c_I - v_I)(C_A - 2c_I + c_A)}{C_A} - f_I \to \max;$$

$$\pi_A = (c_A - v_A) q_A - f_A =$$
$$= \frac{2q_{\max}(c_I - v_I)(c_I - c_A)}{C_A} - f_I \to \max;$$

$$\pi_W = (c_W - v_W) q_W - f_W =$$
$$= \frac{q_{\max}(c_W - v_W)(C_A - c_A - c_W)}{C_A} - f_W \to \max.$$

Утверждение 4.3.1. *В данной модели конкуренции не существует равновесия в чистых стратегиях.*

Доказательство. Найдем функции реакции из условий максимума первого порядка:

$$\frac{\partial \pi_I}{\partial c_I} = 0 \Leftrightarrow c_I(c_A) = \frac{C_A + c_A(c_I) + v_I(2 - \partial c_A / \partial c_I)}{4 - \partial c_A / \partial c_I}; \qquad (4.3.1)$$

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial c_A} = 0 \Leftrightarrow c_A(c_I) = 2c_I(c_A) - v_I - \frac{c_I(c_A) - v_I}{\partial c_I(c_A) / \partial c_A}; \qquad (4.3.2)$$

$$\frac{\partial \pi_W}{\partial c_W} = 0 \Leftrightarrow c_W(c_A) = \frac{C_A - c_A(c_W) + v_W\left(1 + \partial c_A(c_W)/\partial c_W\right)}{2 + \partial c_A(c_W)/\partial c_W}. \qquad (4.3.3)$$

Поскольку производная $\dfrac{\partial c_I(c_A)}{\partial c_A}$ входит в знаменатель функции реакции *AMD* (4.3.2), на данном рынке не существует ситуации равновесия в чистых стратегиях, что и требовалось доказать. ❑

При этом ведущими игроками являются производители аппаратного обеспечения (их функции реакции (4.3.1) и (4.3.2) не зависят от цены лицензии на коммерческую операционную систему).

Если *AMD* ведет себя пассивно, не реагируя на изменения цен на компьютеры на базе процессоров *Intel*, т. е.

$$\frac{\partial c_A}{\partial c_I} = 0,$$

то из формул (4.3.1)—(4.3.2) следует, что

$$c_I(c_A) = \frac{C_A + c_A(c_I) + 2v_I}{4}; \qquad (4.3.1)$$

$$c_W(c_A) = \frac{C_A - c_A(c_W) + v_W}{2}. \qquad (4.3.1)$$

При этом

$$\pi_I - \pi_W = \frac{q_{\max}(c_I - v_I)(C_A - 2c_I + c_A)}{C_A} - f_I -$$

$$-\frac{q_{\max}(c_W - v_W)(C_A - c_A - c_W)}{C_A} + f_W =$$

$$= \frac{q_{\max}\left(c_W^2 - 2c_I^2 + C_A(c_I - c_W) + c_A(c_I + c_W)\right)}{C_A} +$$

$$+\frac{q_{\max}\left(v_I(2c_I - C_A - c_A) + v_W(C_A - c_A - c_W)\right)}{C_A} - (f_I - f_W),$$

и для увеличения прибыли корпорации *Intel* приходится снижать цену. *Microsoft* при этом, наоборот, увеличивает цену, но это приводит к тому, что прибыль *AMD* становится нулевой, и этот производитель уходит с рынка. Но в этом случае *Microsoft* снижает цену, а *Intel* увеличивает, и такой цикл повторяется снова и снова.

Резюме

Если *Microsoft* и *Intel* являются производителями — монополистами, то для описания рынка информационных технологий с небольшой адаптацией подходит модель, предложенная еще А. Курно в 1838 г., в которой оптимальная цена лицензии на операционную систему должна быть равна цене аппаратного обеспечения, а сумма прибыли и постоянных издержек у *Microsoft* и *Intel* совпадают.

При этом в условиях совершенной конкуренции поставщиков аппаратного обеспечения и монопольного положения *Microsoft* на рынке операционных систем спрос на персональные компьютеры сверхэластичен по цене операционной системы (даже с учетом доходов *Microsoft* от комплементарных продуктов, например, от продажи лицензий на офисный пакет *Microsoft Office*).

Отличие реальной ситуации от модели объясняется наличием конкуренции как на стороне аппаратного обеспечения, так и на стороне программного обеспечения, а также сознательным занижением цены операционной системы *Windows* ее производителем.

В модели взаимодействия двух конкурирующих поставщиков операционных систем (*Microsoft* и *Linux*) с монопольным производителем аппаратного обеспечения (*Intel*) *оптимальная цена аппаратного обеспечения приблизительно в два раза выше оптимальной цены лицензии на операционную систему, а* сумма прибыли и постоянных издержек у *Microsoft* примерно в четыре раза меньше, чем у *Intel.*

В модели взаимодействия двух конкурирующих поставщиков аппаратного обеспечения (*Intel* и *AMD*) с двумя конкурирующими поставщиками операционных систем (*Microsoft* и *Linux*) не существует рыночного равновесия, и участники рынка должны постоянно изменять цены на свои продукты.

ГЛАВА 5. Исследование случайных факторов и пространственной неоднородности на рынке программного обеспечения

§ 5.1. Стохастическое обобщение модели Харрода — Домара

Основные предположения

Рассмотрим производство программного обеспечения как отрасль экономики.

Будем считать, что в этой отрасли выполнены основные предположения модели, предложенной в 1939 г. Р. Харродом [210, 211] и независимо от него в 1946 г. Е. Домаром [52, 53, 54]:

- отрасль замкнута;
- выпуск программного обеспечения измеряется в денежном выражении, т. е. в отрасли производится один универсальный продукт, который может как потребляться, так и инвестироваться;
- фондоотдача γ, темп износа капитала μ и норма накопления ρ постоянны;
- лаг капиталовложений отсутствует;
- выпуск определяется линейной производственной функцией интеллектуального капитала.

Состояние отрасли в момент времени t определяется следующими показателями:

- валовым выпуском X_t;
- интеллектуальным капиталом K_t;
- инвестициями I_t;
- фондом непроизводственного потребления C_t.

Предположение линейной зависимости выпуска от капитала (с постоянной фондоотдачей γ) дает

$$X_t = \gamma K_t.$$

Поскольку норма накопления равна ρ, валовые инвестиции составляют

$$I_t = \rho X_t,$$

а валовое потребление —

$$C_t = (1-\rho) X_t.$$

Модель Харрода — Домара с учетом случайных изменений темпа прироста капитала

Рассмотрим следующее стохастическое обобщение модели Харрода — Домара, предложенное в работах [173, 184] (2006 г.).

Поскольку годовой износ капитала равен

$$\mu K_t,$$

прирост капитала без учета случайных факторов составляет

$$dK_t = -\mu K_t dt + I_t dt,$$

или

$$dK_t = (\rho\gamma - \mu) K_t dt. \tag{5.1.1}$$

Учтем случайные факторы, добавив в уравнение (5.1.1) стохастическое слагаемое (считая, что случайно изменение т е м п а п р и р о с т а капитала):

$$\frac{dK_t}{K_t} = (\rho\gamma - \mu)dt + \sigma dW_t. \qquad (5.1.2)$$

Здесь
W_t — стандартное броуновское движение [221];
σ — коэффициент изменчивости (волатильности) роста капитала.

Исследование модели

В утверждении 5.1.1 ([173], 2006 г.) определяется решение уравнения (5.1.2) и его числовые характеристики.

Утверждение 5.1.1. *В отрасли разработки программного обеспечения, описываемой моделью Харрода — Домара с учетом влияния случайных факторов, интеллектуальный капитал описывается геометрическим броуновским движением*

$$K_t = K_0\, e^{(\rho\delta - \mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}, \qquad (5.1.3)$$

математическое ожидание которого экспоненциально растет как $K_0\, e^{(\rho\gamma-\mu)t}$, *а дисперсия интеллектуального капитала в зависимости от соотношения между скоростью роста отрасли* $\rho\gamma - \mu$ *и изменчивостью роста капитала* σ *может стремиться к конечному числу, бесконечности или нулю.*

Доказательство. Уравнение (5.1.2) определяет введеннное в 1965 г. П. Самуэльсоном [153] геометрическое (в терминологии Самуэльсона — экономическое) броуновское движение (5.1.3) как решение уравнений подобного вида (см. также [188, 189, 221]).

Математическое ожидание этого случайного процесса (см. [188, 189, 221]) равно

$$\mathbf{M}K_t = K_0\, e^{(\rho\gamma-\mu)t},$$

а дисперсия

$$\mathbf{D}K_t = K_0^2\, e^{2(\rho\gamma-\mu)t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right).$$

Значит, при $\rho\gamma - \mu > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{D}K_t = \lim_{t\to\infty}\left(K_0^2\, e^{2(\rho\gamma-\mu)t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right)\right) = +\infty,$$

при $\rho\gamma - \mu = 0$ и $\sigma > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{D}K_t = \lim_{t\to\infty}\left(K_0^2\, e^{2(\rho\gamma-\mu)t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right)\right) = +\infty,$$

а при $\rho\gamma - \mu < 0$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{D}K_t = \lim_{t\to\infty}\left(K_0^2\, e^{2(\rho\gamma-\mu)t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right)\right) = K_0^2 \lim_{t\to\infty}\left(e^{2(\rho\gamma-\mu+\sigma^2/2)t}\right) =$$
$$= \begin{cases} +\infty, & \text{если } \sigma^2 > 2(\mu - \rho\gamma), \\ K_0^2, & \text{если } \sigma^2 = 2(\mu - \rho\gamma), \\ 0, & \text{если } \sigma^2 < 2(\mu - \rho\gamma). \end{cases}$$

Утверждение доказано. ❑

§ 5.2. Стохастическое обобщение модели Солоу

Основные предположения

Теперь рассмотрим следующее стохастическое обобщение модели Солоу, представленное в работах [161, 176, 180, 169, 187, 188, 189, 195] (2000—2003 гг.).

Предположим, что отрасль разработки программного обеспечения удовлетворяет предположениям модели экономического роста, предложенной в 1956 г. Р. Солоу в работе [196]:

- отрасль является замкнутой односекторной экономической системой, в которой производится один универсальный продукт (денежное выражение доходов от производства программного обеспечения);
- этот универсальный продукт может как потребляться, так и инвестироваться;

- темп прироста численности занятых ν, темп износа интеллектуального капитала μ и норма накопления ρ постоянны;
- лаг капиталовложений отсутствует;
- выпуск определяется линейно-однородной неоклассической производственной функцией

$$X_t = F(K_t, L_t).$$

Состояние отрасли в момент времени t определяется следующими абсолютными показателями:
X_t — валовый продукт;
K_t — интеллектуальный капитал;
L_t — численность разработчиков;
I_t — инвестиции;
C_t — фонд непроизводственного потребления.

Модель Солоу с учетом случайных изменений темпа прироста капитала

Как и в модели Солоу, динамику L_t будем описывать дифференциальным уравнением

$$\frac{dL_t}{dt} = \nu L_t. \qquad (5.2.1)$$

Решением этого уравнения является функция

$$L_t = L_0 \mathrm{e}^{\nu t},$$

где L_0 — численность занятых в начальный момент времени.

В настоящее время отрасль программного обеспечения развивается бурно, и экспоненциальное приближение роста численности занятых в отрасли представляется обоснованным.

Численность занятых будем предполагать настолько большой, чтобы можно было пренебречь влиянием случайных факторов на ее динамику.

В модели Солоу прирост капитала при отсутствии влияния случайных факторов описывается уравнением

$$\frac{dK_t}{K_t} = \left(-\mu + \rho F\left(1, \frac{L_t}{K_t}\right) \right) dt. \tag{5.2.2}$$

В отличие от динамики труда, динамика капитала может существенно зависеть от случайных факторов, которые мы учтем, добавив в уравнение (5.2.2) стохастическое слагаемое σdW_t:

$$\frac{dK_t}{K_t} = \left(-\mu + \rho F\left(1, \frac{L_t}{K_t}\right) \right) dt + \sigma dW_t. \tag{5.2.3}$$

Здесь
W_t — стандартное броуновское движение;
σ — коэффициент изменчивости (волатильности) прироста капитала.

Стохастическое слагаемое σdW_t в уравнении (5.2.3) характеризует влияние экзогенных случайных факторов (экономической конъюнктуры, производственной неопределенности, научных открытий и др.) на динамику отрасли.

При переходе в (5.2.3) к относительным показателям:

- фондовооруженности $k_t = \frac{K_t}{L_t}$;
- средней производительности труда $x_t = \frac{X_t}{L_t}$;
- удельным инвестициям на одного занятого $i_t = \frac{I_t}{L_t}$;
- среднедушевому потреблению $c_t = \frac{C_t}{L_t}$

можно записать, пользуясь формулой Ито, стохастическое дифференциальное уравнение для фондовооруженности

$$dk_t = \left(-(\mu + \nu)k_t + \rho k_t F\left(1, \frac{1}{k_t}\right) \right) dt + \sigma k_t dW_t$$

или

$$dk_t = \left(-(\mu + \nu)k_t + \rho F(k_t, 1) \right) dt + \sigma k_t dW_t \text{ —}$$

поскольку производственная функция $F(K_t, L_t)$ является линейно-однородной, а значит,

$$k_t F\left(1, \frac{1}{k_t}\right) = F(k_t, 1).$$

Введя обозначения

$$\lambda = \mu + \nu, \qquad f(k_t) = F(k_t, 1),$$

получаем окончательно **односекторную стохастическую динамическую модель отрасли разработки программного обеспечения:**

$$\begin{cases} dk_t = \left(-\lambda k_t + \rho f(k_t)\right)dt + \sigma k_t dW_t, \\ k_0 = \dfrac{K_0}{L_0}, \\ x_t = f(k_t),\ i_t = \rho f(k_t),\ c_t = (1-\rho) f(k_t). \end{cases} \tag{5.2.4}$$

Исследование модели

Исследуем случай, когда в качестве производственной функции выступает ф у н к ц и я К о б б а — Д у г л а с а

$$F(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}.$$

При этом

$$f(k) = Ak^{\alpha},$$

и модель (5.2.4) принимает вид

$$\begin{cases} dk_t = \left(-\lambda k_t + \rho A k_t^{\alpha}\right)dt + \sigma k_t dW_t, \\ k_0 = \dfrac{K_0}{L_0}, \quad \lambda = \mu + \nu, \\ x_t = Ak_t^{\alpha}, \quad i_t = \rho A k_t^{\alpha}, \quad c_t = (1-\rho) A k_t^{\alpha}. \end{cases} \tag{5.2.5}$$

Введем вспомогательный случайный процесс

$$u_t = k_t^{1-\alpha}. \tag{5.2.6}$$

Лемма 5.2.1. *Случайный процесс* u_t, *определяемый формулой* (5.2.6), *подчиняется стохастическому дифференциальному уравнению*

$$du_t = (1-\alpha)\big(\rho A - (\lambda + 0{,}5\alpha\sigma^2)u_t\big)dt + (1-\alpha)\sigma u_t dW_t. \tag{5.2.7}$$

Доказательство. По формуле Ито

$$du_t = \left((1-\alpha)k_t^{-\alpha}\left(-\lambda k_t + \rho A k_t^{\alpha}\right) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}k_t^{-\alpha-1}\sigma^2 k_t^2\right)dt + \sigma k_t(1-\alpha)k_t^{-\alpha}dW_t =$$

$$= \left(\lambda(\alpha-1)k_t^{1-\alpha} + (1-\alpha)\rho A + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)\sigma^2 k_t^{1-\alpha}\right)dt + \sigma(1-\alpha)k_t^{1-\alpha}dW_t =$$

$$= (1-\alpha)\big(\rho A - (\lambda + 0{,}5\alpha\sigma^2)u_t\big)dt + (1-\alpha)\sigma u_t dW_t,$$

что и требовалось доказать. ❑

Уравнения вида (5.2.7) рассматривались в задачах скорейшего обнаружения изменений в локальном сносе броуновского движения [222]. Следуя [222], получим решение (5.2.7).

Пусть

$$S_t = S_0\, \mathrm{e}^{-(1-\alpha)(\lambda+0{,}5\sigma+0{,}5\alpha\sigma^2)t-(1-\alpha)\sigma W_t} \text{ —} \tag{5.2.8}$$

геометрическое броуновское движение (см., например, [221, 222]), являющееся решением стохастического дифференциального уравнения

$$dS_t = S_t\left(-(1-\alpha)(\lambda + 0{,}5\alpha\sigma^2)dt + \sigma(1-\alpha)dW_t\right).$$

Лемма 5.2.2. *Решением стохастического дифференциального уравнения* (5.2.7) *является случайный процесс*

$$u_t = S_t\left(u_0 + (1-\alpha)\rho A\int_0^t \frac{d\tau}{S_\tau}\right), \tag{5.2.9}$$

где S_t *определяется формулой* (5.2.8).

Доказательство проводится непосредственным применением формулы Ито к случайному процессу (5.2.6). ❑

Решение системы (5.2.5) предлагается в следующем утверждении ([180], 2000 г.).

Утверждение 5.2.1. *Единственным* (*с точностью до стохастической неразличимости*) *решением задачи* (5.2.5) *является набор случайных процессов*

$$k_t = \left(S_t \left(k_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\rho A \int_0^t \frac{d\tau}{S_\tau} \right) \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}; \qquad (5.2.10)$$

$$x_t = A \left(S_t \left(k_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\rho A \int_0^t \frac{d\tau}{S_\tau} \right) \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}; \qquad (5.2.11)$$

$$i_t = \rho A \left(S_t \left(k_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\rho A \int_0^t \frac{d\tau}{S_\tau} \right) \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}; \qquad (5.2.12)$$

$$c_t = (1-\rho) A \left(S_t \left(k_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\rho A \int_0^t \frac{d\tau}{S_\tau} \right) \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \qquad (5.2.13)$$

Доказательство. Последовательно применяя к случайному процессу u_t (5.2.6) леммы 5.2.1 и 5.2.2 и учитывая, что $k_t = u_t^{1/(1-\alpha)}$, заключаем, что фондовооруженность k_t при учете случайных факторов описывается формулой (5.2.10), в которой S_t подчиняется формуле (5.2.8) с неизвестным (пока) коэффициентом S_0. Единственность (с точностью до стохастической неразличимости) решения следует из выполнения для коэффициентов уравнения

$$dk_t = \left(-\lambda k_t + \rho A k_t^{\alpha}\right)dt + \sigma k_t dW_t$$

условий теоремы о существовании и единственности сильного решения стохастического дифференциального уравнения:

- условия Липшица

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists R(n) = (\lambda+\sigma)n + \rho A n^{\alpha}: \ \forall x, y \in \{u \in \mathbb{R} : |u| \leqslant n\}$$
$$|-\lambda x + \rho A x^{\alpha} + \lambda y - \rho A y^{\alpha}| + |\sigma x - \sigma y| \leqslant R(n)|x-y|;$$

- у с л о в и я   л и н е й н о г о   р о с т а

$$\forall x\,|-\lambda x+\rho A x^{\alpha}|+|\sigma x|\leqslant R(1)|x|$$

(последнего — в силу того, что $\alpha\in[0;1]$).

Полагая в формуле (5.2.10) $t=0$, замечаем, что $S_0=1$, что полностью доказывает формулу (5.2.10).

Справедливость формул (5.2.11)—(5.2.13) при этом непосредственно следует из определений $x_t=Ak_t^{\alpha}$, $i_t=\rho Ak_t^{\alpha}$ и $c_t=(1-\rho)Ak_t^{\alpha}$. Таким образом, утверждение доказано. ❑

Числовые характеристики показателей развития экономической системы

В практических целях важнейшими характеристиками показателей развития отрасли являются их м а т е м а т и ч е с к и е   о ж и д а н и я, характеризующие ожидаемые значения, и д и с п е р с и и, характеризующие меру разброса реальных значений вокруг математических ожиданий (т. е. риски).

Л е м м а 5.2.3. *Математическое ожидание случайного процесса u_t, определяемого формулой* (5.2.6)*, подчиняется задаче Коши*

$$\begin{cases}\dfrac{d\mathbf{M}u_t}{dt}=-(1-\alpha)\Big(\big(\lambda+0{,}5\alpha\sigma^2\big)\mathbf{M}u_t-\rho A\Big),\\ \mathbf{M}u_0=k_0^{1-\alpha}.\end{cases}\qquad(5.2.14)$$

Доказательство. Задача (5.2.14) непосредственно следует из уравнения (5.2.7) (лемма 5.2.1) при применении к этому уравнению оператора математического ожидания. ❑

Л е м м а 5.2.4. *Математическое ожидание случайного процесса u_t, определяемого формулой* (5.2.6)*, вычисляется как*

$$\mathbf{M}u_t=\frac{\rho A}{\lambda+0{,}5\alpha\sigma^2}+\left(k_0^{1-\alpha}-\frac{\rho A}{\lambda+0{,}5\alpha\sigma^2}\right)\mathrm{e}^{-(1-\alpha)(\lambda+0{,}5\alpha\sigma^2)t}.\qquad(5.2.15)$$

Доказательство. По лемме 5.2.3 $\mathbf{M}u_t$ подчиняется задаче Коши (5.2.14), решение которой (5.2.15) можно найти методом разделения переменных. ❑

Утверждения 5.2.2 и 5.2.3 ([170, 171, 175], 2000—2003 гг.) дают оценки соответственно математических ожиданий и дисперсий показателей развития отрасли, описываемой моделью (5.2.4).

Утверждение 5.2.2. *При любой эластичности выпуска по капиталу* $\alpha \in [0;1]$ *справедливо неравенство*

$$\mathbf{M}k_t \geqslant \left(\frac{\rho A}{\lambda + 0{,}5\alpha\sigma^2} + \left(k_0^{1-\alpha} - \frac{\rho A}{\lambda + 0{,}5\alpha\sigma^2} \right) e^{-(1-\alpha)(\lambda+0{,}5\alpha\sigma^2)t} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (5.2.16)$$

для математического ожидания фондовооруженности.

При любой эластичности выпуска по капиталу $\alpha \in [0;\ 0{,}5]$ *справедливы неравенства*

$$\mathbf{M}x_t \leqslant \qquad (5.2.17)$$

$$\leqslant A\left(\frac{\rho A}{\lambda + 0{,}5\alpha\sigma^2} + \left(k_0^{1-\alpha} - \frac{\rho A}{\lambda + 0{,}5\alpha\sigma^2} \right) e^{-(1-\alpha)(\lambda+0{,}5\alpha\sigma^2)t} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}};$$

$$\mathbf{M}i_t \leqslant \qquad (5.2.18)$$

$$\leqslant \rho A\left(\frac{\rho A}{\lambda + 0{,}5\alpha\sigma^2} + \left(k_0^{1-\alpha} - \frac{\rho A}{\lambda + 0{,}5\alpha\sigma^2} \right) e^{-(1-\alpha)(\lambda+0{,}5\alpha\sigma^2)t} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}};$$

$$\mathbf{M}c_t \leqslant \qquad (5.2.19)$$

$$\leqslant (1-\rho)A\left(\frac{\rho A}{\lambda + 0{,}5\alpha\sigma^2} + \left(k_0^{1-\alpha} - \frac{\rho A}{\lambda + 0{,}5\alpha\sigma^2} \right) e^{-(1-\alpha)(\lambda+0{,}5\alpha\sigma^2)t} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

для математических ожиданий производительности труда, удельных инвестиций и среднедушевого потребления, а при любом значении $\alpha \in [0{,}5;\ 1]$ *знаки в неравенствах* (5.2.17)—(5.2.19) *изменяются на противоположные.*

Доказательство. Пусть случайный процесс u_t определяется формулой (5.2.6). Тогда по лемме 5.2.2 $\mathbf{M}u_t$ определяется формулой (5.2.9).

Функция

$$g(x)=x^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

является выпуклой вниз при $x\geqslant 0$, поскольку эластичность выпуска по капиталу $\alpha\in(0;1)$; следовательно,

$$\frac{d^2g(x)}{dx^2}=\frac{1+\alpha}{(1-\alpha)^2}x^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}\geqslant 0.$$

Так как функция $g(x)$ является выпуклой вниз при $x\geqslant 0$, а случайный процесс u_t принимает только неотрицательные значения, можно воспользоваться неравенством Йенсена $\mathbf{M}g(u_t)\geqslant g(\mathbf{M}u_t)$ (см., например, [220]):

$$\mathbf{M}k_t=\mathbf{M}u_t^{\frac{1}{1-\alpha}}=\mathbf{M}g(u_t)\geqslant g(\mathbf{M}u_t)=$$

$$=\left(\frac{\rho A}{\lambda+0{,}5\alpha\sigma^2}+\left(k_0^{1-\alpha}-\frac{\rho A}{\lambda+0{,}5\alpha\sigma^2}\right)e^{-(1-\alpha)(\lambda+0{,}5\alpha\sigma^2)t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Таким образом, доказана справедливость неравенства (5.2.16).

Аналогичные рассуждения позволяют получить оценки (5.2.17)—(5.2.19) для математических ожиданий производительности труда, удельных инвестиций и среднедушевого потребления, так как функция

$$x^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

выпукла вверх при $\alpha\in[0;\ 0{,}5]$ и выпукла вниз при $\alpha\in[0{,}5;\ 1]$. ❑

Утверждение 5.2.3. *При любых допустимых значениях параметров модели* (5.2.4) *дисперсии фондовооруженности, производительности труда, удельных инвестиций и среднедушевого потребления остаются положительными при* $t\to\infty$.

Доказательство. Пусть случайный процесс u_t определяется формулой (5.2.6). Рассмотрим случайный процесс y_t, определяемый формулой

$$y_t=u_t-\mathbf{M}u_t.$$

Очевидно,

$$\mathbf{D}u_t=\mathbf{M}\left(u_t-\mathbf{M}u_t\right)^2=\mathbf{M}y_t^2.$$

Вычитая из уравнения (5.2.7) первое уравнение системы (5.2.14), умноженное на dt, получим

$$d(u_t-\mathbf{M}u_t)=-(1-\alpha)\left(\lambda+0,5\alpha\sigma^2\right)\left(u_t-\mathbf{M}u_t\right)dt+(1-\alpha)\sigma u_t dW_t,$$

или

$$dy_t=-(1-\alpha)\left(\lambda+0,5\alpha\sigma^2\right)y_t dt+(1-\alpha)\sigma u_t dW_t.$$

Запишем с помощью формулы Ито уравнение для y_t^2:

$$d(y_t^2)=\left(-2(1-\alpha)\left(\lambda+0,5\alpha\sigma^2\right)y_t^2+(1-\alpha)^2\sigma^2u_t^2\right)dt+2(1-\alpha)\sigma u_t y_t dW_t$$

и применим к обеим частям этого уравнения оператор математического ожидания:

$$\frac{d\mathbf{M}y_t^2}{dt}=-(1-\alpha)\left(2\lambda+\alpha\sigma^2\right)\mathbf{M}y_t^2+(1-\alpha)^2\sigma^2\mathbf{M}u_t^2.$$

Учитывая, что $\mathbf{D}u_t=\mathbf{M}y_t^2$, а $\mathbf{M}u_t^2=\mathbf{D}u_t+(\mathbf{M}u_t)^2$, запишем:

$$\frac{d\mathbf{D}u_t}{dt}=-2(1-\alpha)\left(\lambda+0,5\alpha\sigma^2\right)\mathbf{D}u_t+(1-\alpha)^2\sigma^2[\mathbf{D}u_t+(\mathbf{M}u_t)^2],$$

или

$$\frac{d\mathbf{D}u_t}{dt}=-(1-\alpha)\left(2\lambda+(2\alpha-1)\sigma^2\right)\mathbf{D}u_t+(1-\alpha)^2\sigma^2\left(\mathbf{M}u_t\right)^2. \qquad (5.2.20)$$

Пусть

$$\beta=\frac{\rho A}{\lambda+0,5\alpha\sigma^2},\quad \gamma=k_0^{1-\alpha}-\frac{\rho A}{\lambda+0,5\alpha\sigma^2},\quad \delta=(1-\alpha)(\lambda+0,5\alpha\sigma^2),$$

тогда по лемме 5.2.4

$$\left(\mathbf{M}u_t\right)^2=\left(\beta+\gamma e^{-\delta t}\right)^2=\beta^2+\gamma^2e^{-2\delta t}+2\beta\gamma e^{-\delta t},$$

и уравнение (5.2.20) можно переписать в виде

$$\frac{d\mathbf{D}u_t}{dt}=-(1-\alpha)\left(2\lambda+(2\alpha-1)\sigma^2\right)\mathbf{D}u_t+(1-\alpha)^2\sigma^2\beta^2+$$
$$+(1-\alpha)^2\sigma^2\gamma^2e^{-2\delta t}+2(1-\alpha)^2\sigma^2\beta\gamma e^{-\delta t}.$$

Обозначим

$$\varphi=(1-\alpha)\left(2\lambda+(2\alpha-1)\sigma^2\right),\quad \psi=(1-\alpha)^2\sigma^2\beta^2,$$
$$\theta=(1-\alpha)^2\sigma^2\gamma^2,\quad \vartheta=2(1-\alpha)^2\sigma^2\beta\gamma,$$

тогда последнее дифференциальное уравнение примет следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{D}u_t}{dt}=-\varphi\mathbf{D}u_t+\psi+\theta e^{-2\delta t}+\vartheta e^{-\delta t}. \qquad (5.2.21)$$

Это — линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка, поэтому его решение будем искать в виде

$$\mathbf{D}u_t=X(t)\mathrm{e}^{-\varphi t}. \qquad (5.2.22)$$

Подставляя (5.2.22) в (5.2.21), находим, что

$$X(t)=\frac{\psi}{\varphi}\mathrm{e}^{\varphi t}+\frac{\theta}{\varphi-2\delta}\mathrm{e}^{(\varphi-2\delta)t}+\frac{\vartheta}{\varphi-\delta}\mathrm{e}^{(\varphi-\delta)t}+C,$$

откуда получаем общее решение уравнения (5.2.20):

$$\mathbf{D}u_t=\frac{\theta}{\varphi-2\delta}\mathrm{e}^{-2\delta t}+\frac{\vartheta}{\varphi-\delta}\mathrm{e}^{-\delta t}+C\,\mathrm{e}^{-\varphi t}+\frac{\psi}{\varphi}. \qquad (5.2.23)$$

Так как значение фондовооруженности в начальный момент известно точно, дисперсия u_0 равна нулю, поэтому можно найти значение постоянной C в формуле (5.2.23):

$$C=\mathbf{D}u_0-\frac{\theta}{\varphi-2\delta}-\frac{\vartheta}{\varphi-\delta}-\frac{\psi}{\varphi}=-\frac{\theta}{\varphi-2\delta}-\frac{\vartheta}{\varphi-\delta}-\frac{\psi}{\varphi}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{D}u_t=\frac{\theta}{\varphi-2\delta}\mathrm{e}^{-2\delta t}+\frac{\vartheta}{\varphi-\delta}\mathrm{e}^{-\delta t}+\frac{\psi}{\varphi}-\left(\frac{\theta}{\varphi-2\delta}+\frac{\vartheta}{\varphi-\delta}+\frac{\psi}{\varphi}\right)\mathrm{e}^{-\varphi t}. \qquad (5.2.24)$$

Два первых слагаемых в формуле (5.2.24), очевидно, стремятся к нулю при $t\to+\infty$, так как

$$\delta=(1-\alpha)\left(\lambda+0{,}5\alpha\sigma^2\right)>0$$

при всех допустимых значениях α, λ и σ. Третье слагаемое

$$\frac{\psi}{\varphi}=\frac{(1-\alpha)\rho^2A^2\sigma^2}{\left(2\lambda+(2\alpha-1)\sigma^2\right)\left(\lambda+0{,}5\alpha\sigma^2\right)}$$

при любом разумном выборе нормы накопления ρ остается конечным ненулевым числом.

Последнее слагаемое при $t\to+\infty$ стремится к нулю, если $\varphi>0$, и неограниченно возрастает, если $\varphi<0$ (при $\varphi=0$ не существует при всех значениях t).

Исследуем возможные знаки коэффициента

$$\varphi=(1-\alpha)\left(2\lambda+(2\alpha-1)\sigma^2\right).$$

При любом $\alpha\in(0;\,1)$ первый множитель $1-\alpha$ строго положителен, поэтому

$$\operatorname{sign}\varphi=\operatorname{sign}\left(2\lambda+(2\alpha-1)\sigma^2\right)=\begin{cases}1, & \alpha+\lambda/\sigma^2>0{,}5,\\ 0, & \alpha+\lambda/\sigma^2=0{,}5,\\ -1, & \alpha+\lambda/\sigma^2<0{,}5.\end{cases}$$

Из этого следует, что при $t\to+\infty$ дисперсия случайного процесса u_t остается конечным числом

$$\mathbf{D}u_\infty=\lim_{t\to\infty}\mathbf{D}u_\infty=\frac{(1-\alpha)\rho^2A^2\sigma^2}{\left(2\lambda+(2\alpha-1)\sigma^2\right)\left(\lambda+0{,}5\alpha\sigma^2\right)}>0$$

при

$$\alpha+\frac{\lambda}{\sigma^2}>\frac{1}{2}$$

и неограниченно возрастает во всех остальных случаях.

Поэтому дисперсии фондовооруженности, производительности труда, удельных инвестиций и среднедушевого потребления также остаются положительными при $t\to+\infty$. Действительно, если бы дисперсия любого из этих показателей стремилась к нулю, то сам этот показатель стремился бы к неслучайной (детерминированной) функции, а поскольку каждый из них связан с u_t взаимно-однозначным отображением, то и случайный процесс u_t стремился бы к детерминированной функции, следовательно, его дисперсия стремилась бы к нулю, а этого, как было показано, не происходит.

Утверждение доказано. ❑

Модель диффузии инноваций с учетом случайных изменений темпа прироста капитала

В работе [167] (2009 г.) проведен учет влияния случайных факторов в фундаментальной модели диффузии инноваций (1.3.4).

Будем считать, что диффузия инноваций представляет собой решение $N = N_t$ задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения

$$dN_t = (a + bN_t)(M - N_t)dt + \sigma(M - N_t)dW_t \qquad (5.3.1)$$

с начальным значением N_0. Здесь

t — время;

W_t — стандартное броуновское движение;

N_t — объем распространения инновации к моменту t (определяется обычно количеством проданных экземпляров или количеством действующих потребителей инновационного продукта);

M — емкость рынка;

a — сила внешних воздействий на скорость адаптации;

b — сила внутренних воздействий на скорость адаптации;

σ — изменчивость (волатильность) рынка (случайное слагаемое $\sigma(M - N_t)dW_t$ в правой части уравнения считается пропорциональным размеру $M - N_t$ неохваченной части рынка).

Исследование модели

Утверждение 5.3.1 ([168], 2009 г.) дает решение уравнения (5.3.1).

У т в е р ж д е н и е 5.3.1. *Единственным* (*с точностью до стохастической неразличимости*) *решением задачи* (5.3.1) *является случайный процесс*

$$N_t = M - \frac{1}{\tilde{S}_t\left(\dfrac{1}{M-N_0} - b\displaystyle\int_0^t \frac{d\tau}{\tilde{S}_\tau}\right)}, \tag{5.3.2}$$

где

$$\tilde{S}_t = \mathrm{e}^{(a+bM)t+\sigma W_t} \text{ —}$$

геометрическое броуновское движение — решение задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t\left(\left(a + bM + \sigma^2\right)dt + \sigma W_t\right)$$

с начальным значением $\tilde{S}_0 = 1$.

Доказательство. Определим случайный процесс

$$u_t = \frac{1}{M - N_t}.$$

По формуле Ито

$$du_t = \left(\left(a + bM + \sigma^2\right)u_t - b\right)dt + \sigma u_t dW_t.$$

Это уравнение того же типа, что и уравнение (5.2.7), его решение

$$u_t = \tilde{S}_t\left(u_0 - b\int_0^t \frac{d\tau}{\tilde{S}_\tau}\right)$$

получается аналогично.

При $t = 0$

$$u_0 = \tilde{S}_0 u_0,$$

откуда находим $\tilde{S}_0 = 1$.

Возвращаясь к исходному случайному процессу

$$N_t = M - \frac{1}{u_t},$$

получаем формулу (5.3.2).

Поскольку условие Липшица и условие линейного роста выполняются, данное решение является единственным.

Утверждение доказано. ❑

§ 5.4. Оптимальное управление распространением программного обеспечения в пространственно-неоднородной экономике

Распределенные системы в современной математической экономике

Многие экономические системы являются распределенными, простейший пример распределенной экономической системы иллюстрируется моделью транспортных потоков Бекмана:

$$\frac{k\mathbf{f}}{|\mathbf{f}|} = \operatorname{grad} l.$$

В этой модели

$l(x, y)$ — цена товара, зависящая от географических координат места торговли;

k — транспортный тариф;

$\mathbf{f}$ — вектор, указывающий направление транспортного потока, по которому движется данный товар (подробнее модель Бекмана описана в монографиях [9, 142]).

Приведем еще несколько примеров распределенных экономических моделей.

В модели Блэка — Шоулза ценообразования производных финансовых инструментов:

$$\frac{\partial f(t,S_t)}{\partial t} + \delta S_t \frac{\partial f(t,S_t)}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t,S_t)}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2 = \delta f(t,S_t)$$

S_t — случайный процесс геометрического броуновского движения, описывающий динамику цены основного финансового инструмента;

δ — сила роста безрисковых процентов;

σ — волатильность цены основного финансового инструмента;

$f(t, S_t)$ — рациональная стоимость производного финансового инструмента (подробнее см. [125, 126, 127, 188, 189, 221] и ссылки в этих книгах).

В обобщенной модели Тиля для резервов инновационной страховой компании, размещающей свои активы на рынке ценных бумаг:

$$\frac{\partial V(t,S_t)}{\partial t}+\delta S_t\frac{\partial V(t,S_t)}{\partial S}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V(t,S_t)}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2=p(t)+(\mu_{x+t}+\delta)V(t,S_t)$$

S_t — случайный процесс геометрического броуновского движения, описывающий динамику цены основного финансового инструмента;

δ — безрисковая процентная ставка;

σ — волатильность цены основного финансового инструмента;

μ_{x+t} — интенсивность смертности;

$p(t)$ — плотность периодической премии;

$V(t, S_t)$ — резерв для покрытия возникающих исков (подробнее см. [126]).

В модели динамики государственного долга:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 b(t,S_t)}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2+(\delta-\mu)S_t\frac{\partial b(t,S_t)}{\partial S}-\delta b(t,S_t)+S_t=0$$

S_t — случайный процесс геометрического броуновского движения, описывающий динамику сеньоража;

δ — безрисковая процентная ставка;

σ — волатильность сеньоража;

μ — норма купонной доходности по государственным облигациям (подробнее см. [157] и ссылки в этой книге).

В модели динамики распределения власти в обществе:

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}\kappa\left(t,x,p(t,x),\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}\right)\right]+F\left(t,x,p(t,x)\right)$$

x — место в иерархии: нуль соответствует минимальным полномочиям, а единица максимальным;
$p(t, x)$ — уровень фактически достигаемой власти;
κ, F — некоторые функции (подробнее см. [152] и ссылки в этой монографии).

В последнее время распределенные модели используются и при описании исторической динамики [109, 203].

В рассмотренных и многих других моделях естественным образом возникают задачи оптимального управления такими экономическими и социальными системами: оптимизация прибыли торговой компании, работающей в большом регионе; поиск рациональных цен производных финансовых инструментов; оптимизация резервов страховой компании; оптимальное управление государственным долгом; оптимизация структуры власти.

Принцип максимума Понтрягина в задачах оптимального управления

В случае, когда ограничения на управляемый процесс задаются системой алгебраических уравнений и неравенств, решение оптимизационной задачи проводится методами математического программирования, основанными на принципе оптимальности Лагранжа (см., например, [2, 24]).

В 50-х гг. XX в. группа Л. С. Понтрягина обобщила принцип Лагранжа на случай ограничений, задаваемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений: для **задачи оптимального управления**, в которой требуется найти оптимальное управление $u = u(t)$, т. е. такое управление, которое доставляет м а к с и м у м функционалу

$$J = \int_{t_0}^{t_1} I(t,x,y,u)dt \to \max$$

при условии, что процесс y подчиняется у р а в н е н и ю д в и ж е н и я

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y,u);\ t_0 < t < t_1$$

с н а ч а л ь н ы м у с л о в и е м

$$y(t_0) = y_0(u),$$

необходимые условия оптимальности задаются **принципом максимума Понтрягина** (который здесь записан для частного случая, когда управление не зависит от ограничений):

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0;\ t_0 < t < t_1;$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{dy}{dt};\ t_0 < t < t_1;$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{dp}{dt};\ t_0 < t < t_1;$$

$$y(t_0) = 0;\ p(t_1) = 0.$$

Принцип максимума подробно доказан в работах [24, 33, 57, 140, 147].

А. Я. Дубовицкий и А. А. Милютин предложили общую теорию оптимизации в произвольных пространствах, в том числе и когда ограничения задаются уравнениями в частных производных (подробнее см. [33, 57]), однако предложенный ими аппарат значительно сложнее аппарата принципа максимума Понтрягина и не так прост в прикладном применении.

В настоящее время задачи оптимального управления распределенными системами на практике решаются численно, причем, как правило, для каждой задачи разрабатывается особый численный метод (см., например, [16, 24, 58]).

В работах [164, 165, 177, 178, 179, 181, 182, 183] (2004—2008 гг.) предлагается простой формализм, обобщающий принцип максимума Понтрягина на случай процессов, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных.

Доказательство этого формализма представляет собой обобщение доказательства классического принципа максимума Понтрягина, предложенного Л. И. Розоноэром [147].

Постановка задачи для уравнения в частных производных параболического типа

Рассматривается следующая **распределенная задача оптимального управления с ограничением в виде уравнения в частных производных параболического типа.** Пусть t и x — координаты (для определенности будем считать, что t имеет смысл временной координаты, а x — пространственной), и некоторый процесс $y = y(t, x) = y(t, x; u)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(t,x,y,u); \quad (5.4.1)$$
$$t_0 < t < t_1;\ x_0 < x < x_1;\ \{u(t,x)\} \in \Omega;$$

$$y(t_0,x) = y_0(x,u);\ x_0 < x < x_1;\ \{u(t,x)\} \in \Omega; \quad (5.4.2)$$

$$y(t,x_0) = \varphi_0(t,u);\ t_0 < t < t_1;\ \{u(t,x)\} \in \Omega; \quad (5.4.3)$$

$$y(t,x_1) = \varphi_1(t,u);\ t_0 < t < t_1;\ \{u(t,x)\} \in \Omega. \quad (5.4.4)$$

Пусть функция $u = u(t, x)$ из некоторого множества кусочно-непрерывных функций задает управление процессом y, и требуется найти оптимальное управление $u = u(t, x)$, т. е. такое управление, которое доставляет максимум функционалу

$$J = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} I(t,x,y,u)dxdt \to \max$$

при условии, что процесс y подчиняется уравнению движения (5.4.1) с начальным условием (5.4.2) и граничными условиями (5.4.3)—(5.4.4).

Рассмотрим вначале частный случай, когда на управление не накладывается никаких ограничений. Введем дифференциальный оператор

$$\mathcal{D}\cdot = \frac{\partial\,\cdot}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2\,\cdot}{\partial x^2},$$

тогда рассматриваемую задачу можно записать в следующем виде:

$$\max_{\{u(t,x)\}}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} I(t,x,y,u)dxdt; \tag{5.4.5}$$

$$\mathcal{D}y = f(t,x,y,u);\ t_0 < t < t_1;\ x_0 < x < x_1; \tag{5.4.6}$$

$$y(t_0,x) = y_0(x,u);\ x_0 < x < x_1; \tag{5.4.7}$$

$$y(t,x_0) = \varphi_0(t,u);\ t_0 < t < t_1; \tag{5.4.8}$$

$$y(t,x_1) = \varphi_1(t,u);\ t_0 < t < t_1. \tag{5.4.9}$$

Обобщенная функция Лагранжа

Введем *сопряженную переменную* $p = p(t, x)$, соответствующую ограничению (5.4.6), и запишем *обобщенную функцию Лагранжа*

$$L(\{u(t,x)\},\{p(t,x)\}) = J + (p; f(t,x,y,u) - \mathcal{D}y),$$

в которой скалярное произведение $(\cdot;\ \cdot)$ определяется как двойной интеграл по переменным t и x; при этом

$$L(\{u(t,x)\},\{p(t,x)\}) = \qquad (5.4.10)$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1} \left(I(t,x,y,u) + p(t,x)(f(t,x,y,u) - \mathcal{D}y)\right) dx dt.$$

Седловой точкой обобщенной функции Лагранжа называется такая точка $(\{u^*(t, x)\}, \{p^*(t, x)\})$ пространства функций, что

$$L(\{u(t,x)\},\{p^*(t,x)\}) \leqslant L(\{u^*(t,x)\},\{p^*(t,x)\}) \leqslant \qquad (5.4.11)$$
$$\leqslant L(\{u^*(t,x)\},\{p(t,x)\})$$

для всех $\{u(t, x)\}$, $\{p(t, x)\}$.

Как и в статических задачах оптимизации, седловая точка определяет оптимальное решение задачи, как показывает утверждение 5.4.1 [179, 182] (2004—2005 гг.).

Утверждение 5.4.1. *Седловая точка обобщенной функции Лагранжа* (5.4.10) *определяет решение распределенной задачи оптимального управления* (5.4.5)—(5.4.9).

Доказательство. 1°. Из второго неравенства в (5.4.11) следует, что

$$L(\{u^*(t,x)\},\{p^*(t,x)\}) - L(\{u^*(t,x)\},\{p(t,x)\}) \leqslant 0,$$

или

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1} \left(I(t,x,y^*(t,x),u^*(t,x)) + \right.$$

$$+p^*(t,x)\left(f\left(t,x,y^*(t,x),u^*(t,x)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)y^*(t,x)\right)\Bigg)dxdt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Bigg(I\left(t,x,y^*(t,x),u^*(t,x)\right)+$$

$$+p(t,x)\left(f\left(t,x,y^*(t,x),u^*(t,x)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)y^*(t,x)\right)\Bigg)dxdt\leqslant 0,$$

откуда

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Bigg(\left(p^*(t,x)-p(t,x)\right)\times \tag{5.4.12}$$

$$\times\left(f\left(t,x,y^*(t,x),u^*(t,x)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)y^*(t,x)\right)\Bigg)dxdt\leqslant 0$$

для всех кусочно-непрерывных функций $\{p(t,x)\}$.

Предположим, что

$$f\left(t,x,y^*(t,x),u^*(t,x)\right)\neq\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)y^*(t,x). \tag{5.4.13}$$

В этом случае можно найти такую кусочно-непрерывную функцию $\{p(t,x)\}$, чтобы интеграл в левой части (5.4.12) был положителен, что противоречит неравенству (5.4.13). Поэтому если $\left(\{u^*(t,x)\};\ \{p^*(t,x)\}\right)$ — седловая точка функции Лагранжа, то

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)y^*(t,x)=f\left(t,x,y^*(t,x),u^*(t,x)\right), \tag{5.4.14}$$

т. е. траектория $\{y^*(t,x)\}$, соответствующая управлению $\{u^*(t,x)\}$, удовлетворяет уравнению (5.4.6).

2°. Первое из неравенств в (5.4.11) означает, что

$$0\leqslant L\left(\{u^*(t,x)\},\{p^*(t,x)\}\right)-L\left(\{u(t,x)\},\{p^*(t,x)\}\right)=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Bigg(I\left(t,x,y^*(t,x),u^*(t,x)\right)+$$

$$+p^*(t,x)\left(f\left(t,x,y^*(t,x),u^*(t,x)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)y^*(t,x)\right)\Bigg)dxdt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Bigg(I\left(t,x,y(t,x),u(t,x)\right)+$$

$$+p^*(t,x)\left(f\left(t,x,y(t,x),u(t,x)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)y(t,x)\right)\Bigg)dxdt=$$

$$=J\left(\{y^*(t,x)\},\{u^*(t,x)\}\right)-J\left(\{y(t,x)\},\{u(t,x)\}\right)+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(p^*(t,x)\left(f\left(t,x,y^*(t,x),u^*(t,x)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)y^*(t,x)\right)\right)dxdt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(p^*(t,x)\left(f\left(t,x,y(t,x),u(t,x)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)y(t,x)\right)\right)dxdt.$$

Отсюда

$$J\left(\{y^*(t,x)\},\{u^*(t,x)\}\right)\geqslant J\left(\{y(t,x)\},\{u(t,x)\}\right)- \tag{5.4.15}$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(p^*(t,x)\left(f\left(t,x,y^*(t,x),u^*(t,x)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)y^*(t,x)\right)\right)dxdt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(p^*(t,x)\left(f\left(t,x,y(t,x),u(t,x)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)y(t,x)\right)\right)dxdt.$$

Первый из интегралов в правой части (5.4.15) равен нулю в силу (5.4.14). Второй интеграл в правой части (5.4.15) равен нулю для любой траектории $\{y(t, x)\}$, удовлетворяющей уравнению (5.4.6).

Итак, для любой траектории $\{y(t, x)\}$, удовлетворяющей уравнению (5.4.6),

$$J\left(\{y^*(t,x)\},\{u^*(t,x)\}\right)\geqslant J\left(\{y(t,x)\},\{u(t,x)\}\right),$$

т. е. управление $\{u^*(t, x)\}$ является оптимальным.

Утверждение доказано. ❑

Необходимые условия существования седловой точки обобщенной функции Лагранжа

Функция

$$H(t,x,y,u,p)=I(t,x,y,u)+p(t,x)f(t,x,y,u) \tag{5.4.16}$$

называется *гамильтонианом* распределенной задачи оптимального управления (5.4.5)—(5.4.9).

Необходимые условия для существования седловой точки функции Лагранжа определяются утверждением 5.4.2 [164, 178, 182] (2004—2005 гг.).

Утверждение 5.4.2. *Седловая точка обобщенной функции Лагранжа* (5.4.10) *удовлетворяет следующим необходимым условиям:*

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0;\ t_0<t<t_1;\ x_0<x<x_1; \tag{5.4.17}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p}=\mathcal{D}y;\ t_0<t<t_1;\ x_0<x<x_1;$$

$$\frac{\partial H}{\partial y}=-\mathcal{D}^* p;\ t_0<t<t_1;\ x_0<x<x_1;$$

$$p(t_0,x)=p(t_1,x);\ x_0<x<x_1;$$

$$p(t,x_0)=p(t,x_1);\ t_0<t<t_1;$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=x_1};\ t_0<t<t_1,$$

где

$$\mathcal{D}^*\cdot=\frac{\partial\,\cdot}{\partial t}+a^2\frac{\partial^2\,\cdot}{\partial x^2}\ — \tag{5.4.18}$$

это дифференциальный оператор, сопряженный оператору $\mathcal{D}\cdot$.

Доказательство. 1°. Пусть мы перешли от функции $\{p(t,x)\}$ к функции $\{p(t,x)\}+\{\Delta p(t,x)\}$. При этом функция Лагранжа (5.4.10) изменится на

$$\Delta L=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\Delta p(t,x)\left(f(t,x,y,u)-\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)y\right)\right)dxdt.$$

Необходимое условие первого порядка для существования максимума функции Лагранжа требует, чтобы $\Delta L=0$, для чего необходимо, чтобы

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)y=f(t,x,y,u),$$

т. е. оптимальная траектория должна удовлетворять уравнению (5.4.6).

2°. Теперь рассмотрим функцию Лагранжа (5.4.10):

$$L\left(\{u(t,x)\},\{p(t,x)\}\right)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Bigg(I\left(t,x,y(t,x),u(t,x)\right)+ \tag{5.4.19}$$

$$+p(t,x)\left(f\left(t,x,y(t,x),u(t,x)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)y(t,x)\right)\Bigg)dxdt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(I\left(t,x,y(t,x),u(t,x)\right)+p(t,x)f\left(t,x,y(t,x),u(t,x)\right)\right)dxdt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}p(t,x)\frac{\partial y(t,x)}{\partial t}dxdt+a^2\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}p(t,x)\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}dxdt\,.$$

Проинтегрируем по частям последние два слагаемых:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}p(t,x)\frac{\partial y(t,x)}{\partial t}dxdt= \tag{5.4.20}$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\left(p(t,x)y(t,x)\right)\Big|_{t=t_0}^{t_1}dx-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}y(t,x)\frac{\partial p(t,x)}{\partial t}dxdt\,;$$

$$a^2\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}p(t,x)\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}dxdt= \tag{5.4.21}$$

$$=a^2\left(\int_{t_0}^{t_1}\left(p(t,x)\frac{\partial y(t,x)}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=x_0}^{x_1}dt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}\frac{\partial y(t,x)}{\partial x}dxdt\right)=$$

$$=a^2\Bigg(\int_{t_0}^{t_1}\left(p(t,x)\frac{\partial y(t,x)}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=x_0}^{x_1}dt-\int_{t_0}^{t_1}\left(y(t,x)\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=x_0}^{x_1}dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}y(t,x)\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2}dxdt\Bigg)=$$

$$=a^2\left(\int_{t_0}^{t_1}\left(p(t,x)\frac{\partial y(t,x)}{\partial x}-y(t,x)\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=x_0}^{x_1}dt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}y(t,x)\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2}dxdt\right).$$

Подставляя (5.4.20) и (5.4.21) в (5.4.19), получаем:

$$L\left(\{u(t,x)\},\{p(t,x)\}\right)=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(I\left(t,x,y(t,x),u(t,x)\right)+p(t,x)f\left(t,x,y(t,x),u(t,x)\right)\right)dxdt-$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\left(p(t,x)y(t,x)\right)\Big|_{t=t_0}^{t_1}dx+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}y(t,x)\frac{\partial p(t,x)}{\partial t}dxdt+$$

$$+a^2\int_{t_0}^{t_1}\left(p(t,x)\frac{\partial y(t,x)}{\partial x}-y(t,x)\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=x_0}^{x_1}dt+a^2\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}y(t,x)\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2}dxdt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\big(I\big(t,x,y(t,x),u(t,x)\big)+p(t,x)f\big(t,x,y(t,x),u(t,x)\big)\big)dxdt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}y(t,x)\left(\frac{\partial p(t,x)}{\partial t}+a^2\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2}\right)dxdt-\int_{x_0}^{x_1}\big(p(t,x)y(t,x)\big)\Big|_{t=t_0}^{t_1}dx+$$

$$+a^2\int_{t_0}^{t_1}\left(p(t,x)\frac{\partial y(t,x)}{\partial x}-y(t,x)\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=x_0}^{x_1}dt.$$

С использованием определения гамильтониана (5.4.16) последнее выражение можно переписать в виде

$$L\big(\{u(t,x)\},\{p(t,x)\}\big)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H\big(t,x,y(t,x),u(t,x),p(t,x)\big)dxdt+ \quad (5.4.22)$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}y(t,x)\left(\frac{\partial p(t,x)}{\partial t}+a^2\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2}\right)dxdt-\int_{x_0}^{x_1}\big(p(t,x)y(t,x)\big)\Big|_{t=t_0}^{t_1}dx+$$

$$+a^2\int_{t_0}^{t_1}\left(p(t,x)\frac{\partial y(t,x)}{\partial x}-y(t,x)\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=x_0}^{x_1}dt.$$

Переход от управления $\{u(t,x)\}$ к управлению $\{u(t,x)\}+\{\Delta u(t,x)\}$ приведет к переходу от траектории от $\{y(t,x)\}$ к $\{y(t,x)\}+\{\Delta p(t,x)\}$, при этом, как следует из (5.4.22), функция Лагранжа изменится на величину

$$\Delta L=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial H\big(t,x,y(t,x),u(t,x),p(t,x)\big)}{\partial u}\Delta u(t,x)+\right.$$

$$+\frac{\partial H\big(t,x,y(t,x),u(t,x),p(t,x)\big)}{\partial y}\Delta y(t,x)+$$

$$\left.+\Delta y(t,x)\left(\frac{\partial p(t,x)}{\partial t}+a^2\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2}\right)\right)dxdt-\int_{x_0}^{x_1}\big(p(t,x)\Delta y(t,x)\big)\Big|_{t=t_0}^{t_1}dx+$$

$$+a^2\int_{t_0}^{t_1}\left(p(t,x)\frac{\partial \Delta y(t,x)}{\partial x}-\Delta y(t,x)\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=x_0}^{x_1}dt.$$

Так как для существования максимума функции Лагранжа необходимо, чтобы приращение ΔL обращалось в нуль, имеем:

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0;\ t_0<t<t_1;\ x_0<x<x_1;$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -\left(\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} + a^2\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2}\right);\ t_0 < t < t_1;\ x_0 < x < x_1; \qquad (5.4.23)$$

$$p(t_0, x) = p(t_1, x);\ x_0 < x < x_1;$$

$$p(t, x_0) = p(t, x_1);\ t_0 < t < t_1;$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=x_1};\ t_0 < t < t_1.$$

Учитывая, что из определения гамильтониана следует, что

$$\frac{\partial H}{\partial p} = f(t,x,y,u),$$

уравнение (5.4.6), которое также является необходимым условием оптимальности, можно переписать в виде

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \mathcal{D}y;\ t_0 < t < t_1;\ x_0 < x < x_1.$$

Наконец, определим сопряженный оператор формулой (5.4.18) и перепишем уравнение (5.4.23) в виде

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -\mathcal{D}^* p;\ t_0 < t < t_1;\ x_0 < x < x_1.$$

Утверждение полностью доказано. ❑

Замечание. В общем случае, когда на управление u наложено ограничение $\{u(t,x)\} \in \Omega$, условие (5.4.11) заменяется на такое:

$$\max_{\{u(t,x)\}\in\Omega} H(t,x,y,u,p);\ t_0 < t < t_1;\ x_0 < x < x_1.$$

Аналогичные утверждения справедливы и для других типов уравнений в частных производных.

Все рассуждения для уравнения гиперболического типа аналогичны приведенным, с той лишь разницей, что дифференциальный оператор уравнения

$$\mathcal{D}\cdot = \frac{\partial^2 \cdot}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2},$$

а сопряженный ему дифференциальный оператор

$$\mathcal{D}^* \cdot = -\frac{\partial^2 \cdot}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2}.$$

В случае уравнения эллиптического типа

$$\mathcal{D} \cdot = \frac{\partial^2 \cdot}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2},$$

$$\mathcal{D}^* \cdot = -\frac{\partial^2 \cdot}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2}.$$

Модель распространения инноваций в условиях пространственной неоднородности экономики

Под $N(t, x)$ будем понимать количество лицензий на новшество (или иную интеллектуальную собственность), проданных к моменту t в точке x.

Координата x введена в модель для учета пространственной неоднородности экономики. Так, например, для экономики России характерны существенные различия между Федеральным центром и периферией как в технологических параметрах (интернет, телефония, компьютеризация и т. д.), так и в организационно-экономических (концентрация в Центре существенной части финансовых ресурсов, научных и образовательных учреждений и т. п.).

Будем считать, что к начальному моменту времени $t = 0$ инновация прошла нулевой цикл (например, уже готов опытный образец продукта); это означает, что известно некоторое начальное распределение

$$N_0(x) = N(0, x). \qquad (5.4.1)$$

Предполагается, что изменение $N(t, x)$ в точке x связано с диффузией, т. е. с распространением инновации между соседними пространственными точками (описываемым второй производной $\partial^2 N / \partial x^2$), и с распространением инновации в данной точке (такое распространение естественно описать функцией

$$(a+bN)(M-N),$$

соответствующей относительно быстрому распространению инновации в данной точке на начальных этапах и постепенному замедлению ее распространения со временем). Такой феноменологический подход приводит к уравнению

$$\frac{\partial N}{\partial t} = g^2(t,x,c)\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \big(a(t,x,c) + b(t,x,c)N\big)(M-N), \quad (5.4.2)$$

коэффициенты которого a, b и g зависят и от времени t, и от пространства x, и от цены c.

В частности, если рассматривать модель с пространственной неоднородностью, то коэффициенты a, b и g представляют собой нелинейные и в общем случае разрывные (по пространственной координате) функции.

Сформулируем задачу оптимального управления распространением инновации как *задачу максимизации интегральной дисконтированной полезности дохода от проданных лицензий за время* $[0, T]$ *по всему пространству:*

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} u\big(c(t,x)N(t,x)\big)\mathrm{e}^{-\delta t}\,dxdt \to \max, \quad (5.4.3)$$

где $u(z)$ — функция полезности денег (например, можно взять $u(z) = \ln z$), $c(t,x)$ — норма дохода на одну лицензию (роялти), δ — сила роста безрисковых процентов.

Исследуемая модель (5.4.1)—(5.4.2) представляет собой задачу Коши для уравнения теплопроводности с нелинейным (разрывным) коэффициентом диффузии и нелинейной (разрывной) функцией источника.

Решение задачи оптимального управления процессом, описываемым моделью (5.4.1)—(5.4.3), можно провести с помощью обобщенного принципа максимума Понтрягина, сформулированного в утверждении 5.2.2.

Резюме

Итак, в отрасли разработки программного обеспечения, описываемой моделью Харрода — Домара с учетом случайных изменений темпа прироста капитала, не только экономический рост (когда $\rho\gamma - \mu > 0$) сопровождается бесконечным ростом дисперсии, но и экономический спад.

Вместе с тем, возможна ситуация экономического спада, сопровождающаяся неограниченным ростом дисперсии, а также детерминированный экономический спад (с дисперсией, стремящейся к нулю).

Если описывать динамику развития отрасли моделью Солоу с учетом случайных изменений темпа прироста капитала, то в зависимости от соотношения между изменчивостью темпа прироста капитала, эластичности выпуска по капиталу и скорректированного темпа выбытия капитала, дисперсии показателей развития отрасли могут оставаться конечными положительными числами или неограниченно расти.

Наконец, следует отметить, что решения детерминированных аналогов всех трех построенных стохастических моделей завышены по сравнению с математическими ожиданиями случайных процессов, представляющих собой решения соответствующих стохастических моделей.

Предложенное обобщение принципа максимума Понтрягина представляется удобным для аналитического решения большого числа задач оптимального управления распределенными процессами, в частности, для решения задачи оптимального управления распространением инноваций в географически неоднородных экономических системах.

Основные выводы

1. Рынок программного обеспечения представляет собой рынок знаний и существенно отличается от традиционных рынков, прежде всего, особыми свойствами продуктов — дискретностью, отсутствием редкости и наличием автора. Эти свойства лежат в основе несоответствия поведения производителей программных продуктов целям своей деятельности: производители традиционных коммерческих программных продуктов вынуждены изобличать распространителей и пользователей пиратских копий вместо того, чтобы заниматься исключительно производством. На основе любого несоответствия можно построить инновацию, и такой инновацией на рынке программного обеспечения стали некоммерческие продукты — свободное программное обеспечение и программное обеспечение с открытым кодом.

2. Статистический анализ реальных данных продемонстрировал, что объем распространения некоммерческих программных продуктов сверхэластичен по инвестициям: увеличение инвестиций в некоммерческий программный продукт на 1% ведет в среднем к увеличению количества инсталляций более чем на 1%! Кроме того, показано, что современный рынок серверных операционных систем является площадкой серьезной конкуренции коммерческого продукта *Microsoft Windows* и некоммерческого продукта *Linux*, оба из которых занимают приблизительно по 40% рынка. При этом более низкая стоимость владения некоммерческим продуктом, чем аналогичным коммерческим, а также меньшее количество дефектов и более высокая скорость реакции на сообщения пользователей о найденных ошибках не ведут автоматически к полному отказу пользователей от использования коммерческих продуктов.

3. Построенные простейшие статические модели демонстрируют, что, во-первых, потребителям выгоднее конкуренция коммерческого и некоммерческого производителей, чем конкуренция двух производителей, оба из которых максимизируют свою прибыль; во-вторых, производителю коммерческого программного обеспечения также предпочтительнее конкурировать с некоммерческим производителем, чем с участником рынка, максимизирующим прибыль; в-третьих, вне зависимости от склонности производителей и пользователей программного обеспечения к риску рациональный пользователь только в половине случаев предпочтет приобрести лицензионное программное обеспечение, а рациональный производитель никогда не будет инициировать проверок легальности использования его продукта пользователями. Полученные результаты свидетельствуют о несовершенстве подхода производителя к коммерциализации разработанного им программного обеспечения на основе продажи лицензий.

4. Построенная динамическая модель смешанной дуополии производителей коммерческого и некоммерческого программных продуктов позволила проанализировать механизм конкуренции на примере рынка серверных операционных систем. Оказалось, что если рассматривать рынок без пиратства и считать переменные издержки производителя коммерческого продукта нулевыми, то в таких условиях коммерческий и некоммерческий продукты сосуществуют на рынке только в том случае, когда увеличение числа пользователей некоммерческого продукта больше усиливает его бренд, чем ослабляет бренд его коммерческого конкурента; если же это не так, то коммерческий продукт полностью вытесняет некоммерческий продукт с рынка. При этом при отсутствии теневого рынка нелегальных копий программного обеспечения и в условиях нулевых переменных издержек коммерческого производителя последний ни при каких условиях не может быть вытеснен с рынка некоммерческим конкурентом.

5. И цена, и мгновенный объем продаж, и мгновенная прибыль коммерческого производителя в смешанной дуополии меньше, чем если бы конкурирующего некоммерческого продукта на рынке не было, причем этот факт не зависит ни от каких свойств рынка и конкурирующих на нем продуктов.

6. Распространение пиратских копий коммерческого программного продукта в небольших объемах только стимулирует увеличение доли коммерческого продукта на рынке, но начиная с определенной доли пиратство вынуждает производителя покинуть рынок. Другой возможной причиной ухода производителя коммерческого продукта с рынка являются издержки по обеспечению технической поддержки.

7. Рынок, на котором *Microsoft* и *Intel* являются производителями — монополистами, описывается моделью, предложенной в 1838 г. А. Курно. В этой модели оптимальная цена лицензии на операционную систему должна быть равна цене аппаратного обеспечения, сумма прибыли и постоянных издержек у *Microsoft* и *Intel* совпадают, а спрос на персональные компьютеры сверхэластичен по цене операционной системы (даже с учетом доходов *Microsoft* от продажи комплементарных продуктов).

8. Построенная модель взаимодействия двух конкурирующих поставщиков операционных систем (*Microsoft* и *Linux*) с монопольным производителем аппаратного обеспечения (*Intel*) позволила заключить, что в таких условиях оптимальная цена аппаратного обеспечения приблизительно в два раза выше оптимальной цены лицензии на операционную систему, а сумма прибыли и постоянных издержек у *Microsoft* примерно в четыре раза меньше, чем у *Intel*.

9. Разработанная модель взаимодействия двух конкурирующих поставщиков аппаратного обеспечения (*Intel* и *AMD*) с двумя конкурирующими поставщиками операционных систем (*Microsoft* и *Linux*) продемонстрировала отсутствие рыночного равновесия в чистых стратегиях и необходимость постоянной динамической коррекции цен участниками рынка.

10. Исследование построенных стохастических аналогов известных детерминированных моделей экономических систем, выбранных для описания развития отрасли разработки программного обеспечения, показало, что в одних случаях дисперсии показателей развития отрасли могут оставаться конечными, в других — неограниченно расти со временем. Это означает принципиальное существование таких условий, в которых инновационные риски ограничены самой их природой, и таких условий, где инновационные риски не ограничены сверху. При этом решения детерминированных аналогов трех построенных стохастических моделей завышены по сравнению с математическими ожиданиями случайных процессов — решений соответствующих стохастических моделей.

11. Для учета территориальных различий — как в технологических параметрах, так и в организационно-экономических — модели распространения инноваций требуют учета пространственной неоднородности. Поставлен класс задач оптимального управления распространением инноваций с учетом пространственной неоднородности экономики и построен математический аппарат, позволяющий исследовать подобные распределенные экономические системы методами теории оптимального управления. Предложенное обобщение принципа максимума Понтрягина представляется удобным формализмом для аналитического решения большого числа задач оптимального управления распределенными процессами, возникающих как в экономике и финансах, так в физике и технике.

Список литературы

1. *Акерлоф Дж.* (*Akerlof G. A.*) The market for «lemons»: Quality uncertainty and the market mechanism. —Quarterly Journal of Economics. — 1970. — V. 84. —P. 488—500 (Рус. пер. *Акерлоф Дж.* Рынок «лимонов»: Неопределенность качества и рыночный механизм // THESIS. — 1994. — № 5. — С. 91—104).

2. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. — М.: Физматлит, 2005.

3. *Антипина О. Н., Иноземцев В. Л.* Диалектика стоимости в постиндустриальном обществе // Мировая экономика и международные отношения. — 1998. — № 5. — С. 48—59; № 6. — С. 48—59; № 7. — С. 19—29.

4. *Арнольд В. И.* «Жесткие» и «мягкие» математические модели. — М.: МЦНМО, 2004. — 32 с.

5. *Басс Ф.* (*Bass F. M.*) A new product growth for model consumer durables // Management Science. — 1969. — V. 15. — P. 215—227.

6. *Басс Ф.* (*Bass F. M.*) Empirical generalizations and marketing science: A personal view // Marketing Science. — 1995. — V. 14. — P. G6—G19.

7. *Басс Ф.* (*Bass F. M.*) The future of research in marketing: Marketing science // Journal of Marketing Research. — 1993. — V. 30. — P. 1—6.

8. *Бауэр Р., Коллар Э., Тан В.* Управление инвестиционным проектом: Опыт IBM. — М.: ИНФРА-М. 1995.

9. *Бекман М., Пу Т.* (*Beckmann M., Puu T.*) Spatial Economics: Potential, Density, and Flow. — Amsterdam, Holland: North-Holland Publishing Company, 1985.

10. *Беленький В. З.* Оптимальное управление: Принцип максимума и динамическое программирование. — М.: РЭШ, 2001.

11. *Бертран Ж.* (*Bertrand J.*) Review de theorie mathematique de la richesse sociale. Recherches sur les principles mathematique de la theorie des richesses // Journal des Savants. — 1883. —P. 499—508.

12. *Благодатских В. А., Середа С. А., Поскакалов К. Ф.* Экономико-правовые основы рынка программного обеспечения. — М.: Финансы и статистика, 2007.

13. *Блэк Б.* (*Black B.*) The corporate governance and market value of Russian firms // Emerging Markets Review. — 2001. — V. 2. — P. 89—108.

14. *Блэк Б., Лав И., Рачинский А.* (*Black B. S., Love I., Rachinsky A.*) Corporate governance and firms' market values: Time series evidence from // Emerging Markets Review. — 2006. — V. 7. — P. 361—379.

15. *Бранденбургер А., Нейлбуфф Б.* (*Brandenburger A., Nalebuff B.*). *Co-Opetition.* — NY., USA: Doubleday, 1996.

16. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1975.

17. *Бухвалов А. В.* Реальны ли реальные опционы // Российский журнал менеджмента. — 2006. — Т. 4. — № 3. — С. 77—84.

18. *Бухвалов А. В.* Реальные опционы в менеджменте: Введение в проблему // Российский журнал менеджмента. — 2004. — Т. 2. — № 1. — С. 27—56.

19. *Бухвалов А. В.* Реальные опционы в менеджменте: Классификация и приложения // Российский журнал менеджмента. — 2004. — Т. 2. — № 2. — С. 27—56.

20. *Бюджетное послание Президента Российской Федерации Федеральному Собранию Российской Федерации.* — 23 июня 2008 г. // http://kremlin.ru/appears/2008/06/23/2127_type63373_202940.shtml.

21. *Вальрас Л.* (*Walras L.*) Elements d'Economie Politique Pure. Lausanne, Switzerland.: Rouge, 1874.

22. *Варшавский Л. Е.* Исследование инвестиционных стратегий фирм на рынках капитало- и наукоемкой продукции: Производственные мощности, цены, технологические изменения. — М.: ЦЭМИ РАН, 2003. — 354 с.

23. *Варшавский Л. Е.* Методы и модели исследования инвестиционных стратегий фирм на рынках капиталоемкой и наукоемкой продукции: Дис... д-ра экон. наук: 08.00.13. — М.: ЦЭМИ РАН, 2004. — 425 с.

24. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. — М.: Факториал Пресс, 2002.

25. *Васин А. А.* Некооперативные игры в природе и обществе. — М.: МАКС Пресс, 2005.

26. *Васин А. А., Морозов В. В.* Теория игр и модели математической экономики. — М.: МАКС Пресс, 2005.

27. *Васюков Г.* Экспорт российского софта вырос до $2,3 млрд. // CNews. — 04.04.2008. — http://www.cnews.ru/news/top/index.shtml?2008/04/04/295618.

28. *Всемирный экономический форум. Отчет о мировой конкурентоспособности* (*World Economic Forum. The Global Competitiveness Report*). — 2008—2009. — http://www.weforum.org/pdf/GCR08/GCR08.pdf.

29. *Вэриан Х. Р., Фаррелл Дж., Шапиро К.* (*Varian H. R., Farrell J., Shapiro C.*) The Economics of Information Technology: An Introduction. — Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.

30. *Гейтс Б.* Бизнес со скоростью мысли. — М.: Олимп-Бизнес, 2001.

31. *Гивон М., Махаджан В., Мюллер Е.* (*Givon M., Mahajan V., Muller E.)* Software piracy: Estimation of lost sales and the impact on software diffusion // Journal of Marketing. — 1995. — V. 59. — P. 29—37.

32. *Гивон М., Махаджан В., Мюллер Е.* (*Givon M., Mahajan V., Muller E.)* Assessing the relationship between the user-based market share and unit sale-based market share for pirated software brands in competitive markets // Technological Forecasting and Social Change. — 1997. — V. 55. — P. 131—144.

33. *Гирсанов И. В.* Лекции по математической теории экстремальных задач. — М., Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2003.

34. *Годин В. В.* Стратегия управления развитием информационно-технологического комплекса. — М.: ГУУ, 2002.

35. *Годин В. В.* Управление инновационными процессами в информационных системах организации. — М.: ГУУ, 2004.

36. *Годин В. В.* Экономика информационных систем и технологий // Бизнес-образование. — 2001. —№ 2(11) . — С. 120—131.

37. *Гомперс П., Лернер Дж.* (*Gompers P. A., Lerner J.*) The Venture Capital Cycle. — Cambridge, USA: MIT Press, 1999.

38. *Государство прогнозирует коллапс бюджета*// Интерфакс — экономика. — 20.01.2009. — http://www.ifx.ru/txt.asp?id=1060296.

39. *Гоуэр А., Кузумано М.* (*Gawer A., Cusumano M.*) Platform Leadership: How Intel, Microsoft, and Cisco Drive Industry Innovation. Boston, USA: Harvard Business School Press, 2002.

40. *Грилихес Ц.* (*Griliches Z.*) Hibryd corn: An exploration in the economics of technological change // Econometrica. — 1957. — V. 25. — P. 501—522.

41. *Данилов В. И., Кошевой Г. А.* Экономики с инновационными товарами // Экономика и математические методы. — 2009. — Т. 45. — № 1. — С.44—55.

42. *Данилов В. И., Кошевой Г. А., Сотсков А. И.* (*Danilov V. I., Koshevoy G. A., Sotskov A. I.*) Equilibrium analysis of an economy with innovations // Journal of Mathematical Economics. — 1997. — V. 27. — P. 195—228.

43. *Данилов В. И., Кошевой Г. А., Сотсков А. И.* (*Danilov V. I., Koshevoy G. A., Sotskov A. I.*) Equilibrium at a market of intellectual goods // Mathematical Social Science. — 1994. — V. 27. — P. 133—144.

44. *Данилов В. И., Кошевой Г. А., Сотсков А. И.* Экономическое равновесие на рынке интеллектуальных товаров // Экономика и математические методы. — 1993. — Т. 29. — № 4. — С. 606—616.

45. *Деванбю П., Стабблбайн С.* (*Devanbu P. T., Stubblebine S.*) Software engineering for security: A roadmap // Proceedings of the Conference on The Future of Software Engineering: International Conference on Software Engineering: Limerick, Ireland, June 04—11, 2000. — Piscataway, USA: IEEE, 2000. — P. 3—22.

46. *Диксит А., Пиндик Р.* (*Dixit A., Pindyck R.*) Investment Under Uncertainty. — Princeton, USA: Princeton University Press, 1994.

47. *Додсон Дж., Мюллер Е.* (*Dodson J., Muller E.*) Models of new products diffusion through advertising and worth-of-mouth // Management Science. — 1978. — V. 24. — P. 1568—578.

48. *Докнер Е., Йоргенсен С.* (*Dockner E. Jorgensen S.*) New-product advertising in dynamic oligopolies // Methods and Models of Operations Research. — 1992. — V. 36. — P. 459—473.

49. *Докнер Е., Йоргенсен С.* (*Dockner E. Jorgensen S.*) Optimal pricing strategies for new products in dynamic oligopolies // Marketing Science. — 1988. — V. 7. — P. 315—334.

50. *Докнер Е., Йоргенсен С., Ван Лонг Н., Соргер Дж.* (*Dockner E., Jorgensen S., Van Long N., Sorger G.*) Differential Games in Economics and Management Science. — Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2000.

51. *Долан Р., Джойланд А., Мюллер Е.* (*Dolan R., Jeuland A., Muller E.*) Models of new-product diffusion: Extension to competition against existing and potential firms over time // Innovation Diffusion Models of New Product Acceptance / Eds.: V. Mahajan, Y. Wind. — Cambridge, USA: Ballinger Publishing Company, 1986. — P. 117—149.

52. *Домар Е.* (*Domar E. D.*) Capital Expansion, Rate of Growth and Employment // Econometrica. — 1946. — V. 14. — P. 137—147.

53. *Домар Е.* (*Domar E. D.*) Expansion and Employment // American Economic Review. — 1947. — V. 37. — № 1. — P. 343—355.

54. *Домар Е.* (*Domar E.*) Essays in the Theory of Economic Growth. — NY., USA: Basic Books, 1957.

55. *Друкер П.* (*Druker P. F.*) Innovation and Entrepreneurship. — NY., USA: HarperBusiness, 1985 (Рус. пер. *Друкер П. Ф.* Бизнес и инновации. — М.: Вильямс, 2007).

56. *Дуб Дж.* Вероятностные процессы. — М.: Издательство иностранной литературы, 1956.

57. *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1965. — Т. 5. — № 3. — С. 395 — 453.

58. *Егоров А. И.* Основы теории управления. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

59. *Ермак Д.* (*Yermack D.*) Higher market valuation of companies with a small board of directors // The Journal of Financial Economics. — 1996. — V. 40. — P. 185—211.

60. *Жакод Ж.*, *Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1. – М.: Физматлит, 1994.

61. *Иансити М., Ричардс Г.* (*Iansiti M., Richards G. L.*) The business of free software: Enterprise incentives, investment, and motivation in the open source community // Harvard Business School Working Paper. — 2006. — № 07—028.

62. *Инновационный менеджмент в России: Вопросы стратегического управления и научно-технологической безопасности* / Рук. авт. колл.: В. Л. Макаров, А. Е. Варшавский. — М.: Наука, 2004. — 880 с.

63. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. — М.: Прогресс, 1975.

64. *Йоффе Д., Касадесус-Масанелл Р., Матту С.* (*Yoffie D., Casadesus-Masanell R., Mattu S.*) Wintel (A): Cooperation or Conflict: Harvard Business School Case № 9-704-419. — Boston, USA: Harvard Business School Press, 2004.

65. *Калиш С., Махаджан В., Мюллер Е.* (*Kalish S., Mahajan V., Muller E.*) Waterfall and sprinkler new-product strategies in competitive global markets. — International Journal of Research in Marketing. — 1995. — V. 12. — P. 105—119.

66. *Калиш С., Сен С.* (*Kalish S., Sen S. K.*) Diffusion models and the marketing mix for single products // Innovation Diffusion Models of New Product Acceptance / Eds.: V. Mahajan, Y. Wind. — Cambridge, USA: Ballinger Publishing Company, 1986. — P. 87—115.

67. *Капитализация ОАО «РБК Информационные Системы»* // Портал рейтингового агентства «Эксперт РА». — http: // www.raexpert.ru/database/companies/oao_rbk_informatsionnye_sistemy/?paramgroup_id=43.

68. *Капитоненко В. В.* Защитные портфели и опционное хеджирование. — М.: ГУУ, 2001.

69. *Касадесус-Масанелл Р., Гемават П.* (*Casadesus-Masanell R., Ghemawat P.*) Dynamic mixed duopoly: A model motivated by Linux vs Windows // Management Science. — 2006. — V. 52. — № 7 (July). — P. 1072—1084.

70. *Касадесус-Масанелл Р., Йоффе Д. Б.* (*Casadesus-Masanell R., Yoffie D. B.*) Wintel: Cooperation and conflict // *Management Science*. — 2006. — V. 53. — № 4 (April). — P. 584—598.

71. *Касадесус-Масанелл Р., Нейлбуфф Б., Йоффе Д.* (*Casadesus-Masanell R., Nalebuff B., Yoffie D.*) Competing Complements: NET Institute Working Paper № 07-44. — NY., USA: NET Institute, 2007. — http://www.netinst.org/Casadesus_07-44.pdf.

72. *Кац М. Л., Шапиро К.* (*Katz M. L., Shapiro C.*) Network externalities, competition, and compatibility // The American Economic Review. — 1985. — V. 75. — № 3. — P. 424—440.

73. *Клэппер Л., Лав И.* (*Klapper L. F., Love I.*) Corporate governance, investor protection, and performance in emerging markets // Journal of Corporate Finance. — 2004. — V. 10. — P. 287—322.

74. *Козырев А. Н.* Использование реальных опционов в инновационных проектах: Доклад на общем собрании Отделения общественных наук РАН: 2 марта 2005 г. — http://kozyrev.labrate.ru/doklad-02-03-2005.pdf.

75. *Козырев А. Н.* Общее равновесие в экономике с рынками продуктов и лицензий // Социально-экономические процессы в новых условиях хозяйствования: Тезисы докладов Всесоюзной школы-семинара: Кишинев, май 1989 г. — С. 163—164.

76. *Козырев А. Н.* Оценка интеллектуальной собственности. — М.: Экспертное бюро-М, 1997.

77. *Козырев А. Н.* Экономика пиратства: Создание и уничтожение стоимости: Тезисы к обсуждению. — М. .: ЦЭМИ РАН, 2008. — http: // www.labrate.ru/kozyrev/voprosy_dlya_obsuzhdeniya_cemi_25-06- 2008.htm.

78. *Колемаев В. А.* Математическая экономика. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.

79. *Колемаев В. А., Гатауллин Т. М, Малыхин В. И., Соловьев В. И. и др.* Математические методы и модели исследования операций: Учебник для вузов / Под ред. В. А. Колемаева. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2008. — 592 с.

80. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. − М.: ФАЗИС, 1998 (1-е изд. — 1933 г.).

81. *Коннорс М., Тейчроу Д.* (*Connors M. M., Teichroew D.*) Optimal Control of Dynamic Operations Research Models. — Scranton, USA: International Textbook, 1967.

82. *Консолидированная финансовая отчетность ОАО «РБК Информационные Системы» за 2007 г. //* Официальный сайт ОАО «РБК Информационные Системы». — http://www.rbcinfosystems.ru/ir/2007_rus.pdf.

83. *Консолидированная финансовая отчетность корпорации Microsoft за 2008 г.* // Портал MoneyCentral. — http://moneycentral.msn.com/investor/invsub/results/statemnt.aspx?Symbol=MSFT z&lstStatement=Balance&stmtView=Ann.

84. *Котировки акций корпорации Microsoft // Портал MoneyCentral.* — http://moneycentral.msn.com/detail/stock_quote?Symbol=msft.

85. *Коуз Р.* (*Coase R. H.*) The Firm, the Market and the Law. — Chicago, USA: University of Chicago Press, 1988 (Рус. пер. *Коуз Р.* Фирма, рынок и право. — М.: Дело, 1993).

86. *Коулман Дж., Катц Э., Менцель Х.* (*Coleman J. S., Katz E., Menzel H.*) The diffusion of an innovation among physicians // Sociometry. — 1957. — V. 20. — P. 253—269.

87. *Коулман Дж., Катц Э., Менцель Х.* (*Coleman J. S., Katz E., Menzel H.*) Medical Innovation: A Diffusion Study. — Indianapolis, USA: Bobbs-Merril, 1966.

88. *Кришнан Т., Басс Ф., Кумар В.* (*Krishnan T. V., Bass F. M., Kumar V.*) Impact of a Late Entrant on the Diffusion of a New Product/Service // Journal of Marketing Research. — 2000. — V. 37. — P. 269—278.

89. *Кротов В. Ф., Гурман В. И.* Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973.

90. *Куан Дж.* (*Kuan J. W.*) Open Source Software as Consumer Integration Into Production. — http://ssrn.com/abstract=259648.

91. *Кузумано М., Сэлби Р.* (*Cusumano M. A., Selby R. W.*) Microsoft Secrets: How the World's Most Powerful Software Company Creates Technology, Shapes Markets, and Manages People. — NY., USA: Free Press, 1995.

92. *Курно А.* (*Cournot A.-A.*) Recherches sur les Principes Mathematic de la Theorie des Richesses. — Paris: Calmann Levy, 1838.

93. *Лагоша Б. А., Апалькова Т. Г.* Оптимальное управление в экономике: Теория и приложения. — М.: Финансы и статистика, 2008.

94. *Лазарсфельд П., Берельсон Б., Гаудет Х.* (*Lazarsfeld P. F., Berelson B., Gaudet H.*) The People’s Choice. — NY., USA: Columbia University Press, 1948.

95. *Лебедев В. В.* Математическое моделирование социально-экономических процессов. — М.: Изограф, 1997. — 224 с.

96. *Лебедев В. В., Лебедев К. В.* Динамическая модель монополии при неравновесной цене // Научная конференция по математической экономике и эконометрике, посвященная памяти В. А. Колемаева: Тезисы докладов: Москва, 22 июня 2009 г. — М.: Вега-Инфо, 2009.

97. *Лебедев В. В., Лебедев К. В.* Динамическая модель монополии с учетом инвестиционных и амортизационных процессов // Государственное управление в 21 веке: традиции и инновации: Сборник трудов 6-й международной конференции: Москва, 29—31 мая 2008 г. — М.: РОССПЭН, 2008.

98. *Лебедев В. В., Лебедев К. В.* Математическое и компьютерное моделирование экономики. — М.: НВТ-Дизайн, 2002. — 256 с.

99. *Лебедев В. В., Лебедев К. В.* Об устойчивости оптимального решения динамической модели монополии с неравновесной ценой // Системное моделирование социально-экономических процессов: Международная научная школа-семинар имени академика С. С. Шаталина. — М.: ЦЭМИ, 2009.

100. *Лелеков А. Г., Разумихин М. В., Соловьев В. И.* Государственное регулирование отношений в сфере средств массовых коммуникаций // Экономика. Управление. Культура: Сборник научных работ. — Вып. 7. — М: Издательский центр научных и учебных программ, 2000. — С. 17—25.

101. Леонард Д., Лонг Н. (*Leonard D., Long N.*) Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics. — Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1992.

102. *Ли Д., Мендельсон Х.* (*Lee D., Mendelson H.*) Divide and conquer: Competing with free technology under network effects // Production and Operations Management. — 2008. — V. 17, — № 1. — P. 12—28.

103. *Лилиен Г., Рао А., Калиш С.* (*Lilien G. L., Rao A., Kalish S.*) Bayesian estimation and control of detailing effort in a repeat-purchase diffusion environment // Management Science. — 1981. — V. 27. — P. 493—506.

104. *Лимитовский М. А.* Инвестиционные проекты и реальные опционы на развивающихся рынках. — М.: Дело, 2004.

105. *Макаров В. Л., Васильев В. А.* Информационное равновесие и ядро в обобщенных моделях обмена // Доклады АН СССР. — 1984. — Т. 275. — С. 549—553.

106. *Макаров В. Л.* Экономика знаний: Уроки для России // Вестник Российской академии наук. — 2003. — Т. 73. — № 5. — С. 450—456.

107. *Макаров В. Л., Клейнер Г. Б. Микроэкономика знаний.* — М.: Экономика, 2007.

108. *МакАфи П., МакМиллан Дж., Уинстон М.* (*McAfee P., McMillan J., Whinston M.*) Multiproduct monopoly, commodity bundling, and correlation of values // Quarterly Journal of Economics. — 1989. — V. 104. — № 2. — P. 371—383.

109. *Малков С. Ю.* Математическое моделирование исторических процессов // Новое в синергетике: Взгляд в третье тысячелетие / Под ред. Г. Г. Малинецкого, С. П. Курдюмова. — М.: Наука, 2002. — С. 291 — 323.

110. *Мангасарян О.* (*Mangasarian O. L.*) Sufficient Conditions for the Optimal Control of Non-linear Systems // SIAM Journal of Control. — 1966. — V. 4. — P. 139—152.

111. *Мартинс Ф., Нэсцименто В.* (*Martins F., Nascimento V.*) Dynamic pricing of repeat purchase goods // Economia / Portuguese Catholic University. — 1993. — V. 17. — P. 161—206.

112. *Махаджан В., Мюллер Е., Басс Ф.* (*Mahajan V., Muller E., Bass F. M.*) New product diffusion models in marketing: A review and directions for future research // Journal of Marketing. — 1990. — V. 54. — P. 1—26.

113. *Махаджан В., Мюллер Е., Басс Ф.* (*Mahajan V., Muller E., Bass F. M.*) New product diffusion models // Handbooks in Operations Research and Management Science / Eds.: J. Eliashberg, G. L. Lilien. — NY., USA: Elsevier Science Publishers, 1993. — P. 349—408.

114. *Махаджан В., Мюллер Е., Басс Ф.* (*Mahajan V., Muller E., Bass F. M.*) Diffusion of new products: Empirical generalizations and managerial uses // Marketing Science. — 1995. — V. 14. — P.G79—G88.

115. *Махаджан В., Мюллер Е., Винд Й.* (*Mahajan V., Muller E., Wind Y.*) New-Product Diffusion Models. — Dordrecht, Holland: Kluwer Academic Publishers, 2000.

116. *Махаджан В., Мюллер Е., Керин Р.* (*Mahajan V., Muller E., Kerin R.*) Introduction strategy for new product with positive and negative word-of-mouth // Management Science. — 1984. — V. 30. — P. 1389—1404.

117. *Махаджан В., Петерсон Р.* (*Mahajan V., Peterson R.*) *Models for Innovation Diffusion.* — Beverly Hills, USA: Sage, 1985.

118. *Махаджан В., Шарма С., Баззелл Р.* (*Mahajan V., Sharma S., Buzzell R.*) Assessing the Impact of Competitive Entry on Market Expansion and Incumbent Sales // Journal of Marketing. — 1993. — V. 57. — P. 39—52.

119. *Махаджан В., Шуман М.* (*Mahajan V., Schoeman M. E. F.*) Generalized model for time pattern of diffusion process // IEEE Transactions on Engineering Management. — 1977. — V. 24. — P. 12—18.

120. *Махлуп Ф.* (*Machlup F.*) Knowledge and Knowledge Production. — Princeton, USA: Princeton University Press, 1980.

121. *Махлуп Ф.* (*Machlup F.*) The Branches of Learning. — Princeton, USA: Princeton University Press, 1982.

122. *Махлуп Ф.* (*Machlup F.*) The Economics of Information and Human Capital. — Princeton, USA: Princeton University Press, 1984.

123. *Махлуп Ф.* (*Machlup F.*) The Production and Distribution of Knowledge in the United States. — Princeton, USA: Princeton University Press, 1962.(Рус. пер. *Махлуп Ф.* Производство и распространение знаний в США. — М.: Прогресс, 1966).

124. *Мачо-Стадлер И., Перес-Кастрилло Д.* (*Macho-Stadler I., Perez-Castrillo D.*) An Introduction to the Economics of Information. — Oxford, UK: Oxford University Press, 1997.

125. *Мельников А. В. Волков С. Н., Нечаев М. Л.* Математика финансовых обязательств. — М.: ГУ ВШЭ, 2001.

126. *Мельников А. В.* Риск-менеджмент: Стохастический анализ рисков в экономике финансов и страхования. — М.: Анкил, 2001.

127. *Мельников А. В.* Финансовые рынки: стохастический анализ и расчет производных ценных бумаг. — М.: ТВП, 1997.

128. *Милгром П., Робертс Дж.* (*Milgrom P., Roberts J.*) Economics, Organization and Management. NY., USA: Prentice Hall, 1992.

129. *Моделирование экономических процессов / Под ред.* М. В. Грачевой, Л. Н. Фадеевой, Ю. Н. Черемных. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.

130. *Молхо Я.* (*Molho I.*) The Economics of Information: Lying and Cheating in Markets and Organizations. — Cambridge, USA: Blackwell, 1997.

131. *Мэнсфилд Э.* (*Mansfield E.*) Technical change and the rate of imitation // Econometrica. — 1961. — V. 29. — P. 741—766.

132. *Нейлбуфф Б.* (*Nalebuff B.*) Bundling as an entry barrier // Quarterly Journal of Economics. — 2004. — V. 119. — № 1. — P. 159—187.

133. *Основы* теории оптимального управления / Кротов В. Ф., Лагоша Б. А., Лобанов С. М. и др.; под ред. В. Ф. Кротова. — М.: Высшая школа, 1990.

134. *Официальный сайт проекта OLPC — One Laptop Per Child («Ноутбук каждому ребенку»).* — http://www.laptop.org/.

135. *Паркер П.* (*Parker P.*) Aggregate diffusion forecasting models in marketing: A critical review // International Journal of Forecasting. — *1994*. — *V*. 10. — P. 353—380.

136. *Паркер П.* (*Parker P.*) Choosing among diffusion models: Some empirical evidence // Marketing Letters. — 1993. — V. 4. — P. 81—94.

137. *Паркер П., Гатиньон Х.* (*Parker P., Gatignon H.*) Competitive effects in diffusion models // International Journal of Research in Marketing. — 1994. — V. 11. — P. 17—39.

138. *Перминов С. Б.* Проблемы интеграции России в глобальную постиндустриальную экономику // Россия в глобализирующемся мире: Политико-экономические очерки / Отв. ред. Д. С. Львов. — М.: Наука, 2004. — С. 416—432.

139. *Петерсон Р., Махаджан В.* (*Peterson R., Mahajan V.*) Multi-product growth models // Research in Marketing / Ed. J. Sheth. — V. 1. — Greenwich, UK: CT: JAI Press, 1978. — P. 201—231.

140. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1983.

141. Портал агентства *IDC*. — http://www.idc.com/.

142. *Пу Т.* Нелинейная экономическая динамика. – Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 2000.

143. *Рао А., Ямада М.* (*Rao A., Yamada M.*) Forecasting with a repeat purchase diffusion model // Management Science. — 1988. — V. 34. — P. 734—752.

144. *Рао Р., Басс Ф.* (*Rao R.C., Bass F. M.*) Competition, strategy, and price dynamics: A theoretical and empirical investigation // Journal of Marketing Research. — 1985. — V. 22. — P. 283—296.

145. *Расмусен Э.* (*Rasmusen E.*) Games and Information: An Introduction to Game Theory. — Cambridge, USA: Blackwell, 1994.

146. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы. — М.: Наука, 1989.

147. *Розоноэр Л. И.* Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем: Ч. I, II, III // Автоматика и телемеханика. — 1959. — Т. 20. — № 10. — С. 1320—1334; № 11. — С. 1441—1458; № 12. — с. 1561—1578.

148. *Росс Д.* (*Ross D. R.*) Learning to dominate // The Journal of Industrial Economics. — 1986. — V. 34. — № 4 (June). — P. 337—353.

149. *России не хватит своих денег уже через год* // Интерфакс — экономика. — 20.01.2009. — http://www.ifx.ru/txt.asp?id=1060296.

150. *Салани Б.* (*Salanie B.*) The Economics of Contracts: A Primer. — Boston, USA: MIT Press, 1997.

151. *Салтэн Ф., Фарли Дж., Леманн Д.* (*Sultan F., Farley J., Lehmann D.*) A meta-analysis of applications of diffusion models // Journal of Marketing Research. — 1990. — V. 27. — P. 375—388.

152. *Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Наука, 1997.

153. *Самуэльсон П.* (*Samuelson P.*) Rational theory of warrant pricing // Industrial Management Review. — 1965. — V. 6. — P. 41—49.

154. *Свободное программное обеспечение и операционная система GNU* (Free Software and the GNU Operating System) // Free Software Foundation. — http://www.fsf.org/about/.

155. *Середа С. А.* Анализ рисков и минимизация потерь от нелегального распространения программных продуктов: Дисс. ... канд. экон. наук: 08.00.13. — М., 2005.

156. *Середа С. А.* Экономический анализ поведения участников рынка программного обеспечения // ИНФОРМОСТ: Радиоэлектроника и телекоммуникации. — 2002. — № 6 (24). — С. 4—9.

157. *Смирнов А. Д.* Лекции по макроэкономическому моделированию. — М.: ГУ ВШЭ, 2000.

158. *Соловьев В. И.* (*Soloviev V. I.)* Competition of commercial and free software at the growing market // Sustainable Development through Technological Change: The Sixth International Conference on Management of Technological Changes (MTC—2009): Proceedings:

September 3—5, 2009, Alexandroupolis, Greece. — Xanthi, Greece: Democritus University of Thrace, 2009. — P. 806—811.

159. *Соловьев В. И.* (*Soloviev V. I.)* Current state of Windows / Linux competition in the East-Asian server operating systems market // Модернизация экономики и развитие менеджмента: Материалы IX конференции Международной федерации ассоциаций менеджмента Восточной Азии (IFEAMA): Москва, 1—2 октября 2008 г. — М.: ГУУ, 2008. — С. 122—126.

160. *Соловьев В. И.* (*Soloviev V. I.)* Duopoly of Linux and Microsoft as competing server operating systems // Evolution and Revolution in the Global Knowledge Economy: Enhancing Innovation and Competitiveness Worldwide: Global Business and Technology Association Tenth International Conference: Readings Book: July 8—12, 2008, Madrid, Spain. — NY., USA: GBATA, 2008. — P. 1041—1044.

161. *Соловьев В. И.* (*Soloviev V. I.)* Macroeconomic dynamics: Stochastic approach // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2001. — Т. 8. — № 1. — С. 386—387.

162. *Соловьев В. И.* (*Soloviev V. I.*) Mathematical modelling of co-opetition at the modern IT market // 2009 International Conference on Management Science and Engineering: 16th Annual Conference Proceedings: September 14—16, 2009, Moscow, Russia. — Piscataway, USA: IEEE, 2009. — P. 1107—1109.

163. *Соловьев В. И.* (*Soloviev V. I.)* Mathematical modelling of strategic commitments and piracy in Windows / Linux competition // 2008 International Conference on Management Science and Engineering: 15th Annual Conference Proceedings: September 10—12, 2008, Long Beach, USA. — Piscataway, USA: IEEE, 2008. — P. 10—12.

164. *Соловьев В. И.* (*Soloviev V. I.)* Optimal control of distributed systems and its applications in economics // Математическое моделирование социальной и экономической динамики (MMSED—2004): Труды Международной конференции: Москва, 23—25 июня 2004 г. — М.: РГСУ, 2004. — С. 343—346.

165. *Соловьев В. И.* (*Soloviev V. I.)* Optimal Control of Innovations Diffusion in Spatially Heterogeneous Economy // Конкурентоспособность в условиях информационного общества: Опыт стран БРИК: Материалы Международной научно-практической конференции: Москва, 22—24 октября 2008 г. — М.: ГУУ, 2008. — С. 359—361.

166. *Соловьев В. И.* (*Soloviev V. I.)* Standards competition and cooperation at the computer hardware and software market // Business Strategies and Technological Innovations for Sustainable Development: Creating Global Prosperity for Humanity: Global Business and Technology Association Eleventh International Conference: Readings Book: July 7—11, 2009, Prague, Czech Republic. — NY., USA: GBATA, 2009. — P. 1087—1093.

167. *Соловьев В. И.* Стохастическая модель диффузии инноваций // Математические методы в технике и технологиях — ММТТ—22: Сборник трудов XXII Международной научной конференции: Псков, 25—28 мая 2009 г. — Т. 8. Секция 8. Математические методы и задачи в экономике, менеджменте и гуманитарных науках. — Псков: Издательство ППИ, 2009. — С. 96—100.

168. *Соловьев В. И.* Асимметрия информации на рынке лицензионного и нелицензионного программного обеспечения // Образование. Наука. Научные кадры. — 2008. — № 2 — С. 24—27.

169. *Соловьев В. И.* Вероятностный анализ показателей развития экономики России на основе её односекторной стохастической динамической модели // Актуальные проблемы управления—2000: Материалы Международной научно-практической конференции: Москва, октябрь 2000 г. — Вып. 5. — М.: ГУУ, 2000. — С. 165—168.

170. *Соловьев В. И.* Единство и различия детерминированных и стохастических динамических моделей в преподавании теории вероятностей // Современные информационные технологии в профессиональном образовании: Материалы VI Международной научно-методической конференции: Москва, январь 2000 г. — Вып. 4. — М.: МГТА, 2000. — С. 176—180.

171. *Соловьев В. И.* Золотое правило накопления в стохастической модели Солоу // Сборник трудов Института гуманитарного образования. — Вып. 2. — М.: РИПО ИГУМО, 2003. — С. 70—84.

172. *Соловьев В. И.* Математические методы управления рисками: Учебное пособие для вузов. — М.: ГУУ, 2003. — 100 с.

173. *Соловьев В. И.* Математическое моделирование инструментов управления инновационными рисками в рыночной инфраструктуре: Монография. — М.: Институт проблем рынка РАН, 2006. — 110 с.

174. *Соловьев В. И.* Модель смешанной дуополии производителей коммерческого и открытого программного обеспечения // Актуальные проблемы управления—2008: Материалы Всероссийской научной конференции: Москва, октябрь 2008 г. — Вып. 5. — М.: ГУУ, 2008. — С. 70—74.

175. *Соловьев В. И.* Неопределенность состояния экономики страны при управлении ею как одним сектором // Вестник университета / ГУУ. — Информационные системы управления. — 2000. — № 1. — С. 98—104.

176. *Соловьев В. И.* О неопределенности динамики макроэкономических показателей // Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических процессов: Материалы Российского научного симпозиума: Нарофоминск, 11—16 декабря 2000 г. — М.: ГУУ, 2000. — С. 210—211.

177. *Соловьев В. И.* О распределенных задачах оптимального управления в математической экономике и финансовой математике

// Совершенствование управления хозяйственно-финансовой деятельностью предприятий: Тезисы докладов межвузовской научно-практической конференции: Москва, декабрь 2004 г. — М.: РИПО ИГУМО, 2004. — С. 75—77.

178. *Соловьев В. И.* Обобщение принципа максимума Понтрягина для задачи оптимального управления нагревом стержня // Математические методы в технике и технологиях — ММТТ—18: Сборник трудов XVIII Международной научной конференции: Казань, 31 мая — 2 июня 2005 г. — Т. 2. Секция 2. Оптимизация и оптимальное управление технологическими процессами. — Казань: Издательство КГТУ, 2005. — С. 205—206.

179. *Соловьев В. И.* Обобщенный принцип максимума как необходимое условие оптимальности в распределенной задаче оптимального управления с ограничениями в частных производных // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2004. — Т. 11. — № 1. — С. 120—122.

180. *Соловьев В. И.* Односекторная стохастическая динамическая модель экономики // Математические методы исследования сложных систем, процессов и структур: Сборник научных трудов. — Вып. 3. — М.: Издательство МГОПУ, 2000. — С. 101—112.

181. *Соловьев В. И.* Оптимальное управление диффузией инноваций // Математическое моделирование социальной и экономической динамики (MMSED—2007): Труды 2-й Международной конференции: Москва, 20—22 июня 2007 г. — М.: РУДН, 2007. — С. 246—248.

182. *Соловьев В. И.* Принцип максимума Понтрягина в задачах оптимального управления распределенными системами, подчиняющимися уравнениям в частных производных // Вестник университета / ГУУ. — 2005. — № 1 (10). — С. 71—80.

183. *Соловьев В. И.* Принцип максимума Понтрягина для нелинейных задач оптимизации с уравнениями движения в частных производных // Нелинейный мир: Десятая междисциплинарная научная конференция: Тезисы докладов: Нижний Новгород, 27 июня — 2 июля 2005 г. — Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2005. — С. 129.

184. *Соловьев В. И.* Реальные опционы в стохастическом аналоге модели Харрода — Домара // Инновационное предпринимательство и управление знаниями: Тезисы докладов межвузовской научно-практической конференции: Москва, 28 ноября 2006 г. — М.: РИПО ИГУМО, 2006. — С. 81—84.

185. *Соловьев В. И.* Реальные опционы как инструмент оценки эффективности инновационных проектов // Вестник университета / ГУУ. — 2007. — № 1 (19). — С. 320—329.

186. *Соловьев В. И.* Современные подходы к учету случайности, неопределенности и риска при анализе макроэкономических

процессов // Вестник университета / ГУУ. — Информационные системы управления. — 2000. — № 3. — С. 228—247.

187. *Соловьев В. И.* Стохастическая модель национальной экономики // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2000. — Т. 7. — № 2. — С. 529—530.

188. *Соловьев В. И.* Стохастические методы в экономике и финансах: Проблемная лекция для вузов. — М.: ГУУ, 2000. — 52 с.

189. *Соловьев В. И.* Стохастические модели математической экономики и финансовой математики: Учебное пособие для вузов. — М.: ГУУ, 2001. — 92 с.

190. *Соловьев В. И.* Теоретико-игровая модель конфликта на рынке лицензионного и пиратского программного обеспечения // Математические методы в технике и технологиях — ММТТ—21: Сборник трудов XXI Международной научной конференции: Саратов, 27—30 мая 2008 г. — Т. 8. Секция 8. Математические методы и задачи в экономике, менеджменте и гуманитарных науках. — Саратов: Издательство СГТУ, 2008. — С. 108—109.

191. *Соловьев В. И.* Управление рисками при реализации инновационных проектов и реальные опционы // Инновации как основа ускоренного развития экономики России: Материалы межвузовской научной конференции: Москва, ноябрь 2005 г. — М.: РИПО ИГУМО, 2006. — с. 58—61.

192. *Соловьев В. И., Гостомельский А. В.* Инвестиции, банки и автоматизация // Банковские технологии. — 1997. — № 9. — С. 27—31.

193. *Соловьев В. И., Гостомельский А. В.* Проблемы автоматизации банковских систем // Программы. — 1997. — Т. 1. — № 2. — С. 4—7.

194. *Соловьев В. И., Курочкин П. А.* Статическая модель смешанной дуополии на рынке серверных операционных систем // Математические методы в технике и технологиях — ММТТ—22: Сборник трудов XXII Международной научной конференции: Псков, 25—28 мая 2009 г. — Т. 8. Секция 8. Математические методы и задачи в экономике, менеджменте и гуманитарных науках. — Псков: Издательство ППИ, 2009. — С. 101—105.

195. *Соловьев И. А., Соловьев В. И.* Параметрическая идентификация стохастического аналога модели Солоу // Вестник университета / ГУУ. — Информационные системы управления. — 2002. — № 1 (4). — С. 139—156.

196. *Солоу Р.* (*Solow R. M.*) Contribution to the theory of economic growth // Quarterly Journal of Economics. — 1956. — V. 70. — P. 65—94.

197. *Сотсков А. И., Колесник Г. В.* Управление динамическими системами в задачах экономики. — Тверь: ТвГУ, 2001.

198. *Спенс А. М.* (*Spence A. M.*) The learning curve and competition // The Bell Journal of Economics. — 1981. — V. 12. — № 1 (Spring). — *P*. 49—70.

199. *Стратегия развития информационного общества в Российской Федерации* / Утверждена Президентом Российской Федерации В. В. Путиным 7.02.2008. — № Пр-212. — http://minkomsvjaz.ru/ministry/documents/959/3257.shtml.

200. *Стюарт Т.* (*Stewart T. A.*) Intellectual Capital: The New Wealth of Organizations. — NY., USA; L., UK: Doubleday; Currency, 1998.

201. *Тенг Дж., Томпсон Р.* (*Teng J., Thompson R.*) Oligopoly models for optimal advertising when production costs obey a learning curve // Management Science. — 1983. — V. 29. — P. 1087—1101.

202. *Томпсон Р., Тенг Дж.* (*Thompson R., Teng J.*) Optimal pricing and advertising policies for new product oligopoly models // Marketing Science. — 1984. — V. 3. — P. 148—168.

203. *Турчин П.* (*Turchin P.*) Historical Dynamics: Why States Rise and Fall. – Princeton, USA: Princeton University Press, 2003.

204. *Управление социально-экономическим развитием России*: Концепции, цели, механизмы / Рук. авт. кол.: Д. С. Львов, А. Г. Поршнев. — М., Экономика, 2002.

205. *Фарелл Дж., Кац М. Л.* (*Farrell J., Katz M. L.*) Innovation, rent extraction, and integration in systems markets // Journal of Industrial Economics. — 2000. — V. 48. — № 4. — P. 413—432.

206. *фон Штакельберг Г.* (*von Stackelberg H.*) Marktform und Gleichgewicht. — Wien, Austria: Springer-Verlag, 1934.

207. *Форт Л., Вудлок Дж.* (*Fourt L. A., Woodlock J. W.*) Early prediction of market success for new grocery products // Journal of Marketing. — 1960. — V. 25. — P. 31—38.

208. *Фостер Р.* (*Foster R.*) Innovation: The Attacker's Advantage. — New York, USA: Summit Books, 1986.

209. *Хан М., Парк С., Кришнамурти Л., Золтнерс А.* (*Hahn M., Park S., Krishnamurthi L., Zoltners A.*) Analysis of new-product diffusion using a four-segment trial-repeat model // Marketing Science. — 1994. — V. 13. — P. 224—247.

210. *Харрод Р.* (*Harrod R. F.*) Towards a Dynamic Economics. — London, UK.: Macmillan, 1948 (Рус. пер. *Харрод Р. Ф.* К теории экономической динамики. — М.: Гелиос АРВ, 1999).

211. *Харрод Р.* (*Harrod R.*) Essay in dynamic theory // Economic Journal. — 1939. — V. 49. — P. 14—23.

212. *Хиршляйфер Дж., Райли Дж.* (*Hirshleifer J., Riley J.*) The Analytics of Uncertainty and Information. — Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1994.

213. *Хорски Д., Мэйт К.* (*Horsky D., Mate K. V.*) Dynamic advertising of competing durables good producers // Marketing Science. — 1988. — V. 7. — P. 356—367.

214. *Хэмблин Р., Джакобсен Б., Миллер Дж.* (*Hamblin R., Jacobsen B., Miller J. L.*) A Mathematical Theory of Social Change. — NY., USA: John Wiley & Sons, 1973.

215. *Чен М., Нейлбуфф К., Нейлбуфф Б.* (*Chen M., Nalebuff K., Nalebuff B.*) One-Way Essential Complements: *Cowles Foundation Discussion Paper* № 1588 / Yale University. — New Haven, USA: Yale University; Cowles Foundation for Research in Economics, 2006. — http://cowles.econ.yale.edu/P/cd/d15b/d1588.pdf.

216. *Ченг Л. К., Нам Дж.* (*Cheng L. K., Nahm J.*) Product boundary, vertical competition, and the double mark-up problem // RAND Journal of Economics. — 2007. — V. 38. — № 2. — P. 447—466.

217. *Четтери Р., Элиашберг Дж., Рао В.* (*Chatterjee R., Eliashberg J., Rao V.*) Dynamic models incorporating competition // New-Product Diffusion Models / Eds.: V. Mahajan, E. Muller, Y. Wind. — Dordrecht, Holland Kluwer Academic Publishers, 2000. — P. 165—205.

218. *Чой Дж., Стефанадис К.* (*Choi J., Stefanadis C.*) Tying, investment, and the dynamic leverage theory // *RAND Journal of Economics*. — 2001. — V. 32. — № 1. — P. 52—71.

219. *Шариф М., Раманатан К.* (*Sharif M., Ramanathan K.*) Binomial innovation diffusion models with dynamic potential adopter population // Technological Forecasting and Social Change. — 1981. — V. 20. — P. 63—87.

220. *Ширяев А. Н.* Вероятность: Т. 1. — М.: Физматлит, 2004.

221. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. — М.: ФАЗИС, 1998.

222. *Ширяев А. Н.* Статистический последовательный анализ. — М.: Наука, 1976.

223. *Шумпетер Й. А.* Теория экономического развития. — М.: Прогресс, 1982. — 456 с.

224. *Эдвинсон Л., Мэлон М.* (*Edvinson L., Malone M. S.*) Intellectual Capital: Realizing Your Company's Value by Finding its Hidden Roots. — NY., USA: HarperBusiness, 1997.

225. *Экономайдс Н.* (*Economides N.*) The economics of networks // International Journal of Industrial Organization. — 1996. — V. 14. — № 2. — P. 675—699.

226. *Экономика пиратства: Создание и уничтожение стоимости*: Стенограмма круглого стола. — М.: ЦЭМИ РАН, 2008. — http://www.labrate.ru/20080625/stenogramma.htm.

227. *Экономико-математический энциклопедический словарь* / Гл. ред. В. И. Данилов-Данильян. — М.: Большая Российская энциклопедия: ИНФРА-М, 2003. — 688 с.

228. *Элиашберг Дж., Джойланд А.* (*Eliashberg J., Jeuland A.*) The impact of competitive entry in developing market upon dynamic pricing strategies // Marketing Science. — 1986. — V. 5. — P. 20—36.

229. *Ю А.* (*Yu A.*) Creating the Digital Future. — NY., USA: Free Press, 1998.

230. *Юдкевич М. М., Подколзина Е. А., Рябинина А. Ю.* Основы теории контрактов: Модели и задачи. — М.: ГУ ВШЭ, 2002.

В. И. Соловьев

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЫНКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Монография

Редакторы *Ю. В. Добровольская, И. Г. Крейзер*.

Подписано в печать 11.09.2009. Формат 60×88 1/16. Гарнитура Журнальная.
Усл. печ. л. 11,0. Уч.-изд. л. 7,9. Тираж 1000 экз.

ООО «Вега-Инфо».
105077, Москва, Измайловский бульвар, 63/12, корп. 2.
www.vega-info.ru