The variance of forecast errors in econometric models: application to a nonlinear model of the Italian economy

Carlo Bianchi and Giorgio Calzolari

IBM Scientific Center, Pisa, Italy.

23. October 1978

LA VARIANZA DELL'ERRORE DI PREVISIONE NEI MODELLI ECONOMETRICI: APPLICAZIONE AD UN MODELLO NONLINEARE DELL'ECONOMIA ITALIANA

Carlo Bianchi e Giorgio Calzolari

Centro Scientifico IBM
via S. Maria 67 - Pisa

1. Introduzione

I modelli econometrici vengono spesso utilizzati per fornire previsioni, sia neutrali che sotto ipotesi alternative di politica economica. La possibilita' di valutare a priori l'affidabilita' delle previsioni riveste, pertanto, un particolare interesse. Cio' e' in parte possibile attraverso l'analisi delle proprieta' statistiche della variabile casuale "errore di previsione".

Nella previsione uniperiodale, condizionale alla conoscenza delle variabili predeterminate ed alla specificazione del modello, l'errore di previsione puo' essere scomposto in due componenti: una relativa all'errore sui coefficienti stimati (che sono variabili casuali) e l'altra relativa alla natura stessa delle variabili che debbono essere previste (presenza dei disturbi strutturali nelle equazioni stocastiche); nel seguito saranno spesso indicate, rispettivamente, come prima e seconda componente.

In questo lavoro vengono applicati al modello ISPE dell'economia italiana [9] alcuni algoritmi gia' proposti dagli autori e applicati al modello Klein-Goldberger [3]. Tali algoritmi, precedentemente collaudati sul modello lineare Klein-I, hanno portato ad una revisione critica di risultati noti nella letteratura econometrica [2].

Sotto condizioni molto generali [4], quando si fanno previsioni fuori del periodo campionario di stima, queste due componenti sono indipendenti; e' sufficiente, quindi, ottenere separatamente una stima delle rispettive varianze (matrici di covarianza) per valutare la varianza (matrice di covarianza) dell'errore di previsione.

Goldberger, Nagar e Odeh [4] derivano formule esplicite per la stima di queste due componenti; sfortunatamente queste formule si applicano soltanto a modelli lineari. Tuttavia, anche per modelli nonlineari, alcuni risultati analitici si possono derivare almeno per la componente relativa all'errore sui coefficienti stimati (paragrafi 3 e 4).

I vantaggi del metodo proposto, oltre a quello di essere applicabile anche a modelli nonlineari, consistono nel rendere operativamente piu' semplice il calcolo della componente dovuta all'errore sui coefficienti, componente che, come e' stato recentemente osservato [11], e' di gran lunga la piu' difficile a calcolarsi.

L'errore dovuto alla presenza dei disturbi strutturali sara' calcolato sia con tecniche di simulazione analitica (linearizzazione), sia con simulazione stocastica.

La metodologia descritta sara' applicata ad una versione del modello dell'Istituto di Studi per la Programmazione Economica (ISPE) stimato con una particolare versione del metodo dei minimi quadrati a due stadi con componenti principali (il cosiddetto metodo 4 di Kloek e Mennes [7]).

2. Definizione del problema

In generale, un modello econometrico lineare o nonlineare (sia nelle variabili che nei coefficienti), puo' essere formalizzato nel modo seguente:

$$F(Y_t, X_t, A) = U_t \tag{2.1}$$

dove:

$$F=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ f_m \end{bmatrix}; \quad Y_t=\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ . \\ . \\ y_{mt} \end{bmatrix}; \quad X_t=\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ . \\ . \\ x_{nt} \end{bmatrix}; \quad A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_s \end{bmatrix}; \quad U_t=\begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ . \\ . \\ u_{mt} \end{bmatrix};$$

F e' un vettore di operatori funzionali; le funzioni sono supposte continue e derivabili rispetto agli elementi di Y, X e A, con derivate prime continue.

Y_t e X_t sono vettori delle variabili endogene e predeterminate al tempo t = 1,2,...,T; nella previsione uniperiodale, essendo le variabili endogene ritardate trattate nello stesso modo delle variabili esogene, non e' necessario distinguere tra differenti tipi di variabili predeterminate.

A e' il vettore di tutti i coefficienti strutturali che devono essere stimati (non sono, cioe', inclusi, tutti gli altri coefficienti noti a priori).

U_t e' il vettore, al tempo t, dei disturbi strutturali; essi hanno media zero, covarianza finita e sono indipendenti dalle variabili predeterminate e dai disturbi dei periodi precedenti.

Ipotesi essenziali sono:

- l'esistenza di un vettore $\hat{A}$, stima consistente di A;
- la normalita' asintotica di $\sqrt{T}(\hat{A}-A)$ e cioe',

asintoticamente, $\sqrt{T}(\hat{A}-A)\sim N(0,\Sigma)$;

- disponibilita' di una stima consistente $(\hat{\Sigma})$ di Σ.

Per comodita' di esposizione definiamo inoltre i seguenti simboli:

h e' il periodo, non appartenente all'intervallo campionario di stima, in cui viene fatta la previsione uniperiodale;

$\bar{Y}_h$ e' il vettore per cui:

(2.2) $$F(\bar{Y}_h, X_h, A)=0;$$

cioe' $\bar{Y}_h$ e' la soluzione deterministica nel periodo di previsione h, condizionale ai veri coefficienti strutturali A e al vettore delle variabili predeterminate X_h.

$\hat{Y}_h$ e' il vettore delle previsioni al tempo h, cioe' la soluzione deterministica condizionale a X_h e $\hat{A}$, tale che:

(2.3) $$F(\hat{Y}_h, X_h, \hat{A})=0.$$

La forma ridotta del modello (2.1) puo' essere scritta come:

(2.4) $$Y_t = Y(X_t, A, U_t);$$

dove ovviamente il vettore di operatori funzionali Y e' generalmente sconosciuto se il modello e' nonlineare; tuttavia, in questo contesto, e' interessante notare che le sue derivate parziali possono essere calcolate analiticamente in un punto soluzione, come rapporto di due determinanti jacobiani, perfettamente conosciuti, in quanto essi coinvolgono soltanto la forma delle funzioni f_i.

Dalla equazione (2.4) segue che:

(2.5) $$\bar{Y}_h = Y(X_h, A, 0);$$

(2.6) $$\hat{Y}_h = Y(X_h, \hat{A}, 0);$$

(2.7) $$Y_h = Y(X_h, A, U_h).$$

Il vettore degli errori di previsione al tempo h puo', quindi, essere scritto come segue:

(2.8) $$\hat{Y}_h - Y_h = (\hat{Y}_h - \bar{Y}_h) + (\bar{Y}_h - Y_h).$$

La prima componente $(\hat{Y}_h - \bar{Y}_h)$ dipende solamente dall'errore sui coefficienti stimati, la seconda $(\bar{Y}_h - Y_h)$ dipende soltanto dal vettore dei disturbi strutturali U_h; trattandosi di disturbi al di fuori del periodo campionario utilizzato per la stima, le due componenti sono indipendenti.

3. La componente dovuta all'errore nella stima dei coefficienti

Nei modelli nonlineari, analogamente a quanto fatto in [4] per i lineari, le proprieta' del termine $(\hat{Y}_h - \bar{Y}_h)$ possono essere studiate in termini di teoria asintotica. La differenziabilita' della forma ridotta permette l'applicazione di teoremi sulla distribuzione asintotica di funzioni di variabili normali multivariate (si veda, ad esempio [8,p.322]).

Poiche' $\sqrt{T}(\hat{A}-A)$ e' distribuito asintoticamente come $N(0,\Sigma)$, $\sqrt{T}(\hat{Y}_h - \bar{Y}_h) = \sqrt{T}[Y(X_h, \hat{A}, 0) - Y(X_h, A, 0)]$ (ottenuta sostituendo la (2.5) e la (2.6) a $\bar{Y}_h$ e $\hat{Y}_h$ rispettivamente) e' asintoticamente distribuito come $N(0, G_h \Sigma G_h')$, dove G_h e' la matrice $(m \times s)$ delle derivate parziali $(\partial y_i / \partial a_k)$ calcolate nel punto $(X_h, A, 0)$; ognuna di queste derivate, come osservato nel paragrafo precedente, puo' essere calcolata analiticamente, una volta che il punto soluzione $\bar{Y}_h$ sia stato calcolato (in generale questo puo' essere fatto soltanto per mezzo di metodi di soluzione numerica), come rapporto di due determinanti jacobiani (teorema delle funzioni implicite).

Questo fornisce, almeno in parte, una soluzione analitica al problema. Cio' che e' importante notare e' che, anche se tale risultato e' nella forma tipica delle funzioni lineari, non coinvolge alcuna approssimazione a causa della linearizzazione; $G_h \Sigma G_h'$ e', infatti, l'esatta matrice di covarianza della distribuzione asintotica di $\sqrt{T}(\hat{Y}_h - \bar{Y}_h)$.

Calcolando le derivate $(\partial y_i / \partial a_k)$ nel punto $(X_h, \hat{A}, 0)$ si ottiene $\hat{G}_h$, una stima consistente di G_h; gli elementi diagonali di $(\hat{G}_h \hat{\Sigma} \hat{G}_h')/T$ sono le stime delle varianze asintotiche degli elementi di $(\hat{Y}_h - \bar{Y}_h)$.

4. Una procedura di simulazione analitica

Il calcolo della matrice $\hat{G}_h$ e' relativamente semplice usando una tecnica di simulazione analitica. $(\partial y_i / \partial a_k)$ puo', infatti, essere calcolato nel punto $(X_h, \hat{A}, 0)$, con sufficiente precisione, come $(\Delta y_i / \Delta a_k)$ prendendo convenienti valori di Δa_k.

Il calcolo completo della matrice $\hat{G}_h$ richiede, quindi, s+1 soluzioni del modello nel periodo di previsione h (una soluzione di controllo ed s soluzioni disturbate, una per ogni coefficiente strutturale stimato).

Il vantaggio nell'uso di tale metodo e' che esso non comporta differenza alcuna tra modelli lineari e nonlineari, non solo in teoria ma anche in pratica.

Nel caso particolare di modelli lineari, un'alternativa al metodo precedente sarebbe l'uso della formula proposta da Goldberger, Nagar e Odeh [4,p.562]; tuttavia l'applicazione pratica di tale formula comporta un maggiore utilizzo di spazio di memoria e tempo di calcolo, principalmente perche' essa e' basata sul calcolo preliminare della matrice $(mn \times mn)$ di covarianza asintotica $(\hat{\Omega})$ dei coefficienti di forma ridotta. Per esempio, nel calcolo della matrice $(\hat{\Omega})$ per il modello Klein-I (dove m=6 ed n=8), il programma descritto in [5], applicando il metodo proposto da Goldberger, Nagar e Odeh, richiede circa 10 secondi di tempo di CPU su un IBM/370 modello 168; approssimativamente lo stesso tempo e' necessario usando un programma analogo scritto al Centro Scientifico IBM di Pisa.

Usando, sullo stesso calcolatore, la procedura di simulazione analitica sopra descritta, sono necessari soltanto 0.05 secondi di tempo di CPU ed i risultati sono uguali fino alla quinta cifra decimale significativa.

Ovviamente ci si debbono attendere vantaggi piu' che proporzionali all'aumentare delle dimensioni del modello.

5. La componente dovuta ai disturbi strutturali

Per modelli lineari, le proprieta' statistiche del termine $(\bar{Y}_h - Y_h)$ sono ben note nella letteratura econometrica.

Per modelli nonlineari le proprieta' di questa componente sono generalmente sconosciute, sia per quanto riguarda la sua distribuzione, che riguardo ai momenti della distribuzione stessa; ad esempio e' noto che:

$$E[(\bar{Y}_h - Y_h) \mid X_h, A)] \neq 0. \tag{5.1}$$

Come suggerito da Howrey e Kelejian [6], approssimazioni del valor medio condizionale e della matrice di covarianza di $(\overline{Y}_h - Y_h)$ possono essere ottenute tramite simulazione stocastica. Piu' esattamente, partendo da una stima consistente di A e dei parametri della distribuzione dei disturbi strutturali U_h (la loro matrice di covarianza se, ad esempio, la distribuzione assunta e' una normale multivariata), la simulazione stocastica fornirebbe un valore approssimato di stime consistenti dei momenti della distribuzione di $(\overline{Y}_h - Y_h)$; l'accuratezza della approssimazione, ovviamente, aumenta all'aumentare del numero di replicazioni.

E' opportuno rilevare che, per il calcolo della matrice di covarianza di $(\overline{Y}_h - Y_h)$, si potrebbero utilizzare metodi alternativi (piu' semplici e piu' veloci) basati sulla linearizzazione del modello; (questi metodi, per esempio, potrebbero ancora basarsi sul calcolo delle derivate $(\partial y_i / \partial u_r)$ per mezzo di simulazione analitica).

Sfortunatamente, contrariamente alla simulazione stocastica, questi metodi comportano, almeno in teoria, un errore sistematico.

6. Applicazione al modello ISPE

La versione del modello ISPE utilizzata per questi esperimenti e' sostanzialmente simile a quella presentata in [9]. Le modifiche apportate riguardano:

a) l'estensione del periodo di stima (1955-1976) nell'equazione delle esportazioni di prodotti manufatti, in quella dei prezzi impliciti nelle esportazioni di prodotti manufatti, e in quella degli investimenti in abitazioni;
b) l'eliminazione di alcune equazioni dei prezzi dal lato dell'offerta;
c) una diversa specificazione dei ritardi nella equazione degli investimenti.

Tale modello e' stato stimato col metodo dei minimi quadrati a due stadi con componenti principali (2SLS-PC). La stima della matrice di covarianza asintotica dei coefficienti strutturali $\hat{\Sigma}/T$ (di dimensioni 75 × 75) e' stata ottenuta per mezzo della formula proposta da Theil [12,p.500], senza correzione per i gradi di liberta', come suggerito in [12,p.451,(5.3)].

In tabella 1, relativamente all'anno 1977 (primo anno fuori campione), per le principali variabili endogene sono riportati:

1) valore osservato (y_{ih});
2) valore calcolato $(\hat{y}_{ih}$, previsione condizionale ottenuta assegnando alle variabili predeterminate il loro valore storico);
3) errore di previsione $(\hat{y}_{ih} - y_{ih})$;
4) stima dell'errore standard dell'errore di previsione (detto anche, piu' semplicemente, errore standard di previsione).

Per le stesse variabili, la tabella 2 riporta:

1) stima della varianza asintotica della prima componente dell'errore di previsione (elementi diagonali di $\hat{G}_h \hat{\Sigma} \hat{G}_h' / T$);
2) stima della varianza della seconda componente dell'errore di previsione, calcolata linearizzando il modello nell'intorno

del punto di soluzione al 1977;

3) stima della varianza della seconda componente dell'errore di previsione (come al punto 2), calcolata come varianza campionaria sui risultati di 10000 replicazioni di simulazione stocastica;

4) media condizionale (approssimata) della seconda componente dell'errore di previsione calcolata su 10000 replicazioni di simulazione stocastica;

5) deviazione standard della media condizionale, di cui al punto 4, calcolata come radice quadrata del valore riportato a colonna 3 diviso per il numero di replicazioni (10000).

Il calcolo delle derivate parziali, necessarie al calcolo dei valori nella colonna 1 della tabella 2, e' stato fatto scegliendo una tolleranza relativa pari a 10^{-12} nell'algoritmo di Gauss-Seidel e assegnando ad ogni coefficiente strutturale l'incremento minimo compatibile con una precisione di 5 cifre decimali. Questo calcolo richiede una decina di secondi su un calcolatore IBM/370 modello 168.

La linearizzazione del modello nell'intorno del punto soluzione al 1977, per calcolare i valori della colonna 2 in tabella 2, richiede circa 2 secondi di tempo di calcolo.

Le 10000 replicazioni di simulazione stocastica, per calcolare i valori delle colonne 3, 4 e 5 in tabella 2, hanno richiesto circa 5 minuti di tempo di calcolo.

E' opportuno osservare che gli algoritmi forniti in [1] generano vettori di disturbi pseudocasuali con distribuzione, teoricamente, normale multivariata: in pratica, pero', tale

distribuzione e' troncata, escludendo code con probabilita' pari a 10^{-9}. Questo permette, in pratica, di stimare i momenti della distribuzione delle variabili endogene: in caso di distribuzione "esattamente" normale potrebbero non esistere momenti finiti per alcune variabili endogene a causa delle trasformazioni nonlineari, e i risultati nelle colonne 3, 4 e 5 della tabella 2 sarebbero privi di significato.

L'analisi delle tabelle 1 e 2 suggerisce alcune considerazioni.

1) L'errore di previsione al 1977 e' piu' grande, in valore assoluto, del suo errore standard solo per tre variabili (LDI, LI e PIFIT). Questo risultato, abbastanza anomalo in quanto ci si aspetterebbe empiricamente un errore maggiore dell'errore standard per circa 1/3 delle variabili, si puo' forse giustificare col fatto che, nella costruzione del modello, particolare attenzione viene rivolta al "fitting" negli ultimi anni dell'intervallo di stima; spesso, infatti, una specificazione di una equazione viene preferita ad altre per la migliore capacita' previsiva negli ultimi periodi, trascurando errori talvolta elevati in periodi precedenti.

2) La componente dell'errore di previsione al 1977 dovuta a errori nella stima dei coefficienti ha una varianza minore della componente dovuta ai disturbi strutturali per quasi tutte le variabili; fanno eccezione alcuni prezzi (DXML e PCL) e alcune variabili a prezzi correnti (PILL e TD).

3) L'errore che si commette calcolando la varianza della seconda

componente attraverso la linearizzazione del modello e' praticamente trascurabile nella simulazione uniperiodale (l'approssimazione sembra essere peggiore nella simulazione dinamica che, pero', non e' oggetto di questo lavoro).

4) Confrontando le colonne 4 e 5 della tabella 2, si osserva che la media condizionale della seconda componente dell'errore di previsione e' significativamente diversa da zero per le variabili MT, PCL, PILL, PVAP, RDP, TIL e XT. Per le altre variabili l'esistenza della media diversa da zero potrebbe essere provata solo aumentando il numero di replicazioni di simulazione stocastica, o applicando opportune tecniche di riduzione della varianza. In ogni caso l'entita' di questa media e' di trascurabile interesse pratico.

Glossario

CPNCF - Consumi Privati al Netto delle Imposte Indirette
DXML - Prezzi Impliciti nelle Esportazioni di Prodotti Manufatti (1970=1)
IAB - Investimenti in Abitazioni
IF - Investimenti Fissi Totali
IFIT - Investimenti Fissi Privati Non-Residenziali nell'Industria e nel Settore Terziario Privato
KOCC - Indice di Utilizzazione della Capacita' Produttiva nell'Industria
LDI - Occupati Dipendenti nell'Industria (migliaia)
LDT - Occupati nel Settore Terziario Privato (migliaia)
LI - Occupati nell'Industria (migliaia)
LTAT - Occupati nel Settore Terziario Privato (migliaia)
MT - Importazioni di Merci e Servizi
PCL - Prezzi Impliciti nei Consumi Privati al Lordo delle Imposte Indirette (1970=1)
PIAB - Prezzi Impliciti negli Investimenti in Abitazioni (1970=1)
PIFIT - Prezzi Impliciti negli Investimenti Privati nell'Industria e nel Settore Terziario Privato (1970=1)
PILL - Prodotto Interno Lordo
PING - Indice dei Prezzi all'Ingrosso (1970=1)
PVAP - Prezzi Impliciti nel Prodotto Lordo del Settore Privato (1970=1)
RDP - Reddito Lordo Disponibile del Settore Privato

SUDT - Salari e Stipendi per Dipendente nel Settore Privato dei Servizi (Milioni di Lire Correnti)
SUINE - Salari e Stipendi per Dipendente nell'Industria al netto dei Contributi Sociali (Milioni di Lire Correnti)
TD - Imposte Dirette
TIL - Imposte Indirette
VAI - Prodotto Lordo nell'Industria
VAP - Prodotto Lordo nel Settore Privato
VAT - Prodotto Lordo nel Settore Privato dei Servizi (Escluso il Valore Aggiunto dei Fabbricati)
XT - Esportazioni di Merci e Servizi

Tab.1

	1 Valore Osserv.	2 Valore Calcol.	3 Errore di Previsione	4 Errore Std.di Previsione
CPNCF	36647.00	36769.40	122.4000	655.9717
DXML	2.928500	2.904670	-0.02383	0.107721
IAB	3192.000	3082.860	-109.140	142.0251
IF	11938.00	12156.60	218.6000	424.8171
IFIT	6807.000	7134.780	327.7800	380.6138
KOCC	0.887492	0.871996	-0.01549	0.019239
LDI	6534.500	6772.290	237.7900	163.5599
LDT	4268.000	4243.210	-24.7900	80.92224
LI	7544.000	7706.780	162.7800	159.2455
LTAT	7180.400	7177.040	-3.36000	80.86804
MT	13806.00	14298.60	492.6000	528.6832
PCL	3.015390	3.033180	0.017790	0.076751
PIAB	2.966160	2.958040	-0.00812	0.071337
PIFIT	2.843400	2.938330	0.094930	0.067229
PILL	172988.0	172486.0	-502.000	3527.418
PING	275.6400	274.3300	-1.31000	6.395321
PVAP	2.493010	2.500660	0.007650	0.061225
RDP	157349.0	156422.0	-927.000	3266.591
SUDT	7.283510	7.330860	0.047350	0.162589
SUINE	4.692930	4.632430	-0.06050	0.127922
TD	15923.00	15708.20	-214.800	814.6533
TIL	20152.00	20338.70	186.7000	477.0353
VAI	24351.00	23925.80	-425.200	527.9062
VAP	55818.00	55372.00	-446.000	808.7082
VAT	24084.00	24063.20	-20.8000	418.7861
XT	16971.00	16676.50	-294.500	819.8987

Tab.2

	1 Varianza I Comp.	2 Varianza II Comp. (Lin.)	3 Varianza II Comp. (Sim.Stoc.)	4 Media Condiz. II Comp.	5 Dev.Std. Media II Comp.
CPNCF	148997.0	281302.0	285893.3	4.461630	5.346899
DXML	0.006090	0.005513	0.005589	-0.00013	0.000747
IAB	5798.630	14372.50	14167.08	2.416026	1.190255
IF	77836.60	102633.0	103514.8	2.548549	3.217372
IFIT	68828.90	76038.00	76640.91	0.132523	2.768409
KOCC	0.000143	0.000227	0.000231	-0.00014	0.000152
LDI	5069.650	21682.20	21143.19	-2.08804	1.454070
LDT	1612.670	4935.740	4892.815	-0.18199	0.699486
LI	5175.050	20184.10	19608.02	-1.18906	1.400286
LTAT	1899.250	4640.390	4771.402	0.032811	0.690753
MT	114621.0	164885.0	167548.4	-8.62159	4.093268
PCL	0.003393	0.002497	0.002449	0.001061	0.000494
PIAB	0.002286	0.002802	0.002844	-0.00029	0.000533
PIFIT	0.002143	0.002376	0.002376	0.000750	0.000487
PILL	6404190.	6038490.	6008424.	66.78532	24.51208
PING	9.954940	30.94520	30.63919	-0.04861	0.055352
PVAP	0.002300	0.001447	0.001436	0.001263	0.000379
RDP	4708080.	5962540.	5925143.	85.33243	24.34161
SUDT	0.007001	0.019433	0.019041	0.002040	0.001379
SUINE	0.006915	0.009448	0.009439	0.001178	0.000971
TD	356640.0	307020.0	313087.3	-5.18333	5.595421
TIL	97943.70	129619.0	129841.7	11.24540	3.603355
VAI	107757.0	170928.0	173973.7	-3.88346	4.171015
VAP	283380.0	370629.0	381263.9	-8.66445	6.174657
VAT	73917.80	101464.0	103517.6	-4.78098	3.217415
XT	313773.0	358461.0	366120.2	-24.2962	6.050787

Bibliografia

[1] Bianchi,C., G.Calzolari and P.Corsi, "A Program for Stochastic Simulation of Econometric Models", Econometrica, 46 (1978), 235-236.

[2] Bianchi,C., G.Calzolari and P.Corsi, "A Note on the Numerical **Results by Goldberger**, Nagar and Odeh", Econometrica, 47 (1979, forthcoming).

[3] Bianchi,C. and G.Calzolari, "The One-Period Forecast Errors in Nonlinear Econometric Models", International Economic Review, 20 (1979, forthcoming).

[4] Goldberger,A.S., A.L.Nagar and H.S.Odeh, "The Covariance Matrices of Reduced-Form Coefficients and of Forecasts for a Structural Econometric Model", Econometrica, 29 (1961), 556-573.

[5] Havenner,A.M., "Computer Algorithm: Derived Reduced Form Coefficient Covariances", Econometrica, 44 (1976), 837.

[6] Howrey,E.P. and H.H.Kelejian, "Simulation Versus Analytical Solutions: The Case of Econometric Models", in "Computer Simulation Experiments with Models of Economic Systems", ed. by T.H.Naylor, John Wiley, New York, (1971), 299-319.

[7] Kloek,T. and L.B.M.Mennes, "Simultaneous Equations Estimation Based on Principal Components of Predetermined Variables", Econometrica, 28 (1960), 45-61.

[8] Rao,C.R., "Linear Statistical Inference and its Applications", John Wiley, New York, (1965).

[9] Sartori,F., "Caratteristiche e Struttura del Modello", in "Un Modello Econometrico dell'Economia Italiana: Caratteristiche e Impiego", Ispequaderni, Roma, 1 (1978), 9-36.

[10] Schmidt,P., "The Asymptotic Distribution of Forecasts in the Dynamic Simulation of an Econometric Model", Econometrica, 42 (1974), 303-309.

[11] Schmidt,P., "Some Small Sample Evidence on the Distribution of Dynamic Simulation Forecasts", Econometrica, 45 (1977), 997-1005.

[12] Theil,H., "Principles of Econometrics", North Holland, Amsterdam, (1971).