Data normalization for data envelopment analysis and its application to directional distance function

Cheng, Gang and Qian, Zhenhua

China Center for Health Development Studies, Peking University,, Department of Social Science, University of Science and Technology Beijing,

10 March 2011

DEA 数据标准化方法及其在方向距离函数模型中的应用*

成 刚[1]，钱振华[2]
（1 北京大学 中国卫生发展研究中心 北京 100191；
2 北京科技大学 文法学院 北京 100083）

摘要：方向距离函数是对径向 DEA 模型的推广，它能够方便地处理存在非期望产出的情况，但其效率测量未解决单位不变性问题，这是制约方向距离函数在实践中应用的一个障碍。DEA 数据标准化方法为效率测量方法提供了保持单位不变性的通用方法，同时采用标准化数据后，径向和非径向模型的效率测量结果保持不变。基于 DEA 数据标准化方法建立了具有单位不变性的方向距离函数效率测量方法。

关键词：决策理论；数据包络分析；数据标准化；单位不变性；方向距离函数
中图分类号：C931.1；F224

Data normalization for data envelopment analysis and its application to directional distance function

CHENG Gang[1]，QIAN Zhenhua[2]
（1 China Center for Health Development Studies, Peking University Beijing 100191, China； 2 School of Social Science and Law, University of Science and Technology, Beijing 100083, China）

Abstract: Directional distance function is the generalization of radial model in data envelopment analysis. It has the capacity of dealing with undesirable outputs, but the problem is that it has no unit-invariant measurement of efficiency, which hampers its application to empirical studies. Data normalization for data envelopment analysis is a universal solution for the problem of unit-invariance, and the efficiency keeps unchanged in radial and non-radial models after data normalization. A unit-invariant efficiency measure for directional distance function is developed based on DEA data normalization.

Key words: Decision Theory; Data Envelopment Analysis; Data Normalization; Units Invariance; Directional Distance Function

1 引言

DEA（Data Envelopment Analysis，数据包络分析）是一种基于被评价对象间相对比较的非参数技术效率分析方法。这一分析方法是由美国的 Charnes，Cooper 和 Rhodes 于 1978 年首次提出的[1]。由于 DEA 适用范围广，特别是在分析多投入、多产出的情况时具有特殊的优势，因而其应用范围迅速拓展，目前已涵盖工业、农业、商业、行政、教育、卫生、体育等各个领域，DEA 已从最初的一种分析方法发展成为一门融汇了数学、运筹学、管理学、计量经济学和计算机科学的重要工具[2, 3]。

DEA 效率分析结果与投入和产出指标所采用的单位无关，即单位不变性，是其优点之一。单位不变性是指效率测量的无量纲（dimensionless ）特征，它是 DEA 效率测量方法需

* 基金项目：中国博士后科学基金（20090450259）

作者简介：成刚（1974-），男，汉族,山东邹平人，北京大学博士后，Email: chenggang@bjmu.edu.cn,研究方向：数据包络分析，机构和项目绩效评价；钱振华（1975-），汉族,山东莒县人，北京科技大学副教授，Email: rosezhenhua@yahoo.com.cn，研究方向：科学计量学，数据包络分析。

要满足的条件之一[4, 5]。CCR、BCC 等径向 DEA 模型[6-8]和 SBM（slack based measure）等非径向 DEA 模型的效率测量均符合单位不变性的要求[5, 9-11]。方向距离函数模型是对径向模型的推广[12-14]。在方向距离函数模型中，可以由研究者自定义被评价 DMU 往前沿上投影的方向，在欧氏空间中，该方向由方向向量所决定。通过定义不同的方向向量，可以使被评价 DMU 投影到前沿上的任意一点，当定义的方向向量指向坐标系的原点时，方向距离函数模型等价于径向模型。方向距离函数模型主要有两方面的作用：一是可以由研究者通过定义方向向量来指定投入和产出指标改进的方向；二是能够方便地处理存在非期望产出（undesirable outputs，例如生产过程中废气的排放）的情况。但方向距离函数存在的一个问题是，到目前为止，其效率测量尚未解决单位不变性（units invariance）问题。单位不变性问题是制约方向距离函数及新的 DEA 效率测量方法发展的一个障碍。本文提出的 DEA 数据标准化方法是解决 DEA 效率测量的单位不变性问题的通用方法, 不仅适用于方向距离函数的效率测量，也适用于任何新的DEA效率测量方法，这为方向距离函数模型的应用和DEA效率测量方法的发展创造了条件。

2 DEA 数据标准化方法及其性质

径向 DEA 模型对效率的测量之所以不受投入和产出单位的影响，是因为效率的测量采用的是被评价 DMU 与其目标值相比，各项投入或产出需等比例改进的程度。在非径向模型中，效率测量放松了“等比例”改进的限制，但效率测量采用的仍然是比值，是各项投入或产出需改进的比例的平均值，所以非径向模型的效率测量结果也不受投入和产出单位的影响。

DEA 的效率测量一般采用算术平均的方式，虽然对其他的计算方法，例如二次平均和广义平均，也有探讨，但是受到 DEA 线性规划方法和单位不变性问题的限制，效率值的算法难以实现[15, 16]。如果在建立 DEA 模型之前，对数据做适当的无量纲化变换，则采用变换后的数据所建立的 DEA 模型的效率测量结果一定是与投入和产出数据的单位无关的，这可以为拓宽 DEA 模型效率测量方法的发展消除障碍。这种无量纲化数据变换需要满足以下条件：

（1） 数据变化后，现有的径向和非径向 DEA 模型的效率测量结果应保持不变；

（2）对于具有单位不变性的 DEA 模型，采用变换后的数据建立的 DEA 模型的结果应能够进行反变换，经过反变换后的分析结果与采用原始数据建立的 DEA 模型的分析结果完全相同；

（3）变换后的数据所代表的意义应易于理解。

从上述思路出发，本文建立了以下的 DEA 数据标准化方法：

假设有 n 个 DMU，每个 DMU 都有 m 种投入和 q 种产出，被评价 DMU 的投入和产出向量分别为 x_0 和 y_0，任意 DMU_j 的投入和产出向量分别为 x_j 和 y_j，标准化之后为 $\hat{x}_j$ 和 $\hat{y}_j$，其标准化变换方法为：

$$\hat{x}_{ij} = x_{ij} / x_{i0}, \quad i = 1, 2, ..., m$$

$$\hat{y}_{rj} = y_{rj} / y_{r0}, \quad r = 1, 2, ..., q$$

$$j = 1, 2, ..., n$$

上述 DEA 数据标准化实质是投入和产出数据分别采用被评价 DMU 的投入和产出数值作为测量单位，可以看作是投入产出数据单位的改变。因此，凡是具有单位不变性的 DEA 效率测量方法（包括径向和非径向模型），在采用标准化数据后，其效率分析结果保持不变。

与一般的数据标准化方法“一对一”的变换方式不同，DEA 数据标准化采用的是“一

对多”的变换方式，每个 DMU 均有各自的标准化数据集，如果有 n 个 DMU，就相应的会有 n 个标准化数据集。

DEA 数据标准化具有以下性质：

（1）DEA 数据标准化是无量纲化变换，即对于同一数据集，无论投入和产出指标采用什么单位，其标准化数据是相同的。

（2）被评价 DMU 的投入向量和产出向量标准化后变为所有元素均等于 1 的向量。

（3）针对同一数据集建立的径向 DEA 模型和非径向 DEA 模型，采用原始数据和采用标准化数据的效率值相同，其松弛变量存在固定的数量关系：

$$s_i^- = \hat{s}_i^- \times x_{i0}，s_r^+ = \hat{s}_r^+ \times y_{r0}$$

s: 采用原始数据的松弛变量；$\hat{s}$: 采用标准化数据的松弛变量；

x_{i0}：被评价DMU的投入；y_{r0}:被评价DMU的产出

（4）DEA 数据标准化在被评价 DMU 的投入产出改进值、目标值（投影值）和效率值之间建立了明确的关系。

采用原始数据的投入导向 CCR 模型表示为：

$$\begin{aligned} &\min \ \theta \\ &\text{s.t.} \ X\lambda + s^- - \theta x_0 = 0 \\ &\qquad Y\lambda - s^+ = y_0 \\ &\qquad \lambda, s^-, s^+ \geq 0 \qquad (1) \end{aligned}$$

采用原始数据的产出导向 CCR 模型表示为：

$$\begin{aligned} &\max \ \varphi \\ &\text{s.t.} \ X\lambda + s^- = x_0 \\ &\qquad Y\lambda - s^+ - \varphi y_0 = 0 \\ &\qquad \lambda, s^-, s^+ \geq 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

在径向 DEA 模型（例如 CCR 模型）中，投入指标的径向改进值（radial movement）和松弛改进值（slack movement）表示为负值，产出指标的径向改进值和松弛改进值表示为正值。投入和产出指标的原始值、径向改进值、松弛改进值和目标值(projection)之间的关系为：目标值＝原始值+径向改进值+松弛改进值，即

$$X\lambda = x_0 + (\theta - 1)x_0 + (-s^-)$$

$$Y\lambda = y_0 + (\varphi - 1)y_0 + s^+$$

采用标准化数据后，投入导向 CCR 模型表示为：

$$\min \ \theta$$

$$\text{s.t.}\ \ \hat{X}\lambda+\hat{s}^{-}-\theta\hat{x}_0=0$$

$$\hat{Y}\lambda-\hat{s}^{+}=\hat{y}_0$$

$$\lambda,\hat{s}^{-},\hat{s}^{+}\geq 0 \qquad (3)$$

采用标准化数据后，产出导向 CCR 模型表示为：

$$\max\ \ \varphi$$

$$\text{s.t.}\ \ \hat{X}\lambda+\hat{s}^{-}=\hat{x}_0$$

$$\hat{Y}\lambda-\hat{s}^{+}-\varphi\hat{y}_0=0$$

$$\lambda,\hat{s}^{-},\hat{s}^{+}\geq 0 \qquad (4)$$

在采用标准化数据的径向 DEA 模型中，由性质（2）知，被评价 DMU 的各项投入和产出指标值均为 1，从而有

$$\hat{X}\lambda=1+(\theta-1)+(-\hat{s}^{-})$$

$$\hat{Y}\lambda=1+(\varphi-1)+\hat{s}^{+}$$

在投入导向模型中，各项投入指标的径向改进值相同，等于（1−θ）；在产出导向模型中，各项产出指标的径向改进值相同，径向改进值等于（φ−1）。

采用原始数据的混合导向（non-oriented）规模收益不变（constant returns to scale，CRS）非径向（slack based measure， SBM）模型表示为：

$$\min\ \ \theta=\frac{1-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^-}{x_{i0}}}{1+\frac{1}{q}\sum_{r=1}^{q}\frac{s_r^+}{y_{r0}}}$$

$$\text{s.t.}\ \ X\lambda+s^{-}=x_0$$

$$Y\lambda-s^{+}=y_0$$

$$\lambda,s^{-},s^{+}\geq 0 \qquad (5)$$

采用标准化数据后，混合导向 CRS-SBM 模型表示为：

$$\min\ \ \theta=\frac{1-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\hat{s}_i^-}{1+\frac{1}{q}\sum_{r=1}^{q}\hat{s}_r^+}$$

$$\text{s.t.}\ \ \hat{X}\lambda+\hat{s}^{-}=\hat{x}_0$$

$$\hat{Y}\lambda-\hat{s}^{+}=\hat{y}_0$$

$\lambda, \hat{s}^-, \hat{s}^+ \geq 0 \qquad (6)$

在采用标准化数据后，非径向模型的无效率程度表示为松弛改进的平均值。

表 1 用示例数据说明了 DEA 数据标准化的方法及其分析结果。共有 7 个 DMU，两项投入（x_1 和 x_2）和一项产出（y）。以投入导向 CRS 模型，被评价 DMU 为 G 为例，数据标准化方法为所有 DMU 的投入、产出数据除以 G 的投入、产出值，即 x_{1j} 标准化为 x_{1j}/x_{1G}，x_{2j} 标准化为 x_{2j}/x_{2G}，y_j 标准化为 y_j/y_G。G 的投入和产出向量在标准化之后各元素均为 1。采用原始数据和标准化数据的效率值相等，在径向模型中，径向改进值（-0.31）表示无效率的程度，在非径向模型中，松弛改进值（-0.20 和-0.50）的均值（-0.35）表示无效率的程度。

表 1 DEA 数据标准化示例（以被评价 G 的投入导向 CRS 模型为例）

DMU	原始数据			标准化数据		
	x_1	x_2	y	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{y}$
A	10.00	40.00	10.00	0.20	0.67	0.50
B	15.00	25.00	10.00	0.30	0.42	0.50
C	32.00	24.00	16.00	0.64	0.40	0.80
D	48.00	16.00	16.00	0.96	0.27	0.80
E	24.00	48.00	16.00	0.48	0.80	0.80
F	54.00	27.00	18.00	1.08	0.45	0.90
G	50.00	60.00	20.00	1.00	1.00	1.00
径向（CCR）						
效率值	0.69			0.69		
径向改进值	-15.62	-18.75	-0.00	-0.31	-0.31	-0.00
松弛改进值	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	0.00
投影值	34.38	41.25	20.00	0.69	0.69	1.00
非径向（SBM）						
效率值	0.65			0.65		
松弛改进值	-10.00	-30.00	-0.00	-0.20	-0.50	0.00
投影值	40.00	30.00	20.00	0.80	0.50	1.00

3 方向距离函数模型的效率测量方法

方向距离函数模型是对径向 DEA 模型的推广，其线性规划方程定义如下（v 和 u 分别表示投入和产出方向向量）：

$$\max \quad \beta$$

$$\text{s.t.} \quad X\lambda + \beta v \leq x_0$$

$$Y\lambda - \beta u \geq y_0$$

$$\lambda, v, u \geq 0 \qquad (7)$$

在方向距离函数模型中，不同方向向量决定着无效率 DMU 的投入和产出指标不同的改进方向，进而获得不同的目标值（在前沿上得到不同的投影点），从而得出不同的效率值。方向向量的方向同时也反映了在效率测量中各项投入产出指标的相对重要程度。图 1 以采用

标准化数据的投入导向 CRS 方向距离函数为例演示了不同方向向量对效率测量的影响。横坐标代表单位产出所消耗的 x_1 的数量，纵坐标代表单位产出所消耗的 x_2 的数量，当方向向量与横坐标平行时，例如 v＝（1, 0），改进指标仅涉及 x_1，同时效率值完全取决于 x_1 的无效率程度；当方向向量与纵坐标平行时，例如 v＝（0, 1），改进指标仅涉及 x_2，同时效率值完全取决于 x_2 的无效率程度；当方向向量由（1, 0）向（0, 1）过渡时，例如由 v_1 改为 v_2，x_1 的作用逐渐减小，x_2 的作用逐渐增加。

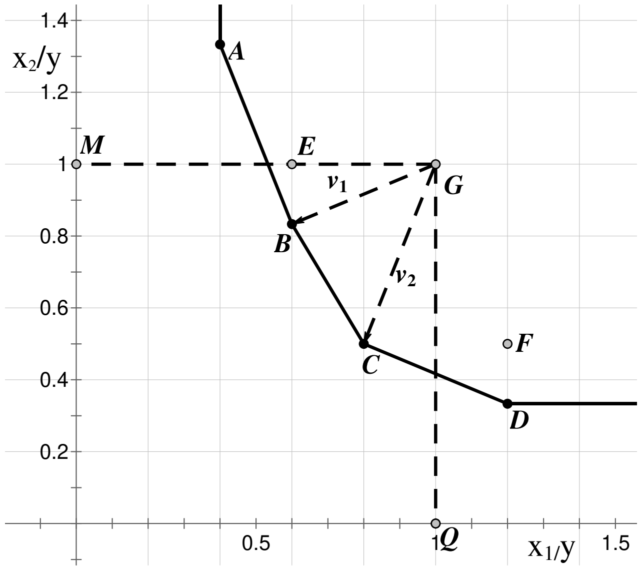

图 1 采用标准化数据的投入导向 CRS 方向距离函数模型示例

在对方向距离函数的实际应用中，通常取被评价 DMU 的投入和产出向量作为方向向量，这种情况下，方向距离函数模型与径向 DEA 模型等价，反映无效率程度的 β 值满足单位不变性的要求。当方向向量取其它数值时，β 值不满足单位不变性要求，目前国内外文献中还没有提出满足单位不变性要求的效率测量方法，这限制了方向距离函数的应用。

DEA 数据标准化为建立满足单位不变性要求的方向距离函数效率测量方法提供了条件。在此基础上，将采用 DEA 标准化数据的方向距离函数模型效率值的测量方法定义如下：

$$\theta = \frac{1-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\beta v_i}{1+\frac{1}{q}\sum_{r=1}^{q}\beta u_r} = \frac{1-\beta\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}v_i}{1+\beta\frac{1}{q}\sum_{r=1}^{q}u_r}$$

$$\max \quad \beta$$

$$\text{s.t.} \quad \hat{X}\lambda + \beta v \le \hat{x}_0$$

$$\hat{Y}\lambda - \beta u \ge \hat{y}_0$$

$$\lambda, v, u \ge 0 \qquad (8)$$

在式(8)中，βv 和 βu 表示投入和产出向量的无效率程度，在计算投入和产出的无效率值时，采用了其算术平均值。方向距离函数模型是径向模型的推广，在式(8)中当投入方向向量 v 取被评价 DMU 的投入数值，即 v = (1, 1…, 1)，产出方向向量 u 取 0 向量时，方向距离函数模型等价于采用标准化数据的投入导向径向 DEA 模型，效率值 θ＝1-β；当投入方向向量 v 取 0 向量，产出方向向量 u 取被评价 DMU 的产出数值，即 u = (1, 1…, 1)，方向距离函

数模型等价于采用标准化数据的产出导向径向 DEA 模型，效率值 θ＝1/（1+β）。采用方向距离函数(8)计算的效率值与采用径向模型(1)-(4)计算的效率值完全一致。

定理 1：针对同一数据集建立的方向距离函数模型，如果改变方向向量的长度而保持向量的方向不变，则效率值保持不变。

证明：设投入和产出的方向向量由 v 和 u 分别变为变为 bv 和 bu（b 为正实数），在欧氏空间中，向量的方向没有改变，长度变为原来的 $b^{1/2}$，式(8)变为

$$\theta = \frac{1-\beta b \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} v_i}{1+\beta b \frac{1}{q}\sum_{r=1}^{q} u_r}$$

$$\max \quad \beta b$$

$$\text{s.t.} \quad \hat{X}\lambda + \beta b v \le \hat{x}_0$$

$$\hat{Y}\lambda - \beta b u \ge \hat{y}_0$$

$$\lambda, v, u \ge 0 \qquad (9)$$

用 α＝βb 做替换，

$$\theta = \frac{1-\alpha \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} v_i}{1+\alpha \frac{1}{q}\sum_{r=1}^{q} u_r}$$

$$\max \quad \alpha$$

$$\text{s.t.} \quad \hat{X}\lambda + \alpha v \le \hat{x}_0$$

$$\hat{Y}\lambda - \alpha u \ge \hat{y}_0$$

$$\lambda, v, u \ge 0 \qquad (10)$$

式(10)与式(8)等价，故得出的效率值保持不变。

定理 2：针对同一数据集，式(8)与式(11)等价。

$$\min \quad \theta = \frac{1-\beta \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} v_i}{1+\beta \frac{1}{q}\sum_{r=1}^{q} u_r}$$

$$\text{s.t.} \quad \hat{X}\lambda + \beta v \le \hat{x}_0$$

$$\hat{Y}\lambda - \beta u \ge \hat{y}_0$$

$$\lambda, v, u \ge 0 \qquad (11)$$

证明：在标准化数据中，被评价 DMU 的投入和产出向量元素值均为 1，由式(11)的约束条件可得出

$$0 \le \beta \le 1/\max(v_1,\dots,v_i)，\ \mathrm{i}=1,2,\dots,m$$

在β的取值范围内，式(11)的分子是单调递减函数，分母是单调递增函数，故在β的取值范围内，θ是单调递减函数，式(11)与式(8)等价。

式(11)为非线性规划，所以在实际应用中应采用式(8)计算方向距离函数的效率值。在式(11)的基础上，还可以对投入和产出指标在效率测量中的相对重要性进行进一步加权处理：

$$\theta = \frac{1-\beta \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} w_i v_i}{1+\beta \frac{1}{q}\sum_{r=1}^{q} h_r u_r}$$

$$\max \beta$$

$$\text{s.t. } \hat{X}\lambda + \beta v \le \hat{x}_0$$

$$\hat{Y}\lambda - \beta u \ge \hat{y}_0$$

$$\lambda, v, u \ge 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} w_i = m, \quad \sum_{r=1}^{q} w_r = q \qquad (12)$$

w： 投入的权重向量；h：产出的权重向量

上述效率测量方法可以推广到存在非期望产出的情况，具有非期望产出的方向距离函数模型定义如下：

$$\theta = \frac{1-\frac{1}{m}\beta\sum_{i=1}^{m} w_i v_i}{1+\omega\frac{1}{q}\beta\sum_{r=1}^{q} h_r u_r + \omega^{'}\frac{1}{q^{'}}\beta\sum_{r'=1}^{q^{'}} h^{'}_{r'} u^{'}_{r'}}$$

$$\max \beta$$

$$\text{s.t. } X\lambda + \beta v \le x_k$$

$$Y\lambda - \beta u \ge y_k$$

$$Y^{'}\lambda + \beta u^{'} \le y^{'}_k$$

$$\sum_{i=1}^{m} w_i = m, \quad \sum_{r=1}^{q} w_r = q, \quad \sum_{t=1}^{q^{'}} w_t = q^{'}$$

$$\omega + \omega' = 1 \qquad (13)$$

q'： 非期望产出向量维度，即负面产出指标的个数；h'：非期望产出的权重向量；u'： 非期望产出的方向向量；ω：期望产出指标的总体权重；ω'： 非期望产出指标的总体权重。

4 算例

利用表 1 中的示例数据，以投入导向 CRS 方向距离函数模型为例，给出了采用不同方向向量时各 DMU 的效率值。分析工具为 MaxDEA 5.0 软件，效率计算采用式(8)。

表 2 采用不同方向向量时方向距离函数的效率值

	方向向量（x_1, x_2, y）				
DMU	（1, 0, 0）	（0, 1, 0）	（0, 0, 1）	（2, 1, 1）	（1, 1, 1）

A	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
B	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
C	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
D	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
E	0.944	0.917	0.933	0.936	0.933
F	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833
G	0.767	0.708	0.688	0.702	0.688

5 结束语

单位不变性是 DEA 研究领域所公认的 DEA 效率测量方法需要满足的条件之一。由于 DEA 标准化数据是无量纲化的，具有单位不变性，即无论投入和产出指标采用什么样的单位，其 DEA 标准化数据保持不变，所以采用 DEA 标准化数据后任何形式的效率测量都能符合单位不变性的要求。DEA 数据标准化方法是效率测量保持单位不变性的通用方法，它为新的 DEA 效率测量方法的发展创造了条件。以此为基础建立的方向距离函数效率测量方法，在保持了与径向和非径向模型效率测量结果一致的前提下，解决了方向距离函数效率测量的单位不变性能题。

参考文献

[1] CHARNES A, COOPER W W, RHODES E. Measuring the efficiency of decision making units [J]. Eur J Oper Res, 1978, 2(6): 429-44.

[2] SEIFORD L M. Data envelopment analysis: The evolution of the state of the art (1978–1995) [J]. The Journal of Productivity Analysis, 1996, 6(7): 99-137.

[3] COOK W D, SEIFORD L M. Data envelopment analysis (DEA) - Thirty years on [J]. Eur J Oper Res, 2009, 192(1): 1-17.

[4] LOVELL C A K, PASTOR J T. Units invariant and translation invariant DEA models [J]. Operations Research Letters, 1995, 18(3): 147-51.

[5] TONE K. A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis [J]. Eur J Oper Res, 2001, 130(3): 498-509.

[6] CHARNES A. Data envelopment analysis: theory, methodology, and application [M]. Kluwer Academic Publishers, 1994.

[7] BANKER R D, CHARNES A, COOPER W W. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis [J]. Manage Sci, 1984, 30(9): 1078-92.

[8] COELLI T J, PRASADA RAO D S, O'DONNELL C J, et al. Introduction to Efficiency and Productivity Analysis [M]. 2nd ed. New York: Springer Science + Business Media, 2005.

[9] KOOPMANS T. Activity analysis of production and allocation: proceedings of a conference [M]. Wiley, 1951.

[10] F RE R, KNOX LOVELL C A. Measuring the technical efficiency of production [J]. J Econ Theory, 1978, 19(1): 150-62.

[11] COOPER W W, SEIFORD L M, TONE K. Data envelopment analysis: a comprehensive text with models, applications, references and DEA-Solver software [M]. 2nd ed. New York: Springer Science + Business Media, 2007.

[12] CHAMBERS R G, CHUNG Y, F RE R. Benefit and Distance Functions [J]. J Econ Theory, 1996, 70(2): 407-19.

[13] CHUNG Y H, F RE R, GROSSKOPF S. Productivity and undesirable outputs: A directional distance function approach [J]. J Environ Manage, 1997, 51(3): 229-40.

[14] CHAMBERS R G, CHUNG Y, F RE R. Profit, directional distance functions, and Nerlovian efficiency [J]. J Optimiz Theory App, 1998, 98(2): 351-64.
[15] BRIEC W. Holder distance function and measurement of technical efficiency [J]. J Prod Anal, 1999, 11(2): 111-31.
[16] AMIRTEIMOORI A, KORDROSTAMI S. A Euclidean distance-based measure of efficiency in data envelopment analysis [J]. Optimization, 2010, 59(7): 985-96.