



Munich Personal RePEc Archive

Tableau Economique and business cycle analysis in the works of Marschak, Frisch and Leontief

Amanar Akhabbar

University of Lausanne, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne,
Centre Walras-Pareto

1. September 2011

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/34556/>

MPRA Paper No. 34556, posted 6. November 2011 19:04 UTC

Tableaux économiques et analyse des *business cycles* chez Marschak, Frisch et Leontief*

Amanar Akhabbar¹

« The complete macrodynamic problem, as I conceive of it, consists in describing as realistically as possible the kind of relations that exist between the various magnitudes in the *Tableau Economique* ..., and from the nature of these relations to explain the movements, cyclical or otherwise, of the system. »

Ragnar Frisch 1933, 174

Introduction – Expérimentations dans les années 1930 : tableaux économiques et interdépendance générale

Au début des années 1930, nous trouvons chez plusieurs auteurs la même référence, explicite, au *Tableau économique*. Ces tableaux économiques sont des tableaux intersectoriels qui peuvent être statistiques et, parfois, compris et exprimés sous la forme d'une matrice. Autrement dit, avant même l'invention de l'analyse input-output dans les années 1940, lors de la collaboration entre Wassily Leontief (Harvard) et du Bureau of Labor Statistics, des tableaux économiques intersectoriels sont développés par différents auteurs. Au début des années 1930, le tableau économique intersectoriel s'articule d'une part à des problématiques héritées des années 1910-1920, comme la question du développement économique et le problème des *business cycles*, et, d'autre part, à des problématiques devenues urgentes en occident comme la Grande dépression et la planification économique. Nous nous intéressons ici uniquement aux auteurs qui proposent à la fois un tableau économique intersectoriel et un modèle mathématique d'explication des relations entre les différents éléments de l'économie. C'est le cas en particulier de Jacob Marschak (1933, 1934), de Ragnar Frisch (1934) et de Wassily Leontief (1925, 1935, 1936, 1937).

* Cet article est le résultat de travaux dans le cadre de l'ACI CNRS « Histoire des savoirs : la théorie de l'équilibre général comme savoir, de Walras à nos jours », dirigée par Jean-Sébastien Lenfant. Il a été présenté lors du 7^{ème} colloque de l'Association Internationale Walras, « Le colloque du Centenaire », 9-11 septembre 2010, Triangle (Université Lyon II). Cet article sera publié dans un ouvrage collectif dirigé par Arnaud Diemer, Pascal Bridel et Jean-Pierre Potier. Je remercie Roberto Baranzini, Pascal Bridel, Nicolas Brisset, Annie L. Cot, Jérôme Lallement et Olav Bjerkholt pour leurs précieux commentaires.

¹ Université de Lausanne – Centre Walras-Pareto ; Phare – Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne ; amanar.akh@gmail.com

La question que nous pouvons est la suivante : Pourquoi retrouve-t-on simultanément chez ces trois auteurs des tableaux économiques intersectoriels plutôt que des modèles d'équilibre général axés sur la loi de l'offre et de la demande ? De plus, selon quelles modalités théoriques et pratiques ces tableaux sont-ils pensés et exploités ? Autrement dit, si le principe de l'offre et de la demande n'est plus le schéma explicatif central, quels sont les appareils analytiques développés par Marschak, Frisch et Leontief ?

Au terme de notre enquête, nous montrons que ces trois économistes développent des installations analytiques complexes caractérisées par :

1- Une approche macroéconomique non keynésienne fondée sur l'analyse du circuit économique réel et/ou monétaire, ainsi que des différents secteurs de l'économie ;

2- Cette approche a pour objet l'étude, ou le contrôle, des grands phénomènes du développement économique, à commencer par les cycles et les crises ;

3- Comme chez Walras et Marx, mais de manière beaucoup plus élaborée, cette approche a recours à des tableaux économiques intersectoriels ;

4- Ces tableaux sont interprétés via des modèles mathématiques intersectoriels, statiques ou dynamiques, qui utilisent parfois le calcul matriciel, comme pour Frisch et Leontief ;

5- Enfin, ces tableaux sont fondés sur un appareil statistique qui utilise les techniques de la comptabilité privée afin de constituer une comptabilité nationale sectorielle.

Les dispositifs qu'ils mettent en place constitueront à partir des années 1940 et 1950 la base d'une macroéconomie néoclassique dont l'un des aboutissements sera, dans les années 1970, les modèles de *monetary-business-cycles* et de *real-business-cycles* des nouveaux-classiques.

Ainsi, modélisation macroéconomique, tableau économique statistique et analyse des cycles sont-ils momentanément intimement liés. C'est cette relation, conceptualisée par Marschak, Frisch et Leontief, à la même époque (1932-1937) qui est le sujet de cet article. Nous présentons notamment, pour la première fois, l'article méconnu de Marschak (1933) en relation avec le tableau intersectoriel et aussi la relation étroite qui lie les trois auteurs, Marschak, Frisch et Leontief autour des notions de tableau économique et d'interdépendance générale. Il s'agit de comprendre comment trois économistes économètres, font référence et utilisent au même moment le Tableau économique dans une version intersectorielle. De plus, notre étude permet d'ouvrir de nouvelles pistes ou d'explorer des pistes délaissées pour comprendre et modéliser les relations interindustrielles et le tableau économique, comme avec les travaux de Marschak et de Frisch notamment.

La première partie de l'article expose comment la référence au tableau économique chez Marschak, Frisch et Leontief, fait écho à une critique de la théorie économique de l'équilibre partiel et constitue un déplacement de la problématique de recherche vers les questions macroéconomiques sur les cycles. La seconde partie montre comment le tableau économique s'arrime à un premier dispositif qu'est le modèle mathématique. La troisième partie explore la manière dont Frisch et Leontief conçoivent le tableau comme à la fois une matrice de données et une matrice mathématique. Enfin, la quatrième partie explore le dispositif comptable développé par ces auteurs, à savoir un tableau économique fondé sur les principes de la comptabilité. Ainsi, la référence au tableau est comprise à travers trois dispositifs spécifiques : le tableau-modèle, le tableau-matrice et enfin le tableau-compte.

Partie I. L'explication des cycles et le choix d'un modèle : de l'équilibre partiel au circuit et à l'interdépendance générale

Si Marschak, Frisch et Leontief ont recours au tableau économique c'est qu'ils cherchent un cadre macroéconomique capable de traiter d'un point de vue théorique et statistique la question de l'explication économétrique des cycles et des crises.

I.1 L'offre et la demande en équilibre partiel et les *business cycles*

Une question en particulier devient lancinante après la crise de 1929 : le cadre théorique marshallien est-il pertinent pour expliquer les cycles, les crises et finalement la Grande Dépression ? Le traitement de cette problématique aboutit au rejet du cadre marshallien de l'équilibre partiel, pour un cadre plus général, celui d'une théorie de l'interdépendance générale entre les différents éléments de l'économie.

Il s'ensuit des difficultés épistémologiques car l'analyse statistique et économétrique des business cycles soulève des problèmes et des difficultés considérables auxquelles Frisch, Marschak et Leontief se confrontent, avec des avis divergents souvent. Cette divergence éclate notamment lors de la controverse économétrique et épistémologique qui oppose Frisch à Leontief en 1934, sur la manière d'estimer les fonctions de demande en équilibre partiel. Marschak, et ce n'est pas un hasard tant ces auteurs sont proches, joue le rôle de modérateur dans cette controverse. Malgré leurs désaccords théoriques et épistémologiques, les trois économètres tentent de ramener le monde des chiffres et de la statistique dans le domaine de la *théorie* économique afin d'analyser les cycles et le développement économique. C'est ainsi qu'en 1933, Marschak résume le travail statistique des années 1920 en trois grandes directions de recherche :

« Parmi les travaux statistiques ayant un intérêt économétrique immédiat, trois groupes de grande importance doivent être distingués : (1) les tentatives visant à la construction de courbes de

demande et d'offre de certaines marchandises (incluant des facteurs productifs) ; (2) les analyses des *business cycles* et (3) l'investigation numérique des branches des dépenses nationales (*the branches of national spending*), incluant l'épargne et l'investissement, et la production (qui peut être liée aux recherches sur les stocks et encaisses (*cash*) nationaux), et des changements de leurs proportions au fur et à mesure du temps. De manière évidente, ces trois sujets sont étroitement liés les uns aux autres. » (Marschak 1933, 373)

Les deux premières directions de recherche ayant conduit à des difficultés voire à des impasses², c'est justement le dernier groupe de recherches qui concentre l'attention de nos trois économètres dans cette période de Grande Dépression : l'investigation numérique des branches des dépenses nationales. Or, au moment même où la controverse entre Frisch et Leontief a lieu, ils font tous les trois référence, indépendamment l'un de l'autre, à un dispositif particulier : le Tableau économique intersectoriel (ou inter-agent, ou encore inter-groupes), manifestant par là un rejet de l'analyse marshallienne en équilibre partiel et leur intérêt pour l'analyse de l'interdépendance générale dans le circuit économique. Alors que la controverse avec Frisch bat son plein (1934), Leontief développe à Harvard ses études des relations interindustrielles, qu'il présente au Harvard University Committee for Economic Research (HUCER) comme une application de la théorie de l'équilibre général, mais où il abandonnerait l'analyse des offres et des demandes pour chaque marché. Qu'en est-il de Frisch et de Marschak quant à cette question des offres et des demandes en équilibre partiel comme explication des phénomènes macroéconomiques ? Pour ce qui est de Frisch, il ne considère pas pertinente les offres et les demandes pour l'explication de la Grande Dépression... Marschak, lui, reste fidèle à l'analyse marginaliste et développe des modèles macroéconomiques néoclassiques mais sans recourir à la 'loi de l'offre et de la demande'. Le problème n'est plus l'étude empirique de marchés en équilibre partiel : l'enjeu de ces années de « haute théorie » est de construire des modèles macroéconométriques.

I.2 Trois explications des *business cycles* dans le circuit économique

Commençons par l'explication de la crise avancée par Frisch (1934). Frisch construit en 1934 un modèle de l'économie en vue de représenter le mécanisme des cycles et de présenter une méthode de planification. Frisch considère les cycles comme un phénomène monétaire et bancaire dont l'origine se situe dans le système de crédit, de plus il accorde aux anticipations des agents un rôle crucial. Nous n'exposons que très brièvement la théorie des cycles de Frisch.

Le modèle dynamique que construit Frisch est un modèle à plusieurs agents. Le cas le plus simple étant celui d'une économie à deux agents. Soit un fermier et un cordonnier

² Pour l'économétrie des offres et des demandes voir la controverse entre Frisch et Leontief (1934), puis le traitement du problème de l'identification autour de Marschak, à la Cowles Commission dans les années 1940. Pour l'analyse des indicateurs des business cycles voir le problème des indices soulevé par Fisher, Leontief et Frisch notamment.

(exemple donné par Frisch). La production du bien a par le producteur a à la période t , a_t , dépend de la quantité de son bien qu'il a vendu à l'autre agent à la période précédente (b_{t-1}), et d'un certain coefficient d'optimisme, α : $a_t = \alpha b_{t-1}$. Les coefficients d'optimisme sont des données et les montants de biens échangés sont les inconnues. Les quantités initiales font parties des données. Dès lors il est possible de montrer qu'une humeur dépensière (*spending mood*) conduit à un chemin d'expansion alors qu'une humeur économe (*saving mood*) génère un processus de décroissance où « *the whole system will gradually dwindle down to nothing* » (1934, 263). La seconde étape consiste à introduire le crédit. Frisch introduit dans chacune des équations le montant que l'agent doit à l'autre agent qui est la différence entre les ventes de a (à b) et de b (à a), noté G_t . Sous-jacent au modèle de Frisch, existe un système d'interdépendance générale entre les agents puisque les commandes des uns constituent les recettes des autres et inversement : c'est une chaîne sans fin de relations input-output entre les agents-producteurs de l'économie.

A partir de ces deux éléments, le moral des agents économiques et le système d'endettement, Frisch fait apparaître à la fois des fluctuations et des *trends* dans le circuit économique (la circulation des marchandises échangées). De plus, en soumettant le système à des chocs exogènes aléatoires, il fait apparaître des oscillations irrégulières. Frisch utilise les chiffres de la loterie publique norvégienne pour soumettre son système à des chocs aléatoires. Les cycles générés par les chocs aléatoires n'étant fondés ni sur les conditions réelles de production ni sur celles des investissements, Frisch les appelle *pure circulations-cycles*. Ainsi, Frisch porte l'essentiel de l'attention vers le moral des agents économiques et le système d'endettement : c'est, selon lui, de là que provient une grande partie de la dépression. La planification économique serait en mesure d'y remédier.

Nous en venons au modèle de Leontief³. Il est parfois oublié que Leontief est d'abord un théoricien et un économètre. Sa thèse de doctorat sur « l'économie comme flux circulaire » (1928) est purement théorique et ses travaux à l'institut pour l'Etude de l'Economie Mondiale de Kiel (1927-1928, 1930) portent sur l'économétrie et la théorie de l'offre et de la demande en équilibre partiel. Pour ce qui est de la théorie économique, Leontief note que la représentation de l'économie la plus pertinente n'est certainement pas celle de Böhm-Bawerk ni celle de Böhm-Bawerk, ni celle de Clark avec les facteurs de production générant le revenu national mais celle de Marx à laquelle son modèle input-output est intimement lié. D'une part, Leontief rejette l'idée de réduire les facteurs de production à la 'trinité' du travail, du capital et de la terre, et il considère que tous les biens sont potentiellement des facteurs de production et que, par conséquent, le terme de facteur de la production n'a plus de sens particulier. D'autre part, Leontief s'attaque à la représentation linéaire de la production allant de facteurs de production originaux vers les biens de consommation finale. De plus, le modèle de

³ Pour une présentation plus détaillée, voir Akhabbar 2010.

Leontief (1937) n'intègre pas la monnaie et ne reprend pas l'équation de la théorie quantitative de la monnaie pourtant cruciale pour la théorie macroéconomique de la plupart de ses contemporains, à commencer par Ernst Wagemann et Marschak : le modèle de Leontief représente une économie sans monnaie où les phénomènes économiques, qu'il s'agisse du développement ou des fluctuations économiques, ont des causes et des effets réels. Ce qui compte est une analyse réelle des prix et des quantités d'équilibre, qui soit fondée sur une représentation circulaire de l'économie⁴.

Dans son modèle à coefficients constants, Leontief (1928) offre une explication des phénomènes cycliques et de développement économique à partir de chocs structurels exogènes, et notamment, des chocs technologiques sur les coefficients techniques de l'économie. Oscillations, fluctuations, mouvements pendulaires, et autres *trends* de croissance ou de décroissance sont au cœur de la thèse de Leontief (1928).

Marschak, enfin, cherche à construire un modèle macroéconomique néoclassique autrichien fondé sur le concept autrichien de période de production et la théorie quantitative de la monnaie⁵. Comme Leontief, Marschak représente une économie fermée et à l'état stationnaire. A partir de stocks initiaux de capital et de travail, des entrepreneurs fabriquent des biens intermédiaires qui permettent de produire in fine des biens de consommation finale. L'ensemble de ces biens produits –produits intermédiaires et biens de consommation finale– constituent le stock total des biens de l'économie sur une période. L'état stationnaire se définit notamment par la condition que la valeur réelle totale des stocks de biens est constante⁶.

Les deux facteurs originels sont le capital et le travail⁷ et il existe une certaine quantité de monnaie en circulation. L'équation d'échange, qui est une reformulation de la théorie quantitative de la monnaie, constitue le point de départ de l'analyse du « flux régulier du circuit d'une économie stationnaire » (Marschak 1934, 91). Le processus économique est d'abord un processus productif de transformation des biens, étape par étape, jusqu'à la consommation finale. Comme chez Böhm-Bawerk, Wicksell ou encore Hayek, il est

⁴ Chez les autrichiens, comme Böhm-Bawerk, Schumpeter ou encore, par extension, Wicksell et Marschak, le circuit est un flux linéaire allant des facteurs primaires (originels) aux biens de consommation finale. Aussi circuit économique n'est pas synonyme de flux circulaire. Par ailleurs un circuit économique peut être à l'état de reproduction simple sans être un flux circulaire. Par ailleurs, Leontief n'est pas le seul, à cette époque, à formaliser le processus de production comme un flux circulaire avec des coefficients techniques constants, John von Neumann se réfère explicitement au flux circulaire dans son modèle dynamique. Voir aussi les travaux, à Kiel, d'Alfred Kähler.

⁵ Alternativement à ce modèle autrichien, dynamique, Marschak esquisse un modèle statique basé sur une fonction de production Cobb-Douglas.

⁶ Le modèle de Marschak (1934) a ceci de particulier qu'il étudie les fluctuations d'une économie stationnaire. En d'autres termes, en postulant que l'économie est à l'état stationnaire, Marschak isole les fluctuations du phénomène de croissance et du trend de l'économie, ce qui peut être compris comme une manière de détandencionaliser les fluctuations économiques. Son modèle est à rapprocher des travaux de Knut Wicksell et surtout de Friedrich Hayek et les débats macroéconomiques contemporains à partir des modèles autrichiens d'analyse des cycles. Par la suite, Marschak développera largement l'analyse de la demande de liquidité dans son modèle en prolongeant, notamment, les travaux de Walras et Pareto sur la demande de monnaie.

⁷ Dans le cas du modèle de Marschak, le terme 'originel' ne suppose pas que l'on puisse identifier pour chaque bien sa source historique en travail et capital.

fondamental, selon Marschak, de tenir compte non seulement du capital disponible mais aussi des biens en cours de transformation, le capital circulant, pour des raisons ‘logiques’. Le processus productif peut être plus ou moins différencié : plus il y a d’intermédiaires et d’étapes entre le processus initial de production et l’acte final de consommation plus le degré de différenciation est élevé. Marschak note δ la mesure de ce degré de différenciation, et x l’indice de distance d’un bien vis-à-vis de la consommation : plus x est élevé plus le bien est éloigné de la consommation finale. L’indice x se mesure en unités temporelles. A minima, en cas de concentration verticale, les producteurs vendent directement aux consommateurs et $\delta = 1$. Partant de là, Marschak note F la fréquence de circulation des biens et il indique que son inverse, $1/F$, est « probablement identique à la notion böhm-bawerkienne de ‘période moyenne de production’ » (Marschak 1934, 93).

L’ensemble des biens fabriqués au cours du processus de production permettent de mesurer la valeur ajoutée annuelle qui constitue le revenu national. En effet, par soustraction à la valeur réelle d’un produit la valeur des biens intermédiaires nécessaires à sa fabrication, il devient possible de mesurer la valeur ajoutée d’une branche à un moment donné. Dans le cas d’une économie stationnaire, Marschak note r_0 la valeur ajoutée totale (constante). Notons que le modèle ne vise pas à expliquer r_0 mais à faire apparaître des fluctuations dans la sphère monétaire au cours de la période.

En introduisant des fluctuations régulières et irrégulières dans la sphère réelle et monétaire (mais pas sur le stock total sur l’ensemble de la période), Marschak parvient à générer des fluctuations aussi bien dans la sphère réelle que dans la sphère monétaire (via la demande de monnaie pour transaction). De telles fluctuations peuvent trouver leur cause dans un changement du degré de différenciation des biens intermédiaires ou bien elles peuvent être purement exogènes : les causes peuvent être techniques ou conventionnelles (comme pour certaines fluctuations saisonnières). Par exemple, si une entreprise absorbe une autre entreprise, alors le degré de différenciation change, ce qui conduit à une variation du montant des transactions dans l’économie. Toujours est-il que des fluctuations dans le tissu économique, i.e. une différenciation ou une concentration dans le processus productif, génèrent des cycles. Ces fluctuations, si elles ont des causes réelles, se manifestent essentiellement comme des phénomènes monétaires en agissant sur le stock monétaire, la demande de monnaie et les prix.

En résumé, pour nos trois auteurs il n’est plus question d’expliquer les *business cycles* à partir des habituelles offres et demandes marshalliennes, ni walrassiennes d’ailleurs. Les uns et les autres se dirigent vers une maquette macroéconomique de l’économie fondée sur la notion de circuit économique réel et/ou monétaire. Par ailleurs, ils développent une analyse macroéconomique désagrégée. A cela s’ajoute un réflexe commun consistant à employer le

principe du Tableau économique⁸. Les tableaux de Marschak, Frisch et Leontief participent d'une transformation épistémologique majeure qui voit émerger l'économétrie, la macroéconomie, la comptabilité nationale et la macroéconométrie. Le fondement de ces travaux repose sur trois piliers :

- 1- Une approche macroéconomique (non keynésienne) fondée sur l'analyse du circuit économique réel et/ou monétaire, ainsi que des différents secteurs de l'économie ;
- 2- Cette approche vise à étudier, et/ou contrôler, les grands phénomènes du développement économique, à commencer par les cycles et les crises ;
- 3- Cette approche a recours à des Tableaux économiques intersectoriels ;

Nous pouvons mettre en avant quelques facteurs importants de cette transformation : 1/ Le développement de l'économétrie et la mise à l'épreuve économétrique de la théorie de l'offre et de la demande, avec les déceptions auxquelles elle a abouti ; 2/ Le développement de problématiques macroéconomiques et de statistiques macroéconomiques pour étudier les cycles et le développement économique ; 3/ La demande croissante de technologies de contrôle économique ; 4/ La conceptualisation des politiques économiques et des moyens de planification dans le débat sur la possibilité d'un calcul socialiste⁹ ; 5/ L'émergence des techniques de modélisation mathématique ainsi que des méthodes et des moyens de calcul grâce aux nouvelles machines à calculer.

Partie II. Premier dispositif : le Tableau-modèle

Le tableau économique est une installation épistémologique complexe qui utilise plusieurs dispositifs afin de réaliser ce pour quoi elle est conçue, c'est-à-dire une performance. Cette performance peut être un effet de savoir, un ensemble de connaissances, ou un effet de pouvoir, ou les deux¹⁰. Nous analysons les trois dispositifs mis en place par les auteurs : tout d'abord le tableau est présenté comme un modèle mathématique lié à un appareil théorique ; ensuite, le tableau se conçoit chez Frisch et Leontief comme une structure matricielle au sens mathématique du terme ; enfin, le tableau économique trouve des fondements dans la comptabilité de manière à établir un pont entre le niveau microéconomique (comptabilité privée des agents économiques) et le niveau macroéconomique (comptabilité nationale).

⁸ Dans une version passablement différente de celle de Quesnay.

⁹ On ne pourrait trop insister sur l'importance du débat sur la possibilité d'un calcul socialiste. Néanmoins, par soucis de concision, nous n'abordons pas directement ce point ici. Des débats sur la planification dans les années 1920 et 1930 ont également lieu aux Etats-Unis où, par exemple, Morris Copeland n'hésite pas à établir un lien direct entre la comptabilité nationale et la planification (Copeland 1935).

¹⁰ La planification économique ou encore une prévision économique peuvent constituer la performance réalisée grâce à ce dispositif.

Examinons tout d'abord comment Marschak, Frisch et Leontief, respectivement, interprètent et analysent leurs tableaux économiques interindustriels grâce à un modèle théorique.

II.1 Le Tableau-Modèle de Marschak (1933)

Le Tableau économique est d'abord pour Marschak un instrument permettant d'organiser différentes théories économiques, depuis Marx jusqu'à Böhm-Bawerk. L'article que publie Marschak en 1933 mériterait une longue étude tant il est riche de commentaires méthodologiques et analytiques.

Dans une partie intitulée « l'essence des tableaux économiques », Marschak présente ce que l'on appellerait aujourd'hui la structure générale d'un tableau entrée-sortie :

« Nous pouvons représenter tous les échanges ayant lieu durant une période donnée entre des individus a, b, c, \dots au sein d'une société fermée, grâce au tableau suivant :

Vendu par	a	b	c	—
Acheté par				
a	aa	ab	ac	—
b	ba	bb	bc	—
c	ca	cb	cc	—
—	—	—	—	—

[Tableau 1. Le Tableau économique selon Marschak (1933)]

« ab est le montant vendu à b par a , exprimé en unités de valeur, etc. Les éléments de la diagonale aa, bb, cc , peuvent être considérés comme les montants consommés, par un individu, des marchandises qu'il a produites lui-même. Toute ligne et colonne ayant un élément diagonal en commun, i.e. tous les achats et toutes les ventes d'un même individu, doivent donner lieu à des sommes égales en ligne et en colonne, si nous excluons la possibilité d'épargne sans investissement ou d'investissement sans épargne. Ces flux (*turnovers*) dépendent de toute évidence, non seulement des revenus des individus concernés, mais aussi du degré de concentration verticale des industries particulières. L'influence de ce dernier – le 'double compte' des matériaux achetés par un producteur à un autre producteur – peut être éliminé si nous ne prenons pas en considération toutes les ventes et achats mais seulement celles provenant des « services productifs originaux » (travail, capital, services entrepreneuriaux) d'un côté, et les biens de consommation et les nouveaux biens d'investissement (par distinction avec les investissements venant en remplacement d'anciens biens d'investissement) de l'autre. Les colonnes représenteraient alors les revenus, et les lignes les dépenses finales. Ainsi, on retrouve la familière double méthode de calcul du revenu national à la fois comme la somme de tous les revenus et comme la somme de toutes les dépenses finales. Si, de plus, (1) les lignes, ou (2) une colonne correspondante, ou (3) les deux, étaient exprimées en unités physiques au lieu d'unités monétaires, l'égalité des

sommes en ligne et en colonne disparaîtrait et la variation du ratio de ces sommes révélerait (1) la variation des prix monétaires des marchandises finales, ou (2) la variation des prix monétaires des facteurs productifs offerts par les individus, ou (3) la variation de la relation d'échange réel entre les marchandises finales et les facteurs productifs considérés. » (Marschak 1933, 374)

Dans ce passage, Marschak expose clairement le principe général d'un tableau entrées-sorties. Pour Marschak, les relations entre des « groupes » au sein de l'économie, et donc la répartition du revenu national entre ces groupes, est fondamentale pour la compréhension des *business cycles* : il ne faut pas s'intéresser uniquement aux variations du revenu total (la valeur ajoutée)¹¹. Autrement dit, une analyse agrégée du revenu national ne suffit pas, il faut une analyse désagrégée et multisectorielle. La question se pose alors de savoir comment identifier les groupements pertinents c'est-à-dire les groupes a, b, c, Marschak considère ici que plusieurs théories concurrentes pourraient lire et donner une intelligence au tableau. Autrement dit il ouvre le tableau économique à une pluralité analytique. Marschak propose quatre approches :

1/ Tout d'abord, si les groupes sélectionnés sont (1) les groupes qui ne sont pas en concurrence les uns avec les autres et (2) ceux capables de réactions infiniment rapides, alors les changements observés – causés par des circonstances exogènes – pourraient être attribués uniquement aux variations des fonctions d'offre et de demande, en suivant la théorie pure du commerce international. En introduisant des complications (sur la durée de réaction, le temps de production, etc.), il reste que celles-ci relèvent de l'économétrie et amène à étudier « les élasticités de la demande en fonction des prix, la réactivité de la demande à des changements de revenus (...) la durée de l'adaptation des prix à des changements monétaires, la durée de l'adaptation des outputs selon la technique » (Marschak 1933, 376).

2/ Par ailleurs, en appelant *a* l'agriculture, *b* l'industrie et *c* l'Etat, nous retrouvons, selon Marschak, le Tableau économique de Quesnay. Néanmoins, « du point de vue de la théorie économique moderne, la seule particularité des produits agricoles consiste (...) en leur grande instabilité d'offre ; la division de Quesnay a ainsi, perdu l'essentiel de sa pertinence » (Marschak 1933, 375).

3/ Ensuite, en appelant *a* la production des biens de production (nouveaux et en remplacement), *b* la production des biens de consommation des travailleurs et *c* la production des biens de consommation des capitalistes, nous retrouvons les schémas de reproduction de Marx. Ainsi, le « lecteur reconnaîtra aisément dans notre tableau le Tableau économique de Quesnay ou les tableaux de reproduction de Marx, si nous substituons les groupes aux individus » (*Ibid.*, 375). Dans le dernier cas, nous obtenons, selon Marschak, deux principes

¹¹ Marschak pense ici à D. H. Robertson.

de classification : une distinction entre les facteurs originaux de production et une distinction entre les biens selon leur proximité avec l'acte de consommation.

4/ Le principe de classification des biens selon leur proximité temporelle avec l'acte de consommation est reprise (et adaptée) de Böhm-Bawerk : « Ce dernier principe a été souligné de manière plus importante encore par Menger et Böhm-Bawerk qui ont divisé le processus de production non pas en deux (comme Marx le fit) mais en plusieurs "étapes" » (*ibid.*, 375). Selon Marschak c'est cette approche autrichienne qui est la plus pertinente : c'est pourquoi il interprète le tableau intersectoriel selon son modèle de 1934, exposé plus haut. Se faisant, un lien est établi entre le tableau des « flux » et le tableau des stocks selon Marschak.

C'est le principe de classification par la distance temporelle à l'acte de consommation, qui paraît le plus pertinent à Marschak et qui fonde sa théorie macroéconomique de l'équilibre général. S'il cite Marx et Quesnay, Marschak se situe clairement dans une lecture marginaliste de type autrichienne du Tableau économique. Deux des principales inspirations de Marschak sont la théorie quantitative de la monnaie de Fisher et la théorie de la production de Böhm-Bawerk. L'analyse de Marschak peut être présentée en deux approches : l'une agrégée et l'autre désagrégée. Nous nous référons ici uniquement à l'approche désagrégée déjà exposée plus haut.

En effet, afin de prendre en compte l'ensemble des interactions, Marschak propose comme système de classement des biens une approche autrichienne. Sa lecture du Tableau économique repose sur une représentation de la production comme une voie à sens unique. En effet, ici la production est un processus linéaire –par opposition à circulaire– qui va des facteurs de production originaux vers la consommation finale. Marschak considère que les biens intermédiaires pourraient être rapportés à la quantité de travail et de capital nécessaire à leur fabrication. Il parle en effet des « *original productive services* » en tant que « *labor, capital and entrepreneurial services* » ; ces derniers produisant les biens de consommation et les biens d'investissement (1933, 374). Sa distinction entre les facteurs de production ne fait d'évidence pas référence à Walras mais à Böhm-Bawerk.

Synthèse 1 : Le Tableau économique chez Marschak est conceptuellement très précis mais peu développé d'un point de vue numérique. Dans son modèle mathématique dynamique, la production est représentée comme une voie à sens unique et il y a substitution entre les facteurs de production. Marschak recourt dans certains modèles à une fonction de production Cobb-Douglas. Dans son principal modèle, de type autrichien, les biens sont caractérisés par leur distance à l'acte de consommation et Marschak prend une reformulation de la théorie quantitative de la monnaie comme base macroéconomique. Néanmoins, Marschak n'introduit pas formellement d'agents individuels maximisateurs, ni d'équilibre d'offre et de demande. Les mathématiques mises en œuvre sont celles des fonctions continues dérivables et intégrables.

II.2 Le Tableau-modèle de Frisch (1934)

Nous en venons à l'analyse du modèle de Frisch. Si l'article de Marschak (1933) est d'abord une analyse critique des travaux économétriques des années 1920 et une introduction à son modèle autrichien des fluctuations (1934), celui de Frisch est d'une immense ambition et restera programmatique : il s'agit d'expliquer et résoudre le problème de la Grande Dépression. Et le postulat de départ est clair :

“The cause of great depressions such as the one we are actually in, is in some way or another connected with present form of organization of industry and trade. The depression is not a real poverty crisis, not due to an actual shortage of real values. This must be admitted by everybody, quite regardless of political color.” (1934, 259)

Les « lois économiques aveugles » (259) imposent aux agents économiques une situation sous-optimale qui ressemble à ce que l'on appellerait aujourd'hui un dilemme du prisonnier. C'est le cas par exemple lorsque chaque pays choisit le protectionnisme, et qu'à l'intérieur du pays chacun décide de réduire voire de geler ses dépenses. La solution étant de passer d'un jeu non-coopératif (comme dans les relations internationales) à un jeu coopératif. L'objectif du jeu coopératif est d'amener les agents à choisir la solution optimale du point de vue collectif : « *one is confronted with an optimum problem of great complexity* » (1934, 260). Concrètement, cela signifie pour Frisch de mettre en œuvre une planification : « *the prime object of planning must be to utilize more fully the existing productive capacity* » tout en respectant les préférences individuelles : la fonction de bien-être collectif n'est pas réduite à la quantité de biens consommée et produite mais tient compte de l'allocation des biens selon les préférences des agents. C'est là l'une des grandes originalités de l'approche de Frisch : proposer une explication (et une solution) de la crise fondée sur la rationalité individuelle des agents et sur leurs anticipations stratégiques, comme dans son modèle des cycles déjà exposé. Dans ce qui suit nous nous concentrons sur la manière dont Frisch introduit et utilise le Tableau économique intersectoriel comme base pour son modèle mathématique. Il apparaît en particulier que non seulement il donne des fondements individualistes au tableau (fondé sur la rationalité individuelle) mais offre un traitement mathématique très poussé à la fois algébrique et géométrique.

Un manque de confiance dans les commandes futures des autres agents amène à une baisse de la production, et fait apparaître des cycles dans l'économie. Le système de planification que propose alors Frisch consiste à établir « un tableau des requêtes ou encore une matrice des requêtes » : dans une économie à trois agents (fermier, cordonnier et tailleur), où chaque agent (ou groupe) demande aux autres agents combien de son bien ils comptent lui acheter (valeur en dollars, les prix sont constants), on peut établir la matrice des requêtes suivante :

(\$)	Veut acheter à			Total
	Cordonnier	Tailleur	Fermier	
Cordonnier	0	50	100	150
Tailleur	40	0	180	220
Fermier	110	170	0	280
Total	150	220	280	650

Tableau 2. Les matrices des requêtes de Frisch (1934)

Frisch construit ainsi un tableau statistique intersectoriel en dollars des flux inter-agents, qu'il nomme la matrice des requêtes. Ce tableau n'est pas *descriptif* mais *prescriptif*. La matrice des requêtes sert de base à l'analyse du problème de planification de l'économie. Le problème de planification se présente alors comme un problème d'optimisation, avec pour contrainte l'égalité des offres et des demandes de biens. Par exemple, si l'on demande au cordonnier combien de biens du tailleur et du fermier il va acheter s'il est assuré que ses propres ventes vont augmenter de 150\$ et qu'il répond « 40\$ au tailleur et 110\$ au fermier », alors il suffira de lui avancer, en bons, les 150\$ de sa future vente et il va dépenser ce montant. Par ailleurs, on voit dans la matrice des requêtes que les autres agents, le tailleur et le fermier, sont eux mêmes prêts à acheter 50\$ et 100\$ de biens du cordonnier respectivement. Par conséquent il y a un équilibre entre les offres et les demandes. Il suffira donc d'imprimer des bons de 150, 220 et 280 dollars -que l'on récupère à la fin du processus- pour faire augmenter la circulation dans le système, en termes réels.

L'équilibre entre les requêtes, dans la matrice des requêtes, n'est pas obtenu du premier coup. De fait, il n'y a aucune raison pour que les désirs des uns et des autres soient complémentaires, car ici il ne s'agit ni, comme dans un modèle *input-output*, de flux fondés sur des relations techniques où les facteurs sont complémentaires, ni d'un système de tâtonnement walrassien où un commissaire priseur crie des prix jusqu'à ce que les offres et les demandes s'ajustent. Sans donner plus d'explications, Frisch considère que le système organisé de marché ne peut résoudre le problème de l'échange et du développement économique. Dans son modèle de planification, Frisch considère les prix comme donnés et il ne tient pas compte de l'effet des transactions et des changements de demande sur les prix.

Il faut corriger la matrice des requêtes de manière à obtenir un équilibre global. En effet, la matrice initiale obtenue par un questionnaire auprès des agents économique ne présentera pas d'égalité entre les totaux en lignes et les totaux en colonne. Il revient au planificateur de déterminer une matrice qui soit équilibrée et qui corresponde le plus possible aux désirs des agents tels qu'ils sont exprimés dans la matrice initiale. Ainsi, du point de vue macroéconomique, il faut essayer de retrouver un équilibre global que Frisch compare, par

analogie purement formelle, aux proportions entre les facteurs de production employés par une entreprise soumise à une technologie à coefficients de production constants, comme dans la théorie walrassienne de la production (Walras [1874] 1988) et comme dans la matrice des requêtes :

“[To understand the global balance] we only have to think of an enterprise that requests certain factors of production. To the extent that the coefficients of production are constant for variations in output of the order of magnitudes here considered” [the principle of correcting the matrix is right] (Frisch 1934, 275).

Synthèse 2 : Chez Frisch, l'explication du mécanisme des cycles et des crises repose sur les anticipations stratégiques des agents. La crise économique est vue comme un blocage de la circulation économique en raison d'une défiance généralisée qui amène chacun à thésauriser. Frisch propose alors un modèle de planification économique qui s'appuie sur la notion de tableau économique et qui vise à établir un équilibre coopératif entre les agents. Le tableau économique contient les requêtes en marchandises des agents. Le processus de planification vise à faire correspondre, à prix fixes et en interdépendance générale, les demandes des uns avec celles des autres de manière à équilibrer les flux. Puisque le mécanisme de coordination par les prix est inopérant en raison de la défiance généralisée, c'est au planificateur de permettre un équilibrage des flux qui minimise l'écart avec les requêtes initialement formulées par les agents. Ce problème d'optimisation est, d'un point de vue formel, similaire à celui du choix des techniques dans un modèle d'équilibre général avec coefficients de production constants.

II.3 Le Tableau-modèle de Leontief (1928-1937)

Contrairement aux deux autres approches, celle de Leontief est plus proche de l'analyse classique et marxienne que de l'analyse marginaliste. Leontief présente un tableau statistique complet de l'économie américaine pour 1919, et un modèle de cette économie présenté sous forme de systèmes d'équations linéaires et sous forme matricielle. Contrairement aux deux auteurs précédents, Leontief ne parle ni de planification, ni de contrôle économique, ni de Marx ou de marginalisme et de principe de maximisation. Par ailleurs, le tableau et les modèles que Leontief construit sont d'ordre *descriptif* comme celui de Marschak.

Le Tableau économique intersectoriel, qui circule au sein d'un certain collège invisible, est un dispositif très proche du cadre analytique dont Leontief est familier et qu'il a développé dans sa thèse doctorat. A la différence de Marschak pour qui le Tableau économique, quoi que utile, n'est pas primordial, pour Leontief il correspond exactement à sa représentation du système économique.

Le rejet des théories marginalistes de la production constitue une autre rupture entre l'analyse de Leontief du Tableau économique et celles de Frisch et de Marschak. Leontief ne reprend ni la notion de facteur de production, ni celle de substitution entre inputs, ni les

principes d'optimisation sous-jacents, ni enfin, la théorie quantitative de la monnaie¹² ou l'analyse temporelle à la Böhm-Bawerk. Symétriquement, Leontief abandonne beaucoup de la théorie classique à commencer par l'idée d'avances des capitalistes et de taux de profit ainsi que le problème de la détermination de la valeur, des salaires et des profits. Que reste-t-il donc ? Il reste avant toute chose le principe simple du flux circulaire où les marchandises sont produites par des marchandises ainsi qu'une analyse de la production à partir de coefficients techniques constants.

En somme, alors que Frisch estime que le système productif n'est pas en cause dans la Grande dépression et que, par conséquent, le modèle d'explication n'a pas besoin de s'étendre à l'analyse de la production, Leontief, au contraire, centre l'explication sur la production, la technique et les habitudes des ménages. Ainsi Leontief et Marschak considèrent que les fluctuations économiques peuvent être comprises à partir d'un modèle dynamique axé sur les relations techniques de production. Leontief a intégré dans sa représentation marxienne du circuit économique les coefficients techniques de Walras, comme Schumpeter l'avait fait pour son analyse autrichienne du développement économique (1911). Le modèle de Leontief prend comme données les coefficients techniques qui correspondent à l'information sur les techniques de production, des coefficients de productivité et, enfin, les coefficients de consommation des ménages. A partir de ces données, le modèle permet d'expliquer les prix relatifs, les proportions entre les différents secteurs, l'investissement et l'épargne¹³. Enfin, ce modèle sert à Leontief pour analyser l'effet de changement marginaux des coefficients sur les prix, les proportions entre les secteurs ou encore l'investissement et l'épargne : utilisant l'analyse différentielle il analyse la sensibilité des différentes variables à un changement marginal des coefficients structurels. Ce modèle (1937) est statique à la différence de celui de 1928 et constitue une étape intermédiaire entre le modèle dynamique à deux secteurs de 1928 et celui dynamique et généralisé que Leontief mettra au point à la fin des années 1940. L'analyse par Leontief du changement économique repose sur le principe selon lequel le système économique est d'abord un système productif. Le développement économique ainsi que les cycles sont le résultat de chocs techniques. Pour finir, que la répartition du revenu est une donnée historique et non technique comme dans les théories de la productivité marginale.

Pour résumer, s'il existe des différences importantes dans l'analyse théorique du Tableau économique entre Leontief d'une part, et Marschak et Frisch d'autre part, il n'en reste pas moins que les trois appartiennent au même moule. Il est frappant notamment de voir

¹² Leontief a recouru à la théorie quantitative de la monnaie dans son modèle de l'économie comme flux circulaire de 1928, mais, par la suite, il n'intégrera plus de considération sur la monnaie dans ses modèles input-output.

¹³ Rappelons seulement que le modèle de Leontief comprend une matrice des coefficients techniques nets, A , le vecteur des outputs X (y compris le travail comme output des ménages), et un vecteur de prix P . Le modèle s'écrit alors $AX = 0$ et $A^T P = 0$.

comment l'idée d'interdépendance prend de l'importance et que la question de savoir comment représenter et mesurer cette interdépendance donne lieu à de nombreux essais qui sont à chaque fois une tentative d'employer des éléments de théories existantes avec des représentations statistiques récentes et de nouveaux outils mathématiques. Chez Leontief on retrouve le principe déjà avancé par Frisch d'une interprétation du tableau économique comme matrice de coefficients constants. Le modèle de Leontief, simplification du modèle walrassien et adaptation du flux circulaire marxien, permet une analyse directe de la « matrice » économique. Fondamentalement, les mathématiques utilisées par Leontief sont les mêmes que celles de Frisch. En 1935, la programmation linéaire n'existe pas et l'idée de formuler un programme de maximisation en définissant une fonction d'objectif non plus.

III. Second dispositif : le Tableau-Matrice

Les matrices de Leontief étant largement connues et étudiées, nous nous concentrons ici sur les matrices que Frisch construit pour équilibrer son tableau des requêtes. Le principe choisi par Frisch est de ne modifier que le montant total désiré par agent, en laissant inchangées les proportions désirées entre les biens. Ainsi, on considère que les coefficients qui reflètent ces proportions sont constants comme des coefficients de production dans un modèle de production à facteurs complémentaires. Seuls les montants désirés peuvent être corrigés.

Le choix de la matrice finale se résume au problème suivant : existe-t-il un vecteur (z) de pourcentages applicables aux montants totaux initialement désirés par les agents, qui indiquerait de quel pourcentage doit baisser chaque montant de manière à ce que la matrice finale soit équilibrée ? Frisch construit un système d'équations simultanées et, à partir de la théorie des équations linéaires, il en déduit l'existence d'un vecteur unique à un scalaire près. Il est intéressant de voir que Frisch utilise non seulement l'analyse des systèmes d'équations linéaires et le calcul matriciel pour modéliser le problème économique de l'échange, mais aussi la géométrie des systèmes linéaires. Dans la **Figure 1** (ci-dessous), la situation d'une économie à trois agents est représentée pour un montant total désiré a . Soit c_i la montant total de l'agent i et a_{i0} le montant initialement désiré.

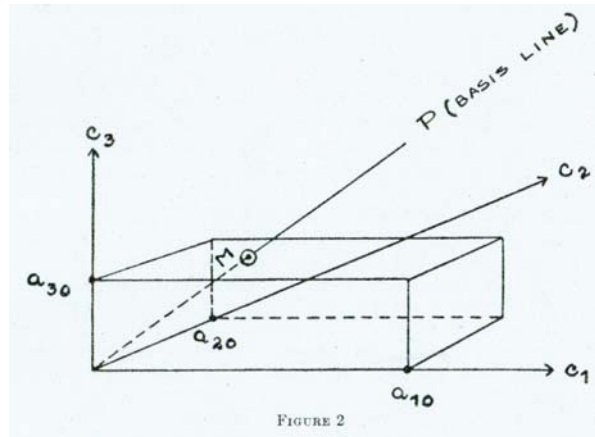


Figure 1. Frisch 1934 (Figure 2, 279)

Alors, le montant final effectivement reçu et dépensé par l'agent doit appartenir à l'ensemble défini par les trois montants initiaux puisqu'on ne peut que recevoir autant ou moins qu'initialement. Dans le cas du graphique proposé par Frisch, le planificateur choisit comme règle de satisfaire entièrement le désir de l'agent 3 : on en déduit alors le point M qui assure l'équilibre global des demandes désirées. Frisch propose alors un exemple, dans le cas de trois agents (cordonnier, tailleur, fermier). Soit la matrice initiale :

(4.15)	Wants to buy from			Total
	Shoemaker	Tailor	Farmer	
Shoemaker	0	75	150	225
Tailor	80	0	360	440
Farmer	330	510	0	840
Total	410	585	510	1505

The matrix $(\alpha_{ki} - e_{ki})$ is in this case

(4.16)	$i=1$	2	3	Sum check
$k=1$	-1.00000	0.33333	0.66667	0
2	0.18182	-1.00000	0.81818	0
3	0.39286	0.60714	-1.00000	0

Tableau 3. Matrice des requêtes initiale déséquilibrée (Figure 4.15, 280)

Comme on le voit, les désirs des uns et des autres ne sont pas compatibles et ne permettent pas d'obtenir une matrice équilibrée : les déséquilibres des totaux en lignes et en colonnes apparaissent nettement. Après utilisation du processus de correction décrit précédemment, en satisfaisant entièrement le cordonnier, on obtient la matrice corrigée suivante, qui est équilibrée cette fois-ci :

(4.23)	Is allowed to buy from			Total
	Shoemaker	Tailor	Farmer	
Shoemaker	0	75	150	225
Tailor	60	0	270	330
Farmer	165	255	0	420
Total	225	330	420	975

Tableau 4. Matrice Corrigée I (Figure 4.23, 282)

Observons que le total des échanges dans cette situation est de 975 au lieu des 1505 dans la matrice initiale des requêtes. De fait, la correction de la matrice amène à réduire le volume global des échanges mais permet d'obtenir un équilibre des requêtes et donc des offres et des demandes mais sans avoir recourt au système de prix comme mode de coordination. Par conséquent, l'équilibre des requêtes, interprété comme un équilibre des offres et des demandes, ne doit pas être confondu avec la loi de l'offre et de la demande où le prix assure l'équilibre : ici les prix sont donnés et fixes, seules les volumes changent. A ce stade, un enjeu évident est de parvenir à corriger la matrice sans trop bousculer les désirs des agents et en obtenant le plus grand volume possible des échanges. Pour cela il faut modifier la méthode de correction de la matrice. Frisch propose alors des raffinements possibles pour le système de correction de la matrice des requêtes :

1-Le choix des pourcentages relève en partie d'un jugement et d'une comparaison de l'importance des différentes demandes. On peut ainsi considérer qu'il faut satisfaire entièrement tel agent plutôt que tel autre selon le critère d'équilibrage choisi (règles de choix ad hoc)¹⁴.

2-Frisch propose un autre système de correction : au lieu de limiter les personnes, on limiterait les biens : on impose une limite de production à chaque bien de manière à assurer un équilibre. Ce processus de rationnement est en fait une variante du précédent (processus dit des partageurs).

3-Combinaison des deux premiers principes.

4-Processus de prise en compte des comportements non coopératifs comme l'augmentation du prix de son bien.

Le *circular planning* et l'optimisation : de Ragnar Frisch (1934) à Dantzig (1949)

La formulation mathématique du problème de planification de Frisch se représentera, sous une autre forme, 15 ans plus tard, aux Etats-Unis. En effet, Georges Dantzig sera chargé par les services de recherche de l'Armée de l'Air Américaine, à la fin de la seconde guerre mondiale, de développer un modèle de planification des activités militaires. Dantzig formulera ce problème sous forme d'un problème d'optimisation d'une fonction d'objectif (il invente ce terme) sous des contraintes inégalitaires. La résolution théorique et pratique de ce problème l'amène à des innovations mathématiques à partir des travaux de John von Neumann sur la théorie des jeux notamment, ainsi que ses propres travaux sur la géométrie matricielle. L'emploi du lemme de Farkas, recommandé à Dantzig par von Neumann, sera essentiel à l'analyse du problème tandis que l'invention par Dantzig de l'algorithme du simplexe permettra une résolution pratique du problème (i.e. trouver la solution optimale). Par coïncidence, c'est à partir des modèles input-output de Leontief que Dantzig développe

¹⁴ Ici le problème peut être vu comme le choix de pondération pour les demandes de chaque agent. Le choix de ces pondérations relève de l'économie du bien-être et suppose de définir une fonction de bien-être social. Frisch rejoint ici les travaux en économie du bien-être et sur le calcul socialiste de Lerner, Bergson et Samuelson notamment.

son modèle de planification, appelé bientôt programmation linéaire ou encore « modèle généralisé de Leontief ».

In fine, Frisch propose la procédure générale suivante : trouver le montant total désiré C qui soit le plus grand possible mais qui ne dépasse pas le montant initial désiré par chacun des agents (les a_{i0}). Pour cela on introduit les paramètres (vecteurs) x , y et ρ , associés aux critères des participants (pourcentages per capita), de modération des écarts entre les désirs initiaux et finaux au regard des coûts impliqués (pourcentages per capita : un bien « trop » demandé peut en fait coûter si peu en capacités de production qu’il vaut la peine d’en produire une grande quantité) et les paramètres de services (qui évitent les comportements non coopératifs sur les prix et les coûts). Les coefficients de rationnement (pourcentages par bien) sont également pris en compte, les (z) . On introduit enfin une variable qui permet de tenir compte des inconvénients dus aux déformations apportées à la matrice initiale ; ce paramètre représente les « ‘coûts’ $[C]$ constitués par les inconvénients générés par le non-respect » des désirs exprimés dans la matrice initiale. Il s’agit alors de déterminer le vecteur C qui minimise le coût des déformations de la matrice initiale. Ce dernier élément est représenté par une courbe où l’on montre comment le « coût » global varie en fonction de chacun des paramètres de contrainte (rationnement, partage etc.). Dès lors il devient possible de choisir avec plus de subtilité les paramètres (z, x, y, ρ) en évaluant et en compensant les effets des uns sur les autres.

THE COMPLETELY CORRECTED MATRIX				
$(1+z_i)a_{ij}+a_{ij}x_j$	Is allowed to buy from			Total
	Shoemaker	Tailor	Farmer	
(9.27) Shoemaker	0.00	75.83	149.17	225.00
Tailor	65.93	0.00	347.07	440.00
Farmer	159.16	364.11	0.00	523.26
Total	225.08	439.94	523.24	1188.26

Tableau 5. Matrice entièrement corrigée (1934, 320)

Le processus d’optimisation par itérations successives, basé sur un certain nombre de contraintes et de choix ad hoc aboutit à la matrice corrigée exposée **Tableau 5** qui permet de rendre compatibles les désirs des uns et des autres sans dépasser la demande de chacun ni « trop » forcer les différences entre désirs initiaux et livraisons finales. De plus, cette méthode permet de rendre le volume total des transactions le plus grand possible¹⁵. En l’occurrence, au

¹⁵ Dans leur analyse détaillée du modèle de planification circulaire de Frisch, Bjerkholt et Knell (2006, 402) notent que la matrice corrigée permet de passer d’un total de \$650 à \$1188.26. Cette affirmation est fautive puisque la matrice initiale à prendre en compte n’est pas celle du **tableau 2**, mais celle du **tableau 3** qui contient un montant total de \$1505. Par conséquent nous passons d’un volume total de \$1505 à un volume total de

lieu des 975 de la première matrice corrigée, nous obtenons cette fois-ci le montant 1188.26 (qui reste inférieur à celui de la matrice initiale).

Le « circular planning » et la théorie économique de la production

Frisch rappelle à plusieurs reprises que le problème qu'il traite et sa solution correspondent formellement point par point à la théorie de la production. Ainsi, la maximisation de C peut être rapportée à la maximisation de la production d'un bien dans le cas où il y a substitution entre les facteurs de production :

“Logically this problem is very much like the general problem we encounter in productivity theory: C may be considered as the ‘product’ and the x , y and ρ , the ‘factors of production’. As in productivity theory, it will also here be found expedient to separate the problem of adaptation in two parts: First, the “substitution” by which the minimum cost is obtained which correspond to a given volume, then the “volume adaptation”, which involves a study of how total volume varies as a function of total cost along the optimum curve. This optimum curve (...) is defined as the locus of points in factor space where any given magnitude of the product the substitution is completely realized. Much of the technique of this productivity analysis can be applied to the present case” (Frisch 1934, 286).

Il reste que c'est Leontief qui relie d'un point de vue formel et théorique tableau économique, modèle matriciel et théorie de la production avec son modèle à coefficients techniques constants. Chez Leontief, la technologie est interprétée directement à partir des données contenues dans le tableau.

En conclusion, si Leontief et Frisch recourent systématiquement à l'analyse matricielle pour interpréter leur tableau économique et formuler un modèle mathématique, il existe une différence de fond entre Marschak et Leontief d'une part, et Frisch d'autre part. En effet, les premiers considèrent que l'origine des cycles et des crises sont à chercher du côté du système productif et du flux économique (et monétaire pour Marschak) alors que pour Frisch, dans son modèle matriciel, la crise est d'abord un problème de confiance des agents et de coopération.

IV. Troisième dispositif : le Tableau-Compte

A la suite des travaux en comptabilité macroéconomique de Popov (1926) et de Frisch notamment¹⁶, c'est Leontief qui donne des fondements rigoureux en termes de comptabilité nationale au Tableau économique interindustriel et qui met en œuvre de manière incomparablement poussée l'utilisation des données statistiques par le modèle mathématique

\$1188.26, ce qui constitue une diminution et non une augmentation. Après vérification auprès des auteurs, il s'agit vraisemblablement d'une coquille dans Bjerkholt et Knell (2006). Par ailleurs, cette rectification atténuée largement la remarque de ces derniers selon laquelle la maximisation du montant total des transactions a pour résultat un dépassement significatif des demandes désirées de certains agents (rappelons que l'une des contraintes est de ne pas dépasser la demande de chacun).

¹⁶ Ainsi que, entre autres, les travaux d'Irving Fisher, de Morris Copeland, Robert Martin et Simon Kuznets, pour les Etats-Unis ; ceux de Erik Lindhal en Suède ; ceux d'Ernst Wagemann et son équipe à l'IFK à Berlin, pour l'Allemagne.

d'interdépendance générale. Nous exposons brièvement les travaux sur le tableau comptable de Frisch et de Marschak et nous nous concentrons ensuite sur les fondements comptables du tableau interindustriel de Leontief.

IV.1 Les Tableaux statistiques de Frisch et de Marschak

Dès la fin des années 1920, Frisch esquisse, sur le modèle de la comptabilité privée, les bases d'une comptabilité macroéconomique¹⁷. Le principe fondamental est celui des comptes en T, avec d'un côté les débits et de l'autre les crédits. Chaque secteur/branche de l'économie peut ainsi être analysé selon ce principe grâce à un « tableau économique » comptable. L'ensemble de ces tableaux économiques constituent une image comptable des activités économiques qui ont lieu au cours d'une année. Ainsi, « *The national accounts will constitute the same kind of survey for the country as a whole as the ordinary balance and current accounts for a single enterprise* » (Frisch, Keilhau, Wedervang, 1936 in Bjerve 1996, 12). Notons que le tableau statistique que met en place Frisch n'est pas purement macroéconomique et agrégé mais d'abord fondé sur les différents secteurs de l'économie et, même si c'est de manière lacunaire, sur les relations que les secteurs entretiennent les uns avec les autres.

On trouve dans la construction des tableaux les grands principes modernes de ce qui est alors en train de devenir la comptabilité nationale, à savoir : le concept de valeur ajoutée, la notion de revenu national comme somme des valeurs ajoutées ($Y = \sum va$), la seconde méthode de mesure du revenu national comme somme des usages de la production ($Y = C + I + G$). On retrouve ces notions chez Marschak également.

Marschak (1933) évoque la distinction entre flux et stock et signale la possibilité de construire des tableaux interindustriels non seulement pour les flux mais aussi pour les stocks. De plus, l'auteur insiste sur l'importance des définitions et de l'harmonisation internationale des définitions statistiques afin de permettre des comparaisons internationales. Marschak fait un constat courant à l'époque : les Etats-Unis ont l'appareil statistique le plus développé, précis et sophistiqué. Quant aux pays Européens, l'Allemagne accuse un net retard dans le domaine de l'analyse du système productif où aucune statistique systématique n'est disponible. Néanmoins, même pour les Etats-Unis la construction d'un tableau interindustriel (*the commodities side* par opposition à l'approche par les revenus), paraît à Marschak particulièrement ardue, bien qu'il ne « considère pas la situation comme désespérée » (1933, 379). Il ajoute : « *The statistics on 'spending' thus being the least investigated, statistics on production and income give the main possible basis of research* » (1933, 380). Toujours est-il que la construction de Tableaux économiques doit reposer, aux yeux de Marschak, sur un travail théorique préalable permettant de sélectionner et d'organiser les variables et les données pertinentes.

¹⁷ Une partie importante de ces travaux de Frisch sont restés inédits et tous sont en norvégiens.

Ces propositions de Marschak sont à la fois une synthèse des travaux statistiques et analytiques menés dans les années 1920 en Europe, en URSS et aux Etats-Unis, et constituent aussi une présentation programmatique où il montre comment le tableau économique peut amener à des études selon des cadres théoriques divers. Par ailleurs – et cela constitue un lien direct avec les travaux de l'IFK et de Wagemann – même s'il ne donne pas de mesure concrète de son tableau, Marschak indique les sources statistiques pour de tels travaux. Il cite, en particulier, les travaux de Willford King aux Etats-Unis, de Colin Clark en Grande-Bretagne et ceux de l'IFK à Berlin. Selon Marschak, seules les statistiques américaines permettent de calculer le revenu national de différentes manières, mais aussi permettent différents « groupements » (de type 1/, 2/ ou 3/ selon sa typologie). Il faut, en particulier, s'intéresser aux données sur les dépenses (peu étudiées en général), et celles sur la production (l'agriculture, les industries, les ressources minières, les transports, les activités publiques, etc., déjà plus couvertes).

Néanmoins Marschak ne va pas plus loin dans l'analyse comptable du tableau économique. Il esquisse avec une précision frappante ce qu'est le programme à venir de la comptabilité nationale mais il n'y contribue pas. Il en va autrement avec Leontief. En effet, le troisième dispositif et la troisième innovation importante est de donner des fondements comptables au Tableau-Matrice.

IV.2 Les tableaux de Leontief et la comptabilité nationale

Dans ses textes, Leontief ne cite ni les travaux des soviétiques, ni les travaux statistiques en cours en Europe et aux Etats-Unis¹⁸. Son positionnement disciplinaire n'est pas la statistique publique mais la science économique : il parle d'application empirique de la théorie de l'équilibre général. Est-ce à dire que Leontief n'est pas familier avec les travaux de statistique du revenu national ? Nous penchons pour l'idée selon laquelle Leontief connaît très bien ces travaux mais qu'il crée volontairement une séparation entre son approche et ces autres travaux.

Le tableau économique de Leontief se décline en deux versions formellement similaires : la première croise les échanges entre des agents et la seconde les échanges entre des « industries » (au sens large). Ce Tableau peut donc donner lieu à une lecture de type « individualisme méthodologique » ou de type marxienne ou encore plus généralement macroéconomique. Cette remarque est importante dans la mesure où l'on a coutume d'opposer l'approche holiste de Leontief à d'autres approches basées sur des agents représentatifs ou des secteurs institutionnels ; or le tableau de Leontief est ouvert aux différentes interprétations. D'ailleurs, pour étudier les fondements comptables de son tableau

¹⁸ Rappelons que, par exemple, Morris Copeland (1932) présentait déjà une représentation des comptes nationaux sous la forme d'un compte en T, débit/crédit.

économique, Leontief ne discute qu'à partir d'acteurs individuels (consommateurs, producteurs) de manière à établir un lien direct avec la comptabilité privée. C'est lorsqu'il passe au niveau agrégé, celui des comptes nationaux, que s'atténue la relation avec les agents individuels.

Lorsqu'il expose les principes de base de son Tableau économique, Leontief part du cas d'une économie simple à 5 agents : 4 producteurs et un ménage, notés A, B, C, D, E¹⁹. En ne considérant pas les autoconsommations (par norme comptable²⁰), on obtient le tableau des échanges entre les agents²¹ ci-dessous (**Tableau 6**). On appelle A_b le montant de bien a consommé par l'agent B, A_c le montant de bien a consommé par l'agent C, etc. Les consommations totales du bien doivent être égales à l'*output* total de ce bien : cet équilibre emplois-ressources apparaît en ligne. Ce qui correspond, au niveau de l'économie, à l'équilibre emplois-ressources apparaît dans ce cas simplifié, pour un agent, comme la décomposition de son revenu (ses ventes) par poste de livraison.

Aussi, ce tableau permet-il de faire apparaître les dépenses de chaque agent. Dans le cas de l'agent B, il apparaît en colonne qu'il consomme un montant A_b de bien a , C_b de bien c , D_b de bien d et E_b de bien e . La somme de ses dépenses, en colonne, permet de calculer les frais de chaque agent : ici pour l'agent B, $\sum_a^e i_b$. En ligne apparaissent les revenus de chaque agent (c'est-à-dire le montant des livraisons aux autres agents), et en colonne ses dépenses. La somme des dépenses est nécessairement égale à la somme des revenus notée S.

¹⁹ Nous suivons ici l'exposé original de Leontief (1936).

²⁰ Les agents ne comptabilisant pas leurs autoconsommations dans la comptabilité privée.

²¹ Un élément lu en ligne apparaît comme un revenu, et lu en colonne une dépense : le système de double comptage est mis en œuvre par ces doubles entrées.

	A	B	C	D	E	Total
A	*	A_b	A_c	A_d	A_e	$\sum_a^e A_i$
B	B_a	*	B_c	B_d	B_e	$\sum_a^e B_i$
C	C_a	C_b	*	C_d	C_e	$\sum_a^e C_i$
D	D_a	D_b	D_c	*	D_e	$\sum_a^e D_i$
E	E_a	E_b	E_c	E_d	*	$\sum_a^e E_i$
Total	$\sum_a^e i_a$	$\sum_a^e i_b$	$\sum_a^e i_c$	$\sum_a^e i_d$	$\sum_a^e i_e$	S

Tableau 6. Tableau des échanges inter-agents de Leontief (1936)²²

L'étape suivante vers la constitution d'un tableau des échanges interindustriels est de faire apparaître, non plus des agents individuels (entreprises et ménages), mais des *industries* (les ménages sont une industrie) : c'est l'étape de la consolidation des comptes qui permet de passer du niveau microéconomique, au niveau mésoéconomique et, enfin, au niveau macroéconomique. Les tableaux interindustriels se situent au niveau mésoéconomique. Le tableau peut être consolidé jusqu'à retrouver le cadre agrégé de la comptabilité nationale traditionnelle : le processus de consolidation dans le tableau des échanges interindustriel peut être poursuivi jusqu'à n'obtenir qu'un seul secteur macroéconomique. Dans tous les cas, les revenus des ménages (E) provenant des entreprises représentent la valeur ajoutée, et est égale au revenu national. L'investissement n'apparaît pas explicitement car les dépenses d'investissement sont comprises sans distinction dans les flux des *inputs*.

Pour résumer, des trois auteurs que nous étudions, Leontief est le seul à entreprendre jusqu'au bout l'analyse comptable du tableau économique. Ce faisant il renoue avec son premier article qui est un compte rendu des travaux de comptabilité économique nationale de Popov et de Litoshenko (Leontief 1925). Dans cet article il fait preuve de beaucoup de sévérité quant à l'usage que font les auteurs du Tableau économique et discute en détail les techniques de comptabilité nationale mise en œuvre. Entre temps, il semblerait que Leontief se soit ravisé et ait jugé pertinent le projet de construire un grand Tableau économique fondé sur des normes comptables rigoureuses. Par ailleurs, comme Popov et comme Marschak et

²² Ce tableau peut être trouvé dans Leontief (1936).

Frisch, Leontief construit son tableau avec un modèle mathématique en tête. A la différence de nombreux macroéconomistes, Leontief exclu la recherche d'un modèle axé sur l'explication du revenu national et ne s'intéresse qu'aux interactions des industries et du secteur des ménages de l'économie.

V. Conclusion

L'objectif de cet article est de restituer le sens de l'emploi simultané par Marschak, Frisch et Leontief du principe du Tableau économique et de modèles multisectoriels pour expliquer les phénomènes de cycles, crise et de développement économique.

Un premier élément de réponse a été trouvé dans l'inadéquation du cadre marshallien de l'offre et de la demande en équilibre partiel pour expliquer les fluctuations économiques. A cet égard, et malgré de profonds désaccords théoriques et épistémologiques, nos trois auteurs ont fini par admettre que ce cadre n'est pas pertinent et que l'analyse économétrique des offres et des demande pose de graves problèmes.

De là, et poussés par le contexte de la Grande dépression et des débats sur la planification comme, en particulier, la controverse sur la possibilité d'un calcul socialiste, ils se tournent vers des approches macroéconomiques et se réfèrent aux grands agrégats de la comptabilité nationale naissante. On peut alors relier les travaux de Marschak, Frisch et Leontief à ceux des économistes et statisticiens russes, européens et américains

Quoi que macroéconomiques, les modèles de Marschak, Frisch et Leontief ne sont pas axés sur l'explication du revenu national comme somme des valeurs ajoutées, mais sur les interactions et les interdépendances entre les différentes parties de l'économie, à commencer par les différents secteurs et les différents biens produits et échangés. Cette explication peut soit se baser sur une analyse de type marxien des schémas de reproduction, comme le soulignent Marschak et Leontief, soit sur une analyse des interdépendances entre les agents comme chez Frisch, ou encore selon un cadre autrichien de type Böhm-Bawerk comme le fait Marschak. Dans tous les cas, le tableau économique permet de retracer et de représenter les flux marchands échangés entre les agents, et le modèle économique permet d'expliquer la formation de ces flux.

Nous avons relevé des similitudes significatives entre les trois approches :

Les trois auteurs ont une analyse du Tableau économique qui s'encastre dans un ensemble qui est à la fois théorique, mathématique et statistique. Tout d'abord, pour Marschak, Frisch et Leontief, le Tableau économique est représenté comme un tableau intersectoriel ou, alternativement, un tableau des échanges entre les agents économiques.

Le Tableau économique est une manière d'organiser et de représenter les relations entre les secteurs/agents de l'économie et qui a une signification du point de vue statistique, c'est-à-dire, ici, de la comptabilité nationale : il permet de mesurer des éléments tels que les consommations intermédiaires, les valeurs ajoutées et le revenu national.

Il a également une signification du point de vue de la théorie économique et s'interprète par la médiation d'un modèle mathématique. Aussi, à travers ces articles nous pouvons observer la formation d'un style nouveau : la macroéconométrie, la modélisation mathématique, la définition des usages de l'économétrie, le développement de la comptabilité nationale.

Il faut néanmoins souligner des différences importantes :

L'importance accordée au Tableau économique et sa place dans le dispositif analytique global ne sont pas les mêmes d'un auteur à l'autre, laissant penser qu'il existe une pluralité d'interprétations analytiques du tableau économique. Alors que Marschak (1933) fait une analyse statistique et théorique brillante du Tableau économique intersectoriel, il n'en fait qu'un usage limité dans son dispositif analytique et se concentre sur quelques indicateurs macroéconomiques. Chez Leontief, en revanche, il existe une synonymie extrêmement poussée entre le tableau-modèle et le tableau-compte grâce à la représentation du tableau comme matrice. Il en va de même avec Frisch mais, chez lui, le tableau intersectoriel n'est pas un tableau statistique positif mais une matrice des demandes désirées par les agents (requêtes).

La représentation du processus productif comme flux circulaire dans les modèles de Leontief (à la suite de Marx) s'oppose à celle d'un processus, certes dynamique, mais linéaire comme chez Marschak (à la manière de Böhm-Bawerk). Pourtant, malgré cette différence notable, les deux approches ont en commun de placer les biens intermédiaires au cœur de l'analyse, en particulier sous la forme de capital circulant. Dès lors, les modèles doivent être multisectoriels avec des biens intermédiaires, ce qui contraste avec la macroéconomie keynésienne axée sur l'explication des grands agrégats.

Chez Marschak les fluctuations se comprennent comme les conséquences de changements dans le processus de différenciation des biens lors de la transformation des facteurs de production en biens intermédiaires et finalement en biens de consommation finale. Pour Leontief les changements techniques et d'habitudes de consommation et d'épargne des agents sont la première cause du changement économique. Ces changements se manifestent par des variations des coefficients techniques, de consommation et d'épargne dans le modèle du flux circulaire. Par exemple, dans son modèle de 1928, Leontief fait apparaître ainsi des phénomènes d'oscillations pendulaires, de croissance ou de décroissance/contraction de l'économie globale. On retrouvera ce type d'analyse dans les modèles de *real-business-cycles* où des chocs technologiques exogènes viennent perturber le chemin de croissance de l'économie.

Pour Frisch, à la différence de Marschak et de Leontief, l'explication des crises et des fluctuations n'est pas à chercher dans le fonctionnement du système productif ou même dans le fonctionnement du marché, mais dans les anticipations et la confiance des agents les uns envers les autres. Pour Frisch, la Grande dépression doit se comprendre comme un système de défiance généralisée. Selon Frisch, le problème est avant tout technique : faire correspondre les demandes désirées des uns et des autres par un ajustement mécanique qui ressemble, d'un point de vue *purement formel*, au problème de la théorie de la production. Frisch souligne cette ressemblance formelle mais n'introduit à aucun moment la question de la théorie de la production dans son modèle de « *circular planning* ». Néanmoins, les rappels réguliers de Frisch aux outils qu'il développe pour la théorie de la production sont importants car ils montrent bien comment, à un moment donné, la boîte à outil d'un économiste, sert à traiter de problèmes divers. Ainsi, la théorie des systèmes d'équations linéaires, le calcul matriciel, la géométrie des ensembles à n dimensions etc. deviennent progressivement le pain quotidien des économètres qui en généralisent l'usage pour la modélisation. Dans son « *circular planning* » Frisch pousse bien plus loin qu'il n'est alors d'usage les mathématiques économiques. Les matrices, la représentation des ensembles dans l'espace et les méthodes itératives de résolution d'un problème d'optimisation ne sont pas monnaie courante dans la littérature économique. C'est la programmation linéaire, dans l'après guerre, qui généralisera leur usage et simplifiera largement les problèmes d'optimisation via la méthode développée par Georges Dantzig et son algorithme du simplexe pour résoudre les problèmes de prévision du Bureau of Labor Statistics et ceux de planification de l'armée de l'air américaine. C'est cette approche qui, avec la théorie des jeux, permettra à Tjalling Koopmans, Kenneth Arrow, Lionel McKenzie et, plus tard, Herbert Scarf, de formuler la version contemporaine de l'équilibre général.

Bibliographie

- Akhabbar, Amanar 2010. L'étrange victoire. Wassily Leontief et la transformation de la science économique. *Revue Européenne des Sciences Sociales*, 1 XLVII:33-62.
- Bjerkholt, Olav, et Knell, Mark 2006. Did Ragnar Frisch discover input-output economics? *Economic Systems Research*, 18(4):391-410.
- Bjerve, Petter Jakob 1996. Contributions of Ragnar Frisch to national accounting. Statistics Norway Research Department, Document 96/21, Oslo, Septembre.
- Bridel, Pascal 1997. *Money and general equilibrium theory, From Walras to Pareto (1870-1923)*. Cheltenham: Edward Elgar Publishing.
- Copeland, Morris 1935. National wealth and income: an interpretation. *Journal of the American Statistical Association*, 30(190):377-386.
- Copeland, Morris 1932. Problems in theory of national income. *The Journal of Political Economy*, 40(1):1-51.

- Econometric Society 1934. Address of the econometric society to the university of Lausanne. *Econometrica*, 2(4):337.
- Econometric Society 1933. La réunion de la Société d'Econométrie, Lausanne, Septembre 1931. *Econometrica*, 1(1):73-86.
- Frisch, Ragnar 1964. *Theory of Production*, Dordrecht-Holland: Riedel Publishing Company.
- Frisch, Ragnar 1934. Circulation planning: proposal for a national organization of a commodity and service exchange. *Econometrica*, 2(3): 336-528, et, Circulation planning: Part III. Mathematical Appendix. *Econometrica*, 2(4):422-435.
- Frisch, Ragnar 1933. Propagation problems and impulse problems in dynamic economics. *Economic Essays in Honour of Gustav Cassel*, London: George Allen & Unwin Ltd, 171 - 205.
- Frisch, Ragnar, Keilhau, W. et Wedervang, I. 1936. *Plan til en Økonomisk strukturundersøkelse for Norge*. (Plan for a structural survey of Norway). Oslo: Fabritius & Sonners Boktrykkeri.
- Hicks, John 1934. Léon Walras. *Econometrica*, 2(4):338-348.
- Leontief, Wassily 1937. Interrelations of prices, output, savings and investment. *The Review of Economics and Statistics*, 19(3):109-132.
- Leontief, Wassily 1936. Quantitative input and output relations in the economic systems of the United States. *The Review of Economics and Statistics*, 18(3):105-125.
- Leontief, Wassily 1935. Price-quantity variations in business cycles. *The Review of Economics and Statistics*, 17(4):21-27.
- Leontief Wassily 1928. Die Wirtschaft als Kreislauf. *Archiv für Sozialwissenschaft und Sozialpolitik*, 60:577-623. Traduction anglaise (partielle), The economy as a circular flow. *Structural change and economic dynamics*, (1991), 2(1):177-212.
- Leontief Wassily 1925. Die Bilanz der Russischen Volkswirtschaft. Eine methodologische Untersuchung. *Weltwirtschaftliches Archiv*, 22(2), Octobre:338-344; et in *Weltwirtschaftliches Archiv. Chronik und Archivalien*, 22 (2):265-269.
- Marschak Jacob 1936. An empirical analysis of the laws of distribution. *Economica*, 3(10):221-226.
- Marschak Jacob 1934. Econometric parameters in a stationary society with monetary circulation. *Econometrica*, 2(1):91-111.
- Marschak Jacob 1933. Annual survey of statistical information: the branches of national spending. *Econometrica*, 1(4):373-386.
- Popov P.I (ed.) 1926. *Balans narodnogo khoziaistva Soiuza SSR 1923-24 goda* [Balance of the National Economy of the USSR 1923-24]. Moscou, *Trudy Tsentral'nogo Statisticheskogo Upravleniya* [Transactions of the Central Statistical Office], 29.
- Walras, Léon. [1874] 1988. *Éléments d'économie politique pure*. In Walras A. et L. Walras, 1987-2005. *Auguste et Léon Walras. Œuvres économiques complètes*. Éditées par Pierre Dockès, Pierre-Henri Goutte, Claude Hébert, Claude Mouchot, Jean-Pierre Potier et Jean-Michel Servet, 14 vols, Paris : Economica, vol. VIII : *Éléments d'économie politique pure*.