



Munich Personal RePEc Archive

## **Singularities of transitivity zones of curves**

Kurbatskiy Alexey and Zakalyukin Vladimir

Moscow State University

2009

Online at <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/34599/>

MPRA Paper No. 34599, posted 11. November 2011 09:52 UTC

# Особенности множества транзитивности, заданного замкнутыми пространственными кривыми

Курбацкий А.Н.<sup>1</sup>

Получена классификация типичных особенностей множества локальной транзитивности для управляемых систем на трехмерных многообразиях с невыпуклыми индикатрисами, являющимися замкнутыми гладкими пространственными кривыми.

## 1 Введение

Рассматривается управляемая система на трехмерном многообразии  $M$ , касательное пространство  $T_m M$  в каждой точке  $m$  которого снабжено множеством  $I_m$  допустимых скоростей (индикатрисой), гладко зависящим от  $m$ . Предполагается, что  $I_m$  является гладкой замкнутой пространственной кривой. Случай, когда  $I_m$  является гладкой замкнутой поверхностью был рассмотрен в работе [6].

В теории управления представляет интерес множество локальной *транзитивности*, которое состоит из точек  $m$  таких, что нулевая скорость  $O \in T_m M$  принадлежит внутренности выпуклой оболочки  $I_m$ . В частности, для всякой пары близких точек из множества локальной транзитивности найдется достаточно короткая допустимая кривая, соединяющая эти точки. Напомним, что абсолютно непрерывная параметризованная кривая  $\gamma(t)$  называется допустимой, если почти в каждой ее точке, производная  $\dot{\gamma}(t)$  принадлежит индикатрисе в этой точке. Граница  $\Sigma$  множества локальной транзитивности состоит из точек  $m$  в которых  $O$  принадлежит границе  $H(I_m)$  выпуклой оболочки индикатрисы [8].

В данной работе классифицированы (теорема 2) все типичные локальные особенности  $\Sigma$  с точностью до диффеоморфизма. Все перечисленные особенности являются ростками липшицевых функций и функций класса  $C^1$ .

Задачу о классификации особенностей границы  $\Sigma$  множества транзитивности поставил А. А. Давыдов. Автор благодарен ему за полезные обсуждения.

---

<sup>1</sup>Поддержано грантом РФФИ 08-01-00157, и НШ-709.2008.1

## 2 Основные результаты.

Рассматривая точку  $m$  многообразия  $M^n$  в качестве параметра и зафиксировав некоторую тривиализацию касательного расслоения к  $M$ , исходную задачу сведем к исследованию семейства кривых  $r_m(t)$ ,  $t \in S^1$ , вложенных в  $\mathbb{R}^n$  и зависящих от параметра  $m$ , и к классификации особенностей множества  $\Sigma$  параметров, при которых  $0 \in \mathbb{R}^n$  принадлежит границе  $H(r_m)$  выпуклой оболочки соответствующей кривой.

Начнем с простого случая управляемой системы

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in M^2, \quad u \in S^1$$

на двумерном многообразии  $M$ , в касательной плоскости каждой точки которого задано множество допустимых скоростей  $I_m$ , являющееся гладкой замкнутой кривой.

Как будет видно ниже, список типичных особенностей  $\Sigma$  включает в себя список типичных особенностей выпуклых оболочек индивидуальных гладких кривых.

Этот список для кривой общего положения на плоскости следующий:

- росток либо выпуклой кривой, либо прямой;
- росток кривой, который диффеоморфизмом плоскости можно перевести в росток в нуле графика функции  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ x^2 & \text{при } x > 0. \end{cases}$

Для типичного семейства кривых, зависящих от двух параметров, граница  $\Sigma$  множества локальной транзитивности может иметь еще только одну новую особенность.

**Теорема 1.** *Для семейства общего положения кривых  $I_m$  в  $\mathbb{R}^2$ , зависящих от параметра  $m = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , локальные особенности границы  $\Sigma$  множества локальной транзитивности, с точностью до диффеоморфизма пространства параметров – это либо типичные особенности выпуклых оболочек перечисленные выше; либо росток в нуле графика функции  $y = -|x|$ .*

Доказательство приведено в следующем разделе (после доказательства основной теоремы 2).

Перейдем к основному случаю трехмерного многообразия  $M$ . Выпуклая оболочка типичной гладкой (класса  $C^\infty$ ) пространственной кривой не является

гладкой. Список типичных особенностей выпуклой оболочки кривой в  $\mathbb{R}^3$  был получен в работах [5] и [7]. Он состоит из следующих нормальных форм:

1. росток гладкой поверхности, которая либо является развертывающейся (рис. 1), либо плоской (рис. 3, точка  $C$ );

2. росток в нуле графика липшицевой функции  $z = f(x, y)$ , где

$$f(x, y) = -|x|.$$

Этот росток возникает в типичной точке самой исходной кривой (см. рис. 2);

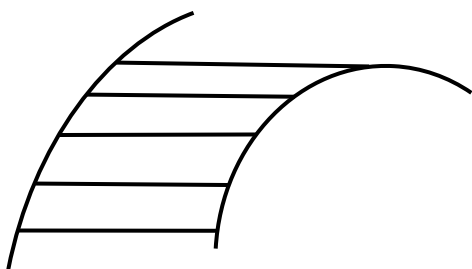


рис. 1

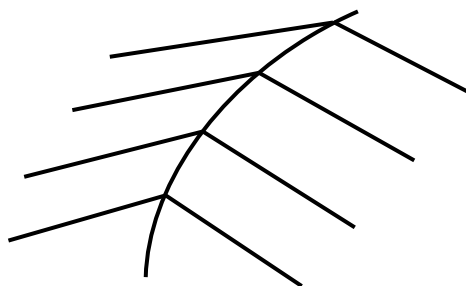


рис. 2

3. росток класса  $C^1$  в нуле функции  $z = f(x, y)$ , где

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ x^2 & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

(он появляется в точках сопряжения развертывающейся поверхности и части плоскости, точка  $D$  рис. 3);

4. росток в нуле графика функции  $z = f(x, y)$ , где

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 & \text{при } y \leq x, \quad x \geq 0 \\ y^2 & \text{при } y \geq 0, \quad y \geq x \\ 0 & \text{при } y \leq 0, \quad x \leq 0; \end{cases}$$

5. росток в нуле графика функции  $z = f(x, y)$ , где

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \leq 0, \quad x \leq 0 \\ x^2 & \text{при } y \leq -x, \quad x \geq 0 \\ y^2 & \text{при } y \geq 0, \quad y \leq -x \\ \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - y - x & \text{при } x + y \geq 0. \end{cases}$$

Ростки 4, 5 отвечают вершинам  $B$  и  $A$  плоских треугольников, возникающих неустранимым образом на границе выпуклой оболочки;

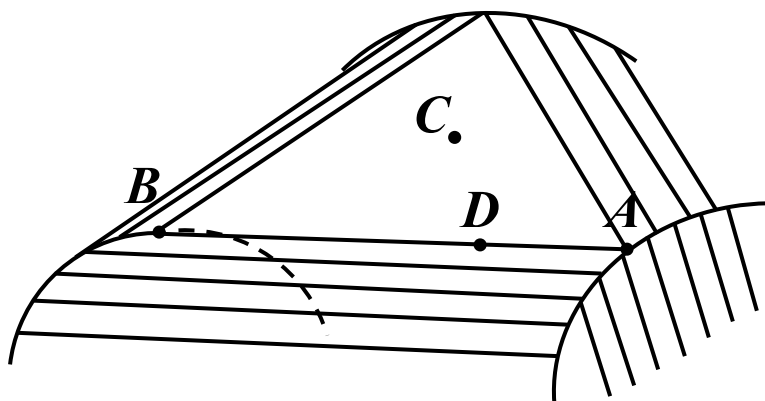


рис. 3

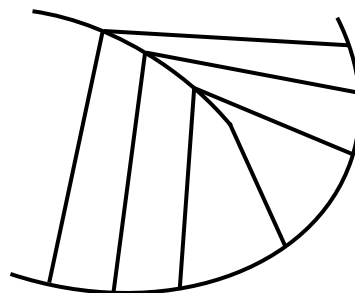


рис. 4

6. росток в нуле усеченного ласточкиного хвоста (рис. 4).

$$f(x, y) = \min_{z \in \mathbb{R}} \{z^4 + xz^2 + yz\}.$$

В семействах поверхностей общего положения, зависящих от трех параметров, неустранимым образом встречается гораздо большее количество особенностей, но только некоторые из них соответствуют границе  $\Sigma$  зоны транзитивности.

**Теорема 2.** Для семейства общего положения кривых  $\gamma_m : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  зависящего от трехмерного параметра  $m = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , локальные особенности границы  $\Sigma$  множества транзитивности, с точностью до диффеоморфизма  $\mathbb{R}^3$ , следующие:

1. ростки поверхностей (класса  $C^1$  или  $C^\infty$ ) выпуклых оболочек типичных поверхностей в  $\mathbb{R}^3$ , перечисленные выше; 2. росток поверхности двугранного угла в точке ребра; росток боковой поверхности  $n$ -угольной пирамиды в ее вершине при  $n = 3, 4, 5$ . (При  $n = 5$  одну грань выпрямить не удастся) (рис.5-8);

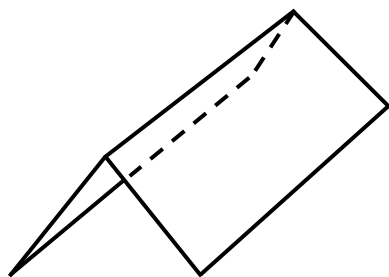


рис. 5

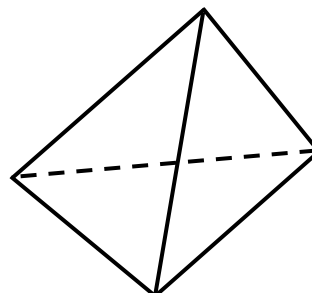


рис. 6

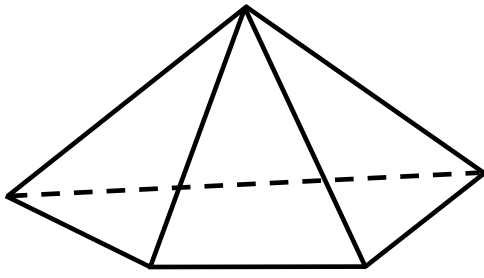


рис. 7

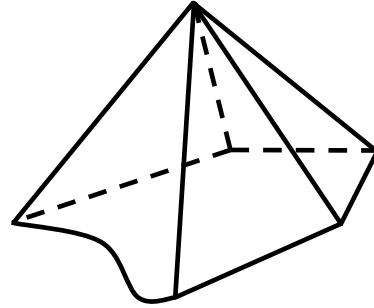


рис. 8

3. росток в нуле объединения трех поверхностей (с краем) (рис.9), заданных условиями:

1.  $z = 0, y \leq 0,$
2.  $y = x^2, z \leq -4x^2,$
3.  $z = -a^2, y = \frac{1}{4}z + ax, a \in \mathbb{R}.$

Первые две поверхности гладкие и трансверсальные друг другу. Их края являются гладкими кривыми, касающимися друг друга в единственной общей точке - начале координат. Третья поверхность представляет собой часть зонтика Уитни, ограниченного этими же краями и касающегося первых двух поверхностей в точках этих кривых (рис. 9).

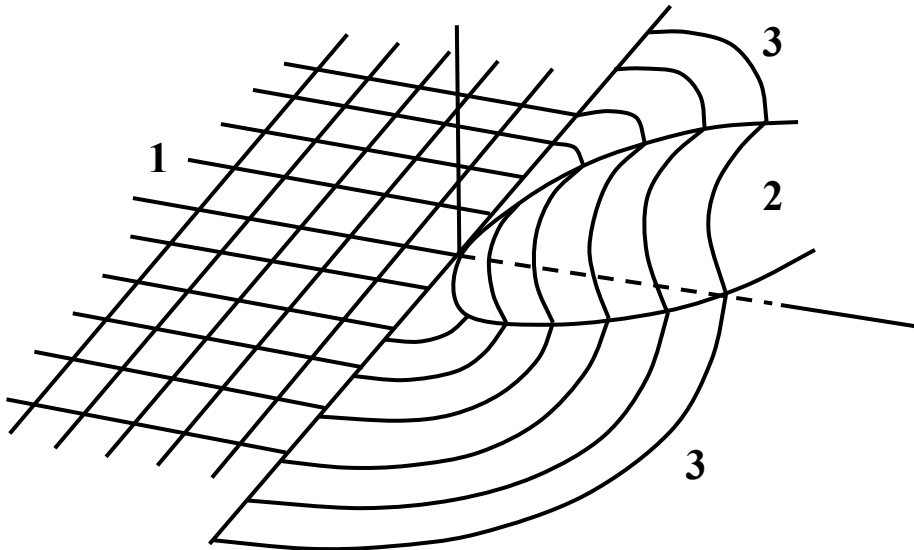


рис. 9

### 3 Доказательства теорем 1 и 2.

В этом разделе используются конструкции, аналогичные описанным в доказательстве классификационной теоремы для поверхностей из работы [6]. Для случая пространственных кривых они выглядят следующим образом.

Пусть  $\{(q_1, q_2, q_3)\}$  координаты в  $\mathbb{R}^3$  и пусть  $\widehat{\mathbb{R}^3} = \{(n_1, n_2, w)\}$  — аффинная карта двойственного пространства, состоящая из коориентированных плоскостей в  $\mathbb{R}^3$ , которые не параллельны оси  $q_3$ , ориентированная нормаль к которым имеет компоненты  $(n_1, n_2, 1)$ , а  $w$  — координата точки пересечения плоскости с координатной осью  $q_3$ .

Коориентированная плоскость называется *опорной* к кривой  $I = \{r(t)\}$ , если открытое положительное полупространство, заданное этой плоскостью не содержит точек кривой  $I$ , а сама плоскость содержит ее точки. Иначе говоря, из всех плоскостей с нормалью  $(n_1, n_2, 1)$ , пересекающих кривую  $I$  опорной является плоскость  $P$  с максимальным значением  $w$ .

Для всякой опорной плоскости  $P$  обозначим через  $S_P$  множество ее общих точек с  $I$  и назовем его носителем плоскости  $P$ . Отметим, что все точки носителя опорной плоскости являются точками ее касания с кривой.

Хорошо известно (см., например, [5]) следующее

**Утверждение 3.** *Выпуклая оболочка любого компактного множества является объединением выпуклых оболочек носителей  $S_P$  по всем опорным плоскостям  $P$ .*

**Утверждение 4.** *Для семейства кривых общего положения, зависящего от  $s$  параметров каждый носитель  $S_P$  состоит не более, чем из  $3 + s$  точек.*

**Доказательство утверждения 4.** Рассмотрим пространство мультиструй в  $n$  точках  $r_1(t), \dots, r_n(t)$  параметрически заданной кривой  $r(t)$ , то есть прямое произведение  $n$  экземпляров пространства струй  $J^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) \times \dots \times J^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$  (достаточно высокого порядка  $k$ ) отображений прямой в трехмерное пространство.

Для того, чтобы существовала плоскость, касающаяся кривой в  $n$  точках, отвечающих значениям  $t_1, \dots, t_n$  параметра  $t$ , необходимо, чтобы векторы  $\dot{r}(t_1), \dots, \dot{r}(t_n)$ ,  $r_1 - r_n, \dots, r_{n-1} - r_n$  были компланарны, то есть ранг матрицы размера  $3 \times (2n - 1)$ , составленной из этих векторов, был не более двух. Из теоремы о произведении корангов следует, что коразмерность подмножества  $F$ , заданного этими условиями, в пространстве мультиструй равна  $2n - 3$ .

Семейство кривых, зависящее от  $s$  дополнительных параметров, задает отоб-

ражение наборов, состоящих из значений этих параметров и  $n$  значений  $t_1, \dots, t_n$ , в пространство  $n$ -мультиструй. Из теоремы трансверсальности следует, что для кривой общего положения это отображение трансверсально указанному подмножеству  $F$  пространства мультиструй. В частности, при  $2n - 3 \leq n + s$  всякая мультиструя типичной кривой не пересекает этого подмножества. Таким образом, необходимым условием касания плоскости и пространственной кривой в  $n$  точках является неравенство  $n \leq 3 + s$ .

Будем рассматривать мультиростки кривой в некоторой окрестности носителя  $S_0$  базовой опорной плоскости, которую будем считать заданной уравнением  $w = 0$ . В некоторой области, содержащей выпуклую оболочку носителя базовой плоскости, все другие опорные плоскости будут принадлежать указанной карте не вертикальных плоскостей, а их носители – будут принадлежать окрестности носителя  $S_0$ .

Основную роль в классификации особенностей выпуклых оболочек подмногообразий аффинного пространства (см. [5]) играет преобразование Лежандра  $\gamma$ , которое для пространственной кривой определяется следующим образом.

Точке  $Q$  кривой  $r(t)$  сопоставим множество ростков в этой точке, диффеоморфное окружности  $S^1$ , всех коориентированных касательных плоскостей к кривой. Все такие ростки образуют лежандрово подмногообразие  $L_r \approx S^1 \times S^1$  в пространстве коориентированных контактных элементов  $ST^*\mathbb{R}^3$ . Проекция  $\gamma_r$  этого подмногообразия, состоящее в забывании базовой точки ростка является лежандровым отображением подмногообразия  $L_r$  в двойственное пространство  $\widehat{\mathbb{R}^3}$ .

Отметим, что плоскость, принадлежащая  $\widehat{\mathbb{R}^3}$  является опорной тогда и только тогда, когда она является касательной к  $r$  в одной или нескольких точках, то есть принадлежит образу  $\gamma_r$  и значение координаты  $w$  (то есть координата точки пересечения этой плоскости с осью  $q_3$ ) наибольшее среди всех параллельных ей касательных плоскостей из образа  $\gamma_r$ . Этот образ (волновой фронт)  $\widehat{r} = \gamma_r(L_r)$  будем называть преобразованием Лежандра исходной кривой  $r$ . Подмножество  $\widehat{r}$ , состоящее из опорных плоскостей будем обозначать  $\text{Su}(r)$ .

Точке  $Q \in \mathbb{R}^3$  отвечает плоскость  $\widehat{Q}$  в двойственном пространстве, состоящая из всех плоскостей в  $\mathbb{R}^3$ , проходящих через  $Q$ .

Точка  $Q$  принадлежит границе выпуклой оболочки  $H(r)$  тогда и только тогда, когда  $\widehat{Q}$  является опорной для  $\text{Su}(r)$  : открытое отрицательное полу-



странство  $\widehat{Q}$  не содержит точек  $\text{Su}(r)$ , а сама плоскость содержит такие точки.

Таким образом, условие принадлежности точки  $O$  границе выпуклой оболочки можно сформулировать в терминах двойственного пространства  $\widehat{\mathbb{R}}^3 = \{(n_1, n_2, w)\}$ . Обозначим через  $\widehat{O}$  плоскость в  $\widehat{\mathbb{R}}^3$ , заданную уравнением  $w = 0$  и состоящую из всех плоскостей  $\mathbb{R}^3$ , которые проходят через точку  $O$ .

**Утверждение 5.** *Точка  $O$  принадлежит поверхности  $X \subset \mathbb{R}^3$  тогда и только тогда, когда двойственная поверхность  $\widehat{X} = \gamma(L_X)$  касается  $\widehat{O}$ .*

**Замечание.** Если поверхность  $X$  линейчатая, то  $\widehat{X}$  — это кривая, которая должна касаться поверхности  $\widehat{O}$ , если  $O \in X$ . Если же  $X$  — это плоскость, то утверждение равносильно тому, что  $\widehat{O}$  проходит через точку  $\widehat{X}$ .

**Доказательство** утверждения вытекает из того факта, что квадрат преобразования Лежандра гиперповерхности общего положения — это тождественное преобразование.

Вырождения кривых, зависящих от параметров, изучались, например, в работах [9],[10]. В частности, в них содержится следующее утверждение, которое, впрочем, легко получить и непосредственно.

**Утверждение 6.** *В семействах общего положения пространственных кривых  $r_m$ , зависящих от трех параметров  $t = (x, y, z)$  росток в произвольной точке кривой в некоторой подходящей аффинной системе координат  $(q_1, q_2, q_3)$  с началом в этой точке имеет одну из следующих форм:*

1)  $q_1 = t, \quad q_2 = t^2 + \dots, \quad q_3 = t^3 + \dots$  — невырожденная точка коразмерности 0 (тип  $A_2$ );

2)  $q_1 = t, \quad q_2 = t^2 + \dots, \quad q_3 = t^4 + \dots$  — точка простого уплощения коразмерности 1 (тип  $A_3$ );

3)  $q_1 = t, \quad q_2 = t^2 + \dots, \quad q_3 = t^k + \dots$ , где  $k = 5, \dots$  — точка кратного уплощения коразмерности  $k-3$  (типа  $A_{k-1}$ ), которая встречается неустранимым образом в точках кривой  $r_m$ , зависящей от  $\geq k-4$  параметров;

4)  $q_1 = t, \quad q_2 = t^3 + \dots, \quad q_3 = t^k + \dots$ , где  $k = 4, \dots$  точка коразмерности  $k-2$ , то есть впервые появляющаяся в изолированных точках кривой при не менее, чем  $k-3$  параметрах;

5)  $q_1 = t, \quad q_2 = t^4 + \dots, \quad q_3 = t^5 + \dots$  — точка коразмерности 4, то есть встречающаяся неустранимым образом в изолированных точках кривой для изолированных значений трех параметров.

Здесь под коразмерностью мы понимаем коразмерность соответствующего класса в пространстве ростков (струй) в фиксированной точке  $j^N(1, 3)$ . Многоточием обозначены члены высших порядков малости по  $t$ .

Росток в точке  $Q$  касательной плоскости к кривой назовем *регулярным*, если в этой точке кривая имеет особенность типа  $A_2$  или  $A_3$ , и плоскость не является соприкасающейся, то есть координатной плоскостью  $(q_1, q_2)$  в указанных выше координатах.

Отметим также, что в типичном случае в пространстве параметров может существовать подмножество коразмерности 1, отвечающее кривым  $r_m$ , имеющим точки самопересечения.

**Утверждение 7.** *Для семейства кривых общего положения, если  $O$  принадлежит некоторой опорной плоскости  $P$ , то эта плоскость:*

1. *во всех точках носителя  $S_P$  либо регулярна, либо является соприкасающейся в простой точке уплощения  $A_3$ ;*
2. *не содержит точек самопересечения кривой.*

**Доказательство** вытекает из следующих трех фактов.

1. Соприкасающаяся плоскость в регулярной точке не может быть опорной: кривая лежит по разные стороны этой плоскости.

2. Пусть  $O$  принадлежит соприкасающейся плоскости  $P$  для некоторой вырожденной особенности кривой коразмерности большей единицы. Пусть  $P$  является опорной, а ее носитель состоит из  $l = 1, 2, 3$  точек. Размерность выпуклой оболочки носителя не превосходит  $l - 1$ . Для того, чтобы  $O$  принадлежал выпуклой оболочке носителя необходимо выполнение не менее  $3 - l + 1$  условий. Для того, чтобы  $l$  точек попало на соприкасающуюся плоскость нужно  $l$  условий. Для того, чтобы сама эта точка появилась на кривой нужно не менее одного условия. Таким образом, всего необходимо выполнение строго более трех независимых условий, что невозможно в общем положении при трех параметрах.

3. Коразмерность случая, когда опорная плоскость содержит точку самопересечения, точку  $O$  и, возможно, другие точки кривой вычисляется также как и в предыдущем пункте и превосходит 3.

**Утверждение 8.** *Пусть точка  $Q$  кривой, лежащая на выпуклой оболочке кривой, является либо невырожденной, либо точкой простого уплощения.*

Тогда опорные плоскости, проходящие через  $Q$  образуют замкнутую дугу на окружности  $S^1$  всех коориентированных касательных плоскостей в  $Q$ , причем внутренние точки дуги отвечают опорным плоскостям с носителем, состоящим из одной точки  $Q$ , а граничные точки  $E_1(Q), E_2(Q)$  – отвечают либо опорным плоскостям, носитель которых содержит еще и точки отличные от  $Q$ , либо соприкасающейся плоскости (в случае простого уплощения).

**Доказательство.** Пусть касательные в точке  $Q$  плоскости, проходящие через другие точки кривой, образуют подмножество  $W$  окружности. Очевидно, что замыкание  $W$  является связным. Граничные точки  $W$  отвечают либо бикасательным плоскостям, либо соприкасающимся.

Из теоремы трансверсальности и утверждений 1-8 вытекает следующий список случаев расположения нуля на границе выпуклой оболочки типичного семейства кривых.

Упорядоченную пару точек  $r(t_1)$  и  $r(t_2)$  кривой назовем *коллинеарной*, если скорость  $\dot{r}(t_1)$  в первой точке коллинеарна вектору  $r(t_2) - r(t_1)$ .

Носитель опорной плоскости назовем *не коллинеарным*, если любая пара его точек не является коллинеарной.

**Лемма 9.** Для семейства кривых общего положения, зависящих от трехмерного параметра, значение параметра  $t$  принадлежит границе множества транзитивности  $\Sigma$  в точности в одном из следующих случаев:

1<sub>0</sub>. Точка  $O$  совпадает с невырожденной точкой или точкой простого уплощения кривой  $r_m$ . Опорные плоскости  $E_{1,2}(O)$  имеют не коллинеарные носители, состоящие каждый из двух точек, касание в которых регулярное.

1<sub>f</sub>. Точка  $O$  совпадает с точкой простого уплощения, соприкасающаяся плоскость является граничной опорной, носитель которой состоит из самой точки  $O$ . Другая граничная опорная плоскость имеет регулярное касание еще в одной точке, образующей с точкой  $O$  не коллинеарную пару.

1<sub>c</sub>. Точка  $O$  совпадает с невырожденной точкой кривой, опорная плоскость имеет носитель из двух точек  $O$  и  $X$ , образующих коллинеарную пару.

1<sub>3a</sub>. Точка  $O$  совпадает с вершиной треугольника, который является не коллинеарным носителем опорной плоскости, регулярно касающейся кривой в этих точках. Дуга опорных плоскостей в точке  $O$  вырождается в точку. Линия вектора скорости кривой в точке  $O$  пересекает внутренность треугольника.

1<sub>3b</sub>. Точка  $O$  совпадает с вершиной треугольника, являющимся не коллинеарным носителем опорной плоскости  $E_1$ , имеющей регулярное касание с кривой в этих точках. Линия вектора скорости кривой в точке  $O$  не пересекает внутренности треугольника. Другой конец  $E_2$  дуги опорных плоскостей в точке  $O$  является бикасательной плоскостью к кривой с регулярными касаниями.

2<sub>0</sub>. Точка  $O$  принадлежит открытому промежутку концы которого образуют не коллинеарный носитель опорной плоскости с регулярным касанием в каждой из этих точек.

2<sub>c</sub>. Точка  $O$  принадлежит открытому промежутку концы которого образуют коллинеарный носитель опорной плоскости с регулярным касанием в каждой из этих точек.

2<sub>f</sub>. Точка  $O$  принадлежит открытому промежутку концы которого образуют не коллинеарный носитель опорной плоскости с регулярным касанием в одной из этих точек и совпадением опорной плоскости с соприкасающейся плоскостью в другой точке, являющейся точкой простого уплощения.

3<sub>0</sub>. Точка  $O$  принадлежит внутренности треугольника, вершины которого образуют носитель опорной плоскости. Касания во всех этих точках регулярны, и скорости не коллинеарны сторонам.

3<sub>c</sub>. Точка  $O$  принадлежит внутренности треугольника, вершины которого образуют носитель опорной плоскости. Касания во всех этих точках регулярны, и скорости в некоторых из вершин коллинеарны прилегающим сторонам.

3<sub>f</sub>. Точка  $O$  принадлежит внутренности треугольника, вершины которого образуют носитель опорной плоскости. Касания в двух вершинах регулярны, в третьей вершине имеется простое уплощение, причем опорная плоскость совпадает с соприкасающейся.

3<sub>s</sub>. Точка  $O$  принадлежит стороне треугольника, вершины которого образуют носитель опорной плоскости. Касания во всех этих точках регулярны, и скорости не коллинеарны сторонам.

3<sub>sc</sub>. Точка  $O$  принадлежит стороне треугольника, вершины которого образуют носитель опорной плоскости. Касания во всех этих точках регулярны, скорости в некоторых вершинах коллинеарны прилегающим сторонам.

3<sub>w</sub>. Три точки, лежащие на одной прямой образуют носитель опорной плоскости. Касания во всех этих точках регулярны, и скорости не коллинеарны этой прямой. Точка  $O$  принадлежит одному из отрезков с концами в

этих точках.

$4_0$ . Точка  $O$  принадлежит внутренности четырехугольника, вершины которого образуют носитель опорной плоскости. Касания во всех вершинах регулярные. Точка  $O$  не лежит ни на сторонах, ни на диагоналях четырехугольника.

$4_s$ . Точка  $O$  принадлежит стороне четырехугольника, описанного в предыдущем пункте, так, что все вершины принадлежат одной из замкнутых полуплоскостей с границей, содержащей эту сторону.

$4_{sb}$ . Точка  $O$  принадлежит диагонали (или стороне) четырехугольника, описанного в пункте  $4_0$ , так, что вершины лежат по разные стороны от прямой, содержащей эту диагональ (сторону).

$5_0$ . Точка  $O$  принадлежит внутренности пятиугольника с вершинами  $a_1, \dots, a_5$  и не принадлежит никакой его диагонали или стороне. Точки  $a_i \in \Gamma$  составляют носитель некоторой опорной плоскости  $P$ , касающейся кривой во всех точках регулярно.

Рассмотрим сначала случаи, когда в точке  $m_0$  мультиросток лежандрова отображения  $\gamma_{r_{m_0}}, P$  на своем носителе  $S_P$  устойчив, и кроме того сам росток выпуклой оболочки в окрестности нуля устойчив.

Помимо случаев

$$1_0, 1_f, 1_c, 1_{3a}, 1_{3b}, 2_0, 3_0, 3_s$$

устойчивость выпуклой оболочки наблюдается и в случаях

$$2_c, 3_c, 3_{cs}.$$

В первых двух из этих случаев выпуклая оболочка в окрестности 0 представляет собой две трансверсальные гладкие поверхности, имеющие общий край. В случае  $1_c$  выпуклая оболочка в окрестности нуля диффеоморфна усеченному ласточкину хвосту, В случаях  $2_0, 3_0, 2_c, 3_c$  выпуклая оболочка представляет собой росток в нуле гладкой поверхности, которая остается гладкой и при близких значениях параметров, в случаях  $3_s$  и  $3_{cs}$  росток в нуле выпуклой оболочки также устойчив и представляет собой пару гладких поверхностей, имеющих общий край и имеющих простое касание вдоль этого края, образуя тем самым гладкую поверхность класса  $C^1$ . Наконец, в случаях  $1_{3a}, b$  выпуклая оболочка имеет вид 4 или 5 из списка нормальных форм выпуклых оболочек отдельных кривых и также устойчива при изменении параметров.

Отметим, что коллинеарность пары точек  $a, b$  носителя опорной плоскости влияет на устойчивость выпуклой оболочки только в точке  $a$ . В самом деле, преобразования Лежандра ростков кривой в точках  $a, b$  представляют собой гладкие поверхности  $\widehat{a}, \widehat{b}$  пересекающиеся по линии, отвечающей парам точек касания бикасательных плоскостей с ростками кривой. Эта линия имеет точку простого уплощения, а соприкасающаяся в ней плоскость двойственна точке  $a$ . Если  $O$  при  $m_0$  отличен от точки  $a$ , то при близких значениях параметра поверхности  $\widehat{a}, \widehat{b}$  представляют собой поверхности общего положения.

Итак, во всех перечисленных случаях при близких значениях параметра  $m$  граница выпуклой оболочки остается диффеоморфной границе  $H(r_{m_0})$ , состоящей из набора замыканий областей гладких поверхностей.

В прямом произведении  $\mathbb{R}^3 \times M$  фазового пространства на пространство параметров рассмотрим объединение ростков  $G = H(r_m) \times \{m\}$ , образующих пятимерное стратифицированное множество, являющееся топологическим многообразием. Страты  $G$  диффеоморфны стратам выпуклой оболочки  $H(r_{m_0})$  при  $m = m_0$ , умноженным на росток пространства параметров. Во всех случаях, кроме  $1_c$ , замыкания стратов – гладкие подмногообразия с краем, в случае  $1_c$  – один из стратов является произведением усеченного ласточкина хвоста на  $\mathbb{R}^3$ .

Трехмерное подмногообразие  $M_0 = 0 \times \{m\}$  указанного прямого произведения, в общем положении трансверсально подмногообразию  $G$ . В силу того, что  $G$  является топологическим (Липшицевым) подмногообразием, множество трансверсальных ему отображений связно. В силу лежандровой устойчивости пересечение  $M_0 \cap G$  диффеоморфно пересечению  $G$  со всяким трансверсальным к нему трехмерным подмногообразием, и, в частности, будет диффеоморфно сечению слоем  $m = m_0$ , то есть исходной границе выпуклой оболочки. Таким образом во всех случаях, когда  $O$  принадлежит устойчивому мультиростку, граница  $\Sigma$  множества транзитивности, совпадающая с множеством  $M_0 \cap G$  диффеоморфна этому ростку. Итак, все указанные случаи доставляют нормальные формы пункта 1 теоремы.

Перейдем к рассмотрению неустойчивых конфигураций.

Как уже отмечалось выше, в случаях коллинеарных носителей неустойчивость выпуклой оболочки может быть только в самой точке носителя из коллинеарной пары. В двойственном пространстве множество касательных плоскостей к росткам кривых в точках такой пары остаются гладкими поверхностями,

которые пересекаются трансверсально. Единственная специфика этого случая проявляется в том, что линия пересечения двух плоскостей имеет в одной из точек уплощение  $A_3$ . В случае общего положения  $O$  попадает в такую точку только в устойчивом случае  $1_c$ .

Таким образом, осталось рассмотреть только следующие случаи:

Случай  $4_0$ , когда  $O$  принадлежит внутренности четырехугольника, но не лежит на диагоналях и сторонах.

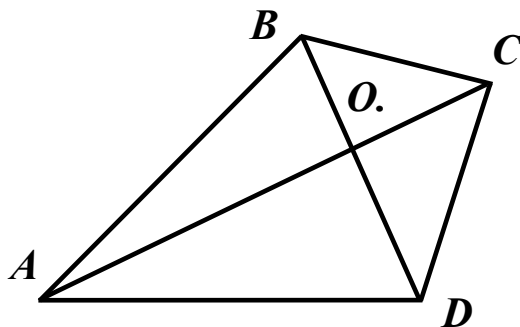


рис. 10

При  $m = 0$  одно из возможных расположений носителя изображено на рисунке 10. Точка  $O$  принадлежит внутренности треугольников  $ABC$  и  $BCD$ . Отметим, что и при любом другом расположении носителя имеются два треугольника с общей стороной, содержащих точку  $O$ .

Рассмотрим образ преобразования Лежандра всех касательных плоскостей в точках ростков кривых в точках близких к точкам носителя  $ABCD$ . Получаем 4 ростка линейчатых гладких поверхностей  $l_A, l_B, l_C, l_D$ , отвечающие каждой из вершин четырехугольника. Эти поверхности пересекаются в общей точке при  $m = 0$  и находятся по отношению друг к другу в общем положении. При параметрах близких к  $m_0$  точка  $O$  может принадлежать выпуклой оболочке только если она принадлежит внутренности хотя бы одного из треугольников  $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$  или  $\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}$ , являющихся носителями опорных плоскостей и близкими к соответствующим треугольникам  $ABC$  и  $BCD$ . То есть при всех близких значениях параметра, если  $O$  принадлежит выпуклой оболочке, то поверхность  $\hat{O}$  проходит через одну из точек  $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2$  пересечения соответствующих поверхностей  $l_A, l_B, l_C$  и  $l_B, l_C, l_D$ . При условии, что эта точка соответствует опорной гиперплоскости.

Расстояния от этих точек до поверхности  $\widehat{O}$  – это две независимые функции параметров  $f_1$  и  $f_2$ . Поскольку точки  $\widehat{Q}_1, \widehat{Q}_2$  лежат на кривой  $l_{BC}$ , являющейся пересечением плоскостей  $l_B$  и  $l_C$ , то опорной является та из них, расстояние от которой больше.

Итак, граница множества транзитивности  $\Sigma$  задается условиями  $f_1 = 0, f_2 \leq 0$  и  $f_2 = 0, f_1 \leq 0$ . Принимая функции  $f_1$  и  $f_2$  за две координаты в пространстве параметров, получаем нормальную форму – двугранный угол.

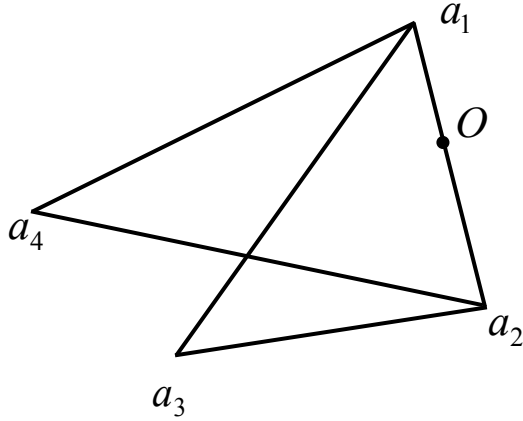


рис. 11

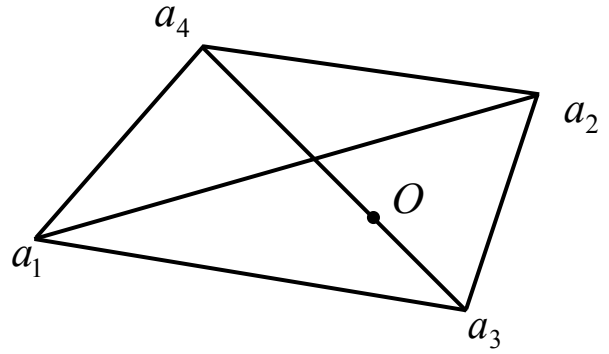


рис. 12

Рассмотрим теперь случай  $4_s$ . Пусть при  $m = m_0$  точка  $O$  лежит на стороне  $a_1a_2$  четырехугольника  $a_1a_2a_3a_4$  (см. рис. 11). В окрестности  $O$  при  $m$  близких к  $m_0$  граница  $H(r_m)$  принадлежит либо одному из двух треугольников с вершинами  $\tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{a}_3, \tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{a}_4$ , являющимися носителями (близкими к соответствующим треугольникам при  $m = m_0$ ) три-касательных плоскостей, которые обозначим соответственно  $P_3$  и  $P_4$ , либо линейчатой поверхности, образованной отрезками  $\tilde{a}_1\tilde{a}_2$ , лежащими в бикасательных опорных плоскостях. При фиксированном  $m$  эти бикасательные плоскости образуют гладкую кривую  $P_t(m) \in \widehat{\mathbb{R}}^3$ , на которой введем параметр  $t \in \mathbb{R}, 0$ .

Итак, в случае  $4_s$  множество опорных плоскостей  $Su(r_m)$  пересекающихся с окрестностью точки  $O$  представляет собой часть кривой  $P_t(m)$ , отвечающей промежутку  $t \geq \max\{t_3, t_4\}$ , где  $t_3$  и  $t_4$  значения параметра  $t$ , отвечающие точкам  $P_3$  и  $P_4$ , лежащим на этой кривой. В расширенном фазовом пространстве  $\widehat{\mathbb{R}}^3 \times M$  кривая  $\bigcup_m P_t(m) \times \{m\}$  замечает четырехмерную поверхность, параметризованную переменными  $t$  и  $m$ ; при  $m = m_0$  кривая  $P_t(m_0)$  касается плоскости



$\widehat{O}$ .

Пусть  $\theta : \widehat{\mathbb{R}}^3 \times M \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^3 \times M$  — семейство диффеоморфизмов  $\widehat{\mathbb{R}}^3$ , расслоенное над пространством параметров, то есть  $\pi \circ \theta = \bar{\theta} \circ \pi$  для некоторого диффеоморфизма  $\bar{\theta}' : M \rightarrow M$  и проекции  $\pi : \widehat{\mathbb{R}}^3 \times M \rightarrow M$  на второй сомножитель. Предположим, что  $\theta$  сохраняет гиперповерхность  $\widehat{O}$  и переводит множество опорных плоскостей  $\text{Su}(r_m) \times \{m\}$  одного семейства  $r_m$  в множество  $\text{Su}(r'_m) \times \{m\}$  другого семейства  $\Gamma'_m$ . Тогда, очевидно,  $\bar{\theta}$  переводит одно в другое соответствующие множества  $\Sigma$  и  $\Sigma'$ .

В нашем случае в общем положении найдется диффеоморфизм  $\theta : \widehat{\mathbb{R}}^3 \times M \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^3 \times M$  с указанными выше свойствами, переводящий кривую  $P_t(m)$  в кривую  $w = t^2 - z, n_1 = t, n_2 = 0$ , и точки  $P_3$  и  $P_4$  соответственно в точки  $n_1 = x, n_2 = 0, w = x^2 - z$  и  $n_1 = y, n_2 = 0, w = y^2 - z$ . В самом деле, в случае общего положения координаты  $n_1$  три—касательных плоскостей имеют невырожденную линейную часть по переменным  $x, y, z$ .

Таким образом, множество  $\Sigma$  диффеоморфно множеству, заданному условиями  $z = 0$  при  $x \leq 0$  и  $y \leq 0$  (внутренние точки полу-кривой касаются  $\widehat{O}$ ), либо  $z = x^2$  при  $x \geq y, x \geq 0$ , либо  $z = y^2$  при  $y \geq x, y \geq 0$  (одна из точек  $P_3, P_4$  принадлежит  $\widehat{O}$ ). Полученная нормальная форма совпадает с ростком графика функции из пункта 4 списка нормальных форм выпуклых оболочек кривых.

Перейдем к случаю  $4_{sb}$ . Пусть при  $m = m_0$  точка  $O$  лежит на диагонали  $a_3a_4$  четырехугольного носителя  $a_1a_2a_3a_4$  опорной плоскости (рис. 12). Граница  $H(r_m)$  выпуклой оболочки при  $m$  близких к  $m_0$  в окрестности  $O$  является либо линейчатой огибающей бикасательных плоскостей  $P_t(m)$  с носителями  $\tilde{a}_3, \tilde{a}_4$ , близкими соответственно к точкам  $a_3, a_4$ , либо одной из трех три—касательных плоскостей:  $P_1$  с носителем  $\tilde{a}_1\tilde{a}_3\tilde{a}_4$ ,  $P_2$  с носителем  $\tilde{a}_2\tilde{a}_3\tilde{a}_4$  и  $P_3$  с носителем  $\tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{a}_3$ .

Аналогично случаю  $4_s$ , множество опорных плоскостей является либо отрезком кривой  $P_t(m)$ , заключенным между точками  $P_1$  и  $P_2$ , если  $t(P_1) \geq t(P_2)$ , либо, если порядок точек на этой кривой противоположный, то опорной является плоскость  $P_3$ . С помощью диффеоморфизма  $\theta$ , сохраняющего  $\widehat{O}$ , кривую  $P_t(m)$  можно привести к виду  $w = t^2 - z, n_1 = t, n_2 = 0$ , точку  $P_1$  — к виду  $P_1 = \{n_1 = x, n_2 = 0, w = x^2 - z\}$ , точку  $P_2$  — к виду  $P_2 = \{n_1 = -y, n_2 = 0, w = y^2 - z\}$ , и точку  $P_3$  — к точке, лежащей в гиперплоскости  $w = \frac{x^2 + y^2}{2} - x - y - z$ . Учитывая, что при  $x + y \geq 0$  опорной становится плоскость  $P_3$ , указанные нормальные формы задают росток функции из пункта 5 списка нормальных форм

выпуклых оболочек кривых.

Доказательство существования такого диффеоморфизма можно получить следующим образом.

Рассмотрим росток поверхности  $\gamma_{r_m}$  в точке  $\tilde{a}_3$ . Все указанные точки  $P_i$  и кривые принадлежат этой поверхности, которую будем обозначать  $l_3$ . Выберем на ней локальные координаты  $u, v$  так, чтобы пересечение  $\hat{O}$  с  $l_3$  задавалось уравнением  $v = 0$ . В общем положении линии пересечения с  $l_3$  остальных поверхностей  $l_i, i = 1, 2, 4$  двойственных росткам кривой в других точках  $\tilde{a}_i$  будут задаваться соответственно уравнениями  $v = g_i(u, x, y, z)$ , причем при нулевых значениях параметров  $x, y, z$  функции  $g_1$  и  $g_2$  имеют при  $u = 0$  простой нуль, а функция  $g_2$  имеет двукратный нуль при  $u = 0$ , что отвечает простому касанию линии  $P_i(0)$  с плоскостью  $\hat{O}$ .

Заметим, что интересующее нас подмножество  $\Sigma$  пространства параметров является подмножеством бифуркационной диаграммы нулей (то есть множества параметров, при которых функция имеет нулевое критическое значение) семейства функции  $V(u, x, y, z) = g_1 g_2 g_4$  от переменной  $x$  с параметрами  $x, y, z$ , имеющего специальный вид произведения трех сомножителей. Теория таких (и более сложных) составных семейств функций была построена в работах [11], [12]. В частности, одним из следствий этой теории является следующее

**Утверждение 10.** *Всякое семейство  $V$  с указанными свойствами, при функциях  $g_i$  общего положения, можно привести контактной эквивалентностью, расслоенной над пространством параметров, к версальному семейству вида*

$$V^* = (u - x)(y - u)(u^2 - z)$$

*так, что сохранится и знак ненулевых значений функции  $V$ .*

Из этого утверждения немедленно следует нормальная форма границы множества транзитивности в случае  $4_{sb}$ .

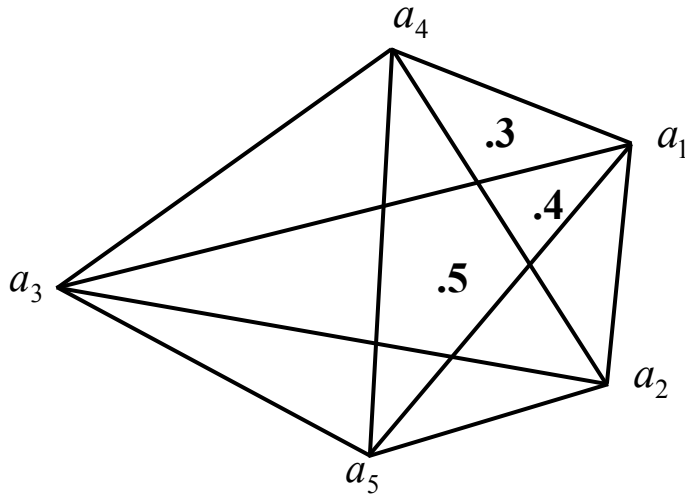


рис.13

В случае  $5_0$  приведем треугольник  $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3$  в стандартное положение семейством аффинных преобразований, гладко зависящим от параметра  $m$ . Граница  $H(r_m)$  выпуклой оболочки в окрестности оси  $q_3$  определяется одной из нескольких три—касательных плоскостей с носителями из окрестностей  $a_1, \dots, a_5$ , являющимися вершинами треугольников, которые при  $m = m_0$  содержат точку  $O$ . Таких треугольников может быть либо 3, либо 4, либо 5 (рис. 13). Аналогично предыдущим рассуждениям, попадание нуля на ту из этих три—касательных плоскостей, которая становится опорной, задает поверхность многогранного угла в пространстве параметров. Отметим, что одну из граней пятигранного угла в трехмерном пространстве в общем положении выпрямить невозможно (см. также [6]).

В случае  $3_w$  пусть при  $m = m_0$  начало координат принадлежит промежутку  $AB$  отрезка  $AC$ , являющегося выпуклой оболочкой носителя из трех коллинеарных точек  $\{A, B, C\}$  опорной плоскости  $P_0$ , регулярно касающейся кривой (точка  $B$  лежит между  $A$  и  $C$ ). Двойственные поверхности  $l_A, l_B, l_C$  к росткам  $r_m$  в окрестности  $P_0$  — это гладкие (линейчатые) поверхности попарно трансверсальные. Однако, в силу коллинеарности точек  $A, O, B, C$ , при  $m = m_0$  линия  $\rho_1$  пересечения  $l_A$  и  $l_B$  касается линии  $\rho_2$  пересечения поверхностей  $l_A$  и  $l_C$  и касается плоскости  $\hat{O}$  в точке  $P_0$ .

При произвольных  $m$  близких  $m_0$  граница выпуклой оболочки в окрестности нуля является одной из линейчатых поверхностей, двойственных линиям  $\rho_1$

и  $\rho_2$ , принадлежащим поверхности  $l_A$ . Выберем на этой поверхности локальные координаты  $u, v$  так, чтобы пересечение плоскости  $\widehat{O}$  с  $l_A$  задавалось уравнением  $v = 0$ . Тогда кривые  $\rho_{1,2}$  будут задаваться соответственно уравнениями  $v = f_i(u, x, y, z)$ ,  $i = 1, 2$ , причем при нулевых значениях параметров  $(x, y, z)$  функции  $f_i$  будут иметь невырожденный (морсовский) минимум равный нулю в точке  $u = 0$ .

Как и в случае  $4_{sb}$ , граница  $\Sigma$  зоны транзитивности состоит из таких значений  $x, y, z$ , при которых произведение

$$V = f_1(u, x, y, z)f_2(u, x, y, z)$$

имеет нулевое критическое значение, совпадающее с  $\min_u \max_{i=1,2} f_i$ .

Из теории устойчивости сложных функции (см. [11],[12]) вытекает следующее

**Утверждение 11.** *Контактной эквивалентностью, расслоенной над пространством параметров и сохраняющей знак ненулевых значений, семейство  $V$  для функций  $f_1, f_2$  общего положения можно привести к виду*

$$V^* = (u^2 - z)(4u^2 - 4xu + y).$$

Очевидно, указанная в утверждении контактная эквивалентность переводит одну в другую соответствующие бифуркационные диаграммы нулей семейств, а также их подмножества, отвечающие  $\Sigma$ .

Для нормальной формы  $V^*$  множество  $\Sigma$  состоит из значений параметров  $x, y, z$  при которых вершина одной из соответствующих парабол попадает на ось  $v = 0$ , при условии, что вершина другой параболы находится ниже этой оси, а также из тех значений параметров, при которых вершины парабол не попадают на график вспомогательной функции  $\max_i f_i(u)$ , наименьшее значение этой функции достигается в точке пересечения парабол и равно нулю. Эти условия для  $V^*$  задают, в точности, нормальную форму 3 теоремы 2.

В случае  $2_f$  граница  $H(r_m)$  при  $m$  близких к  $m_0$  в окрестности точки  $O$  является либо линейчатой поверхностью, состоящих из отрезков  $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$  носителей бикасательных плоскостей, близких к носителю  $a_1, a_2$ , соприкасающейся опорной плоскости, содержащей  $O$  при  $m = m_0$ , либо такой три—касательной плоскостью  $\tilde{a}_1, \tilde{a}'_1, \tilde{a}_2$ , что точки  $\tilde{a}_1$  и  $\tilde{a}'_1$  стремятся к  $a_1$  при  $m \rightarrow m_0$ . Множество  $Su(r_m)$  опорных плоскостей является при всяком  $m$  линией пересечения

усеченного ласточкиного хвоста  $l_1 = (\gamma_{r_m}, \tilde{a}_1)$ , являющегося образом преобразования Лежандра ростка  $r_m$  в окрестности точки  $a_1$ , и гладкой поверхности  $l_2 = (\gamma_{r_m}, \tilde{a}_2)$ . С помощью подходящего диффеоморфизма  $\theta$  указанного выше вида такое семейство кривых можно, используя логарифмические векторные поля, касающиеся ласточкиного хвоста, привести к стандартному виду:

$$l_1 = \{(n_1, n_2, w) : \exists t; w = \min(t^4 + n_1 t^2 + n_2 t)\},$$

$$l_2 = \{n_1 = x\}.$$

При таком диффеоморфизме в случае общего положения поверхность  $\widehat{O}$  перейдет в поверхность вида  $w = z + yn_2 + \varphi(x, y, z, n_1, n_2)$ , где  $\varphi$  имеет второй порядок малости по переменным  $x, y, z$  поскольку  $\widehat{O}$  касается сечения  $n_1 = 0$  нормализованного усеченного ласточкиного хвоста при  $x = y = z = 0$ .

Эта нормальная форма задает множество  $\Sigma$ , состоящее из таких  $x, y, z$ , что семейство  $W = t^4 + xt^2 + n_2 t - z - yn_2 - \varphi$  функций от  $t$ ,  $n_2$  имеет критическую точку с нулевым критическим значением, являющуюся минимумом по  $t$ . Другими словами, пара  $(y, z)$  принадлежит множеству опорных прямых к линиям пересечения минимальной части ласточкина хвоста  $w = \min_{t, n_2} \{t^4 + xt^2 + b(x, y, n_2)t + c(x, y, n_2)\}$  с плоскостью  $x = \text{const}$  при некоторых гладких функциях  $b, c$ .

Приводя семейство  $W$  к нормальной форме контактными эквивалентностями (сохраняющими знак ненулевых значений), получаем, что поверхность  $\Sigma$  диффеоморфна ростку в начале координат графика функции  $z = \min_y (y^4 + xy^2)$ , представляющему собой  $C^1$  гладкое сопряжение двух поверхностей с общим краем (из списка нормальных форм выпуклых оболочек типичных кривых, тип 2).

Наконец, в последнем неустойчивом случае  $3_f$  в окрестности  $O$  при  $m$  близких к  $m_0$  граница  $H(r_m)$  задается три—касательной плоскостью  $\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{a}_3$  близкой к опорной соприкасающейся плоскости  $a_1 a_2 a_3$  при  $m = m_0$ . Таким образом, множество  $\text{Su}(r_m)$  является пересечением поверхности усеченного ласточкиного хвоста  $l_1 = (\text{Su}(r_m), a_1)$  и гладких поверхностей  $l_2 = (\gamma(r_m), a_2)$  и  $l_3 = (\gamma(r_m), a_3)$ . Эти гладкие  $l_2, l_3$  поверхности и  $\widehat{O}$  попарно трансверсальны при  $m = m_0$ . Они остаются трансверсальными и при близких  $m$ . В общем положении гладкое отображение  $\rho$ , сопоставляющее значению параметра  $m$  точку пересечения этих трех поверхностей, является невырожденным. Следовательно множество  $\Sigma$ , состоящее из точек  $m$ , при которых  $\rho(m)$  принадлежит усеченному ласточкиному

хвосту  $l_1$ , диффеоморфно самому этому множеству. Итак, получена нормальная форма пункта 4 списка нормальных форм особенностей выпуклых оболочек пространственных кривых. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 1 теперь представляет собой легкое упражнение, состоящее в применении преобразования Лежандра к плоским кривым и проверке следующих фактов.

Носитель опорной прямой к кривой из двух-параметрического семейства общего положения содержит не более трех точек при условии, что начало координат попадает на выпуклую оболочку этого носителя. Если начало координат попадает на одно- и двух- точечный носитель, то в общем положении выпуклая оболочка в окрестности нуля устойчивая.

В единственном неустойчивом случае трехточечного носителя преобразование Лежандра мультиростка кривой представляет собой три взаимно трансверсальные кривые, общим образом зависящих от параметров. Попадание нуля на выпуклую оболочку определяется конкуренцией двух точек пересечения этих прямых и аналогично случаю  $4_0$  определяет особенность  $y = |x|$ .

## Список литературы

- [1] Залгаллер В.А., Теория огибающих, М.: "Наука", 1975 г., 104 с.
- [2] Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М., Особенности дифференцируемых отображений, Изд.2 М.:МЦНМО, 2004 г., 672 с.
- [3] P.J.Giblin and V.M.Zakalyukin, Singularities of center symmetry sets, Proc. London Math. Soc. (3) 90 (2005) 132-166.
- [4] Гивенталь А. Б., Особые лагранжевы многообразия и их лагранжевы отображения. Современные достижения математики. Новейшие достижения. Т. 33. (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР). М., 1988, 55-112.
- [5] Закалюкин В. М., Особенности выпуклых оболочек гладких многообразий, "Функциональный анализ и его приложения", Т. 11 (1977), вып. 3, 76-77.
- [6] Закалюкин В. М., Курбацкий А. Н. Особенности огибающих семейств плоскостей в теории управления, Труды МИАН им В. А. Стеклова т. 262(2008), 73-86.

- [7] Sedykh V. D. Stabilization of singularities of convex hulls, Math. USSR sb. 63 499-505, 1989
- [8] Davydov A.A., Qualitative theory of control systems, Translations of Math. Monographs, AMS R.I., 1994, ISBN-0-8212-4590-X.
- [9] Щербак О.П., Проективно-двойственные пространственные кривые и лежандровы особенности, Тр. Тбилисского ун-та, 232-233 (1982), вып. 13-14, 280-336.
- [10] Казарян М.Э., Особенности границы фундаментальных систем, утолщения проективных кривых и клетки Шуберта, Итоги науки и техн. ВИНТИ Современ. пробл. матем. Новейшие достижения., 33 (1988), 215-234.
- [11] Goryunov V.V., Zakalyukin V.M., Simple symmetric matrix singularities and the subgroups of Weyl groups A,D, E, Moscow Math. Journal, 3(2003), n.2,507-532.
- [12] Горюнов В.В., Закалюкин В.М., Об устойчивости особых лежандровых подмногообразий, "Функц. анализ и его прилож.", т.38 (2004), вып. 4, 66-75.